МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный педагогический университет»
(ФГБОУ ВПО «ЧГПУ»)

В.А. Баранова

Материалы к лекциям и практическим занятиям по основаниям геометрии

Челябинск – 2013

Оглавление

Глава I. Краткий экскурс в историю обоснования геометрии

§1. У истоков научного знания (развитие геометрии до Евклида)

П.1. Догреческий период развития геометрии

Первоначальные геометрические знания вместе с понятием числа имеют свои истоки в ранних доисторических временах человеческой культуры, в практике первых измерений и счета, производившихся человеком. Сама геометрия возникла и развивалась под влиянием жизненных потребностей, когда с развитием земледелия были выработаны и осознаны первые правила измерения земельных участков для посева, правила нахождения объемов сосудов, строительства зданий. Период накопления геометрических знаний наблюдался у всех народов, но особенно бурно и плодотворно он протекал в Египте, Вавилоне, Индии, Китае. В Древнем Египте геометрические знания использовались при определении границ земельных участков, которые нарушались во время разливов Нила, при описании и предсказании небесных явлений, при наблюдениях за различными небесными телами. О значительности и разнообразии геометрических знаний свидетельствуют грандиозные храмы, дворцы и поражающие своими размерами пирамиды. В Древнем Вавилоне были построены знаменитые Висячие сады полумифической царицы Семирамиды, которые представляли собой сложнейшее сооружение и были признаны греками одним из семи чудес света. Известна также легенда о вавилонской башне, которая была грандиозным семиярусным сооружением высотой 90 метров, строительство которой невозможно без обширнейших геометрических знаний.

Писали вавилоняне на глиняных табличках; некоторые из них и сегодня хранятся в музеях мира. Лишь в 30-е годы XX века (через 30-40 веков) усилиями немецкого историка науки Отто Нейгебауэра были расшифрованы узоры вавилонской клинописи и вновь отрыты богатства древней вавилонской мудрости. Из них следует, что за 1000 лет до рождения Пифагора была известна теорема Пифагора, формула площади треугольника, объем правильной усеченной пирамиды вычислялся как $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$, площадь круга диаметра d – как $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$,что давало приближенное значение $\pi = 3{,}16$.

Однако науки как таковой эти древнейшие цивилизации не создали. В найденных текстах нет и намека на главный признак научного знания - доказательства. Геометрия того времени была механической смесью разрозненных догматически излагаемых правил, иллюстрируемых на частных примерах (“делай так”, “смотри”). Это была эпоха предварительного накопления геометрических сведений.

П.2. Возникновение аксиоматического метода изложения геометрии в Древней Греции

К VII веку до н.э. центр математической культуры переместился в Грецию. Здесь в это время бурно развивались экономика, наука, искусство, градостроительство, мореплавание. Жизнь ставила перед математикой более сложные задачи, требовались более точные измерения. Элементарные приемы непосредственного наблюдения, доказательства с помощью обращения к интуиции не могли решить стоящие перед геометрией сложные задачи. Поэтому наряду с интуицией греческие математики начинали использовать и логические рассуждения.

Развитие греческой математики до Евклида можно разделить на 3 периода в связи с передвижением центра развития науки и философии:

– первый период относится к VII-VI в.в. до н.э. и связан с ионийской школой в Малой Азии , основателем которой является Фалес из г. Милета;

– второй период (VI-V в.в. до н.э.) связан с именем Пифагора и его школой в Южной Италии;

– третий период (IV в. до н.э.) характеризуется перемещением центра развития в Афины. Наиболее выдающимися представителями этого периода являются философские школы Платóна и Аристотеля и математики Евдокс Книдский и Менехм.

Охарактеризуем вкратце каждый из периодов и важнейшие достижения в возникновении и развитии аксиоматического метода построения геометрии.

Фалес Милетский (ок. 625-547 г.г. до н.э.) вошел в историю науки как родоначальник античной философии и науки. Его причисляют к

числу семи знаменитых мудрецов древности. Согласно легенде Фалесу принадлежат первые доказательства геометрических теорем. Это, например:

1) теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника,

2) теорема о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим углам,

3) теорема о делении круга диаметром пополам,

4) теорема о равенстве вертикальных углов,

5) теорема об угле, опирающемся на диаметр,

6) теорема о пропорциональности отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми (теорема Фалеса).

Таким образом, было положено начало научному оформлению геометрического материала, приведению его в систему.

Затем наступила эра Пифагора (ок. 569-500 гг. до н.э.) – едва ли не самого популярного ученого за всю историю человечества. Он был не только ученым, основателем первой научной школы, но и “властителем дум, проповедником собственной “пифагорейской” этики, философом, которого по силе духа и силе воздействия можно сравнить разве что с его великими современниками: Конфуцием, Буддой и, возможно, Заратуштрой. Но в отличие от последних Пифагор создал самую яркую и самую современную “религию”: Пифагор воспитал в человечестве веру в могущество разума, убежденность в познаваемости природы, уверенность в том, что ключом к тайнам мироздания является математика” [18].

Все результаты, полученные Пифагором в математике, имеют непреходящее значение. Ему приписывают создание учения о числах: четных и нечетных, простых и составных, совершенных и фигурных; нахождение способов построения некоторых правильных многоугольников и многогранников; разработку учения об арифметических, геометрических, гармонических пропорциях; учение о подобиях; доказательство теоремы о равенстве 2d суммы внутренних углов треугольника; теоремы, носящей его имя и др.; открытие несоизмеримых отрезков.

Важнейшей научной заслугой Пифагора считается систематическое введение доказательства в математику, и прежде всего в геометрию. В школе Пифагора геометрия оформляется в самостоятельную научную дисциплину, она изучается систематически – как теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных рецептов по землемерию.

Это достижение греческих математиков имело важнейшее значение в развитии геометрии. Процесс логической обработки геометрического материала указывал на новый плодотворный и надежный путь открытия новых геометрических фактов – путь логического вывода. Все более и более укреплялось стремление довести анализ логических связей до самых основных посылок. Постепенно выделялись те немногие первоначальные предложения геометрии (аксиомы), которые единственно должны быть заимствованы из опыта и без логического доказательства приняты за основу геометрии. Было положено начало созданию дедуктивного или аксиоматического метода изложения геометрии.

Особой заслугой древнегреческих ученых является постановка задачи о построении системы геометрических знаний и решение ее в первом приближении. Постановку задачи о логическом обосновании геометрии обычно связывают с именем древнегреческого философа Платона (427-347 гг. до н.э.), который считал, что во всякой отрасли знаний необходимо выделять основные положения, выводы из которых должны составить содержание соответствующей теоретической или практической дисциплины. В ходе научного образования на первое место Платон ставит математические дисциплины – прежде всего арифметику, а затем тесно связанную с ней геометрию; он мотивирует это тем, что геометрия, с одной стороны, особенно приложима к военному делу, а с другой, чрезвычайно способствует развитию мышления. Платон, проводивший беседы со своими учениками в роще Академа (Академ – древнегреческий мифологический герой, которого, по преданию, похоронили в священной роще недалеко от Афин), откуда и пошло название "академия", одним из девизов своей школы провозгласил: "Не знающие геометрию не допускаются". Естественно, это требование стимулировало как изучение геометрии, так и ее построение по той схеме, которая намечалась для всякой дисциплины. Платон, таким образом, способствовал логическому построению геометрии; в этом заключается его заслуга в деле обоснования геометрии. Но общий замысел логического построения науки у Платона четко не сформулирован.

Четкая формулировка логических принципов построения математической науки была дана великим учеником Платона – Аристотелем (384-322 гг. до н.э.). По мысли Аристотеля наука представляет собой совокупность предложений, относящихся к этой науке, расположенных в определенном порядке. Эти предложения делятся на основные, или исходные, и выводы из них – теоремы. Понятия, входящие в эти предложения, также делятся на основные понятия и выводные. Основные предложения должны быть непосредственно очевидными и не требующими доказательств. Основные понятия также должны быть непосредственно понятными и не нуждающимися в определениях. Все остальные предложения науки должны быть доказаны чисто логическим путем без ссылок на наглядность и очевидность.

Аристотель разработал также теорию логического вывода, формы и методы доказательства: анализ, синтез, доказательство от противного. Он считается создателем логики как науки.

Исследования Аристотеля сыграли основополагающую роль в деле обоснования геометрии.

Большой интерес для развития геометрии представляют труды греческого ученого Евдокса Книдского (408-355 гг. до н.э.) – современника и друга Платона. В связи с открытием несоизмеримых величин и отсутствием понятия иррационального числа Евдокс построил теорию отношений величин. У него отношения несоизмеримых величин определяются по приближению рациональными числами, т.е. имеет место идея, положенная Дедекиндом в основу определения иррационального числа в 1872 г.

Евдоксом же был разработан так называемый метод "исчерпывания", который позволял путем рассуждения от противного доказывать предложения, связанные с измерением площади круга, объема пирамиды, конуса, шара. Он играл в этих вопросах ту же роль, которую играет в наше время метод пределов. Работы Евдокса положили конец первому кризису основ математики, наступившему в V в. до н.э. в связи с открытием несоизмеримых величин. Его теория и в настоящее время является образцом строго логического построения. Отметим, что ученик Евдокса Менехм открыл конические сечения и начал развивать их теорию.

Итак, к III веку до н.э. греки обладали большим запасом геометрических сведений, методами их доказательств, а также схемой логического построения науки. Поэтому естественно, что возникают попытки собрать накопленный геометрический материал и изложить его в логически связанном порядке. Такую задачу, по-видимому, пытались решить многие математики (Гиппократ, Февдий и др.),но ни одно из таких сочинений до нас не дошло, так как они утратили свое значение после появления замечательного сочинения Евклида под названием "Начала".

§2. "Начала" Евклида

П.1. Сведения о личности Евклида

Биографические сведения о жизни и деятельности этого поразительного человека крайне ограничены. Известно, что он родом из Афин, где и получил образование у учеников Платона. Из предисловия греческого философа и геометра Прокла (V в. н.э.) к его комментариям к первой книге "Начал" Евклида следует, что Евклид был современником царя Птоломея I, который царствовал с 306 по 283 год до н.э. Расцвет деятельности Евклида приходился на Александрийский период развития эллинской культуры и науки, когда после смерти Александра Македонского и распада его огромной империи на первое место по своему экономическому, политическому и культурному значению выдвинулся город Александрия, новопостроенная столица Египта.

Евклид является центральной фигурой этого периода, а вместе с тем и всей древнегреческой математической науки. Он преподавал математику в Александрии и был основателем математического отделения музея, учрежденного Птоломеем. Рассказывают, что Птоломей однажды спросил Евклида, есть ли к геометрии путь короче того, который проложен в "Началах". Евклид гордо ответил, что к геометрии нет особого пути для царей.

Достоверно известно, что Евклид, кроме "Начал", составил еще не менее восьми сочинений. Из них сохранились четыре: "Данные"(Data) (с описанием условий, при которых какую-либо фигуру можно считать данной); "Оптика" (Optica) (содержащая учение о перспективе); "Феномены" (Phaenomena) (сочинение, по существу, "астрономическое", но содержит 18 предложений сферической геометрии); "О делениях " (De divisionibus) (содержится ряд задач на построение, сводящихся к делению фигур). Но, конечно, главным его произведением являются "Начала" (латинизированное название – "элементы").

П.2. Структура и содержание "Начал"

"Начала" состоят из тринадцати книг, которые представляют собой, по существу, главы, посвященные отдельным вопросам математики. Из них книги I-VI посвящены планиметрии, VII-IX – арифметике, X – несоизмеримым величинам, XI-XIII – стереометрии.

В **книге I** даются основные определения, аксиомы и постулаты и излагается в виде 48 предложений учение об отрезках, о сторонах и углах треугольника, о построении треугольников, о перпендикулярных и параллельных прямых, о параллелограммах, о площадях треугольников и параллелограммов, теорема Пифагора.

Книга II опирается на результаты книги I и посвящена вопросам планиметрии и геометрической алгебры. Например, в ней выводится геометрически тождество $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, есть способы геометрического решения квадратных уравнений.

В **книге III** излагается учение об окружности и круге, о секущих и касательных и об углах, образуемых ими.

Книга IV посвящена учению о вписанных и описанных многоугольниках, о построении правильных 4,5,6 и 15-угольников.

Книга V содержит учение Евдокса о пропорциях, что дает возможность работать с несоизмеримыми величинами.

В **книге VI** даются приложения учения о пропорциях, излагается учение о подобных фигурах и расширяется область геометрической алгебры.

Книги VII-IX посвящены арифметике, теории чисел. В частности, излагаются знаменитый алгоритм нахождения НОД двух целых чисел, доказательство бесконечности множества простых чисел, теорема о четных совершенных числах.

В **книге X** Евклид возвращается к несоизмеримым величинам, излагает метод исчерпывания Евдокса, изучает вопросы, связанные с решением квадратных уравнений. Весь этот материал (115 предложений) является вспомогательным для стереометрии.

Книги XI-XIII посвящены стереометрии. В них излагаются начала стереометрии, определяются отношения площадей кругов, объемов пирамид и других тел, с помощью метода исчерпывания Евдокса, изучаются правильные многоугольники и многогранники.

Отметим, что во многих изданиях "Начал" приводятся еще две книги XIV и XV, которые приписывались Евклиду, но еще в XV веке было установлено, что у них другие авторы.

Каждая книга "Начал" начинается определением всех терминов, которые в ней в первый раз встречаются. Книге I предпосланы также аксиомы и постулаты. За ними следуют теоремы. Изложение всех предложений строится по единообразной схеме:

1) формулировка предложения;
2) повторное её изложение с указанием применительно к чертежу того, что дано и что требуется доказать или сделать;

3) доказательство, опирающееся на предыдущие предложения, определения, аксиомы и постулаты;

4) заключение, где повторяется содержание предложения, теперь уже доказанного.

Изложение доказательств отличается подробностью, чтобы у читателя не осталось никаких сомнений. Материал излагается догматически, не устанавливается связь между отдельными предложениями, не указывается на их значение.

П.3. Исходные положения “Начал”

Остановимся несколько подробнее на первой книге “Начал”. Начинается она с 23 *определений*. Вот некоторые из них.

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Концы линии суть точки.
4. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности – линии.
7. Плоскость есть такая поверхность, которая одинаково расположена по отношению к прямым на ней.
8. Плоский угол есть наклонение друг к другу двух встречающихся линий в плоскости, но не расположенных на одной прямой.
9. Когда линии, образующие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.

Определения 10,11,12 разъясняют понятия прямого, тупого, острого углов.

13. Граница есть край (конец) чего-нибудь.
14. Фигура есть то, что окаймляется одной или несколькими границами.

Определениями 15-22 вводятся понятия: круг, центр круга, диаметр, полукруг, многоугольник, равносторонний и равнобедренный треугольник, прямоугольный треугольник, прямоугольник, квадрат, ромб, параллелограмм.

23. Параллельные прямые – это прямые, которые находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются.

После определений помещены пять *постулатов* (постулаты в “Началах” – это, по-видимому, требования, которые должно принять, приступая к изучению геометрии, это её исходные допущения).

Требуется:

1. чтобы от каждой точки к каждой другой точке можно было провести прямую линию;
2. и чтобы ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;
3. и чтобы вокруг любого центра всяким раствором можно было провести окружность;
4. и чтобы все прямые углы были друг другу равны;
5. чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, где эта сумма меньше двух прямых.

За постулатами следуют 9 *аксиом* (аксиомы у Евклида – это, по-видимому, истины, которые признаются всяким человеком, общие достояния ума).

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны.
4. Если к неравным прибавляются равные, то и целые будут не равны.
5. И если удвоим равные, то получим равные.
6. И половины равных равны между собой.
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. И целое больше части.
9. И две прямые не содержат пространства.

Исходя из перечисленных выше основных положений, Евклид доказывает 464 предложения, объединив в одно целое всё то из элементов геометрии, что было сделано предшественниками в этой области. Весь этот материал приведен Евклидом в стройную логическую систему и строго распределен по роду изучаемых вопросов, а также в соответствии с принципами отделения геометрии от арифметики, планиметрии от стереометрии.

П.4. Некоторые недостатки “Начал” с современной точки зрения

Перечисление понятий и аксиом, достаточных для строгого логического доказательства всех последующих теорем, называют (аксиоматическим) *обоснованием геометрии.* Задача обоснования геометрии четко поставлена Евклидом и мастерски решена им с той степенью точности, какая была доступна в те древние времена. Более того, в дальнейшем на протяжении многих веков строгость евклидовых доказательств признавалась образцом для подражания. Однако, если рассматривать изложение "Начал" с современной точки зрения, то приходится признавать, что оно во многом неудовлетворительно.

Недостатки определений

1. Отсутствует точный перечень основных понятий: Евклид пытается дать определения всем геометрическим понятиям, в частности, понятиям "точка", "прямая", "плоскость".

2. Формулировки определений 1,2,5 оперируют такими сложными понятиями, которые сами должны быть определены ("граница", "длина", "часть"), но эти определения отсутствуют.

3. В определениях 1 и 3 точка определяется двумя способами, а в определениях 2 и 6 – линия, однако эквивалентность двух различных определений одного понятия не доказывается.

4. Имеются "туманные" определения: например, определению 4 при определенном толковании удовлетворяют прямая и окружность, а определению 7 – плоскость, цилиндр, сфера.

5. Фактически ни одного из определений 1-8,13,14 Евклид не использует в доказательствах теорем, так как они не обладают математическим содержанием, не научны и могут быть изъяты без всякого ущерба для последующих рассуждений.

Недостатки постулатов и аксиом Евклида

Как известно, Евклид пытался развить всю геометрическую систему в схеме Аристотеля строго логическим путем, без ссылок на наглядность и очевидность, и не вводя скрытым образом других аксиом и постулатов, которых нет в выше приведенном списке. Но именно этот принцип у Евклида не выдержан.

1. В геометрических рассуждениях Евклид оперирует такими понятиями, которые выражаются словами "точка лежит между двумя другими", две точки "лежат по одну сторону от прямой" или "по разные стороны от прямой". Хотя эти понятия непосредственно ясны, но для логического построения геометрии необходимо иметь точные описания в аксиомах свойств этих понятий. Эти аксиомы называют аксиомами порядка, у Евклида их нет.

2. По смыслу аксиомы 7 равенство геометрических фигур у Евклида определяется с помощью наложения, т.е. движения, но само понятие движения не определено и свойства его ни в каких аксиомах не перечислены. Итак, аксиомы движения также отсутствуют.

3. При рассмотрении двух окружностей, из которых одна проходит через внутреннюю точку другой, Евклид безоговорочно предполагает существование точек пересечения этих окружностей. Но в системе постулатов Евклида нет таких, которые утверждали бы существование точек пересечения прямой с окружностью или двух окружностей. Для этого необходима аксиома непрерывности.

4. Непонятно, чем отличаются аксиомы и постулаты. С современной точки зрения, различия между постулатами и аксиомами нет.

Как видим, "Начала" Евклида не содержат безукоризненного логического обоснования геометрии, он не отрывается от наглядных представлений, поэтому можно сказать, что рассуждения Евклида – это смесь логики и интуиции.

П.5. Значение "Начал" Евклида

Справедливости ради укажем, что выше отмеченные недостатки в работе Евклида были в основном замечены критической мыслью лишь в XIX веке. Поэтому, учитывая состояние науки того времени, мы должны признать это произведение древности замечательным по своей продуманности, выдержанности и строгости.

"Начала" Евклида сыграли огромную роль в истории математики и всей человеческой культуры. Во-первых, в них приведен в стройную логическую систему огромный материал, накопленный трудами нескольких поколений древнегреческих математиков и философов, и составляющий основу геометрии до настоящего времени. Во-вторых, "Начала" послужили источником научных идей, стимулирующим к дальнейшему развитию творческой математической мысли. По этой книге изучали математику Коперник, Галилей, Декарт, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Ломоносов, Лобачевский и другие корифеи науки. "Начала" переведены на все основные языки мира, после 1482 года они выдержали около 500 изданий. Это беспримерный исторический факт, что учебник древности оставался в этой роли в течение тысячелетий вплоть до конца XIX в. Эйнштейн так писал о "Началах" Евклида: "Это удивительное произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для творческих исследований, кто в молодости не восхищался этим творением."

§ 3. Проблема V постулата Евклида

П.1. Совершенствование “Начал” Евклида его последователями

“Начала” Евклида на протяжении более 2000 лет подвергались тщательному изучению. Имеется огромная литература, содержащая комментарии к “Началам”. Уже древние комментаторы заметили некоторые из недостатков и предпринимали попытки устранить их. Улучшение “Начал” Евклида шло по двум направлениям – дополнение недостающих постулатов и доказательство некоторых постулатов.

Существенный вклад в дело дополнения системы аксиом Евклида внес Архимед (287-212 гг. до н.э.) – великий математик, физик, инженер древности, живший после Евклида. В сочинении “О шаре и цилиндре” он последовательно с большой строгостью развил теорию измерения площадей и объемов, для чего вынужден был дополнить аксиомы Евклида новой аксиомой, которая в его сочинении формулируется так: Из двух неравных линий, поверхностей или тел бóльшая окажется меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз. Для отрезков её можно переформулировать так: Каковы бы ни были два отрезка, меньший из них, будучи повторен достаточное число раз, превзойдет больший. В этом виде в литературе эта аксиома называется аксиомой Архимеда.

И после Архимеда не прекращались попытки уточнить основные положения геометрии. Но необходимость пополнения списка аксиом усматривали очень немногие геометры. Наоборот, в большинстве сочинений, связанных с “Началами”, ставилась задача уменьшить число положений геометрии, принимаемых без доказательства. В этом направлении без труда был получен следующий результат: IV постулат является лишним, так как равенство прямых углов можно доказать как теорему.

П.2. V постулат Евклида

Особое внимание критиковавших “Начала” Евклида привлекал к себе его V постулат. Это объясняется рядом глубоких причин.

1. Утверждение о пересечении двух прямых, содержащееся в V постулате, не так очевидно, как утверждения других постулатов, и его непосредственная проверка весьма затруднительна, если сумма односторонних углов меньше двух прямых на столь малый угол, что для нашего глаза не ощутим и недоступен для измеряющих его инструментов.

2. Формулировка V постулата в отличие от других носит довольно сложный и громоздкий характер.

3. На первый взгляд, возникает подозрение, что V постулат скорее утверждение, нежели аксиома, и нельзя ли его вывести из других постулатов и аксиом.

Попытки доказательства V постулата были предприняты многими математиками. Есть сведения, что этим занимался уже Архимед, а, может, и сам Евклид. Стремлению доказать V постулат способствовало и то особое положение, которое V постулат занимает в системе постулатов Евклида. В книге I “Начал” Евклид доказывает 48 предложений, из них 28 доказываются без использования V постулата, хотя все другие при этом используются. Создается впечатление, что Евклид хотел как можно дольше не использовать V постулат, обойтись без него. Впервые он ссылается на V постулат при доказательстве 29 предложения, хотя некоторые предшествующие предложения проще доказываются с помощью V постулата.

“Начала” Евклида V постулатом как бы разбиваются на две части. Первая – совокупность предложений, не зависящих от V постулата. Эта часть называется *абсолютной геометрией.* Она включает 28 предложений Евклида. Вторая – *собственно евклидова геометрия*, содержит предложения, доказательства которых опираются на V постулат или его следствия.

Именно в том, что Евклид поместил V постулат в число постулатов “Начал”, комментаторы Евклида видели чуть ли не единственное “темное пятно”. Поэтому усилия многих поколений математиков были направлены на то, чтобы очистить Евклида от этого “пятна”.

Возникла *проблема V постулата*: доказать V постулат как логическое следствие из предложений абсолютной геометрии, не вводя новых постулатов. Несмотря на кажущуюся простоту, проблема V постулата содержала огромные трудности логического характера, так как она была связана с основаниями геометрической науки. Поэтому почти до конца XIX века это была одна из самых популярных проблем геометрии. Известно более 250 работ, посвященных этой проблеме, было предложено множество различных доказательств, часто, на первый взгляд, совершенно логически безупречных. Но, как выяснилось впоследствии, все они были ошибочны, так как обычно авторы использовали какое-нибудь геометрическое утверждение, которое казалось столь наглядно очевидным, что проскальзывало в рассуждениях незаметно для самого автора. Иногда это делалось сознательно. Но именно это утверждение оказывалось эквивалентным V постулату, т.е. он доказывался, по существу, с помощью того же V постулата.

(Уточним понятие эквивалентности предложений. Пусть некоторая теория основана на системе аксиом $\sum=\{A_1,...,A_m\}$, M и N-предложения этой теории, связанные между собой так, что если мы к системе аксиом $\sum$ добавим одно из предложений M или N, то из системы $\{A_1, ..., A_m, M\}$ можно вывести как теорему предложение N, а из системы $\{A_1, ..., A_m, N\}$ – предложение M. В таком случае говорят, что предложения M и N эквивалентны относительно основной системы аксиом $\sum$.)

Приведем в пример доказательство Прокла V постулата, которое является одним из самых простых и остроумных. Пусть прямые a и b пересечены третьей прямой c и при этом $\alpha+\beta<2d$ в полуплоскости П с границей c. Докажем, что верен V постулат.

Доказательство.

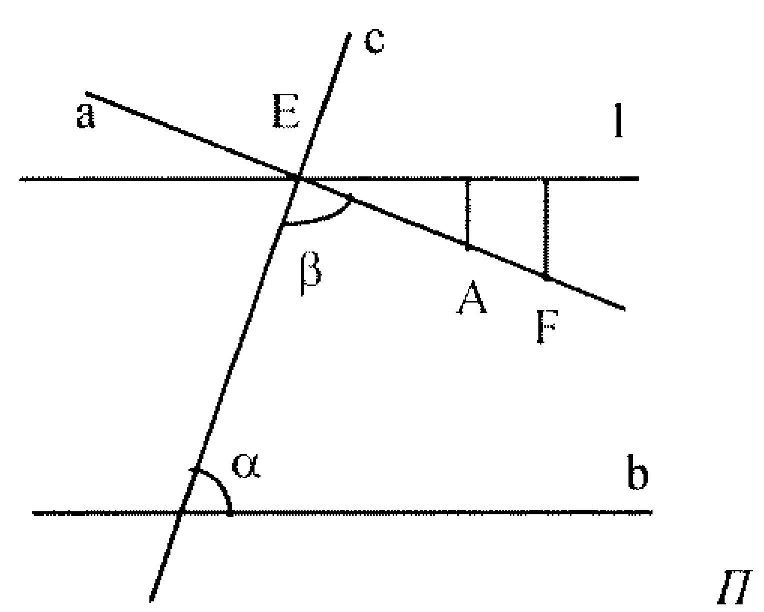


Рис.1

□Пусть $a \cap c=E$. Через E проведем прямую $l \| b$. Возьмем точку A на луче EF прямой a, который лежит в полуплоскости $П$, и будем двигать её по лучу EF. При этом расстояние от точки A до прямой l неограниченно увеличивается и естественно в конце концов станет больше, чем расстояние между параллельными прямыми l и b, которое конечно. Поэтому обязательно в какой-то момент точка A попадает на прямую b, т.е. прямые a и b пересекутся в полуплоскости $П$.■

Здесь Прокл использует такое само собой разумеющееся предложение о том, что расстояние между двумя параллельными прямыми конечно, которое эквивалентно V постулату.

П.3. Предложения, эквивалентные V постулату Евклида

Как уже отмечалось, многие геометры прошлых веков обратили внимание на сложность формулировки V постулата и стремились заменить его каким-либо другим предложением, ему равносильным, но более очевидным и простым по формулировке. Было предложено и выявлено в процессе исследований по проблеме V постулата множество предложений, эквивалентных V постулату, но наиболее популярным оказалось утверждение, предложенное в 1795 году английским ученым Джоном Плéйфером и называемое обычно аксиомой параллельных. Она кладется в основу теории параллельных в современной школьной практике. Эта аксиома утверждает:

«*Через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой*».

Эта аксиома имеет короткую и ясную формулировку в отличие от V постулата Евклида, тем самым вопрос о громоздкости снимается.

Приведем ещё несколько предложений, эквивалентных V постулату относительно полной системы аксиом абсолютной геометрии. Это может быть система аксиом школьного курса геометрии [4] без аксиомы параллельных.

1. Геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой и расположенных по одну сторону от неё, есть прямая (Посидоний, I в. до н.э.).
2. Сумма внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми при пересечении их третьей прямой, равна 2d (Птолемей, II в. н.э.).
3. Расстояние между параллельными прямыми конечно (Прокл,V в. н.э.).
4. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую (Прокл).
5. Если из двух прямых r и s одна перпендикулярна, а другая наклонна к секущей AB, то отрезки перпендикуляров, опущенных из точек s на r, меньше AB с той стороны, с которой AB образует с секущей s острый угол (Насир-Эддин ат Туси, XIII в.).
6. Перпендикуляр и наклонная к одной и той же прямой пересекаются (Туси, Лежандр(XVIII в.)).
7. Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым (Туси, Саккери, Лежандр).
8. Для каждого треугольника существует подобный ему треугольник при любом отношении подобия (Валлис, XVII в.).
9. Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда принадлежат некоторой окружности (Ф.Бояи, XIX в.).
10. Через точку, лежащую вне прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной (Плейфер, XVIII в.).
11. Через всякую точку, лежащую внутри угла, можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла (Лежандр, XVIII в.).
12. В любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

13.Теорема Пифагора.

14.Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой соответственные углы равны.

15.Если прямые параллельны, то при пересечении их третьей прямой накрест лежащие углы равны.

16.Сторона вписанного в круг правильного шестиугольника равна радиусу этого круга.

Любое из этих предложений можно положить в основу теории параллельных вместо V постулата, тогда он может быть доказан как теорема.

Докажем эквивалентность V постулата и аксиомы параллельности Плейфера.

Теорема 1. Аксиома параллельности Плейфера и V постулат Евклида эквивалентны относительно системы аксиом абсолютной геометрии.

I. Дано: через точку вне прямой можно провести и единственную прямую, параллельную данной.

Доказать: V постулат.

Доказательство.

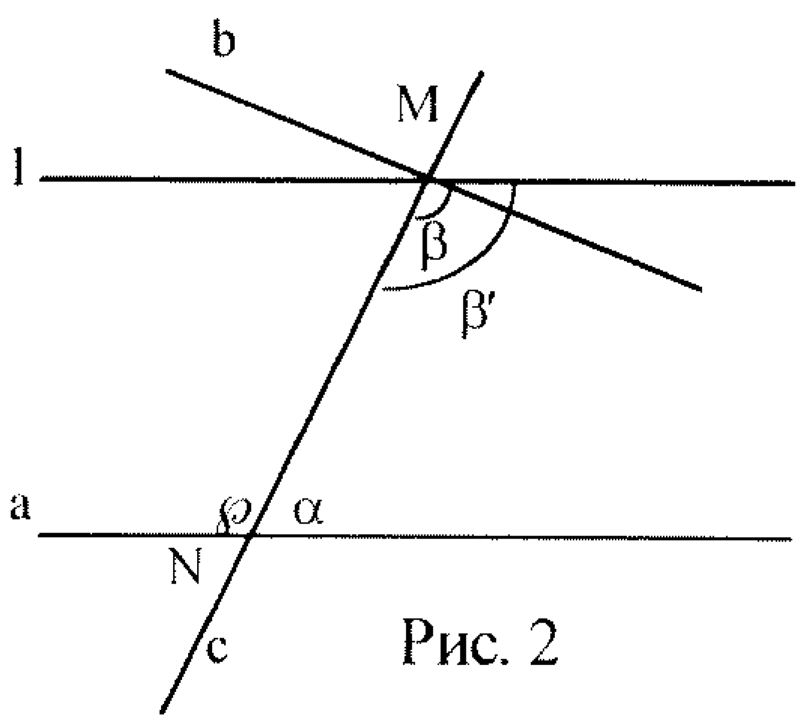


Рис. 2

□Пусть прямые a и b при пересечении с прямой c образуют с правой стороны от c внутренние односторонние углы α и β, причем $\alpha+\beta<2d$ (рис.2). Через точку $M=c\cap b$ проведем ещё одну прямую l так, чтобы для прямых l и a сумма внутренних односторонних углов α и β' равнялась 2d, $\alpha+\beta'=2d$. Тогда $\beta'>\beta$ и, следовательно, $l\neq b$. Так как $\alpha+\beta'=2d$, то в силу теоремы абсолютной геометрии $l\parallel a$. Но так как по условию l – единственная прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой a, то $b\cap a\neq\varnothing$.

Выясним, с какой стороны от прямой c лежит точка пересечения $b\cap a=S$. Предположим, что S лежит с левой стороны от прямой c. Обозначим через $\wp$ угол, смежный с углом α и накрест лежащий с углом β', тогда из соотношений $\alpha+\beta'=2d$, $\alpha+\beta<2d$, $\alpha+\wp=2d$ получим $\wp=\beta'>\beta$. Но β будет внешним углом треугольника MNS, а $\wp=\beta'$ - внутренним, т.е. получаем противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника абсолютной геометрии. Таким образом, S – точка той полуплоскости, в которой лежат углы α и β.■

II. Дано: имеет место V постулат.

Доказать: через каждую точку вне прямой проходит одна прямая, параллельная данной.

Доказательство.

□ Пусть дана прямая a и не лежащая на ней точка M. Проведем прямую $MN\perp a$, $N\in a$ (рис.3) и через точку M проведем прямую $b\perp MN$. Тогда $a\parallel b$, как два перпендикуляра к одной прямой, что является фактом абсолютной геометрии. Проведем через точку M ещё одну прямую $c\neq b$. Тогда c не перпендикулярна MN , поэтому c какой-нибудь стороны от MN образует с ней острый угол α.

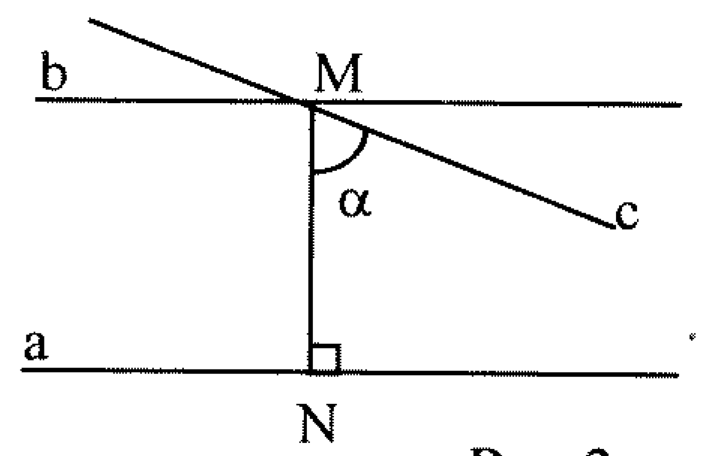


Рис.3

Таким образом, прямые a и c при пересечении их прямой MN образуют с одной её стороны внутренние односторонние углы, сумма которых <2d. В силу V постулата такие прямые пересекаются, т.е. c и a пересекаются и c не параллельна a. Значит, прямая b есть единственная прямая, проходящая через точку M, параллельная прямой a, что и требовалось доказать ■.

Доказательство эквивалентности V постулата и предложений Валлиса и Ф. Бояи можно найти в [40] или [24].

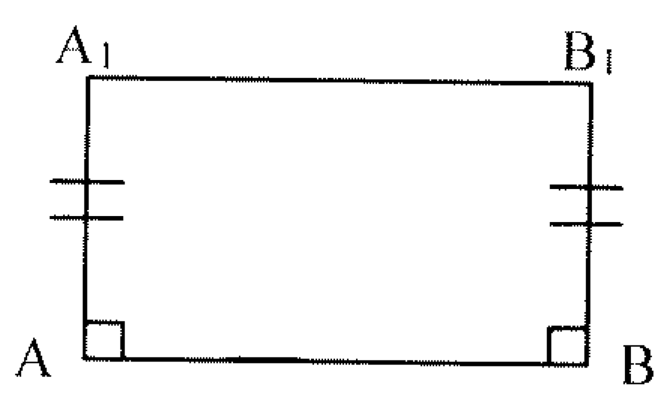
§4. Восемнадцатый век. Исследования Д. Саккери, И. Ламберта, А. Лежандра

В XVIII столетии произошло существенное продвижение в постановке вопроса о методах доказательства V постулата. Этот прогресс связан с именами итальянского ученого Джованни Джироламо Саккéри (1667-1733), немецкого математика Иоганна Генриха Лáмберта(1728-1777) и французского математика Адриена Мари Лежáндра (1752-1833). Основная идея их исследований — *доказать V постулат методом от противного*. Эта идея оказалась такой плодотворной, что подвела к окончательному решению проблемы V постулата в XIX веке.

П.1. Д. Саккери

Д. Саккери – итальянский математик и логик. Преподавал теологию и математику в иезуитских колледжах Турина, Павии, Милана.

Он решил подойти к проблеме V постулата следующим образом. Пусть из концов отрезка AB проведены два отрезка AA_1 и BB_1, перпендикулярные AB, причем $AA_1=BB_1$. Эта фигура в честь итальянского математика была названа четырехугольником Саккери. Без V постулата он доказал, что $\angle A_1=\angle B_1$. Отсюда не следует, естественно, что эти углы прямые.



$\angle A=\angle B$, $AA_1=BB_1$

Рис.4

Относительно углов A_1 и B_1 можно сделать три предположения:

1) оба угла острые (гипотеза острого угла),

2) оба угла тупые (гипотеза тупого угла),

3) оба угла прямые (гипотеза прямого угла).

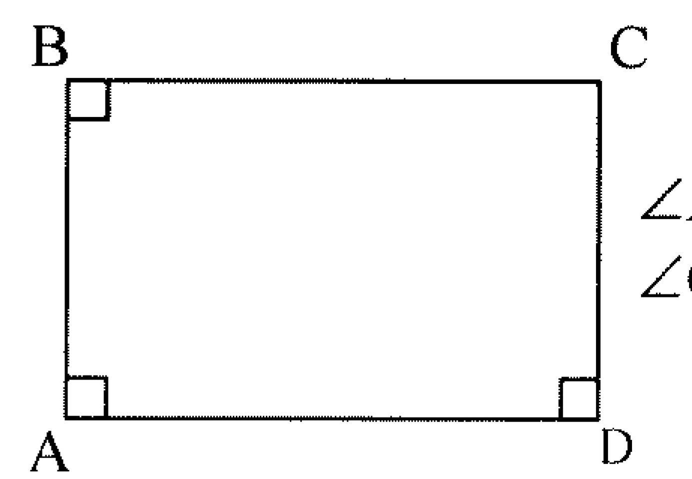
Саккери установил прежде всего, что гипотеза прямого угла эквивалентна V постулату. Ему удалось доказать, что гипотеза тупого угла невозможна в абсолютной геометрии. Остаётся опровергнуть гипотезу острого угла, и V постулат будет доказан! Саккери допускает, что верна гипотеза острого угла. Если V постулат – следствие из аксиом абсолютной геометрии, то и эквивалентная ему гипотеза прямо-

го угла тоже следствие из них. Тогда рано или поздно это положение должно привести к противоречию. Этим и будет доказан V постулат. На этом пути Саккери открывает много интересных теорем о расположении прямых линий, которые были парадоксальными с точки зрения обычной геометрии. В частности, он доказал, что множество точек, равноудаленных от прямой, есть кривая линия. Будучи уверенным, что никакой другой геометрии, кроме Евклидовой, нет, Саккери, не получив логических противоречий, посчитал, что гипотеза острого угла противоречит природе прямой линии. Свои исследования Саккери опубликовал в 1773 г. в книге “Евклид, очищенный от всяких пятен, или опыт, устанавливающий самые первые принципы универсальной геометрии”.

Заслуга Саккери в истории развития геометрии в том, что он первым пошел по новому пути, который привел к решению проблемы V постулата. Воистину “тысячи путей ведут к заблуждению, к истине – только один” (Ж.Ж. Руссо).

П.2. И. Ламберт

И. Ламберт – выдающийся самоучка, сын бедного ремесленника, ставший впоследствии членом Берлинской академии наук. Он занимался также астрономией, геодезией и фотометрией. В математике прославился доказательством иррациональности числа π и исследованиями по теории параллельных. Для изучения Ламберт взял четырёхугольник с тремя прямыми углами.



$\angle A=\angle B=\angle D=d$,
$\angle C=?$

Рис. 5

Относительно четвертого угла он высказывает три гипотезы:

1) $\angle C$ - острый (гипотеза острого угла),

2) $\angle C$ - тупой (гипотеза тупого угла),

3) $\angle C$ - прямой (гипотеза прямого угла).

Как и Саккери, он доказывает, что гипотеза прямого угла равносильна V постулату, а гипотеза тупого угла не может существовать в абсолютной геометрии, но при этом указывает, что гипотеза тупого угла оправдывается на сфере, если в качестве прямых брать её большие окружности. Следствия из гипотезы острого угла он развил дальше Саккери и был настолько поражен стройностью системы следствий из гипотезы острого угла, что выражал желание, чтобы она существовала. Ламберт высказал правильное предположение, что эта гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. В отличие от Саккери, он не впал в заблуждение и не признал достаточным ни одно из доказательств, опровергающих гипотезу острого угла. Среди математиков XVIII века Ламберт стоял ближе всех к правильному решению проблемы V постулата.

П.3. А. Лежандр

XIX век начинается замечательными исследованиями Лежандра по теории параллельных. А. Лежандр был, возможно, наиболее крупным математиком среди тех, кто попал под гипноз V постулата. Он был профессором Политехнической школы в Париже (одного из самых известных высших учебных заведений Франции), членом Парижской академии наук. Его основные труды по математическому анализу, теории чисел и геодезии, им сделан крупный вклад во многие области математики и во многих вопросах он был предшественником К. Гаусса.

В 1794 г. Лежандр опубликовал учебное руководство по современному курсу элементарной геометрии, которое он по традиции назвал ‚Началами геометрии". Это была очень глубокая переработка книги Евклида, написанная живым языком, с использованием новых математических результатов, полученных к тому времени. Эта книга оказала в своё время решающее значение на преподавание геометрии не только во Франции, но и в других странах. Ещё при жизни автора она выдержала 14 изданий, каждое из них усовершенствовалось. Из всех учебников элементарной геометрии книга Лежандра после "Начал" Евклида приобрела наибольшее распространение. Он уделяет много внимания изложению основ геометрии и особенно теории параллельных.

В качестве исходной фигуры Лежандр берет треугольник и рассматривает проблему параллельных с точки зрения вопроса о сумме Σ углов треугольника. Снова ставятся три гипотезы: 1)$\Sigma<2d$, 2)$\Sigma=2d$, 3)$\Sigma>2d$.

Приведем остроумное доказательство Лежандра, опровергающее третью гипотезу.

Теорема 2. Сумма углов треугольника не может быть больше 2d.

Доказательство (от противного).

□ Допустим, что в треугольнике $A_1B_1A_2$ сумма углов >2d.Пусть $\angle A_1=\alpha$, $\angle B_1=\beta$, $\angle C_1=\delta$, тогда $\alpha+\beta+\delta>2d$. Построим цепочку равных треугольников на прямой, получаемой продолжением стороны A_1A_2 (рис.6).

Соединим вершины B_1 с B_2 , B_2 с B_3 и т.д. Рассмотрим треугольники $A_2B_1B_2$ и $A_3B_2B_3$. Они равны по первому признаку, так как $A_2B_1=A_3B_2$, $A_3B_3=A_2B_2$ и $\angle B_1A_2B_2=\angle B_2A_3B_3=2d-\alpha-\delta$. Аналогично получаем, что равны между собой треугольники $A_iB_{i-1}B_i$ для всех $i \geq 2$, откуда следует равенство отрезков B_iB_{i+1} для всех i=1,2,... Мы имеем $\alpha+\beta'+\delta=2d$ и $\alpha+\beta+\delta>2d$, т.е. $\beta>\beta'$. Рассмотрим треугольники $A_1B_1A_2$ и $B_1A_2B_2$. В них $\beta>\beta'$, а стороны, содержащие эти углы, соответственно равны, тогда по теореме абсолютной геометрии $A_1A_2>B_1B_2$.

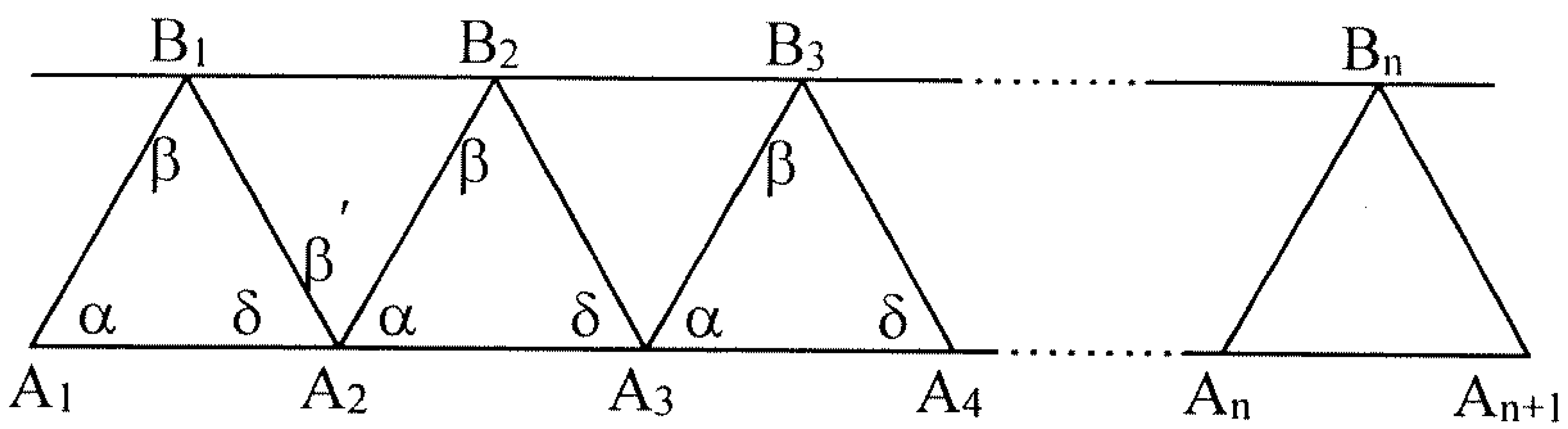


Рис. 6

Рассмотрим ломаную $A_1B_1B_2...B_nA_{n+1}$ и отрезок $A_1A_{n+1}=$ $=A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_{n+1}$. Для длин имеем $A_1B_1...B_nA_{n+1}>A_1A_{n+1}=nA_1A_2$. С другой стороны, длины $A_1B_1...B_nA_{n+1}=A_1B_1+(n-1)B_1B_2+B_nA_{n+1}=A_1B_1+(n-1)B_1B_2+B_1A_2>nA_1A_2$, откуда следует, что $n(A_1A_2-B_1B_2)<A_1B_1+B_1A_2-B_1B_2$.

Справа стоит длина фиксированного отрезка, т.е. фиксированное число, а слева, так как $A_1A_2>B_1B_2$, получаем длину ненулевого отрезка или ненулевое число, умноженное на любое натуральное n, т.е. отрезок откладывается сколь угодно раз. Получаем противоречие с аксиомой Архимеда. Следовательно, $\alpha+\beta+\delta \leq 2d$, что и требовалось доказать ■.

Дальнейшие рассуждения показывают, что вторая гипотеза Лежандра (Σ=d) эквивалентна V постулату.

Теорема 3. V постулат и предложение “сумма углов треугольника равна 2d” эквивалентны относительно системы аксиом абсолютной геометрии.

I. В предложении 32 из книги I “Начал” Евклида доказано, что при выполнении V постулата сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. Кроме того, доказательство этой теоремы известно нам из школьного учебника “Геометрия 7-9” Атанасяна Л.С. и др., где в процессе доказательства используется не V постулат, а его эквивалент – аксиома Плейфера ([7],с.66).

II. Приведем теперь доказательство Лежандра обратной теоремы: если сумма углов треугольника равна 2d, то выполняется V постулат.

Доказательство.

□ Пусть прямая a является перпендикуляром, а прямая b - наклонной к AB, причем $\angle A=\beta$ острый.

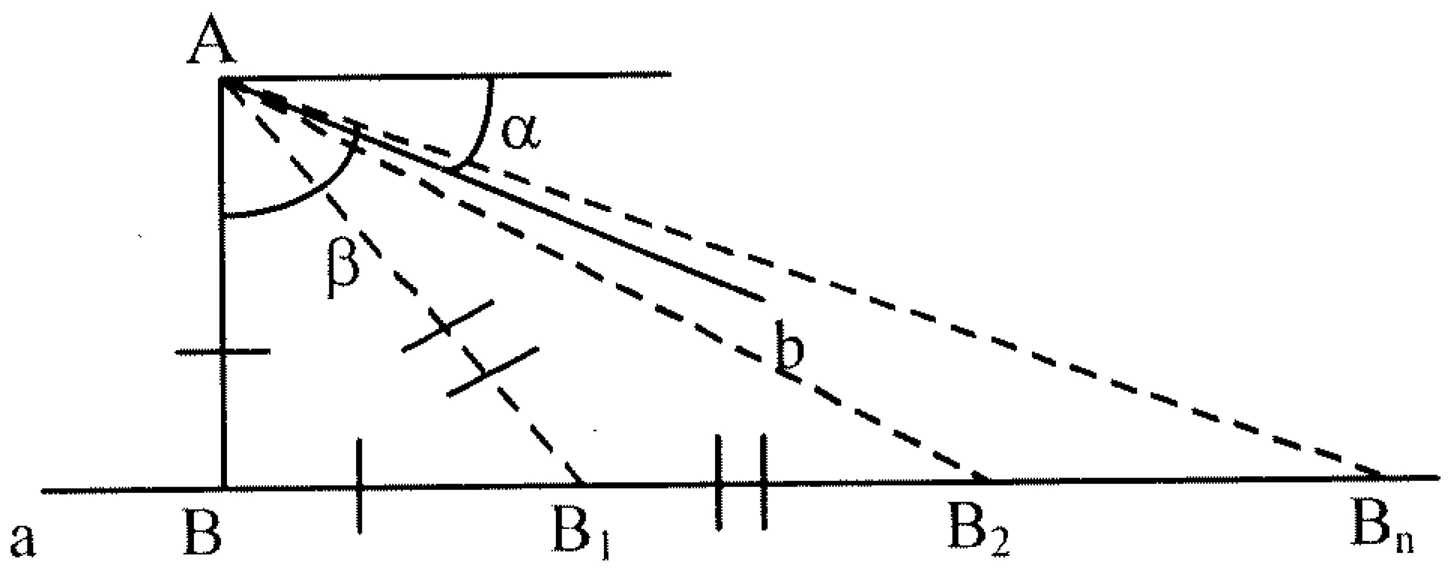


Рис. 7

Докажем, что b обязательно пересечет a. Для этого на прямой a отложим n отрезков: $BB_1=AB$, $B_1B_2=AB_1$, $B_2B_3=AB_2,...,B_{n-1}B_n=AB_{n-1}$, соединяя точки $B_1,B_2,...,B_n$ с точкой A. Получим равнобедренные треугольники BAB_1, B_1AB_2, $B_2AB_3,...,B_{n-1}AB_n$. По условию сумма углов каждого из них равна 2d. Так как $\angle BB_1A=\frac{d}{2}$, то $\angle B_2B_1A=\frac{3d}{2}$. Отсюда $\angle B_1B_2A=\frac{2d-\frac{3d}{2}}{2}=\frac{d}{4}=\frac{d}{2^2}$ и т.д. Легко получить по индукции, что $\angle B_{n-1}B_nA=\frac{d}{2^n}$. Теперь из треугольника B_nAB получаем $\angle B_nAB=d-\frac{d}{2^n}<d$. Так как угол β между прямыми AB и b острый,

то можно взять $\beta=d-\alpha$, где $0<\alpha<d$. Так как при $n\to\infty$ $\frac{d}{2^n}\to 0$, то существует такое n, что $\frac{d}{2^n}<\alpha$ или $\angle B_nAB=d-\frac{d}{2^n}>d-\alpha=\beta$. Следовательно, прямая b будет проходить внутри угла B_nAB и, значит, пересечет отрезок BB_n с концами на сторонах угла по теореме абсолютной геометрии, т.е. прямые a и b обязательно пересекутся, что и требовалось доказать ■.

Замечания.

1) Мы доказали, что из равенства суммы углов треугольника 2d следует пересечение перпендикуляра и наклонной к одной и той же прямой.

Задание. Докажите теперь V постулат в его общей формулировке.

2) Ещё раз отметим, что доказательство приведенных теорем идет при условии, что система аксиом и постулатов Евклида абсолютной геометрии уже дополнена всеми необходимыми аксиомами.

Нас уже не удивляет тот факт, что устранить первую гипотезу ($\Sigma<2d$) Лежандру не удалось, несмотря на несколько попыток.

Большая заслуга исследований Лежандра по теории параллельных прямых состоит в установлении зависимости между V постулатом и теоремой о сумме внутренних углов треугольника.

Итак, и в XVIII веке проблема V постулата не была решена. Неудачи попыток доказательства V постулата имеют некоторые общие характерные причины:

1) философская позиция всех геометров, пытавшихся доказать V постулат, – твердая уверенность в его абсолютной истинности и единственной возможности и вера в его доказуемость; они не допускали мысли о возможности существования геометрии без V постулата;

2) использование в доказательствах V постулата предложений, которые казались совершенно очевидными, но фактически оказывались эквивалентными V постулату; это самая распространенная ошибка при доказательствах V постулата;

3) отсутствие правильной постановки самой проблемы доказательства V постулата, т.к. это требовало знания полного списка аксиом, на которых строится геометрия Евклида, а как раз “неполнота” списка аксиом “Начал” являлась основным их недостатком, преодолеть который оказалось возможным научной математической мысли только в XIX веке.

Теорема 3. V постулат и предложение “сумма углов треугольника равна 2d” эквивалентны относительно системы аксиом абсолютной геометрии.

I. В предложении 32 из книги I “Начал” Евклида доказано, что при выполнении V постулата сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым. Кроме того, доказательство этой теоремы известно нам из школьного учебника “Геометрия 7-9” Атанасяна Л.С. и др., где в процессе доказательства используется не V постулат, а его эквивалент – аксиома Плейфера ([7],с.66).

II. Приведем теперь доказательство Лежандра обратной теоремы: если сумма углов треугольника равна 2d, то выполняется V постулат.

Доказательство.

□ Пусть прямая a является перпендикуляром, а прямая b - наклонной к AB, причем $\angle A=\beta$ острый.

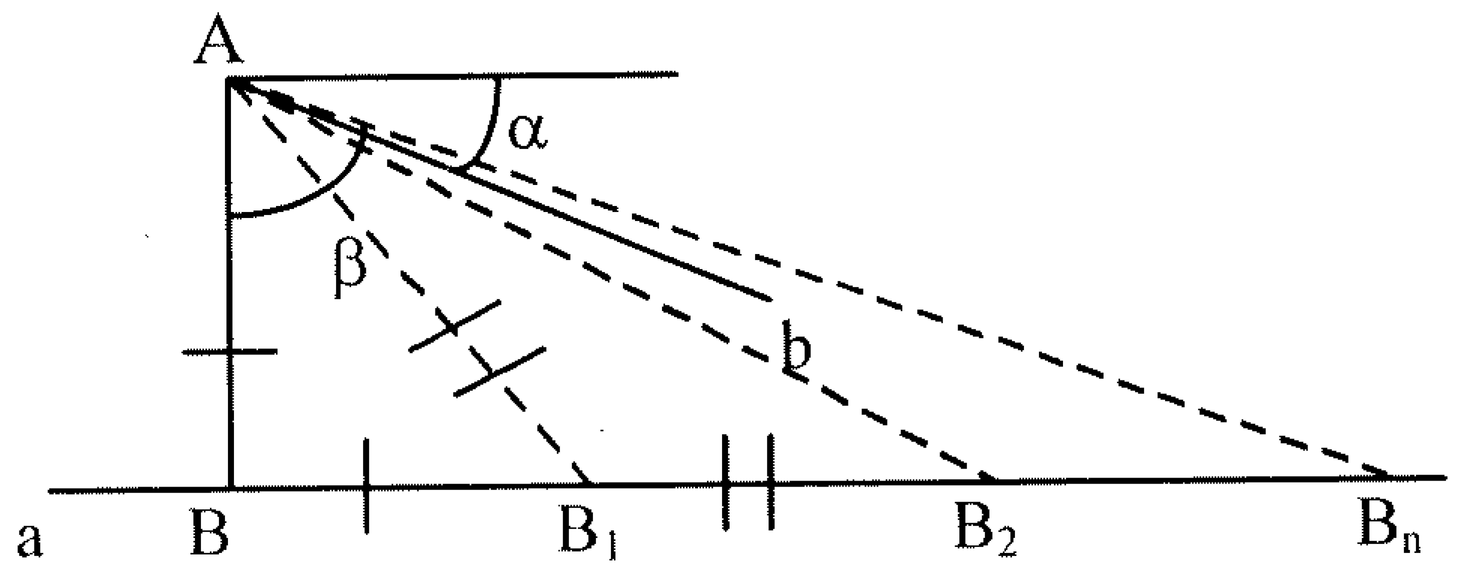


Рис. 7

Докажем, что b обязательно пересечет a. Для этого на прямой a отложим n отрезков: $BB_1=AB$, $B_1B_2=AB_1$, $B_2B_3=AB_2,\dots,B_{n-1}B_n=AB_{n-1}$, соединяя точки $B_1,B_2,\dots,B_n$ с точкой A. Получим равнобедренные треугольники BAB_1, B_1AB_2, $B_2AB_3,\dots,B_{n-1}AB_n$. По условию сумма углов каждого из них равна 2d. Так как $\angle BB_1A=\frac{d}{2}$, то $\angle B_2B_1A=\frac{3d}{2}$. Отсюда $\angle B_1B_2A=\frac{2d-\frac{3d}{2}}{2}=\frac{d}{4}=\frac{d}{2^2}$ и т.д. Легко получить по индукции, что $\angle B_{n-1}B_nA=\frac{d}{2^n}$. Теперь из треугольника B_nAB получаем $\angle B_nAB=d-\frac{d}{2^n}<d$. Так как угол β между прямыми AB и b острый, то можно взять $\beta=d-\alpha$, где $0<\alpha<d$. Так как при $n\to\infty$ $\frac{d}{2^n}\to 0$, то существует такое n, что $\frac{d}{2^n}<\alpha$ или $\angle B_nAB=d-\frac{d}{2^n}>d-\alpha=\beta$. Следовательно, прямая b будет проходить внутри угла B_nAB и, значит, пересечет отрезок BB_n с концами на сторонах угла по теореме абсолютной геометрии, т.е. прямые a и b обязательно пересекутся, что и требовалось доказать ■.

Замечания.

1) Мы доказали, что из равенства суммы углов треугольника 2d следует пересечение перпендикуляра и наклонной к одной и той же прямой.

Задание. Докажите теперь V постулат в его общей формулировке.

2) Ещё раз отметим, что доказательство приведенных теорем идет при условии, что система аксиом и постулатов Евклида абсолютной геометрии уже дополнена всеми необходимыми аксиомами.

Нас уже не удивляет тот факт, что устранить первую гипотезу ($\Sigma<2d$) Лежандру не удалось, несмотря на несколько попыток.

Большая заслуга исследований Лежандра по теории параллельных прямых состоит в установлении зависимости между V постулатом и теоремой о сумме внутренних углов треугольника.

Итак, и в XVIII веке проблема V постулата не была решена. Неудачи попыток доказательства V постулата имеют некоторые общие характерные причины:

1) философская позиция всех геометров, пытавшихся доказать V постулат, – твердая уверенность в его абсолютной истинности и единственной возможности и вера в его доказуемость; они не допускали мысли о возможности существования геометрии без V постулата;

2) использование в доказательствах V постулата предложений, которые казались совершенно очевидными, но фактически оказывались эквивалентными V постулату; это самая распространенная ошибка при доказательствах V постулата;

3) отсутствие правильной постановки самой проблемы доказательства V постулата, т.к. это требовало знания полного списка аксиом, на которых строится геометрия Евклида, а как раз “неполнота” списка аксиом “Начал” являлась основным их недостатком, преодолеть который оказалось возможным научной математической мысли только в XIX веке.

Однако несмотря на неудачи всех попыток доказать V постулат, они сыграли положительную роль в развитии геометрии, так как, во-первых, при этом были получены новые теоремы абсолютной геометрии, например, такие: внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним несмежного, сумма внутренних углов треугольника не превышает 2d. Во-вторых, были выяснены логические зависимости между некоторыми важными предложениями геометрии и, в частности, был выявлен целый ряд предложений, эквивалентных V постулату, их более 30. В-третьих, была подготовлена почва для того, чтобы усомниться в возможности доказать V постулат.

§5. Открытие неевклидовой геометрии

Проблема V постулата была решена в XIX веке, но решение её оказалось таким, какого не ждал и к какому не был подготовлен математический мир того времени.

Слава решения знаменитой проблемы принадлежит великому русскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792-1856). В 1811 году он окончил Казанский университет, получил звание магистра и был оставлен при университете, с 1816 года он – профессор университета, с 1821 - декан математического факультета, а с 1827 по 1846 год – ректор Казанского университета. Это была славная страница его жизни, полная трудового пафоса и гражданского мужества. На посту ректора университета Лобачевский показал себя незаурядным организатором науки и выдающимся воспитателем молодежи.

Н.И. Лобачевский в первые годы своей профессиональной деятельности шёл за Евклидом и даже пытался доказать его V постулат от противного. Точнее, он хотел доказать предложение Плейфера, эквивалентное V постулату. Идя от противного, он заменил предложение Плейфера его отрицанием:

Через точку вне данной прямой на плоскости, ими определяемой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.

Подобно предшественникам он надеялся обнаружить противоречия в следствиях из этого предложения, но никаких логических противоречий не получил. В отличие от своих предшественников – Саккери, Ламберта, Швейкарта, Тауринуса Лобачевский ясно осознает причину этого и делает гениальный вывод: V постулат нельзя доказать с помощью аксиом абсолютной геометрии, он не зависит от них! И Евклид был прав, поместив его в число постулатов евклидовой геометрии.

Но если нельзя доказать, что через точку вне прямой проходит одна прямая, параллельная данной, то можно предположить, что верно противоречащее этому, и тогда можно построить новую геометрию без V постулата, новое пространство с особыми свойствами, совершенно не похожее на то, в котором мы живем!

И вот 11 февраля 1826г. (по ст. ст.) впервые в истории геометрии 34-летний профессор Лобачевский сообщает совету университета об открытии им новой геометрии, основанной на всех аксиомах Евклида, кроме V постулата, и на предложении, противоречащем ему.

Эта дата – дата рождения новой геометрии является одной из самых замечательных во всей истории математики и естествознания.

И с этого же момента начинается самоотверженная упорная борьба Лобачевского за признание новых идей, за их развитие, так как даже такие крупнейшие русские математики как Остроградский и Буняковский не признали и не поняли его идей. “В этой борьбе проявилось всё величие его духа, все его высокие моральные качества героически смелого революционера в науке” ([40, с.69).

В 1829 году в журнале “Казанский вестник” начал публиковаться мемуар Лобачевского “О началах геометрии”. Эта работа – грань двух эпох в истории геометрии: с одной стороны, ею завершается вопрос о доказательстве V постулата Евклида, а с другой стороны – открывается новая страница в истории геометрии, новый её раздел – “неевклидова геометрия”, которую Лобачевский назвал “воображаемой” в работе, опубликованной в 1835 году. Последняя работа Лобачевского “Пангеометрия” вышла в свет в 1855 году.

Лобачевский был первым, но не единственным из тех, кто пришёл к выводу о существовании неевклидовой геометрии. “Как весной сразу всюду появляются фиалки, так и для научных открытий бывают эпохи, когда одни и те же мысли вспыхивают у ученых в разных местах” – так красочно писал об этом обстоятельстве в истории науки венгерский математик Фаркаш Бояи своему сыну Яношу Бóяи (1802-1860), имя которого история также связала с открытием неевклидовой геометрии. Ещё будучи студентом военно-инженерной академии, Я. Бояи увлекся проблемой V постулата. Он сообщил об этом отцу и получил от него письмо, отрывок из которого мы здесь приводим: “Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий ..., я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Молю тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях ..., оно лишит тебя здоровья, досуга, покоя – оно тебе погубит всю радость жизни...” ([32],с.20). Но Янош был одержим своей идеей, не внял совету отца и продолжал упорно трудиться. По-видимому, уже к 1823 году он владел тайной неевклидовой геометрии. Свои результаты Я. Бояи опубликовал в 1832 году (позже Лобачевского) в виде приложения к учебнику по математике своего отца под названием “Приложение, излагающее совершенно верное учение о пространстве” (сокращенно “Appendix” (аппендикс)). В этом небольшом, но замечательном сочинении были заложены первые начала неевклидовой геометрии, очень тщательно разработанные. Фаркаш Бояи, будучи другом К. Гаусса ещё со студенческих лет, один экземпляр работы Яноша послал Гауссу, который сдержанно ответил, что его радует работа Яноша, но

“хвалить её – значило бы хвалить самого себя, ибо всё содержание этой работы ... и результаты, которые он получил, почти сплошь совпадают с моими, которые я частично получил уже 30-35 лет тому назад” ([25], с.315).

Итак, мы подошли теперь вплотную к оценке места, занимаемого Гауссом в истории открытия неевклидовой геометрии.

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) – великий немецкий ученый, которого современники назвали королем математики. В разностороннем творчестве Гаусса органически сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Его работы оказали большое влияние на всё дальнейшее развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, многих отраслей теоретической астрономии. Научное наследие Гаусса тщательно изучалось Гёттингенским ученым обществом около сотни лет и было издано в одиннадцати томах. Как выяснилось, Гаусс в течение очень длительного времени размышлял о V постулате, начиная, видимо, с 1792 года, т.е. примерно с 15 лет. Из некоторых его заметок следует, что он владел идеями неевклидовой геометрии, но эти идеи не были опубликованы при жизни Гаусса, сам он даже не упоминал о них открыто. В 1841 году Гаусс познакомился с работой Лобачевского по небольшой брошюре, опубликованной на немецком языке, и заинтересовался ей настолько, что изучил русский язык, чтобы познакомиться со всеми работами Лобачевского. В очень ярких выражениях он отзывался о них в письмах к своим друзьям. По его предложению в 1842 году Лобачевского “как одного из превосходнейших математиков русского государства” избрали членом-корреспондентом Гёттингенского учебного королевского общества. Гаусс лично известил Лобачевского об избрании, но ни в представлении Гаусса, ни в дипломе, выданном Лобачевскому, неевклидова геометрия не упоминалась.

Получив же работу Я. Бояи, Гаусс тотчас же написал своему другу Герлингу, что он получил от Бояи замечательную работу и считает ее автора “ гением первой величины ”. В ответе Фаркашу Бояи, который мы частично воспроизвели выше, вместо того, чтобы поддержать замечательные идеи молодого математика, Гаусс больше останавливался на своих заслугах, а в печати не проронил ни единого слова в поддержку этого “гения первого ранга”. “Не подлежит сомнению, что на Гауссе лежит тяжелая ответственность за те переживания, которые омрачили жизнь Яноша и довели его до состояния, граничившего с психическим расстройством”([25], с.317). Если бы знаменитый математик поддержал Яноша, его судьба могла бы быть иной…

До сих пор остается загадкой, почему Гаусс не опубликовал свои результаты по теории параллельных. Видимо, так он обеспечил себе возможность спокойно работать, не боясь всяких передряг, ожидавших его в случае опубликования идей неевклидовой геометрии.

Итак, создание неевклидовой геометрии связано с именами трех математиков – К. Гаусса, Н.И. Лобачевского, Я. Бояи. Все они независимо друг от друга и почти одновременно пришли к одной и той же системе геометрии. Однако роль каждого из них в создании новой геометрии была различной. То, что оставил Гаусс, оказалось лишь наметкой основных идей новой науки. Я. Бояи написал капитальный труд, тщательно построенный, со строгой системой доказательств, содержащий элементарную неевклидову геометрию и тригонометрию. Но все это лишь первые шаги по сравнению с глубокими и далеко идущими исследованиями Лобачевского, присоединившего к элементарной геометрии неевклидова пространства еще и аналитическую, и дифференциальную геометрии.

Как видим, и с формальной стороны (первым опубликовал работу), и по существу приоритет открытия принадлежит Н. И. Лобачевскому, а открытая им новая геометрия называется именем ее творца - геометрией Лобачевского.

§6. Работы по основаниям геометрии во второй половине XIX века

П.1. Непротиворечивость геометрии Лобачевского

Замечательные идеи Н. И. Лобачевского не получили признания математической общественности при жизни великого геометра. Многие отнеслись к ним скептически. Только Гаусс оценил их по достоинству, но в печати он ни одним словом не обмолвился о своем отношении к работам Лобачевского. Непонимание этих работ объясняется тем, что заложенные в них идеи значительно опередили существовавшие в то время взгляды на геометрическое пространство, которые в основном оставались такими же, какими они были в эпоху Евклида. Эти работы из-за отсутствия простой модели и новизны идей были очень трудны.

Почему Лобачевский назвал свою геометрию “воображаемой” в отличие от “употребительной” евклидовой геометрии? Дело в том, что он построил логическую систему, однако не знал, возможна ли ее практическая реализация, которая могла бы послужить гарантией непротиворечивости новой геометрии. Он применял свою геометрию к вычислению определенных интегралов и даже написал работу об этом ; к определению углов астрономического треугольника. Однако эти приложения его самого не удовлетворяли.

Общему признанию геометрии Лобачевского способствовали работы геометров уже после его смерти. Этому способствовало и опубликование в 1865 году письма Гаусса, в котором в ярких выражениях говорится о творении Лобачевского и рекомендуется к изучению его брошюра, опубликованная в 1840 году на немецком языке. Теперь всюду не только заговорили о неевклидовой геометрии, но были сделаны и первые шаги к ее развитию, которое пошло очень быстро.

В качестве первого доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского была воспринята работа итальянского математика Э.Бельтрами (1835-1900) “Опыт интерпретации неевклидовой геометрии”, опубликованная в 1868 году. В ней доказано, что в евклидовом пространстве есть поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны, названная им псевдосферой, на которой “в малом” выполняется геометрия Лобачевского, если в качестве прямых взять геодезические линии. Это свидетельствует о том, что если бы среди предложений геометрии Лобачевского были отрицающие друг друга, т.е. противоречивые, то им соответствовало бы противоречие в теории поверхностей евклидова пространства, т.е. противоречие в евклидовой геометрии. С этого времени планиметрия Лобачевского перестала быть “воображаемой”, т.к. в евклидовом пространстве были обнаружены объекты, реализующие все соотношения геометрии Лобачевского.

Вскоре после этого были найдены другие, более простые ее реализации. Так в 1871 г. известный немецкий математик Феликс Клейн (1849-1925), основываясь на работах в области проективной геометрии, дал другую интерпретацию, в которой планиметрия Лобачевского реализуется в системе прямых внутри “абсолюта”, представляющего собой круг или эллипс.

В начале 80-х годов знаменитый французский математик Анри Пуанкаре нашел новую интерпретацию геометрии Лобачевского, связанную с геометрией кругов и сфер, дав аналогичные интерпретации геометрий Евклида и Римана. Кстати, евклидова планиметрия реализуется в системе окружностей параболической связки, планиметрия Лобачевского – в системе окружностей гиперболической связки, а геометрия Римана – в системе окружностей эллиптической связки, отсюда названия соответственно: параболическая, гиперболическая и эллиптическая геометрия.

П.2. Значение открытия геометрии Лобачевского

1. С открытием неевклидовой геометрии закончились многовековые бесплодные попытки доказательства V постулата. Лобачевским было доказано, что V постулат не является следствием из остальных аксиом и постулатов Евклида, поэтому его нельзя доказать с их помощью. Доказательством этого явилась непротиворечивость геометрии Лобачевского.

2. Открытие Лобачевского является первым в истории математики доказательством невозможности некоторого построения или вывода. Лишь в XIX веке была доказана невозможность произвести при помощи циркуля и линейки трисекцию угла, удвоение куба и квадратуру круга. Эти задачи также были неприступны в течение веков.

3. Гораздо более важным результатом явилось доказательство Лобачевским, что геометрия Евклида не является единственно возможной, а только одной из возможных. Она является предельным случаем неевклидовой геометрии, т.е. геометрия Лобачевского является более общей, в силу чего и названа автором “пангеометрией” или всеобщей геометрией. Открытие Лобачевского положило начало созданию других неевклидовых геометрий, занимающих важное место в современной математике.

Серьезным шагом в этом направлении была работа видного немецкого математика Бернгарда Римана (1826-1866) “О гипотезах, лежащих в основании геометрии”. Он пришел к геометрии, отличной как от геометрии Евклида, так и от геометрии Лобачевского. В геометрии Римана, которую называют еще эллиптической, вообще нет параллельных прямых, сумма же углов треугольника в отличие от геометрий Евклида и Лобачевского больше 2d. Выяснилось, что и эта геометрия непротиворечива. Более того, по схеме Римана можно построить множество отличных друг от друга геометрий, куда как частные случаи включаются геометрии Евклида, Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана.

4. Создание геометрии Лобачевского имело и большое философское значение, так как нанесло сокрушительный удар идеалистическому учению о пространстве немецкого философа Канта, который считал, что евклидова геометрия есть чисто субъективное построение нашего ума, ее истины априорны и не связаны ни с каким опытом, она единственно возможная геометрия, поскольку “ можно представить себе только одно единственное пространство”.

5. Открытие Лобачевского нашло приложение к общей теории относительности. Если считать распределение материи равномерным, то в определенных условиях геометрия пространства совпадает с геометрией Лобачевского.

Говоря о гигантском вкладе в науку Н. И. Лобачевского, известный российский математик В. Ф. Каган отметил: “В истории математики, в истории точного знания и философии Лобачевский всегда будет принадлежать к числу основоположников наряду с Архимедом, Галилеем, Коперником и Ньютоном”.

П.3. От Лобачевского до Гильберта

Идеи Лобачевского послужили источником развития современного учения об основаниях геометрии и привели к разработке полной системы аксиом геометрии и современного аксиоматического метода в математике.

Геометрия Лобачевского развертывалась чисто логическим путем и ее утверждения расходились с нашими привычными наглядными представлениями, поэтому возникла необходимость аксиоматически поверхностей евклидова пространства, т.е. противоречие в евклидовой геометрии. С этого времени планиметрия Лобачевского перестала быть "воображаемой", т.к. в евклидовом пространстве были обнаружены объекты, реализующие все соотношения геометрии Лобачевского.

Вскоре после этого были найдены другие, более простые ее реализации. Так в 1871 г. известный немецкий математик Феликс Клейн (1849-1925), основываясь на работах в области проективной геометрии, дал другую интерпретацию, в которой планиметрия Лобачевского реализуется в системе прямых внутри "абсолюта", представляющего собой круг или эллипс.

В начале 80-х годов знаменитый французский математик Анри Пуанкаре нашел новую интерпретацию геометрии Лобачевского, связанную с геометрией кругов и сфер, дав аналогичные интерпретации геометрий Евклида и Римана. Кстати, евклидова планиметрия реализуется в системе окружностей параболической связки, планиметрия Лобачевского – в системе окружностей гиперболической связки, а геометрия Римана – в системе окружностей эллиптической связки, отсюда названия соответственно: параболическая, гиперболическая и эллиптическая геометрия.

П.2. Значение открытия геометрии Лобачевского

1. С открытием неевклидовой геометрии закончились многовековые бесплодные попытки доказательства V постулата. Лобачевским было доказано, что V постулат не является следствием из остальных аксиом и постулатов Евклида, поэтому его нельзя доказать с их помощью. Доказательством этого явилась непротиворечивость геометрии Лобачевского.

2. Открытие Лобачевского является первым в истории математики доказательством невозможности некоторого построения или вывода. Лишь в XIX веке была доказана невозможность произвести при помощи циркуля и линейки трисекцию угла, удвоение куба и квадратуру круга. Эти задачи также были неприступны в течение веков.

3. Гораздо более важным результатом явилось доказательство Лобачевским, что геометрия Евклида не является единственно возможной, а только одной из возможных. Она является предельным случаем неевклидовой геометрии, т.е. геометрия Лобачевского является более общей, в силу чего и названа автором "пангеометрией" или всеобщей геометрией. Открытие Лобачевского положило начало созданию других неевклидовых геометрий, занимающих важное место в современной математике.

Серьезным шагом в этом направлении была работа видного немецкого математика Бернгарда Римана (1826-1866) "О гипотезах, лежащих в основании геометрии". Он пришел к геометрии, отличной как от геометрии Евклида, так и от геометрии Лобачевского. В геометрии Римана, которую называют еще эллиптической, вообще нет параллельных прямых, сумма же углов треугольника в отличие от геометрий Евклида и Лобачевского больше 2d. Выяснилось, что и эта геометрия непротиворечива. Более того, по схеме Римана можно построить множество отличных друг от друга геометрий, куда как частные случаи включаются геометрии Евклида, Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана.

4. Создание геометрии Лобачевского имело и большое философское значение, так как нанесло сокрушительный удар идеалистическому учению о пространстве немецкого философа Канта, который считал, что евклидова геометрия есть чисто субъективное построение нашего ума, ее истины априорны и не связаны ни с каким опытом, она единственно возможная геометрия, поскольку " можно представить себе только одно единственное пространство".

5. Открытие Лобачевского нашло приложение к общей теории относительности. Если считать распределение материи равномерным, то в определенных условиях геометрия пространства совпадает с геометрией Лобачевского.

Говоря о гигантском вкладе в науку Н. И. Лобачевского, известный российский математик В. Ф. Каган отметил: "В истории математики, в истории точного знания и философии Лобачевский всегда будет принадлежать к числу основоположников наряду с Архимедом, Галилеем, Коперником и Ньютоном".

П.3. От Лобачевского до Гильберта

Идеи Лобачевского послужили источником развития современного учения об основаниях геометрии и привели к разработке полной системы аксиом геометрии и современного аксиоматического метода в математике.

Геометрия Лобачевского развертывалась чисто логическим путем и ее утверждения расходились с нашими привычными наглядными представлениями, поэтому возникла необходимость аксиоматически обосновать многие понятия, которые прежде считались интуитивно ясными или снимались с чертежа (например, понятия "лежать между", "вне", "внутри", "равно"). Сама система аксиом Евклида в связи с этим была подвергнута глубокому анализу. Была обнаружена ее неполнота. Серьезным вкладом в дело создания системы аксиом геометрии явились, в частности, исследования немецкого математика М. Пáша (1843-1930). В 1882 году он опубликовал "Лекции по новой геометрии", где фактически осуществляет аксиоматическое построение геометрии. Он формулирует аксиомы принадлежности точек и плоскостей, но наибольшая его заслуга состоит в формулировке аксиом порядка, описывающих свойства понятия "лежать между". Он вводит также аксиомы равенства.

Еще раньше, до Паша, были установлены разные формы аксиомы непрерывности в связи с разработкой основ анализа и построением теории действительного числа (Вейерштрасс, Дедекинд, Кантор).

Представляют интерес также работы итальянского математика и логика Дж. Пеано (1858-1932) и его учеников. Большой заслугой этой школы явилась разработка вопросов непротиворечивости и независимости системы аксиом, четкая формулировка требований к системе аксиом.

Исследование аксиоматики Евклида было завершено выдающимся немецким математиком Давидом Гильбертом (1862-1943). В его знаменитой работе "Основания геометрии", вышедшей в 1899г., дается список аксиом евклидова пространства, удовлетворяющий требованиям непротиворечивости и полноты. Эта работа содержит важнейшие идеи по аксиоматическому обоснованию геометрии, которые явились исходным пунктом дальнейших исследований как в области геометрии, так и в области других математических наук. Она приобрела большую популярность, была высоко оценена современниками и в 1904г. была удостоена Международной премии им. Лобачевского.

§ 7. Система аксиом Гильберта евклидова пространства E_3

П.1. Общая характеристика аксиоматики Гильберта

Со времен Евклида и до конца XIX века основные понятия геометрии хотя и были абстракциями от реальной действительности, однако всегда связывались с нашими наглядными представлениями. Царило убеждение, что эти наглядные представления и есть единственная система объектов, которые следует понимать под терминами "точка", "прямая", "плоскость". Под аксиомами геометрии понимались совершенно конкретные истины, относящиеся к этим конкретным объектам. Короче говоря, это был первичный уровень абстракции, на котором предмет геометрии и ее аксиоматика понимаются в наглядно - содержательном смысле. Таким же образом подходят к аксиомам и основным понятиям в школьном изложении, показывая их смысл на чертежах, то же мы видим и у Евклида.

Но если бы наука остановилась на таком толковании основных понятий геометрии, т.е. на такой ступени абстракции, человечество имело бы неверное представление о реальном мире. Дело в том, что наш опыт и наши чувственные восприятия приближенно, не точно отражают реальный мир. Именно это было причиной того, что величайшие открытия, как гелиоцентрическая теория Коперника и геометрия Лобачевского, принимались в свое время как абсурдные.

При строго логическом построении геометрии в ее понятиях и аксиомах должны найти свое выражение лишь те свойства и отношения объектов реального мира, которые являются существенными для логических рассуждений. Все остальные несущественные признаки, не играющие никакой роли в рассуждениях, надо отбросить.

И вот Д. Гильберт установил совершенно новую точку зрения на основные понятия и аксиомы геометрии. У него основные понятия геометрии не связываются ни с какими конкретными объектами, они вводятся без прямых определений, а все, что о них необходимо знать, излагается в аксиомах. *Аксиомы Гильберта являются в этом смысле косвенными определениями основных понятий.* Поэтому он мыслит три различные системы вещей: "вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем A, B, C, ...; вещи второй системы называем *прямыми* и обозначаем их a, b, c, ...; вещи третьей системы мы называем *плоскостями* и обозначаем их α, β, γ, ..." [19].

Далее предполагаем, что точки, прямые, плоскости находятся в некоторых взаимных отношениях, и обозначаем эти отношения словами “лежать”, “между”, “конгруэнтный”. В эти понятия не вкладывается никакого конкретного содержания, они могут иметь любую природу, лишь бы для них выполнялись все аксиомы Гильберта.

Основная заслуга Гильберта, благодаря которой его труд стал классическим, заключается в следующем: Гильберту удалось сконструировать аксиоматику геометрии, расчлененную на группы настолько естественным образом, что логическая структура геометрии становится совершенно прозрачной. Это позволяет формулировать аксиомы наиболее простым и кратким образом, а также исследовать, как далеко можно развить геометрию, если брать не все аксиомы, а только те или иные группы [19].

Аксиомы Гильберта делятся на пять групп.

Группа I – аксиомы принадлежности (8 аксиом).
Группа II – аксиомы порядка (4 аксиомы).
Группа III – аксиомы конгруэнтности (5 аксиом).
Группа IV – аксиома непрерывности (1 аксиома).
Группа V – аксиома параллельности (1 аксиома).

Все предложения геометрии, не являющиеся аксиомами, по мысли Гильберта, должны быть доказаны с помощью аксиом, ранее уже полученных следствий из них и законов логики. Ясно, что при доказательствах чертежи и обычные наглядные представления являются лишь вспомогательными средствами для облегчения поиска пути логических рассуждений и проверки правильности логического вывода на конкретном материале.

При таком взгляде необходимо встает вопрос о непротиворечивости аксиом. Для его решения Гильберт строит аналитическую модель, в которой выполняются аксиомы. Этим вопрос сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики действительных чисел, который сам требует решения. И так как арифметика целых, вслед за тем действительных чисел играет роль фундамента почти всей математики, то вопрос связывается с проблемой обоснования математики вообще. К 1922 году у Гильберта сложился план обоснования всей математики путем ее полной формализации с последующим “метаматематическим” доказательством непротиворечивости формализованной математики. В 1934 и 1939 годах вышли в свет два тома “Оснований математики” Д. Гильберта и П. Бернайса, где эта концепция подробно развивается. И хотя первоначальные надежды Гильберта в этой области не оправдались, вся дальнейшая работа над логическими основами математики в большой мере идет по путям, намеченным Д. Гильбертом.

Независимо от этого крайнего направления формализации аксиоматики за “Основаниями геометрии” Гильберта появились работы с другими вариантами аксиоматики, как, например, аксиоматика немецкого математика Ф. Шура (1856-1932), основанная на понятии движения (наложения), аксиоматика известного российского геометра В. Ф. Кагана (1869-1953), основанная на понятии о численном расстоянии; аксиоматика немецкого математика Г. Вейля (1885-1955), основанная на понятии векторного пространства (1918). Работы Ф. Шура и Г.Вейля также отмечены Международной премией им. Н. И. Лобачевского.

П.2. Гильбертова система аксиом геометрии (обзор)

Как уже говорилось, по Гильберту предполагается, что даны три различных множества. Элементы первого множества называются *точками*, элементы второго множества – *прямыми*, а элементы третьего множества – *плоскостями* (основные объекты). Точки, прямые, плоскости обозначаются соответственно буквами A, B, C, ...; a, b, c, ...; α, β, γ, ... Элементы этих множеств находятся в определенных отношениях, которые называются: “принадлежность”, “лежать между”, “конгруэнтность” (основные отношения). Природа основных понятий, т.е. основных объектов и основных отношений, может быть какой угодно, но для них должны выполнятся перечисленные ниже аксиомы.

Группа I – аксиомы принадлежности.

Аксиомы этой группы описывают свойства взаимного расположения точек, прямых, плоскостей, выражаемые словом “принадлежит” (или “лежит на ”, “проходит через”).

I_1. Каковы бы ни были две точки A,B, существует прямая a, проходящая через эти точки.

I_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует не более одной прямой, проходящей через эти точки.

I_3. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_4. Каковы бы ни были три точки A,B,C, не лежащие на одной прямой, существует плоскость α, проходящая через эти точки. На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.

I_5. Каковы бы ни были три точки, не лежащие на одной прямой, существует не более одной плоскости, проходящей через эти точки.

I_6. Если две точки A и B прямой a лежат в плоскости α, то каждая точка прямой a лежит в плоскости α.

Определение: *прямая называется принадлежащей плоскости, если каждая ее точка принадлежит плоскости.*

I_7. Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку B.

I_8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Аксиомы I_1-I_3 называются плоскостными, а аксиомы I_4-I_8 называются пространственными.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем, составляющих геометрию первой группы аксиом. Приведем некоторые из них.

1. Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, имеют не более одной общей точки.
2. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.
3. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как через две пересекающиеся прямые, проходит одна и только одна плоскость.
4. На каждой плоскости существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Группа II – аксиомы порядка.

Предполагается, что точка на прямой может находиться в известном отношении к двум другим точкам этой прямой; это отношение выражается словами "лежать между".

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C- различные точки одной прямой и B лежит между C и A.

II_2. Каковы бы ни были две точки A и B, существует по крайней мере одна точка C на прямой AB такая, что B лежит между A и C.

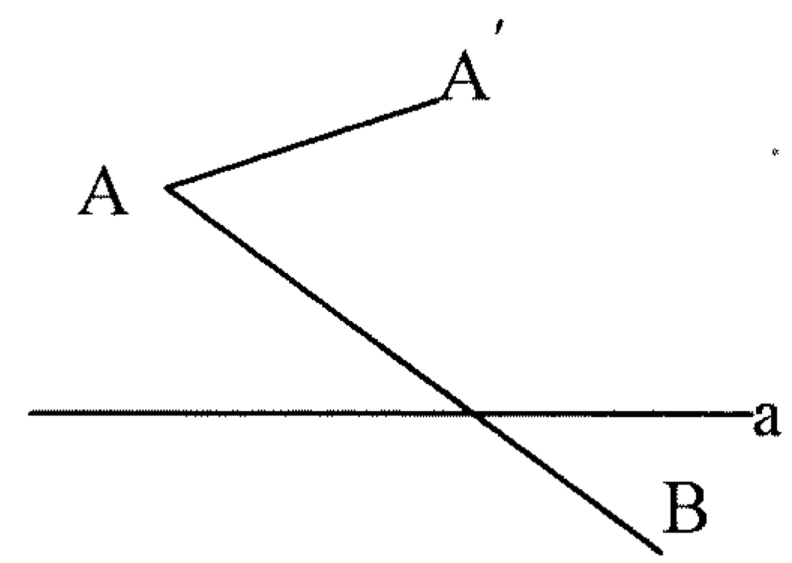
II_3. Среди любых трех точек одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Определение: *система двух точек A и B называется отрезком AB или BA; точки A и B называются концами отрезка; любая точка, лежащая между A и B называется внутренней точкой отрезка или просто точкой отрезка.*

II_4 – аксиома Паша. Пусть A, B, C – три точки, не лежащие на одной прямой, a a – прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда если прямая a проходит через точку отрезка AB, то она проходит также через точку отрезка AC или BC.

В качестве следствий из аксиом групп I и II Гильберт приводит 8 теорем, в частности:

1. каждый отрезок имеет по крайней мере одну точку;
2. из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими;
3. между любыми двумя точками прямой существует бесчисленное множество точек;
4. каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разбивает точки плоскости α, не лежащие на этой прямой, на две области, обладающие следующим свойством: каждая точка A одной из областей вместе с каждой точкой B другой области определяют отрезок AB, внутри которого лежит одна точка прямой a, а любые две точки A и A' одной и той же области определяют отрезок, не содержащий ни одной из точек прямой a.



Отсюда получаем привычное определение полуплоскости. Далее, можно аналогично получить и понятие полупространства.

В геометрии I-II групп аксиом можно также ввести понятия луча и угла.

Определение: *зафиксируем на прямой a точку O; будем говорить, что точки A и B лежат по одну сторону от точки O, если точка O не лежит между A и B; точки A и B лежат по разные стороны от точки O, если точка O лежит между A и B. Тогда луч, исходящий из точки O – совокупность всех точек прямой a, лежащих по одну и ту же сторону от точки O.*

Заметим, что каждый луч вполне определяется заданием двух точек O и A. Действительно, из аксиом I_1 и I_2 следует, что существует (и при том только одна) прямая, проходящая через точки O и A. Далее, определим луч как множество точек отрезка OA вместе с точками B, для которых точка A лежит между O и B.

Определение: *пусть α – произвольная плоскость, а h и k – какие-то два ее луча, различные, исходящие из одной и той же точки O и принадлежащие различным прямым. Систему таких лучей h, k мы называем углом и обозначаем ее так $\angle hk$ или $\angle kh$.*

Заметим, что исключаются развернутые углы и углы, большие 2d.

Группа III – аксиомы конгруэнтности.

Предполагается, что отрезок (угол) находятся в известном отношении к какому-то отрезку (углу). Это отношение выражается термином “конгруэнтен” или “равен” и обозначается символом “=”. Свойства этого отношения описываются в следующих аксиомах.

III$_1$. Если даны отрезок AB и луч, исходящий из точки A', то существует точка B', принадлежащая данному лучу, такая, что AB=A'B'.

Можно доказать, что точка B' на данном луче единственная.

III$_2$. Если A'B'=AB и A"B"=AB, то A'B'= A"B".

III$_3$. Пусть AB и BC - два отрезка прямой a, не имеющих ни одной общей внутренней точки, и пусть A'B' и B'C'- два отрезка той же прямой a или другой прямой a', также не имеющие общей внутренней точки. Если при этом AB=A'B' и BC=B'C', то AC=A'C'.

III$_4$. Пусть даны ∠hk в плоскости α и прямая a' в плоскости α', а также вполне определенная по отношению к a' сторона плоскости α'. Пусть h'- луч прямой a', исходящий из точки O'; в таком случае в плоскости α' существует один и только один луч k', обладающий следующим свойством: ∠h'k'=∠hk и все внутренние точки ∠h'k' находятся в плоскости α' по данную сторону от прямой a'. Всегда ∠hk =∠hk.

III$_5$. Если для двух треугольников ABC и A'B'C' AB= A'B', AC= A'C', ∠BAC =∠B'A'C', то ∠ABC =∠A'B'C'.

Из аксиом конгруэнтности Гильберт выводит 18 теорем. Приведем некоторые из них.

1. Отношение конгруэнтности отрезков является отношением эквивалентности на множестве отрезков.
2. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Определение: *треугольник ABC называется равным треугольнику A'B'C' (Δ ABC =Δ A'B'C'), если AB=A'B', AC=A' C', BC=B'C' и ∠A=∠A', ∠B=∠B', ∠C=∠C'.*

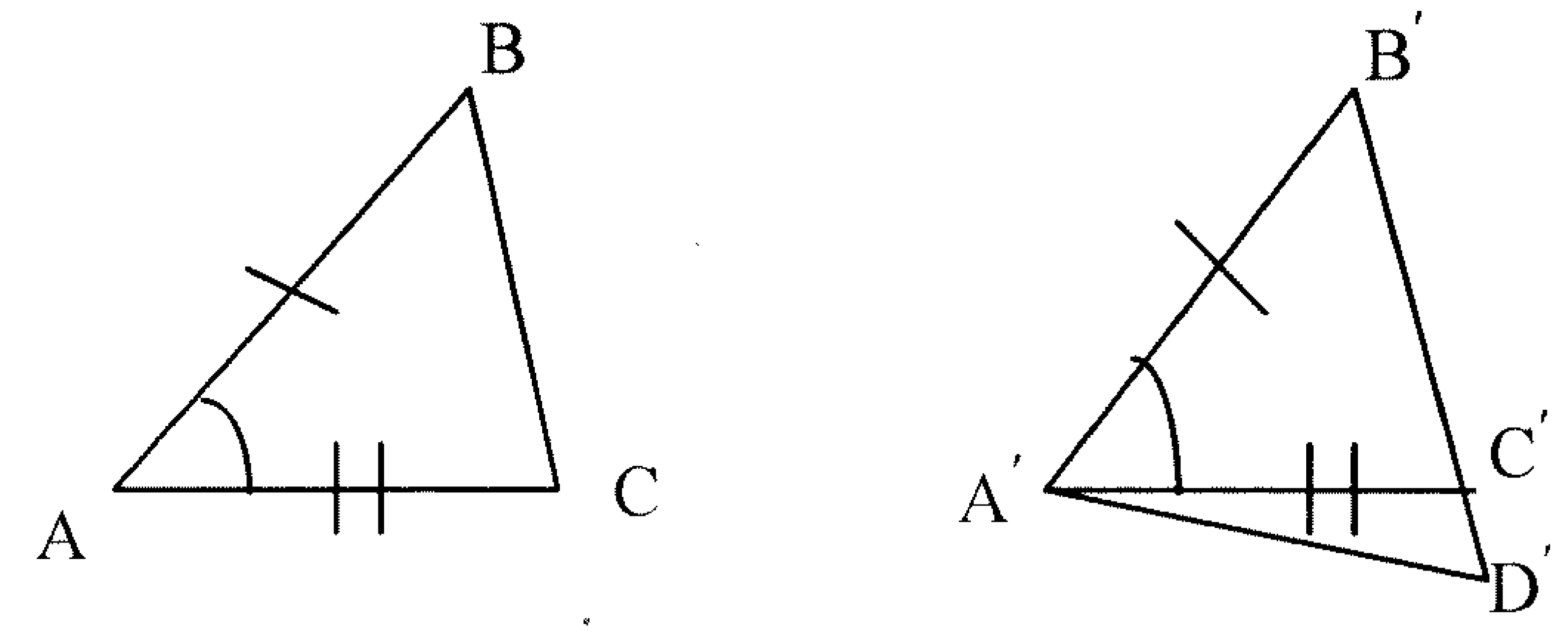
3. Три признака равенства треугольников.

В силу важности приведем доказательство первого признака равенства треугольников.

Если в треугольниках ABC и A'B'C' AB= A'B', AC= A'C', ∠A=∠A' ,то Δ ABC =Δ A'B'C'.

Доказательство.

□Так как AB= A'B', AC= A'C', ∠BAC =∠B'A'C', то по аксиоме III$_5$ ∠ABC =∠A'B'C', т.е. ∠B=∠B'.



Так как AB= A'B', AC= A'C',∠CAB =∠C'A'B', то по той же аксиоме ∠ACB =∠A'C'B', т.е. ∠C=∠ C'.

Докажем теперь, что BC=B'C'. Предположим противное: BC≠B'C'. По аксиоме III$_1$ на луче B'C' существует точка D', такая что BC=B'D'. Так как точки C' и D' не совпадают, то лучи AC' и AD' также не совпадают. По аксиоме III$_5$ ∠BAC =∠B'A'D', а по условию ∠BAC =∠B'A'C'. Получаем противоречие с аксиомой III$_4$. Следовательно, BC=B'C' ■.

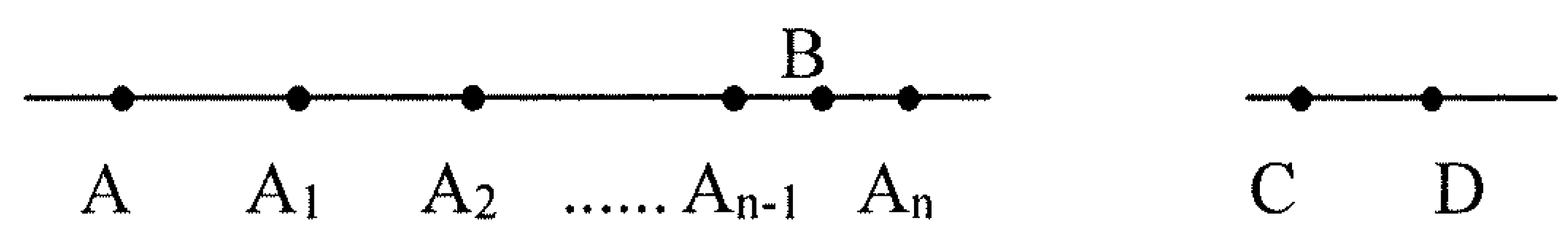
С помощью признаков равенства треугольников легко доказать следующее утверждение.

4. Отношение равенства углов является отношением эквивалентности на множестве углов.

Далее в геометрии I-III групп аксиом можно построить теорию сравнения отрезков и углов, теорию преобразований плоскости, доказать теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, теорему о существовании и единственности прямой, перпендикулярной к данной прямой и проходящей через данную точку, и т.д.

Группа IV – аксиомы непрерывности.

IV$_1$ – аксиома Архимеда. Пусть AB и CD – два каких-нибудь отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число точек A_1 , A_2 , ... , A_n таких, что $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит меж-



ду A и A_n.

IV_2 – аксиома Кантора. Пусть на прямой a дана бесконечная последовательность отрезков A_1B_1 , A_2B_2 , ... , из которых каждый следующий лежит внутри предыдущего, и для любого отрезка CD найдется натуральное число n, такое, что $A_nB_n<CD$. Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков этой последовательности.

Основное назначение этой группы аксиом состоит в том, чтобы ввести длины отрезков и величины углов, а также описать свойство непрерывности расположения точек на прямой.

Можно доказать, что аксиомы IV_1-IV_2 при сохранении групп I-III эквивалентны следующему предложению Дедекинда [40].

Если все внутренние точки отрезка AB вместе с его концами распределены на два класса так, что:

1) *каждая точка отрезка принадлежит одному и только одному из этих классов, точка A принадлежит первому классу, а точка B - второму классу ;*

2) *каждая точка первого класса, отличная от A, лежит между A и любой точкой второго класса, то на отрезке AB существует одна и только одна такая точка C, что всякая точка, лежащая между A и C, принадлежит первому классу, а всякая точка, лежащая между C и B, принадлежит второму классу.*

Группа V – аксиома параллельности.

V. Пусть a – произвольная прямая, а A – точка, не лежащая на этой прямой. Тогда в плоскости, определяемой точкой A и прямой a, существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a.

На основе аксиом групп I-V можно построить теорию параллельных прямых по Евклиду, доказать теорему о сумме углов треугольника и выпуклого многоугольника, изучить свойства параллелограммов и трапеций, построить теорию подобия фигур, теорию измерения площадей и объемов, обосновать тригонометрию и аналитическую геометрию.

Вопросы и задания к главе I

П.1. Вопросы для самопроверки

1. Когда возникла геометрия и в связи с чем ?

2. Что собой представляла геометрия догреческого периода, т.е. до VII в. до н. э.?

3. Кому по преданиям приписываются первые доказательства ?

4. Каковы основные периоды развития греческой математики до Евклида ?

5. Кому принадлежит четкая формулировка принципов логического обоснования науки ?

6. Каковы объективные предпосылки, способствующие созданию “Начал” Евклидом ?

7. Каково историческое значение “Начал”?

8. Каковы недостатки “Начал” с точки зрения современной математики?

9. В чем суть проблемы V постулата ?

10. Что такое “абсолютная геометрия” и “собственно евклидова геометрия ”?

11. Какие две аксиомы называются эквивалентными ?

12. Приведите формулировки нескольких предложений, эквивалентных V постулату.

13. Что нового внесли Саккери, Ламберт, Лежандр в решение проблемы V постулата Евклида ?

14. В чем суть исследований Саккери ?

15. Почему Саккери, Ламберта, Лежандра называют предшественниками Лобачевского ?

16. Каким было верное решение проблемы V постулата ? Кто и когда заявил об этом ?

17. В чем суть открытия Лобачевского ?

18. Какая насущная задача встала перед геометрами в связи с открытием неевклидовой геометрии ?

19. В чем смысл более высокой ступени абстракции у Гильберта по сравнению с Евклидом ?

20. В чем заслуга Гильберта в вопросах обоснования геометрии ?

П.2. Темы рефератов к разделу "Исторический обзор обоснования геометрии"

Цели написания рефератов:

1) более глубокое изучение истории некоторых проблем обоснования геометрии и их решений, т.е. истории идей и путей к постижению истины;

2) знакомство с биографиями знаменитых математиков разных стран и разных исторических эпох и их вкладом в разрешение проблем логического обоснования геометрии и всей математики;

3) ознакомление с различными аксиоматиками в современных учебниках по геометрии в школах России и их особенностями.

№ варианта	Тема реферата	Литература
1	Развитие геометрии в Древней Греции.	[24], [25], [18]
2	Пифагор и его значение в развитии математики.	[18], [42]
3	Платон и его вклад в развитие геометрии.	[24], [25], [42]
4	Аристотель и его заслуги в развитии математики.	[24], [42]
5	Евклид и его знаменитые "Начала".	[24], [25], [20], [42]
6	Архимед – великий ученый древности.	[25], [11], [42]
7	Попытки доказательства V постулата Евклида.	[25], [38], [37], [40]
8	Исследования Саккери и Ламберта по теории параллельных линий.	[24],[40]
9	Лежандр и его исследования по теории параллельных линий.	[24], [30], [40]
10	Н. И. Лобачевский – ученый и педагог.	[25], [32]
11	Н. И. Лобачевский – основоположник неевклидовой геометрии.	[25], [32]
12	Я. Бояи – один из творцов неевклидовой геометрии	[25], [32]
13	К. Гаусс и его исследования по неевклидовой геометрии.	[15], [25], [32]
14	Проблема V постулата и ее решение.	[24], [40], [38]
15	Аксиоматический метод в геометрии.	[33], [40], [2]
16	Ф. Клейн и его групповой подход к геометрии.	[26], [11], [23]
17	М. Паш, М. Пиери, Дж. Пеано – предшественники Гильберта.	[19], [25], [24]
18	Б. Риман и его геометрические идеи.	[25], [32]
19	Д. Гильберт и его "Основания геометрии".	[19], [36], [40]
20	В. Ф. Каган и его "Основания геометрии".	[24], [25]
21	Г. Вейль и его обоснование евклидовой геомерии.	[22], [43]
22	Н. А. Колмогоров и его аксиоматика евклидовой геометрии.	[11], [28], [29], [22]
23	А. В. Погорелов и его аксиоматика школьного курса геометрии.	[11], [34]
24	Аксиоматика школьного курса геометрии Атанасяна Л. С. и др.	[6], [7], [4]
25	А. Д. Александров и его аксиоматика евклидовой геометрии.	[11], [2]

Глава II. Общие вопросы аксиоматики

Эта глава посвящена некоторым общим вопросам аксиоматики, здесь сами аксиомы становятся объектом изучения. Рассматриваются также проблемы непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом и указываются современные методы их решения.

§ 1. Аксиоматический метод

П.1. Сущность аксиоматического метода построения теории

Эволюция взглядов на природу аксиоматического метода, кратко изложенная в главе I, привела к следующему определению [33].

Аксиоматический метод – это способ дедуктивного построения научной теории, суть которого состоит в следующем:

1.сначала перечисляются основные (неопределяемые) понятия, т.е. основные объекты и отношения;

2.приводится список аксиом – предложений, в которых фиксируются некоторые свойства основных понятий, необходимые для построения теории;

3.все последующие предложения (теоремы), которые не входят в список аксиом, должны быть получены из аксиом при помощи лишь одних логических законов;

4.все понятия, которые не перечислены среди основных, должны быть определены через основные.

С помощью аксиоматического метода научная (аксиоматическая) теория определяется как совокупность определений объектов и отношений и теорем, т.е. доказанных математических утверждений о свойствах, которыми обладают эти объекты и отношения.

Определение: *совокупность неопределяемых понятий и системы аксиом, которым они должны удовлетворять, будем называть аксиоматикой, соответствующей научной теории.*

Только к концу XIX века сложился стандарт требований к логической строгости построения научной теории аксиоматическим методом. Этот стандарт основан на теоретико-множественной концепции. Поэтому необходимо уточнить все понятия, входящие в вышеприведенное описание аксиоматического метода, с точки зрения этой концепции.

П.2. Теоретико-множественное уточнение понятий

Так как в основе любой математической дисциплины лежат теоретико-множественные понятия, а единство в понимании правильности рассуждений обеспечивает математическая логика, то именно теория множеств и математическая логика помогут нам уточнить понятия, входящие в описание аксиоматического метода. Но сначала приведем некоторые известные из курса алгебры педагогического университета сведения, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Основным неопределяемым понятием теории множеств является понятие множества. Множество M состоит из элементов x, про которые говорят, что они принадлежат множеству M. Обозначают это так: $x \in M$ или $M=\{x\}$.

Равенство двух множеств M=N означает, что множества M и N состоят из одних и тех же элементов. Если любой элемент множества A принадлежит множеству M, то говорят, что A есть *подмножество* множества M и пишут $A \subset M$ ($M \supset A$).

Для множеств определяются основные операции, позволяющие по одним множествам строить другие более сложные множества.

(1). Пересечение множеств M_i (i=1, 2, ..., n):

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{x / x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}.$$

(2). Объединение множеств M_i:

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \{x / x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\}.$$

(3). Разность двух множеств M и N:

$$M \setminus N = \{x / x \in M \wedge x \notin N\}.$$

(4). Прямое (декартово) произведение множеств M_i:

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in M_i\}.$$

В частности, если $M_1=M_2=\ldots=M_n=M$, то

$$M \times M \times \ldots \times M = M^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in M\} -$$

это n-я декартова степень множества M.

(5). Для каждого множества M существует множество $\rho(M)$, элементами которого являются все подмножества множества M.

Глава II. Общие вопросы аксиоматики

Эта глава посвящена некоторым общим вопросам аксиоматики, здесь сами аксиомы становятся объектом изучения. Рассматриваются также проблемы непротиворечивости, независимости и полноты системы аксиом и указываются современные методы их решения.

§ 1. Аксиоматический метод

П.1. Сущность аксиоматического метода построения теории

Эволюция взглядов на природу аксиоматического метода, кратко изложенная в главе I, привела к следующему определению [33].

Аксиоматический метод – это способ дедуктивного построения научной теории, суть которого состоит в следующем:

1.сначала перечисляются основные (неопределяемые) понятия, т.е. основные объекты и отношения;

2.приводится список аксиом – предложений, в которых фиксируются некоторые свойства основных понятий, необходимые для построения теории;

3.все последующие предложения (теоремы), которые не входят в список аксиом, должны быть получены из аксиом при помощи лишь одних логических законов;

4.все понятия, которые не перечислены среди основных, должны быть определены через основные.

С помощью аксиоматического метода научная (аксиоматическая) теория определяется как совокупность определений объектов и отношений и теорем, т.е. доказанных математических утверждений о свойствах, которыми обладают эти объекты и отношения.

Определение: *совокупность неопределяемых понятий и системы аксиом, которым они должны удовлетворять, будем называть <u>аксиоматикой</u>, соответствующей научной теории.*

Только к концу XIX века сложился стандарт требований к логической строгости построения научной теории аксиоматическим методом. Этот стандарт основан на теоретико-множественной концепции. Поэтому необходимо уточнить все понятия, входящие в вышеприведенное описание аксиоматического метода, с точки зрения этой концепции.

П.2. Теоретико-множественное уточнение понятий

Так как в основе любой математической дисциплины лежат теоретико-множественные понятия, а единство в понимании правильности рассуждений обеспечивает математическая логика, то именно теория множеств и математическая логика помогут нам уточнить понятия, входящие в описание аксиоматического метода. Но сначала приведем некоторые известные из курса алгебры педагогического университета сведения, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Основным неопределяемым понятием теории множеств является понятие множества. Множество M состоит из элементов x, про которые говорят, что они принадлежат множеству M. Обозначают это так: $x \in M$ или $M=\{x\}$.

Равенство двух множеств $M=N$ означает, что множества M и N состоят из одних и тех же элементов. Если любой элемент множества A принадлежит множеству M, то говорят, что A есть *подмножество* множества M и пишут $A \subset M$ ($M \supset A$).

Для множеств определяются основные операции, позволяющие по одним множествам строить другие более сложные множества.

(1). Пересечение множеств M_i (i=1, 2, ..., n):

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \{x / x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge \ldots \wedge x \in M_n\}.$$

(2). Объединение множеств M_i:

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \{x / x \in M_1 \vee x \in M_2 \vee \ldots \vee x \in M_n\}.$$

(3). Разность двух множеств M и N:

$$M \setminus N = \{x / x \in M \wedge x \notin N\}.$$

(4). Прямое (декартово) произведение множеств M_i:

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in M_i\}.$$

В частности, если $M_1=M_2=\ldots=M_n=M$, то

$$M \times M \times \ldots \times M = M^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in M\} -$$

это n-я декартова степень множества M.

(5). Для каждого множества M существует множество $\rho(M)$, элементами которого являются все подмножества множества M.

Множества M_i (i=1,2,...,n) позволяют строить другие множества с помощью операций (4) и (5): множества их подмножеств, декартовы произведения множеств, например,

$$M_i^m, \rho\left(M_i^m\right), \rho\left(\rho\left(M_i\right)\right), M_i^m \times \rho\left(M_j\right), \ldots, \quad (i, j=1, 2,$$

..., n; m∈N).

В математической логике вводятся следующие логические термины:

	Символы	Значение
1	$\rceil$ ($^{-}$)	*отрицание*; соответствует частице «не» (запись $\rceil$A или $\overline{A}$ означает, что высказывание A ложно)
2	$\wedge$	*конъюнкция*; соответствует союзу «и» (запись A∧B означает, что верно как A так и B)
3	$\vee$	*дизъюнкция*; соответствует союзу «или» (запись A∨B означает, что верно по крайней мере одно из высказываний A или B)
4	$\Rightarrow$	*импликация*; (запись A⇒B означает, что если верно A, то верно и B)
5	$\Leftrightarrow$	*эквивалентно*; (запись A⇔B означает, что одновременно из A следует B и из B следует A)
6	$\forall$	квантор всеобщности
7	$\exists$	квантор существования
8	/	такой, что

Математическая логика позволяет по одним истинным утверждениям получать другие истинные утверждения ([21],[39]).

1. *Объекты.* С точки зрения теории множеств естественно определить объекты как элементы некоторых множеств. Например, точки x – элементы множества E точек(x∈E); прямые l – элементы множества F прямых (l∈F); отрезки – элементы множества L отрезков и т.д.

2. *Основные (неопределяемые) объекты* – это элементы заранее заданных множеств Mi. Например, в аксиоматике Д. Гильберта планиметрии неопределяемыми объектами являются точки и прямые [19], в аксиоматике Г. Вейля – точки и векторы [21], в аксиоматике А.Д. Александрова – точки и отрезки [2]. Совокупность конечного числа множеств M_i (i=1,2,...n) основных объектов некоторой аксиоматики называется *базой* этой аксиоматики.

3. *Отношения* служат в математике для выражения на теоретико-множественном языке связей между объектами. Некоторые объекты $x_i \in M_i$ находятся между собой в определённом отношении Δ, что обозначается $\Delta(x_1, x_2,..., x_n)$, а некоторые нет, т.е. если рассмотреть декартово произведение множеств M_i этих объектов (не обязательно основных), то совокупность тех элементов x_i, которые находятся в данном отношении Δ, образует подмножество в этом декартовом произведении. Это подмножество обозначается обычно тем же символом Δ: $\Delta = \left\{\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \,/\, \Delta\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right\}$.

Из сказанного естественно вытекает такое определение отношения.

Определение: *<u>отношением</u> между элементами множеств Mi называется всякое подмножество Δ декартова произведения этих множеств:* $\Delta \subset M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ (*).

Например, во множестве N натуральных чисел определено отношение «меньше». С теоретико-множественной точки зрения это отношение Δ полностью задаётся указанием всех пар (m, n), таких, что m∈N, n∈N и m<n. Но множество таких пар (m, n) является подмножеством $N\times N=N^2$, т.е. Δ⊂N×N.

Если число сомножителей в декартовом произведении (*) равно 1,2,3,...,n, то отношение Δ называется соответственно унарным, бинарным, тернарным, ... , n-арным (или n-местным). Так отношение Δ_1 принадлежности точки x∈E и прямой b∈F бинарное: $\Delta_1 \subset E\times F$ (α); отношение Δ_2 «лежать между» для трех точек – тернарное: $\Delta_2 \subset E\times E\times E$ (β); отношение Δ_3 параллельности прямых на плоскости – бинарное: $\Delta_3 \subset F\times F$ (℘).

Пусть Δ – множество простых чисел, N – множество натуральных чисел, тогда Δ={x∈N/x – простое число} и Δ⊂N. Следовательно, свойство натурального числа «быть простым числом» может рассматриваться как унарное отношение во множестве N.

Определение: *<u>отношением</u> теории, соответствующей некоторой аксиоматике с базисными множествами Mi (i≥1), называется всякое отношение между элементами множеств Mi и множеств, полученных из них с использованием операций (4) и (5).*

Если указано, что отношение Δ есть подмножество декартова произведения $M_1^{n_1} \times \ldots \times M_k^{n_k}$ (k≥1), где $M_i^{n_i}$ – n_i-я декартова степень множества M_i, то говорят, что указана типизация отношения Δ над базисными множествами Mi.

Так соотношения (α), (β), ($\wp$) дают типизацию отношений Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Определение: *объекты и отношения в совокупности называются* *<u>понятиями</u>* *аксиоматики.*

4. *Основным (неопределяемым) отношением* аксиоматики называется отношение Δ аксиоматики, про которое известна лишь типизация $\Delta \subset M$, где M – конкретное множество, полученное из базисных множеств M_i с помощью операций (4) и (5), и аксиомы данной аксиоматики, которым Δ должно удовлетворять.

Определение: *основные объекты и отношения называются <u>основными понятиями аксиоматики</u>.*

5. *Определяемые объекты и отношения* – это объекты и отношения, которые можно получить из основных объектов и отношений при помощи теоретико-множественных и математико-логических операций. Это значит, что их определения должны содержать только неопределяемые понятия аксиоматики и теоретико-множественные и математико-логические термины.

Например, в аксиоматике Д. Гильберта [19,с.59] отрезком [AB] называется пара различных точек A и B, т.е. $[AB]=\{A,B \in E / A \neq B\}$, $[AB] \subset E \times E$.

А.В. Погорелов ([34],с.172) отрезком [AB] называет множество точек прямой AB, лежащих между точками A и B: $[AB]=\{X \in E / A \overset{*}{X} B\}$, $A,B \in E$, где запись $A \overset{*}{X} B$ означает, что точка X лежит между точками A и B.

В аксиоматике Г. Вейля ([21],с.72) отрезком [AB] называется множество точек $X \in E$ таких, что $\vec{AX} = t \cdot \vec{AB}$, $0 \leq t \leq 1$.

В этой аксиоматике евклидовой плоскости ([4],с.74) две прямые называются параллельными (т.е. находятся в отношении параллельности), если не существует точки их пересечения или они совпадают, т.е. $a//b \Leftrightarrow a=b \vee a \cap b = \varnothing$ (**).

6. *Математическое утверждение.* С точки зрения теории множеств и математической логики математическое утверждение – это высказывание, которое может быть правильно сформулировано, т.е. выражено записью, включающей лишь неопределяемые понятия и основные теоретико-множественные и математико-логические термины. Например, аксиому $I_{1,2}$ [21,с.57]: для любых двух различных точек

A и B существует в точности одна прямая, проходящая через A и B, можно записать следующим образом.

1) База: $E=\{A,B,...\}$ – множество точек, $F=\{a,b,...\}$ – множество прямых.

2) Неопределяемые отношения: Δ_1 – инцидентность (со знаком $\in$) с типизацией $\Delta_1 \subset E \times F$.

3) Тогда сама аксиома может быть записана так: $\forall A,B \in E / A \neq B$ $\exists l \in F / A \in l, B \in l;$ $A \in l', B \in l' \Rightarrow l = l'$, т.е. она является математическим утверждением.

Рассмотрим **<u>теорему T</u>**: две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. Её можно записать следующим образом.

1) База та же, что и выше, E и F.

2) Неопределяемое отношение то же. Отношение параллельности (**) введено выше.

3) Тогда теорема запишется так: a, b, $c \in F$, $(a//b) \wedge (a//c) \Rightarrow b//c$, т.е. эта теорема также является математическим утверждением.

Заметим, что всякое высказывание, содержащее как основные, так и определенные понятия и теоретико-множественные и математико-логические термины, также является математическим утверждением.

7. *Аксиомы и теоремы.* Математические утверждения делятся на аксиомы и теоремы.

Аксиомы – это основные исходные математические утверждения, заранее выбранные и фиксированные, которые считаются истинными и по существу определяют свойства основных объектов и отношений.

Теоремы – это математические утверждения, выводимые чисто логическим путем из аксиом. Логические правила вывода позволяют на основе одного или нескольких истинных высказываний делать вывод об истинности нового высказывания. Истинность теорем устанавливается путем доказательства.

Доказательством называют [39,с.142] конечную последовательность утверждений рассматриваемой теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или более предыдущих утверждений этой последовательности по логическим правилам вывода. Тогда теорема или доказываемое утверждение – это последнее утверждение некоторого доказательства. В виду этого можно сказать, что любая аксиома является теоремой, причем её доказательство состоит из одного шага.

§2. Математическая структура. Примеры структур

П.1. Понятие о математической структуре

В XX веке аксиоматический метод получил свое дальнейшее развитие на основе теории множеств. В 30-е годы XX века было сформулировано понятие математической структуры. Она определяется списком основных отношений и аксиом [13].

Пусть нам дана некоторая конечная система множеств Mi (i=1,2,...,n). Обозначим через $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_m$ некоторые отношения между элементами множеств Mi и полученных из них с помощью операций (4) и (5). Эти отношения мы не будем фиксировать как определённые подмножества декартовых произведений взятых множеств, а лишь укажем их типизацию и потребуем, чтобы они обладали заданными свойствами (аксиомами) A_1, A_2, ..., A_t (2.1), которые мы явно формулируем.

Перечислением множеств M_i основных объектов, совокупности Δ_j (j=1,2,...,m) основных отношений с указанием их типизации, а также аксиом A_k (k=1,2,...,t), которым должны удовлетворять эти отношения, определяется род структур ([14], с. 245), который будем обозначать

$$\Sum(M_i, \Delta_j, A_k) \quad (2.2).$$

Как видим, род структур – это синоним понятия аксиоматики (с. 42), её теоретико-множественное уточнение.

Определение: *<u>математической структурой</u> (или просто структурой) рода Σ называется совокупность отношений Δ_j между элементами некоторых множеств Mi, удовлетворяющих аксиомам A_k.*

Множества M_i – *база,* Δ_j – *основные отношения,* $A_к$ – *аксиомы структур рода Σ.*

Всем структурам одного и того же рода дают специальное название: структура группы, структура n-мерного векторного пространства и т.д.

Часто среди множеств M_i базы структуры некоторые или даже одно играют основную роль. Тогда говорят, что данная структура определена на этом множестве, а остальные базисные множества рассматриваются как вспомогательные. Отношения на этих вспомогательных множествах и аксиомы, которым они удовлетворяют, не перечисляются, а считаются известными.

Рассмотрим теперь научную теорию, в которой в качестве системы аксиом принята система аксиом (2.1) структуры Σ (2.2).

Определение: *совокупность определений и теорем, каждая из которых является логическим следствием из аксиом структуры Σ, называется аксиоматической теорией данной структуры Σ и обозначается $\Im(\Sigma)$.*

Если при описании какой-либо аксиоматической теории используемая система логических правил вывода следствий (теорем) из аксиом этой теории не перечисляется, а считается уже известной, то говорят, что это содержательная неформальная теория. В математической практике аксиоматические теории обычно описываются как неформальные теории, в частности, мы будем строить евклидову геометрию как содержательную теорию. Если же система правил вывода явным образом включается в аксиоматическую теорию, то она называется формальной аксиоматической теорией. Примером такой теории является исчисление высказываний [39].

П.2. Примеры аксиоматик (математических структур).

Аксиоматика эквивалентности.

Отношение Δ между двумя элементами x, y произвольного множества M называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Таким образом, базой соответствующей аксиоматики является одно множество M, отношением эквивалентности (с символом ~) на нём называется бинарное отношение Δ с типизацией $\Delta\subset M^2$, удовлетворяющее аксиомам

A_1. $\forall x\in M \ x\sim x$ (рефлексивность).

A_2. $\forall x,y \ (x\sim y)\Rightarrow y\sim x$ (симметричность).

A_3. $\forall x,y,z \ (x\sim y, y\sim z)\Rightarrow x\sim z$ (транзитивность).

При этой структуре множество M разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности, когда каждый класс состоит из эквивалентных элементов.

Определение: *множество всех классов эквивалентности данного отношения Δ эквивалентности на множестве M называется <u>фактор-множеством</u> множества M по отношению Δ. Оно обозначается M/Δ.*

Задание. Приведите примеры отношений эквивалентности из курса геометрии.

Аксиоматика отображения.

Как известно, отображением f множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_к$ в множество N называется такой факт, когда упорядоченному набору $(x_1, \ldots, x_к)$ элементов $x_i \in Mi$ соответствует один элемент $y \in N$. Пишут $f: M_1 \times \ldots \times M_k \to N$ и $y=f(x_1,\ldots,x_K)$.

Итак, база соответствующей аксиоматики состоит из к+1 множества $M_1, \ldots, M_к, N$, основное отношение Δ – это (к+1)-арное отношение с типизацией $\Delta \in M_1 \times \ldots \times M_к \times N$, удовлетворяющее аксиомам:

A_1. $\forall x_i \in Mi,\ \exists y \in N \,/\, (x_1,x_2,\ldots,x_k,y) \in \Delta$.

A_2. $\left.\begin{matrix}(x_1,\ldots,x_k,y_1)\in\Delta \\ (x_1,\ldots,x_k,y_2)\in\Delta\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2$.

Говорят, что отображение f порождено отношением Δ. При этом элементы $x_i \in Mi$ и $y \in N$ находятся в отношении Δ, если $y=f(x_1,\ldots,x_к)$.

Например, если на множестве M определено отношение эквивалентности Δ, то оно позволяет построить отображение $M \to M/\Delta$, которое каждому элементу $x \in M$ ставит в соответствие тот класс эквивалентности фактор-множества M/Δ, в который он входит. Это отображение $M \to M/\Delta$ называется факторизацией множества M по отношению Δ.

Определение: *пусть к=2 и $M_1=M_2=N=M$ (отношение $\Delta \subset M^3$). Отображение $\varphi: M \times M \to M$ называется* <u>*внутренним законом композиции*</u> *или алгебраической операцией на M.*

Определение: *если к=2 и $M_2=N=M$ (отношение $\Delta \subset M_1 \times M \times M$), т.е. имеем отображение $M_1 \times M \to M$, то оно называется внешним законом композиции со множеством операторов в M_1.*

Например, умножение вектора на действительное число – это внешний закон композиции $R \times V \to V$.

Определение: *взаимооднозначное отображение множества на себя называется* <u>*преобразованием*</u>.

Задание. Приведите примеры преобразований.

Таким образом, при помощи отношений, заданных во множествах, можно определять как отображения одних множеств в другие, так и законы композиции на множествах.

В статье «Архитектура математики» [13] знаменитого коллектива французских математиков, публиковавших свои научные труды под псевдонимом «Николя Бурбаки», выделяются три основных («чистых») типа математических структур. Алгебраической они называют структуру, основные отношения которой порождают законы

композиции (алгебраические операции). В качестве примера такой структуры приведем «структуру группы».

Структура группы.

База структуры состоит из одного множества $G \neq \varnothing$, а совокупность основных отношений – из одного отношения Δ с типизацией $\Delta \subset G^3$, которое удовлетворяет четырём аксиомам:

A_1. Δ – алгебраическая операция на G, т.е. $G \times G \to G$.

A_2. $\forall\, x,y,z \in G\quad (x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z)$ (ассоциативность операции).

A_3. $\exists e \in G / \forall x \in G\quad x\Delta e = e\Delta x = x$ (существование в G нейтрального элемента e).

A_4. $\forall x \in G\ \exists x' \in G\ \ x\Delta x' = x'\Delta x = e$ (существование в G симметричного элемента x′ для $\forall x \in G$).

Если, кроме того, выполняется аксиома, утверждающая коммутативность операции **A_5** $\forall x,y \in G\quad x\Delta y = y\Delta x$, то группа называется коммутативной или абелевой.

Задание. Приведите примеры групп и абелевых групп.

Другой важный тип представляет собой структура, определяемая отношением порядка между двумя элементами x, y, которая чаще всего выражается словами « x меньше или равно y».

Структура частично упорядоченного множества.

База состоит из одного множества M, основное отношение Δ-это бинарное отношение с типизацией $\Delta \subset M^2$, удовлетворяющее аксиомам:

A_1. $\forall x \in M\ x\Delta x$ (рефлексивность).

A_2. $\forall x,y \in M\ (x\Delta y) \wedge (y\Delta x) \Rightarrow x=y$ (антисимметричность).

A_3. $\forall x,y,z \in M\quad (x\Delta y) \wedge (y\Delta z) \Rightarrow x\Delta z$ (транзитивность).

Множество $M \neq \varnothing$ в этом случае называется частично упорядоченным множеством [13], [22].

Например, отношение включения для подмножеств множества A является отношением частичной упорядоченности на множестве $\rho(A)$ всех подмножеств множества A.

Для записи частичной упорядоченности обычно используется знак «≤«.При этом, если $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$, пишут $x<y$ или $y>x$ и говорят, что «x меньше y», а «y больше x» или что «x предшествует y», а «y следует за x». Заметим, что бинарное отношение «<« уже не является рефлексивным. Частично упорядоченное множество M называется упорядоченным (или линейно упорядоченным) множеством, если для $\forall x,y \in M$ имеет место одно и только одно из трёх соотношений: $(x<y) \vee (x=y) \vee (x>y)$.

Задание. Приведите примеры упорядоченных и частично упорядоченных множеств.

И, наконец, третий из основных типов структур по Бурбаки.

Топологическая структура (или топология).

Как известно [4], топологическое пространство – это множество X элементов любой природы, среди подмножеств которого выделены открытые, удовлетворяющие свойствам: X и $\varnothing$ – открытые, пересечение любых двух открытых множеств – открытое, объединение любого числа открытых множеств – открытое.

Таким образом, база топологической структуры состоит из одного множества X. Структуру на нем определяет одно унарное отношение $\Delta=\tau$ («открытость») с типизацией $\tau \subset \rho(X)$, удовлетворяющее трем аксиомам:

A₁. $X, \varnothing \in \tau$.

A₂. $\forall U_\lambda \in \tau$ (λ пробегает любое конечное или бесконечное множество индексов Λ) $\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \tau$.

A₃. $\forall U, V \in \tau \Rightarrow U\cap V \in \tau$.

Как видим, здесь основное отношение определено не только между элементами одного множества X, но и между элементами множества $\rho(x)$, полученного из X с помощью операции (5).

Топологическим пространством является, например, евклидова плоскость E_2, если на ней открытым подмножеством назвать такое $G\subset E_2$, что для любой точки $x\in G$ найдётся её ε-окрестность $O\varepsilon(x)$, целиком содержащаяся в G. Здесь $O\varepsilon(x)$-открытый круг с центром в точке x и радиуса ε.

Итак, $G\in\tau \Leftrightarrow \forall x\in G\ \exists O\varepsilon(x) \subset G$.

Задание. Проверьте, что для определённых таким образом открытых множеств выполняются аксиомы топологии.

Рассмотрим теперь важнейшую математическую структуру, которая используется при определении различных математических структур и представляет особый интерес для учителя математики.

Структура множества действительных чисел .

Базой этой структуры является одно множество R, элементы которого будем называть действительными числами и обозначать греческими буквами α, β, $\wp$, ... Для краткости речи действительные числа будем называть просто числами. Совокупность основных отношений

составлена из трёх отношений Δ_1 с типизацией $\Delta_1\subset R^3$, Δ_2 с типизацией $\Delta_2\subset R^3$ и Δ_3 с типизацией $\Delta_3\subset R^2$.Δ_1 и Δ_2 являются алгебраическими операциями $R\times R\rightarrow R$ и называются соответственно сложением (с символом «+») и умножением (с символом «•«). Δ_3-это бинарное отношение порядка (с символом «<«). Если $\alpha<\beta$, то говорят, что число α меньше числа β, а число β больше числа α.

Система аксиом состоит из пяти аксиом.

A₁. R – коммутативная группа относительно операции сложения. Нейтральный элемент обозначается O.

A₂. $R\backslash\{0\}$ – коммутативная группа по умножению. Нейтральный элемент – единица обозначается 1.

A₃. Операции сложения и умножения связаны дистрибутивным законом $\alpha(\beta+\wp)=\alpha\beta+\alpha\wp$.

Определение: *математическая структура $\{R;+,\ \bullet; A_1,A_2,A_3\}$ называется структурой поля или просто полем.*

A₄. Аксиома порядка и монотонности: $(\forall\alpha,\beta\in R/\ \alpha\neq\beta) \Rightarrow (\alpha<\beta) \vee (\beta<\alpha)$, причем: а) $\forall \wp\in R\ (\alpha<\beta)\wedge(\beta<\wp) \Rightarrow (\alpha<\wp)$,

б) $\forall \wp\in R\ (\alpha<\beta) \Rightarrow \alpha+\wp<\beta+\wp$,

в) $\forall \wp>0\ (\alpha<\beta) \Rightarrow \alpha\cdot\wp<\beta\cdot\wp$.

A₅. Аксиома непрерывности Дедекинда: если все числа разбиты на два непустых класса I и II так, что любое число класса I меньше любого числа класса II, то существует либо наибольшее число в классе I, либо наименьшее число в классе II.

Из аксиомы A_5 следует предложение Дедекинда для числового промежутка $[\alpha,\beta]$, которое получается сужением аксиомы A_5 на этот промежуток.

Натуральными числами в R называются определённые по индукции числа 1, 2=1+1, 3=2+1, 4=3+1,... Множество натуральных чисел в R обозначается N.

Из этого определения N следует: 1) $1\in N$, 2)$\forall n\in N\ \ n+1\in N$.

Можно доказать, что N удовлетворяет аксиоматике Пеано натуральных чисел [17].

Натуральные числа 1, 2, 3, ..., им противоположные числа -1, -2, -3, ... и число 0 называются *целыми* числами в R, их множество обозначается Z.

Действительные числа вида $\frac{m}{n}$, где $m\in Z$ $n\in Z\backslash\{0\}$, называются *рациональными* в R, их множество обозначается Q.

Любое действительное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным.*

Числа, большие нуля (меньшие нуля), называются положительными (отрицательными). Будем обозначать через R_+ – множество всех неотрицательных действительных чисел, а через $\overline{R_+}$ – множество всех положительных действительных чисел, т.е. $R_+=\{\alpha\in R/\ \alpha\geq 0\}$, $\overline{R_+}=\{\alpha\in R/\ \alpha>0\}$, $\overline{R_+}=R_+\backslash\{0\}$.

Можно доказать, что аксиому Дедекинда A_5 можно заменить аксиомами Архимеда и Кантора.

Аксиома Архимеда: $\forall\alpha,\beta\in \overline{R_+}\ \exists n\in N/n\alpha>\beta$.

Определение: *система отрезков* $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$ *называется* *вложенной системой, если* $[\alpha_n,\beta_n]\subset R$ *и* $\forall n\in N\ \ [\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\beta_n]$.

Аксиома Кантора: пусть в R дана вложенная система отрезков $\{[\alpha_n,\beta_n]\}$, тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n,\beta_n\right]\neq\varnothing$, т.е. $\exists\wp\in R/\ \wp\in[\alpha_n,\beta_n]\quad\forall n\in N$.

Структура евклидова векторного пространства.

Рассмотрим структуру n-мерного евклидова векторного пространства над полем действительных чисел R.

База этой структуры состоит из двух множеств V (его элементы-векторы) и R, причём множество R считается вспомогательным, его аксиомы приведены выше.

Итак, основные объекты структуры – это элементы множества V, называемые векторами, которые обозначаются $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ .... Перечислим теперь основные отношения, их три: Δ_1, с типизацией $\Delta_1\subset V^3$, Δ_2 с типизацией $\Delta_2\subset R\times V^2$, Δ_3 с типизацией $\Delta_3\subset V^2\times R$. Никакого конкретного содержания в основные объекты и отношения не вкладывается, требуется только, чтобы они удовлетворяли всем аксиомам структуры. Аксиомы структуры распределяются на четыре группы.

I. Аксиомы сложения.

Первая группа аксиом описывает алгебраическую операцию φ_1:$V\times V\rightarrow V$, которая порождается основным отношением Δ_1 и называется *сложением векторов.* Эта операция позволяет любым двум векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ отнести третий вектор – их сумму $\varphi_1(\bar{x},\bar{y})=\bar{x}+\bar{y}$ так, что выполняются следующие четыре аксиомы:

I₁. $\forall\ \bar{x},\bar{y}\in V\qquad \bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$.

I₂. $\forall\ \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V\qquad \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$.

I₃. $\exists\ \bar{0}\in V/\forall\ \bar{x}\in V\quad \bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$.

I₄. $\forall\ \bar{x}\in V\ \exists\ \bar{x}'\in V/\quad \bar{x}+\bar{x}'=\bar{0}$.

Вектор $\bar{x}'$ называется *противоположным* вектору $\bar{x}$; вектор $\bar{0}$ называется *нулевым* вектором.

II. Аксиомы умножения вектора на число.

Вторая группа аксиом описывает внешний закон композиции φ_2: $V\times R\rightarrow V$, порождаемый основным отношением Δ_2 и называемый *умножением вектора на число.* При этом каждому вектору $\bar{x}$ и каждому действительному числу α однозначно сопоставляется вектор $\varphi_2(\alpha,\bar{x})=\alpha\bar{x}$, который называется произведением вектора $\bar{x}$ на число α. Это отношение должно удовлетворять следующим аксиомам:

II₁. $\forall\alpha\in R,\forall\ \bar{x},\bar{y}\in V\quad \alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{y}+\alpha\bar{x}$.

II₂. $\forall\alpha,\beta\in R,\forall\ \bar{x}\in V\quad (\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$.

II₃. $\forall\alpha,\beta\in R,\forall\ \bar{x}\in V\quad (\alpha\beta)\bar{x}=\alpha(\beta\bar{x})$.

II₄. $\forall\ \bar{x}\in V\qquad 1\cdot\bar{x}=\bar{x}$.

Определение: *Система векторов* $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k$ *называется линейно независимой , если равенство* $\alpha_1\bar{x}_1+\alpha_2\bar{x}_2+\ldots+\alpha_k\bar{x}_k=\bar{0}$, *где* $\alpha_i\in R$ (i=1, 2, ..., k), *возможно лишь в том случае, когда все* $\alpha_i=0$; в *противном случае эта система векторов линейно зависима.*

III. Аксиомы размерности.

III₁. Существуют в V n линейно независимых векторов.

III₂. Любые n+1 векторов линейно зависимы.

Определение: *Множество* V , *для элементов которого определены операции сложения и умножения их на действительные числа так, что выполняются аксиомы* I_1-I_4, II_1-II_4,III_1,III_2, *называется n-мерным линейным (векторным) пространством над полем R и обозначается символом* V_n.

При n=3 получаем 3- мерное векторное пространство V_3, аксиомы размерности для которого формулируются так:

III'₁. Существуют 3 линейно независимых вектора.

III'₂. Любые 4 вектора линейно зависимы.

IV. Аксиомы скалярного умножения.

Четвертая группа аксиом описывает операцию φ_3:V×V→R, которая порождается основным отношением Δ_3 и называется *скалярным умножением векторов*. При этом любым двум векторам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ однозначно сопоставляется действительное число $\varphi_3(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}\cdot\bar{y} = \alpha$, которое называется *скалярным произведением векторов*. Перечислим аксиомы скалярного произведения векторов.

IV$_1$. $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in V \qquad \bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$.

IV$_2$. $\forall\ \alpha \in R, \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in V \qquad (\alpha\cdot\bar{x})\,\bar{y} = \alpha(\bar{y}\cdot\bar{x})$.

IV$_3$. $\forall\ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V \qquad (\bar{x}+\bar{y})\cdot\bar{z} = \bar{x}\cdot\bar{z} + \bar{y}\cdot\bar{z}$.

IV$_4$. $\forall\ \bar{x} \in V\ (\bar{x} \neq \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x}\cdot\bar{x} > 0)\,(\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{x}\cdot\bar{x} = 0)$.

Аксиомы I-IV групп аксиом определяют на V структуру n-мерного евклидова векторного пространства $\bar{V}_n$.

Итак, $\bar{V}=\{V;\ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3;\ I_1\text{-}I_4;\ II_1\text{-}II_4;\ III_1, III_2;\ IV_1\text{-}IV_4\}$.

Структура евклидова n-мерного пространства E_n по Вейлю.

Базу этой структуры составляют два множества: основное множество E_n – множество точек и вспомогательное множество $\bar{V}_n$ – n-мерное евклидово векторное пространство. Основные объекты – это точки A, B, C, ... и векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\dots$ Структура пространства E_n определяется еще одним отношением Δ_4 с типизацией

$$\Delta_4 \subset E_n \times E_n \times \bar{V}_n = E^2_n \times \bar{V}_n .$$

Оно порождает отображение φ_4: $E_n\times E_n \to \bar{V}_n$, которое называется *сопоставлением двум точкам вектора* или *откладыванием вектора от точки*, т.е. $\forall\ A,B \in E_n\ \ \exists\ \bar{a}\in V\ /\ \overrightarrow{AB} = \bar{a}$. При этом должны выполняться такие две аксиомы:

V$_1$. $\forall\ A \in E_n, \forall\ \bar{a} \in \bar{V}_n\ \exists\ B \in E_n\ /\ \overrightarrow{AB} = \bar{a}$, причем $(\overrightarrow{AB} = \bar{a}) \wedge (\overrightarrow{AC} = \bar{a}) \Rightarrow B = C$ – аксиома откладывания вектора от точки.

V$_2$. $\forall\ A,B,C \in E_n\ \ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ – аксиома треугольника.

Если вместо евклидова векторного пространства брать линейное векторное пространство V_n, то структура $(E_n, V_n;\ \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4;\ I_1\text{–}I_4;\ II_1\text{–}II_4;\ III_1, III_2;\ IV_1\text{-}IV_4)$ называется структурой n-мерного аффинного пространства. Оно обозначается A_n.

Такое так называемое «векторное» определение структуры евклидова пространства было предложено известным немецким математиком Германом Вейлем (1885-1955) в 1918 году. В качестве вспомогательной структуры Г.Вейль использует евклидово векторное пространство, элементы которого играют роль операторов в пространстве точек. Размерность векторного пространства определяет размерность точечного пространства. Аксиоматика Вейля переводит теорию евклидова пространства на язык линейной алгебры.

Простота этой аксиоматики, ее пригодность для обоснования геометрий многомерных пространств, алгоритмизация теории на основе линейной алгебры сделали аксиоматику Вейля наиболее употребительной в современной геометрии и ее приложениях. Использование векторных пространств позволяет построить в «духе Вейля» аксиоматики неевклидовых пространств, придав тем самым известное единообразие обоснованию различных геометрий.

Мы рассмотрели определения некоторых математических структур. Теперь можно строить соответствующие им аксиоматические теории: теорию групп, теорию полей, теорию действительных чисел, теорию линейных и евклидовых векторных пространств, теорию (геометрию) аффинных и евклидовых пространств и т.д. Итак, математика изучает различные математические структуры, которые могут встречаться в различных предметных её областях. Основным её методом является аксиоматический метод: каждая специальная структура определяется соответствующей системой аксиом, а дальше чисто логическим путем строится теория этой структуры.

«Таким образом, хотя математика в наше время и является чрезвычайно обширной областью знаний, имеющей многочисленные разделы и на первый взгляд разобщенные направления исследования, можно сказать, что математика – это единая наука. Её предмет исследования – множество математических структур; её основной метод – аксиоматический метод.»[4].

§3. Понятие модели (интерпретации) системы аксиом. Изоморфизм моделей

П.1. Понятие модели

Отвлеченно рассматриваемая аксиоматика сама по себе ни к чему сколько-нибудь определенному не относится. Ее основные объекты могут быть любой природы и основные отношения могут иметь любой конкретный смысл (это фактически только термины или символы), важно лишь, чтобы для них выполнялись все аксиомы данной структуры.

Однако абстрактность понятий современной математики вовсе не означает отхода от задач, которые возникают при изучении реального мира. Наоборот, аксиоматические теории успешно применяются на практике в самых неожиданных ситуациях, где удается подходящим образом найти объекты и связать их первоначальными отношениями так, чтобы все аксиомы структуры были выполнены.

Пусть рассматривается абстрактная аксиоматическая теория $\Im(\Sigma)$ некоторой математической структуры (или аксиоматики) $\Sigma(M_i; \Delta_j; A_k)$, где $i=1, ..., n; j=1, ..., m; k=1, ..., t$. Систему аксиом этой структуры обозначим через A: $A=\{A_k\}$.

Определение: *всякий набор конкретных множеств* M_i, *на которых можно придать конкретный смысл отношениям* Δ_j *так, что выполняются все аксиомы системы* A_k *, называется* <u>*моделью*</u> *или* <u>*интерпретацией*</u> *данной структуры* Σ.

Эту модель будем называть также моделью аксиоматики Σ или моделью системы аксиом A структуры Σ и обозначать $J(\Sigma)$ или $J(A)$.

Заметим, что абстрактная аксиоматическая теория не придумывается произвольно. Сначала изучается реально существующая система вещей (потом она будет играть роль модели), собирается материал, который можно аксиоматизировать и который освобождается от ненужных (для логического построения) свойств, и получается абстрактная теория. Затем для нее находятся другие модели.

Если бы для абстрактной теории существовала только одна модель, то эта теория была бы бесполезной. Ценность абстрактной теории заключается в том, что она допускает разные истолкования (модели), для которых не требуется решать проблемы и заново доказывать теоремы. В абстрактной теории это уже сделано для всех моделей, которые известны и которые еще когда-нибудь будут открыты.

П.2. Изоморфизм моделей

При изучении моделей данной аксиоматики большое значение имеет понятие изоморфизма двух моделей. Рассмотрим аксиоматику $\Sigma(M_i; \Delta_j; A_k)$. Пусть на некотором конкретном множестве M' мы придали конкретный смысл Δ'_j отношениям Δ_j так, что выполняются все аксиомы $A_к$. Можно сказать, что на множестве M′ определена структура Σ. Пусть на другом конкретном множестве M" таким же путем определена структура Σ с конкретным смыслом Δ''_j отношений Δ_j. Модели M' и M" будут *изоморфными,* если существует биекция f: $M'\to M''$ такая, что $(x', y', ..., v')\in\Delta'_j \Rightarrow (f(x'), f(y'),...,f(v'))\in\Delta''_j$, т.е. если элементы $(x', y', ..., v')\in M'$ находятся в отношении Δ'_j, то соответствующие им элементы $(f(x'), f(y'), ..., f(v')) \in M''$ находятся в одноименном отношении Δ''_j. Сама биекция f называется *изоморфизмом* этих моделей.

Определение: <u>*две модели*</u> *данной аксиоматики называются* <u>*изоморфными,*</u> *если между элементами базисных множеств (основными объектами) этих моделей можно установить биективное отображение, при котором соответствующие элементы находятся в одноименных основных отношениях.*

Например, рассмотрим структуру абелевой группы $\Sigma(G; \Delta; A_1–A_5)$ (пример 3, § 2). Пусть $J'(\Sigma)=(G'= R$; «+»; $A_1–A_5)$ – одна модель абелевой группы (здесь G' – множество R действительных чисел как группа по сложению), а $J''(\Sigma)=(G'' = R_+$; «·»; $A_1–A_5)$ – другая модель абелевой группы (здесь G" – множество R_+ положительных действительных чисел как группа по умножению).

Установим биекцию f: $R_+ \to R$ по закону: $f(x)=\ln x$.

Так как $\ln(x\cdot y)= \ln x +\ln y$, то $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, в силу чего модели J' и J" изоморфны.

Заметим, что существуют аксиоматики, имеющие бесчисленное множество неизоморфных друг другу моделей (например, аксиоматика группы).

§4.Требования, предъявляемые к системе аксиом

Из курса геометрии нам известно аксиоматическое построение теорий аффинного, евклидова, проективного, псевдоевклидова и других пространств. Причем, как мы видели, построение даже одной и той же евклидовой геометрии можно осуществить с помощью довольно различных аксиоматик: Гильберта, Вейля, Погорелова, Колмогорова, Александрова, Атанасяна и других. Естественно возникает вопрос, насколько велик произвол в выборе системы аксиом той или иной аксиоматики. Ясно, что этот произвол не может быть абсолютным, следовательно, всякая система аксиом должна удовлетворять определенным требованиям.

Во-первых, требуется, чтобы система аксиом была *непротиворечивой*, т.е. чтобы из нее нельзя было логическим путем получить два отрицающих друг друга следствия. В противном случае система аксиом не имеет никакого практического смысла.

Во-вторых, желательно, чтобы аксиомы системы были *независимыми*, т.е. не являлись следствиями остальных. Ясно, что зависимые аксиомы можно исключить из системы аксиом без ущерба для объема следствий, из нее вытекающих.

В-третьих, система аксиом соответствующей теории должна быть *полной*, т.е. ее нельзя пополнить новыми аксиомами, не вводящими новых отношений, которые бы не противоречили уже принятым и не следовали бы из них. В этом случае аксиом системы достаточно для доказательства или опровержения всякого предложения теории.

Итак, основными требованиями, предъявляемыми к системе аксиом, являются требования непротиворечивости или совместности, независимости или минимальности, полноты.

Выясним, как проверяется выполнение этих требований для той или иной системы аксиом.

П.1. Непротиворечивость системы аксиом

Определение: *система аксиом называется (внутренне или логически) непротиворечивой, если среди аксиом и их логических следствий не содержится двух утверждений, отрицающих друг друга (T и ⌉T).*

Будем называть логически непротиворечивой и аксиоматику Σ с непротиворечивой системой аксиом $\{A_k\}$, а также аксиоматическую теорию $\Im(\Sigma)$.

Так как совокупность различных утверждений, которые можно вывести из данной системы аксиом, вообще говоря, бесконечна, то невозможно доказать внутреннюю непротиворечивость $\Im(\Sigma)$, получив все ее утверждения и показав, что среди них нет противоречащих друг другу. Для преодоления этой трудности был разработан особый метод, названный *методом интерпретации.*

Заметим, что чаще всего интерпретация данной аксиоматики Σ строится на объектах и отношениях между ними (не обязательно основных) другой аксиоматики $\bar{\Sigma}$, т.е. на понятиях теории $\Im(\bar{\Sigma})$, которая уже известна, изучена. Для построение интерпретации аксиоматики Σ сначала создается словарь интерпретации, в котором каждому основному понятию аксиоматики Σ приписывается конкретный смысл в терминах теории $\Im(\bar{\Sigma})$. Тогда каждое определяемое понятие аксиоматики Σ также получит определенный смысл в терминах теории $\Im(\bar{\Sigma})$. В результате этого каждое предложение теории $\Im(\Sigma)$ становится предложением теории $\Im(\bar{\Sigma})$.Оно может быть истинным, ложным, неопределенным, бессмысленным.

Интерпретация считается построенной, если все аксиомы A_k аксиоматики Σ являются истинными утверждениями в теории $\Im(\bar{\Sigma})$.

Таким образом получается интерпретация аксиоматики Σ в аксиоматике $\bar{\Sigma}$.

Определение: *система аксиом $\{A_k\}$ (и соответствующая аксиоматика $\Sigma(M_i; \Delta_j; A_k)$) называется <u>условно непротиворечивой</u> (или <u>содержательно непротиворечивой</u>), если аксиоматика Σ имеет интерпретацию в другой аксиоматике $\bar{\Sigma}$, т.е. если существует модель аксиоматики Σ.*

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы система аксиом $\{A_k\}$ аксиоматики $\Sigma(M_i; \Delta_j; A_k)$ была условно непротиворечивой, необходимо и достаточно, чтобы существовала интерпретация аксиоматики Σ в некоторой непротиворечивой аксиоматике $\bar{\Sigma}(\bar{N}_{i'}; \bar{\Delta}_{j'}; \bar{A}_{k'})$.

Доказательство.

□*Достаточность.* Пусть аксиоматика $\bar{\Sigma}$ и теория $\Im(\bar{\Sigma})$ непротиворечивы и существует интерпретация аксиоматики Σ в аксиоматике $\bar{\Sigma}$. Тогда аксиомы A_k будут теоремами в теории $\Im(\bar{\Sigma})$, а всевозможные следствия из аксиом $A_к$ станут следствиями из аксиом $\overline{A}_{k'}$. Предположим, что система аксиом $\{A_k\}$ противоречива, тогда отрицающим друг друга следствиям T и $\rceil$T из нее в теории $\Im(\overline{\Sigma})$ соответствуют противоречивые следствия из аксиом $\overline{A}_{k'}$. Поэтому система аксиом $\overline{A}_{k'}$, а следовательно, и теория $\Im(\overline{\Sigma})$ также противоречивы, что невозможно в силу условия теоремы.

Значит, противоречивых следствий из системы аксиом $\{A_k\}$ нет и она непротиворечива.

Необходимость очевидна, так как, если аксиоматика Σ непротиворечива, то она сама для себя является тривиальной интерпретацией в непротиворечивой аксиоматике■.

Здесь вопрос о непротиворечивости решается в условном смысле: аксиоматика $\sum$ непротиворечива, если непротиворечива та теория $\Im(\overline{\Sigma})$, на понятиях которой строится модель аксиоматики Σ.

В математике непротиворечивость той или иной системы аксиом устанавливается именно как условная. При этом ее основным понятиям приписываются значения понятий из теории множеств или из теории действительного числа, уверенность в непротиворечивости которых основывается на многовековом развитии и применении математики.

П.2. Непротиворечивость системы аксиом Вейля евклидова пространства E_3

Перейдем к доказательству непротиворечивости аксиоматики Вейля трехмерного евклидова пространства E_3 (примеры 7, 8, §2), которую будем обозначать $\sum_w$. С этой целью построим модель аксиоматики $\sum_w$, называемую *арифметической*, так как ее точки и векторы являются наборами действительных чисел.

Сначала составим так называемый интерпретационный словарь, где дадим определения основных понятий аксиоматики $\sum_w$ через понятия арифметики действительного числа.

1) *Вектором* назовем столбец из трех элементов, т.е.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \text{ где } a_1, a_2, a_3 \in R.$$

2) *Суммой двух векторов* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ назовем сумму соответствующих матриц, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.

3) *Произведением вектора* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *на число* $\alpha \in R$ назовем произведение соответствующей матрицы на это число, т.е. $a \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

4) *Скалярным произведением* вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ назовем число $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

5) *Точкой* назовем строку из трех элементов, т.е. $A = (x_1\ x_2\ x_3)$, где $x_1, x_2, x_3 \in R$.

6) Пусть $A = (x_1\ x_2\ x_3)$, $B = (y_1\ y_2\ y_3)$ – две произвольные точки, а $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ – вектор. Будем считать, что упорядоченной паре точек A и B поставлен в соответствие вектор $\vec{a}$, если $\vec{a} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$.

Теперь необходимо показать, что для конкретных понятий с определениями 1)–6) верны все аксиомы $\sum_w$.

I$_1$. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.

Эта аксиома верна в силу коммутативности сложения действительных чисел. В самом деле, очевидно, что $\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ b_2+a_2 \\ b_3+a_3 \end{pmatrix}$.

I₂. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

Это равенство справедливо в силу ассоциативности сложения действительных чисел.

I₃. $\exists\ \bar{0}\ /\forall\ \bar{a}\in \bar{V}_3\ \ \bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$.

В качестве $\bar{0}$ рассмотрим вектор $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что

$$\vec{a}+\vec{0}=\begin{pmatrix} a_1+0 \\ a_2+0 \\ a_3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\vec{a}.$$

I₄. $\forall\ \bar{a}\in \bar{V}_3\ \exists\ \bar{a}'\in \bar{V}_3 /\ \bar{a}+\bar{a}'=\bar{0}$.

Пусть $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, а в качестве вектора $\bar{a}'$ рассмотрим вектор

$\vec{a}'=\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$. Тогда $\vec{a}+\vec{a}'=\begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ a_2+(-a_2) \\ a_3+(-a_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{0}$.

II₁. $\alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}$.

В силу наших определений 1), 2), 3) имеем

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) \\ \alpha(a_2+b_2) \\ \alpha(a_3+b_3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1 \\ \alpha a_2+\alpha b_2 \\ \alpha a_3+\alpha b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{pmatrix}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

,т.е. равенство II₁ верно.

II₂. $(\alpha+\beta)\ \bar{a}=\alpha\ \bar{a}+\beta\ \bar{a}$.

Справедливость этого равенства доказывается аналогично.

II₃. $(\alpha\beta)\ \bar{a}=\alpha(\beta\ \bar{a})$.

II₄. $1\cdot\ \bar{a}=\bar{a}$.

Равенства II₃ и II₄ справедливы в силу определения 3) и свойств действий над действительными числами и матрицами.

III₁. Существует тройка линейно независимых векторов.

Рассмотрим векторы $\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Покажем, что они линейно независимы. Для этого выясним, при каких α_1, α_2, α_3 может быть верным равенство $\alpha 1\ \bar{e}1+\alpha 2\ \bar{e}2+\alpha 3\ \bar{e}3=\bar{0}$. В силу определений 1), 2), 3) последнее равенство равносильно следующему:

$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а это означает, что обязательно $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Тогда по определению векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ линейно независимы.

III₂. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Как мы знаем, аксиомы I₁-I₄ и II₁-II₄ задают на множестве векторов структуру векторного пространства. Для того, чтобы показать, что в векторном пространстве не существует четырех линейно независимых векторов, надо доказать, что всякий вектор этого пространства можно линейно выразить через одни и те же три линейно независимых вектора. Пусть $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ – произвольный вектор, тогда

$$\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix}=d_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+d_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+d_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

$$=d_1\vec{e}_1+d_2\vec{e}_2+d_3\vec{e}_3$$

Следовательно, в этой модели нет четырех линейно независимых векторов.

IV₁. $\bar{a}\ \bar{b}=\bar{b}\ \bar{a}$.

IV₂. $(\alpha\ \bar{a})\ \bar{b}=\alpha(\ \bar{a}\ \bar{b})$.

IV₃. $(\ \bar{a}+\bar{b})\ \bar{c}=\bar{a}\ \bar{c}+\bar{b}\ \bar{c}$.

IV₄. $\bar{a}\,\bar{a}>0$ при $\bar{a}\neq\bar{0}$, $\bar{a}\,\bar{a}=0 \Leftrightarrow \bar{a}=\bar{0}$.

Справедливость аксиом IV группы вытекает из определения 4) и свойств действительных чисел.

V₁. $\forall\, A\in E_3,\ \forall\, \bar{a}\in \bar{V}3\ \exists!\, B\in E_3 \,/\, AB=\bar{a}$.

Пусть $A=(x_1\ x_2\ x_3)$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$. Будем искать $B=(y_1\ y_2\ y_3)$ такую, что

$$\begin{pmatrix}y_1-x_1\\y_2-x_2\\y_3-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \text{ т.е. такую, что } \begin{cases}y_1-x_1=a_1\\y_2-x_2=a_2\\y_3-x_3=a_3\end{cases}.$$

Очевидно, что из этих равенств всегда и однозначно можно найти $y_1=a_1+x_1$, $y_2=a_2+x_2$, $y_3=a_3+x_3$, т.е. точка $B=(a_1+x_1\ a_2+x_2\ a_3+x_3)$ существует и единственная.

V₂. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Пусть $A=(x_1\ x_2\ x_3)$, $B=(y1\ y2\ y3)$, $C=(z1\ z2\ z3)$. В силу определения 6): $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}y_1-x_1\\y_2-x_2\\y_3-x_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}z_1-y_1\\z_2-y_2\\z_3-y_3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}z_1-x_1\\z_2-x_2\\z_3-x_3\end{pmatrix}$.

В силу определения 2): $\begin{pmatrix}y_1-x_1\\y_2-x_2\\y_3-x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z_1-y_1\\z_2-y_2\\z_3-y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_1-x_1\\z_2-x_2\\z_3-x_3\end{pmatrix}$, что и требовалось доказать.

Итак, модель системы аксиом Вейля построена. Из этого факта следует вывод: аксиоматика Вейля трехмерного евклидова пространства E3 непротиворечива, если непротиворечива теория действительного числа $\Im(R)$.

П.3. Независимость (минимальность) системы аксиом

Определение: *непротиворечивая система аксиом $\{A_k\}$ называется <u>независимой</u>, если ни одна из ее аксиом не является следствием других. В противном случае система аксиом называется <u>зависимой</u>.*

Непротиворечивая аксиоматика $\Sigma(M_i;\ \Delta_j;\ A_k)$ называется независимой, если система аксиом $\{A_k\}$ независима и ни одно из основных понятий нельзя определить через другие.

Независимость аксиоматики, очевидно, желательна: чем меньше аксиом и основных понятий, тем обозримее теория, тем яснее ее логическая структура. Однако независимость аксиоматики не обязательна: с зависимой тоже можно работать. Иногда из методических соображений, например, чтобы не доказывать трудную теорему, вносят ее в список аксиом; чтобы не вводить сложное понятие, вводят его в число основных и добавляют в качестве аксиом свойства, которыми оно обладает.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы в непротиворечивой системе аксиом $\{A_к, A\}$ аксиома A была независима от остальных аксиом $\{A_k\}$, достаточно, чтобы система аксиом $\{A_k, \rceil A\}$ (где $\rceil A$ – отрицание A) была также непротиворечивой.

Дано: система аксиом $\{A_k, \rceil A\}$ непротиворечива.

Доказать: A не зависит от $\{A_k\}$, т.е. не является следствием из $\{A_k\}$.

Доказательство.

□Предположим противное: пусть A зависит от $\{A_k\}$, т.е. из $\{A_k\}$ следует A, но тогда из системы $\{A_k, \rceil A\}$ так же следует A. Получаем, что в аксиоматической теории, определяемой системой аксиом$\{A_k, \rceil A\}$, верны два отрицающих друг друга предложения: A как следствие аксиом $\{A_k\}$ и $\rceil A$ как аксиома. Следовательно, система аксиом $\{Ak, \rceil A\}$ противоречива, что невозможно по условию■.

Итак, для доказательства независимости аксиомы A от остальных аксиом $\{A_k\}$ системы $\{A_k, A\}$, надо доказать, что новая система аксиом $\{A_k, \rceil A\}$, полученная из исходной заменой аксиомы A ее отрицанием $\rceil A$, является непротиворечивой, т.е. фактически надо построить модель новой системы аксиом. Значит, независимость также устанавливается методом интерпретации. Позже таким образом будет доказана независимость аксиомы параллельных Евклида от остальных аксиом евклидовой геометрии.

П.4. Полнота системы аксиом

Пусть дана непротиворечивая система аксиом $A=\{A_k\}$. Допустим, что существует предложение B, удовлетворяющее следующим условиям:

а) B не вводит новых отношений, т.е. выражает свойства тех же отношений, что и система аксиом A;

б) B не зависит от аксиом системы A, т.е. не является их следствием;

в) система $A \cup \{B\}$ непротиворечива.

В этом случае система аксиом A называется *неполной*. Если такого предложения B не существует, то система аксиом называется *полной.*

Аксиоматику, содержащую полную систему аксиом, также называют *полной*. Значит, всякое дополнительное утверждение к полной системе аксиом про те же неопределяемые понятия, дает либо противоречие им, либо их следствие.

Рассмотрим неполную систему аксиом A. Тогда существует предложение B, удовлетворяющее условиям а), б), в) определения. По условию в) система аксиом $A \cup \{B\}$ непротиворечива, а так как B не зависит от аксиом системы A (по условию б)), то непротиворечива и система аксиом $A \cup \{\rceil B\}$. Обозначим через $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ какие-либо модели систем аксиом $A \cup \{B\}$ и $A \cup \{\rceil B\}$ соответственно. Так как $A \subset A \cup \{B\}$ и $A \subset A \cup \{\rceil B\}$, то $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ являются также и моделями системы аксиом A. Но в модели $\mathcal{J}$ верно предложение B, а в модели $\mathcal{J}'$ – условие $\rceil B$, значит, эти модели не изоморфны. (Если предположить, что модели $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ изоморфны, то мы получим, что основные отношения Δj должны обладать одновременно как свойствами $\{A1, \ldots, At, B\}$, так и свойствами $\{A1, \ldots, At, \rceil B\}$, что, естественно, невозможно).

Таким образом, для неполных систем аксиом существуют неизоморфные модели. Поэтому, если все модели непротиворечивой системы аксиом изоморфны, то эта система заведомо полна. Мы приходим к выводу: *чтобы доказать, что данная система аксиом полная, достаточно доказать, что все ее модели изоморфны.*

П.5. Полнота системы аксиом Вейля пространства E_3

Для примера докажем полноту аксиоматики Σ_W Вейля трехмерного евклидова пространства E_3.

Обозначим через $\mathcal{J}$ – арифметическую модель Σ_W, через $\mathcal{J}'$ – произвольную модель Σ_W. Ясно, что две модели, изоморфные третьей, изоморфны друг другу. Поэтому для доказательства полноты аксиоматики Σ_W достаточно доказать изоморфизм $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$.

Мы знаем, что в евклидовой геометрии, в том числе построенной и с помощью системы аксиом Вейля, можно ввести понятие прямоугольных декартовых координат векторов и точек [21], доказать, что:

1) координаты вектора равны разностям координат конца и начала вектора;

2) координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых векторов;

3) координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат вектора на данное число;

4) скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат перемножаемых векторов.

Все это, естественно, верно и для любой модели $\mathcal{J}'$ аксиоматики Σ_W.

Предположим теперь, что в модели $\mathcal{J}'$ зафиксирована некоторая прямоугольная декартова система координат $R'=\{0', \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ и будем рассматривать координаты точек и векторов модели $\mathcal{J}'$ только относительно R'.

Установим биективное соответствие между основными объектами моделей $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ следующим образом.

Каждой точке $A=(x_1\ x_2\ x_3)$ модели $\mathcal{J}$ поставим в соответствие такую точку A' модели $\mathcal{J}'$, которая имеет координаты (x_1, x_2, x_3) в системе R': $A=(x_1\ x_2\ x_3) \to A'=(x_1, x_2, x_3)_{R'}$

Каждому вектору $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ модели $\mathcal{J}$ поставим в соответствие такой вектор $\bar{a}'$ модели $\mathcal{J}'$, который имеет координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ в базисе $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to \vec{a}'\{a_1, a_2, a_3\}_{\bar{i}'\bar{j}'\bar{k}'}$.

Очевидно, каждое из этих соответствий есть биекция.

Покажем теперь, что соответствующие объекты моделей $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ находятся в одноименных основных отношениях.

Пусть, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, тогда в силу определений 2) и 4) модели $\mathcal{J}$ $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в модели $\mathcal{J}'$ соответствуют векторы $\bar{a}'\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\bar{b}'\{b_1, b_2, b_3\}$, причем $(\bar{a}' + \bar{b}')\{a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\}$, $\bar{a}'\ \bar{b}' = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Следовательно, при нашем соответствии вектору $\bar{a} + \bar{b}$ соответствует именно вектор $\bar{a}' + \bar{b}'$ и, очевидно, $\bar{a}\ \bar{b} = \bar{a}'\ \bar{b}'$.

Далее, пусть $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$. Тогда в силу определения 3) модели J $\alpha \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \\ \alpha \cdot a_3 \end{pmatrix}$. Вектору $\bar{a}$ модели J соответствует вектор $\bar{a}'\{a_1, a_2, a_3\}$ в модели J', причем в J' α $\bar{a}'\{\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\}$. В силу задания соответствия именно вектор α $\bar{a}'$ соответствует вектору α $\bar{a}$.

Наконец, пусть $A=(x_1\ x_2\ x_3)$, $B=(y_1\ y_2\ y_3)$ – точки модели J, тогда в силу определения 6) модели J $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{pmatrix}$. Точкам A и B модели J в модели J' соответствуют точки $A'=(x_1, x_2, x_3)_{R'}$ и $B'=(y_1, y_2, y_3)_{R'}$, причем в модели J' $\overrightarrow{A'B'}\{y_1-x_1, y_2-x_2, y_3-x_3\}$. Но именно этот вектор $\overrightarrow{A'B'}$ по нашей договоренности соответствует вектору $\overrightarrow{AB}$.

Итак, соответствующие объекты моделей J и J' находятся в одноименных основных отношениях, в виду чего модели J и J' изоморфны, что и требовалось доказать.

Итак, система аксиом Вейля пространства E_3 полна.

Вопросы и задания к главе II

П.1. Вопросы для самопроверки

1. В чем суть аксиоматического метода построения науки ?
2. Дайте определения аксиоматической теории и аксиоматики.
3. Объясните с теоретико-множественной точки зрения, что такое:
   - объекты, основные объекты;
   - отношения, основные отношения;
   - математическое утверждение;
   - аксиомы и теоремы.
4. Дайте определение математической структуры.
5. Приведите примеры известных вам алгебраических и геометрических структур.
6. Что такое модель аксиоматики?
7. В чем ценность абстрактной теории?
8. Что значит построить модель аксиоматики?
9. Какие модели называются изоморфными?
10. Какие требования предъявляются к системе аксиом?
11. Какая система аксиом называется непротиворечивой?
12. Какая аксиома (система аксиом) называется независимой?
13. Какая система аксиом называется полной?
14. Приведите примеры полных и неполных систем аксиом.
15. Может ли полная система аксиом при присоединении других аксиом быть неполной?
16. Как доказывается непротиворечивость системы аксиом?
17. Как проверяется полнота системы аксиом?
18. Как доказывается независимость какой-либо аксиомы от остальных аксиом системы ?
19. Дайте определение векторного пространства. Приведите примеры моделей векторного пространства, отличные от арифметической.
20. Аксиомы каких структур входят в аксиоматику евклидова векторного пространства?
21. Аксиомы каких структур входят в аксиоматику структуры действительных чисел?

П.2. Упражнения

1. Докажите непротиворечивость аксиоматики частично упорядоченного множества.
2. Докажите независимость аксиомы A_3 системы аксиом частично упорядоченного множества.
3. Докажите непротиворечивость системы аксиом группы.
4. Докажите неполноту системы аксиом группы.
5. Докажите, что множество квадратных матриц второго порядка есть модель аксиоматики группы.
6. Докажите непротиворечивость системы аксиом абелевой группы.
7. Докажите независимость аксиомы A_5 ($x\Delta y=y\Delta x$) от остальных аксиом абелевой группы.
8. Докажите непротиворечивость структуры проективной плоскости.
9. Докажите непротиворечивость аксиом принадлежности I_1- I_8 системы аксиом Гильберта пространства E_3 (см. гл. I,§7).
10. Опишите структуру евклидовой плоскости по Гильберту.

П.3. Индивидуальные задания для самостоятельной работы

1) Определить данную структуру, т.е. указать базисные множества, основные объекты, основные отношения и список аксиом.
2) Доказать непротиворечивость системы аксиом структуры построением модели.

№ варианта	Название структуры	№ варианта	Название структуры
1, 2	Структура евклидовой плоскости по Погорелову [34], [22], [4].	15,16	Структура плоскости Лобачевского по Погорелову [5], [34], [40].
3, 4	Структура евклидовой плоскости по Колмогорову [22], [8], [29].	17,18	Структура плоскости Лобачевского по Гильберту [40], [30], [4].
5, 6	Структура евклидовой плоскости по Гильберту [19],[5],[40].	19	Структура эллиптического пространства по Вейлю [4], [16], [17].
7, 8	Структура евклидовой плоскости по Атанасяну [3]-[7].	20,21	Структура аффинного пространства по Гильберту [40].

9, 10	Структура евклидовой плоскости по Александрову [2].	22	Структура аффинного пространства по Вейлю [16],[17],[8].
11	Структура проективной плоскости по Вейлю [8],[4].	23	Структура метрического пространства [4].
12, 13	Структура проективной плоскости по Гуревичу (или Глаголеву).	24	Структура множества скалярных величин [8],[16],[17],[22]
14	Структура топологического пространства [4].	25	Структура псевдоевклидова векторного пространства ${}^1V_3$ индекса 1 [4],[22].

Глава III. Аксиоматическое обоснование евклидовой геометрии по Атанасяну

§1. Об аксиоматиках школьного курса геометрии

Как уже отмечалось в главе I, с "Оснований геометрии" Д. Гильберта берут своё начало и современный аксиоматический метод, и теория математических структур в современном её понимании. Однако первоначальное изучение геометрии по книге Гильберта затруднительно в виду чрезвычайно сложной и неоправданно громоздкой системы аксиом, а также сжатости и лаконичности изложения. Достаточно сложно и недоступно для учащихся вводится понятие длины отрезка и расстояния между двумя точками, в то время как в современной математике и особенно в школьном курсе геометрии оно имеет большое значение. Выходом из этого положения является изменение аксиоматики евклидовой плоскости на такую эквивалентную, в которой это расстояние существовало бы аксиоматически. Так и было сделано в учебном пособии для школы под редакцией А.Н.Колмогорова [29].

База структуры евклидовой плоскости E_2 по Колмогорову состоит из трех множеств: E, F и G, где E – множество точек, F – множество прямых и G – множество некоторых неотрицательных величин, которые называются расстояниями. Основными отношениями являются бинарное отношение принадлежности точек и прямых и тернарное отношение, которое определяется отображением $\rho: E\times E\to G$ (сопоставление паре точек неотрицательной величины). Значение $\rho(A,B)$ называется расстоянием от A до B.

Методически более простыми и приспособленными к детскому восприятию, чем аксиоматика Колмогорова, являются аксиоматики плоскости E_2, предложенные А.В.Погореловым ([34],[4]) и Л.С.Атанасяном ([4],[7]). Эти аксиоматики являются как бы промежуточными между аксиоматиками Д.Гильберта и А.Н.Колмогорова. С одной стороны они обладают преимуществом аксиоматики А.Н.Колмогорова в отношении простоты измерения длин отрезков, с другой стороны за счет введения ещё одного основного понятия "лежать между" обладают преимуществом аксиоматики Д.Гильберта. Кроме того эти аксиоматики опираются на понятие числа, которое

каким-то образом вводится в школе, а не величины, которая в школе так и остается на интуитивном уровне.

База структуры плоскости E_2 по Погорелову состоит из трех множеств: E, F, R, где E – множество точек,
F – множество прямых,
R – множество действительных чисел, которое является вспомогательным.

Основными отношениями являются следующие четыре отношения:

1) принадлежность точки прямой,
2) лежать между для трех точек прямой,
3) длина отрезка,
4) градусная мера угла.

Система аксиом Погорелова состоит из 9 аксиом, разбитых на шесть групп([4],[34]).

К методической удаче аксиоматики А.В.Погорелова можно отнести также введение градусной меры угла как неопределяемого понятия.

В последние годы изданы учебники по геометрии для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики А.Д.Александрова, А.Л.Вернера и В.Н.Рыжика [2]. Их аксиоматика отличается от всех выше названных тем, что её основными объектами являются точки и отрезки, а прямая определяется с помощью отрезков. За основные отношения между этими объектами принимаются следующие:

1) точка принадлежит отрезку,
2) точка является концом отрезка,
3) два отрезка равны.

Система аксиом состоит из 15 аксиом, разбитых на 5 групп [2].

Кроме того, в главе II было дано обоснование евклидовой геометрии по Вейлю, которому в последние десятилетия отдается предпочтение в математической науке.

Другие способы определения структуры евклидова пространства предлагают немецкий математик Ф.Бахман [10] и французский математик Г.Шоке [41]. В основу своих построений Ф.Бахман кладет осевые и центральные симметрии и развивает геометрию как своеобразное " исчисление симметрий". Аксиоматика Г.Шоке основана на понятиях параллельности, перпендикулярности и расстояния; она занимает в некотором смысле промежуточное положение между построениями Вейля и Бахмана. Г.Шоке принадлежит высказывание, что “сегодня мы владеем простым “царским путем” в геометрию, ведущим через понятия “векторного пространства” и “скалярного произведения” [41].

§2. Аксиомы принадлежности и порядка аксиоматики Атанасяна и следствия из них

П.1. Структура евклидовой плоскости по Атанасяну. I и II группы аксиом

Мы рассмотрим более подробно аксиоматику планиметрии, данную в учебнике “Геометрия 7-9” Атанасяна Л.С., Бутузова В.Ф., Кадомцева С.Б., Позняка Э.Г. [7], в связи с тем, что в большинстве школ России в настоящее время геометрию изучают и преподают именно по этому учебнику. Для краткости приведенную в нём аксиоматику будем называть аксиоматикой Атанасяна.

База структуры евклидовой плоскости по Атанасяну состоит из двух множеств E и F, где E - множество точек, а F - множество прямых.

Основными отношениями являются следующие:

1) бинарное отношение $\Delta_1 \subset E \times F$ - “принадлежность” точки прямой,

2) тернарное отношение $\Delta_2 \subset E \times E \times E = E^3$ - “лежать между” для трех точек прямой,

3) бинарное отношение $\Delta_3 \subset E \times E$, которое определяет отображение $f\colon E \to E$, называемое словом “наложение”.

Система аксиом, которую мы здесь приводим, совпадает с аксиоматикой школьного курса [7]. Будем обозначать её $\sum_A$. Она состоит из 15 аксиом, разбитых на пять групп. Конечно, эта система аксиом избыточна, некоторые из предложений помещены в список аксиом из методических соображений.

В учебном пособии по геометрии Л.С. Атанасяна и В.Т. Базылева для пединститутов [4] также приведена система аксиом школьного курса планиметрии, хотя по сравнению со школьной в ней несколько ослаблены требования отдельных аксиом, т.е. она более минимизирована.

Группа 1 – аксиомы принадлежности.

Аксиомы этой группы описывают свойства взаимного расположения точек и прямых, выражаемое словом “принадлежит” (или “лежит на”, “проходит через”). Для обозначения этого отношения используется символ “$\in$“: запись $A \in a$ означает, что точка A лежит на прямой a или прямая a проходит через точку A.

I_1. Каковы бы ни были две точки, существует и единственная прямая, проходящая через эти точки.

I_2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

На основе аксиомы I_1 прямую, проходящую через две точки A и B, обозначают AB или BA.

Из аксиом группы I вытекают следующие утверждения, которые предлагается доказать самостоятельно.

1. Две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Будем говорить, что две прямые пересекаются, если они имеют только одну общую точку.

2. Существуют по крайней мере три прямые, которые попарно пересекаются.

3. Какова бы ни была прямая, существует по крайней мере одна точка, не лежащая на этой прямой.

Группа II – аксиомы порядка.

Основное назначение аксиом этой группы состоит в том, чтобы ввести тернарное отношение $\Delta_2 \subset E^3$ "лежать между", относящееся к трем различным точкам одной прямой. Принадлежность упорядоченной тройки A, B, C подмножеству Δ_2 выражается словами "точка B лежит между точками A и C", что обозначается $A\overset{*}{B}C$. При этом говорят также, что точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

II_1. Если $A\overset{*}{B}C$, то A,B, C – три различные точки одной прямой и $C\overset{*}{B}A$.

(В аксиоме II_1 не постулируется существование трех точек на прямой, т.к. она начинается со слова "если".)

Определение: *фигура, состоящая из точек A и B и всех точек, лежащих между ними на прямой AB, называется* <u>*отрезком*</u>.

Точки A и B – концы отрезка, а $\forall M \in AB$ / $A\overset{*}{M}B$ называется внутренней точкой отрезка. Отрезок в дальнейшем будем обозначать [AB]. Итак, $[AB]=\{A,B\}\cup\{M\in AB/\ A\overset{*}{M}B\}$.

II_2. Каждая точка O прямой разделяет множество остальных точек этой прямой на два *непустых* подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками разных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Определение: *каждое из подмножеств, на которые точка $O\in l$ делит множество $l\backslash\{0\}$ остальных точек прямой l, называется* <u>*лучом*</u>, *исходящим из точки O или полупрямой, исходящей из O.*

Определение: *два луча одной прямой l, исходящие из точки $O\in l$, называются* <u>*дополнительными лучами*</u>, *точка O называется* <u>*началом*</u> *каждого из дополнительных лучей, хотя не принадлежит ни одному из них.*

Лучи будем обозначать буквами h, k, l,... или двумя буквами [OM), где O – начало луча, а M – произвольная его точка.

Если h – луч прямой l с началом O, h′ – дополнительный к нему луч, то множество всех точек прямой совпадает с $h\cup h'\cup\{0\}$.

В аксиоме II_2 утверждается, что каждый из дополнительных лучей прямой есть непустое подмножество, в каждом из них имеется хотя бы одна точка. Это значит, что кроме точки O на прямой имеются ещё хотя бы две точки, т.е. *постулируется существование по крайней мере трех точек на прямой.*

II_3. Из трех точек на прямой *одна и только одна* лежит между двумя другими.

Это означает, что для точек A, B, C прямой может иметь место только одно из трех положений: $A\overset{*}{B}C$, или $B\overset{*}{A}C$, или $A\overset{*}{C}B$.

Аксиома II_3 выражает незамкнутость прямой, так как, если A,B,C лежат на замкнутой линии, например, на окружности, то одновременно каждая из них лежит между двумя другими.

Определение: *говорят, что отрезок [OA]отложен на луче h от его начала O, если $A\in h$.*

Лемма 1. Если [OA] отложен на луче h от его начала O, то и любая внутренняя точка отрезка [OA] лежит на луче h.

Доказать самостоятельно.

Если две точки отрезка [AB] лежат на прямой a, то прямые a и AB совпадают в силу аксиомы I_1, поэтому $\forall M\in[AB]\Rightarrow M\in a$. Если же [AB] не лежит на прямой a, то возможны случаи:

а) прямая a пересекает [AB], т.е. a проходит через единственную внутреннюю точку [AB];

б) прямая a проходит через один из концов отрезка [AB];

в) прямая a не имеет ни одной общей точки с [AB].

В случае а) говорят, что точки A и B лежат *по разные стороны* от прямой a, а в случае в) – точки A и B лежат *по одну сторону* от a.

II_4. Каждая прямая a разбивает множество всех точек плоскости, не лежащих на прямой a, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a.

Определение: *каждое из подмножеств, на которые прямая a делит множество точек плоскости без прямой a, называется полуплоскостью.*

Прямая a называется *границей* каждой полуплоскости, хотя ни одной из них не принадлежит. Полуплоскости будем обозначать буквами λ, μ, ν,...

Лемма 2. Если начало луча h лежит на границе полуплоскости λ и какая-либо его точка $M\in\lambda$, то все точки луча h лежат в полуплоскости λ.

Доказать самостоятельно.

П.2. Следствия из аксиом I и II групп

Из введенных выше аксиом вытекает ряд утверждений о взаимном расположении простейших геометрических фигур. Все они наглядно очевидны, поэтому их истинность не вызывает сомнений. Однако формальные доказательства некоторых из них, основанные на аксиомах, не так уж и просты.

Теорема 1 – *предложение Паша, которое в аксиоматике Гильберта является аксиомой.*

Пусть A,B,C – три точки, не лежащие на одной прямой, a – прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Тогда если a пересекает отрезок [AB], то она пересекает ещё один и только один из двух других отрезков [AC] или [BC].

Дано: A,B,C – точки не лежащие на одной прямой, прямая a / $A\notin a$, $B\notin a$, $C\notin a$, a пересекает отрезок [AB].

Доказать: a пересекает один из отрезков [AC] или [BC] и не имеет общих точек с другим.

Доказательство.

□ 1. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости λ_1 и λ_2 (акс.II_4).

2. Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a, так как $a\cap[AB]\neq\varnothing$ (акс. II_4). Пусть для определенности $A\in\lambda_1$, $B\in\lambda_2$.

3. $C\notin a$ по условию, тогда $C\in\lambda_1$ или $C\in\lambda_2$.

а) Если $C\in\lambda_1$, то прямая a не пересекает [AC], но пересекает [BC] (акс.II_4; п.2) доказательства).

б) Если $C\in\lambda_2$, то прямая a не пересекает [BC], но пересекает [AC] (акс.II_4; п.2) доказательства).■

Теорема 2. На любом отрезке существует по крайней мере одна точка, отличная от его концов.

Доказательство.

□Пусть дан отрезок [AB].

1. AB (акс.I_1).
2. $C \mid C\notin AB$ (акс.I_2).
3. AC (акс.I_1).
4. Точка C делит прямую AC на два непустых дополнительных луча [CA) и h и $\exists D\in h$, т.е. $A\overset{*}{C}D$ (акс.II_2).

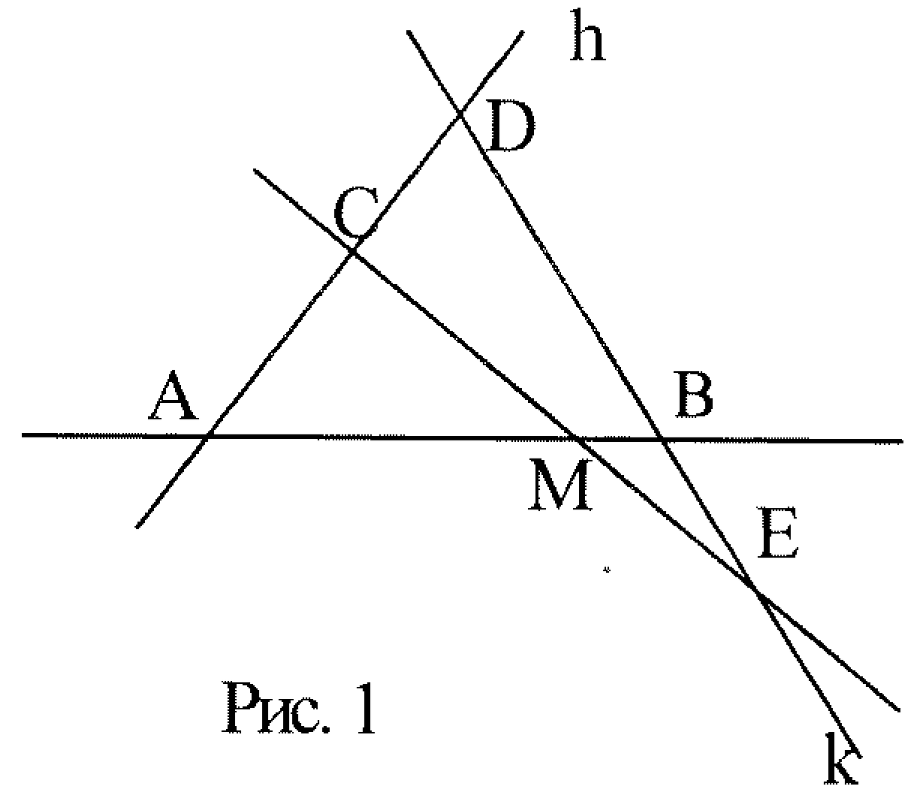


Рис. 1

5. BD (акс.I_1).
6. Точка B делит прямую BD на два непустых дополнительных луча [BD) и k и $\exists E\in k$, т.е. $D\overset{*}{B}E$ (акс.II_2), при этом $\overline{B\overset{*}{E}D}$.
7. $\exists$CE (акс.I_1).
8. Прямая CE пересекает отрезок [AD] в точке C, тогда CE пересечет отрезок [BD] или [AB] (теор.1). Но CE не пересекает [BD], так как прямые CE и BD уже имеют одну общую точку E, но $\overline{B\overset{*}{E}D}$, т.е. $E\notin[BD]$ (§2, п.1, утв.1; определ. отрезка).

Следовательно, CE пересекает отрезок [AB] во внутренней точке M, т.е. $\exists M \mid A\overset{*}{M}B$ ■.

Лемма 3. Если X и Y – две внутренние точки отрезка [AB], то $\overline{X\overset{*}{A}Y}$ и $\overline{X\overset{*}{B}Y}$.

Доказательство.

□ Рассмотрим луч [AB). По лемме 1 точки X и Y лежат на этом луче, поэтому по аксиоме II_2 X и Y лежат по одну сторону от начала луча, т.е. $\overline{X\overset{*}{A}Y}$. Аналогично, по лемме 1 точки X и Y лежат на луче [BA), поэтому $\overline{X\overset{*}{B}Y}$ ■.

Теорема 3. Если M – точка, лежащая на отрезке [AB], то:

а) [AM] и [MB] имеют только одну общую точку M;

б) любая точка, лежащая на отрезке [AM] или [MB], лежит на [AB];

в) любая внутренняя точка отрезка [AB], отличная от M, лежит либо на [AM], либо на [MB].

Дано: отрезок [AB] и точка $M\in[AB]$, т.е. $A\overset{*}{M}B$.
Доказать: а), б), в).

Доказательство.

□а) Так как $A\overset{*}{M}B$, то лучи [MA) и [MB) являются дополнительными с общим началом M. По лемме 1 отрезок [MA] лежит на луче [MA), а отрезок [MB] – на луче [MB). Так лучи [MA) и [MB) не имеют общих точек (акс. II_2), то и отрезки [MA] и [MB] не имеют общих точек, отличных от M.

б) Пусть $X\in[AM]$, т.е. $A\overset{*}{X}M$, $X\neq A$, $X\neq M$.

1. $A\overset{*}{X}M \Rightarrow M\overset{*}{X}A$, т.е. $X\in[MA]$ (акс.II_1).
2. $X\in[MA] \Rightarrow X\in[MA)$ (лемма 1).
3. $(X\in[MA) \wedge A\overset{*}{M}B) \Rightarrow X\overset{*}{M}B$ (акс. II_2).
4. $X\overset{*}{M}B \Rightarrow M\overset{*}{X}B$ (акс. II_3).
5. $A\overset{*}{X}M \Rightarrow$ [XA), [XM) - дополнительные лучи (акс. II_2).
6. $M\overset{*}{X}B \Rightarrow B\in[XM)$ (акс.II_2).

Итак, точки A и B – это точки дополнительных лучей [XA) и [XB), поэтому $A\overset{*}{X}B$, т.е. $X\in[AB]$.

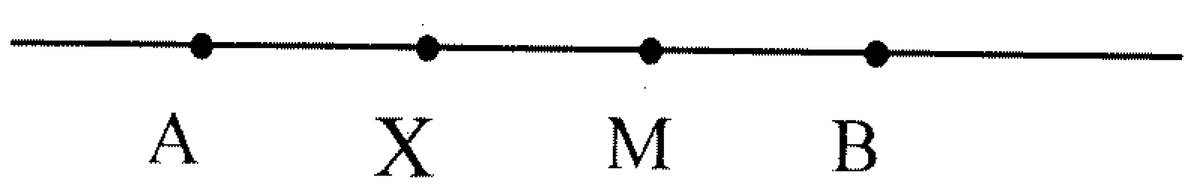


Рис. 2

Аналогично доказывается, что любая точка, лежащая на отрезке [MB], лежит на отрезке [AB].

в) Пусть $X\in[AB]$, $X\neq A$, $X\neq B$, $X\neq M$.

1. $(X\in[AB] \wedge M\in[AB]) \Rightarrow X\overset{*}{A}M$ (лемма 3).
2. $X\overset{*}{A}M \Rightarrow A\overset{*}{X}M \vee A\overset{*}{M}X$ (акс.II_3).
3. Если $A\overset{*}{X}M$, то $X\in[AM]$ и теорема доказана.

Если $A\overset{*}{M}X$, то $X\in[MB)$ (акс. II_2).

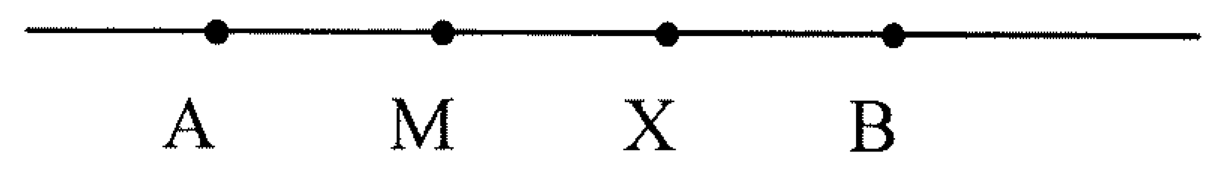


Рис. 3

4. $X\in[MB) \Rightarrow X\overset{*}{M}B$ (акс. II_2).
5. $(X\in[AB] \wedge M\in[AB]) \Rightarrow X\overset{*}{B}M$ (лемма 3).
6. $(X\in[MB) \wedge X\overset{*}{B}M) \Rightarrow M\overset{*}{X}B$ (акс. II_2).
7. $M\overset{*}{X}B \Rightarrow X\in[MB]$ ■.

Теорема 4. На любом отрезке существует бесчисленное множество точек.

Доказательство.

□ Пусть [AB] - данный отрезок.

1. $\exists M_1\in[AB]$, $M_1\neq A$, $M_1\neq B$ (теорема 2).
2. $\exists M_2\in[AM_1]$, $M_2\neq M_1$ (теорема 2).
3. $M_2\in[AB]$ (теорема 3).
4. $\exists M_3\in[AM_2]$, $M_3\neq M_2$ (теорема 2).
5. $M_3\in[AB]$ (теорема 3).

Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим бесконечную последовательность точек M_1, M_2, M_3,..., которые лежат на [AB] ■.

Легко доказать, что прямая и плоскость содержат бесконечно много точек. Докажите это.

Введем теперь понятие угла.

Определение: *<u>углом</u> назовём фигуру, состоящую из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Точка называется вершиной угла, а лучи – его сторонами.*

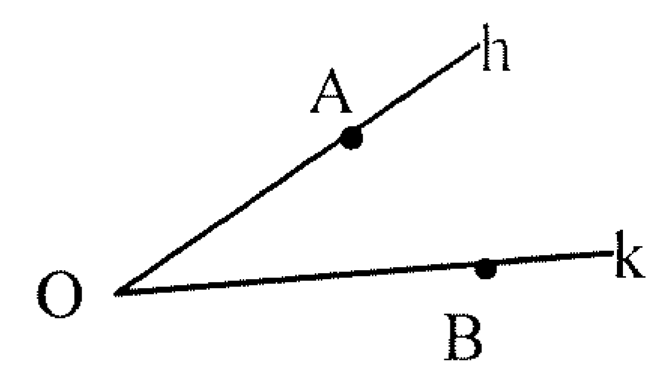


Рис. 4

Обозначение угла (рис.4): $\angle hk$, $\angle hOk$, $\angle AOB$, $\angle BOA$, $\angle O$.

Угол называется *развернутым*, если обе его стороны лежат на одной прямой и являются дополнительными лучами. Если стороны угла не лежат на одной прямой, то он называется *неразвернутым*.

Пусть $\angle hk$ – данный неразвернутый угол. Рассмотрим две полуплоскости H и K, связанные с этим углом. Сторона h угла принадлежит границе полуплоскости H, а сторона $k\subset H$ (рис. 5а).

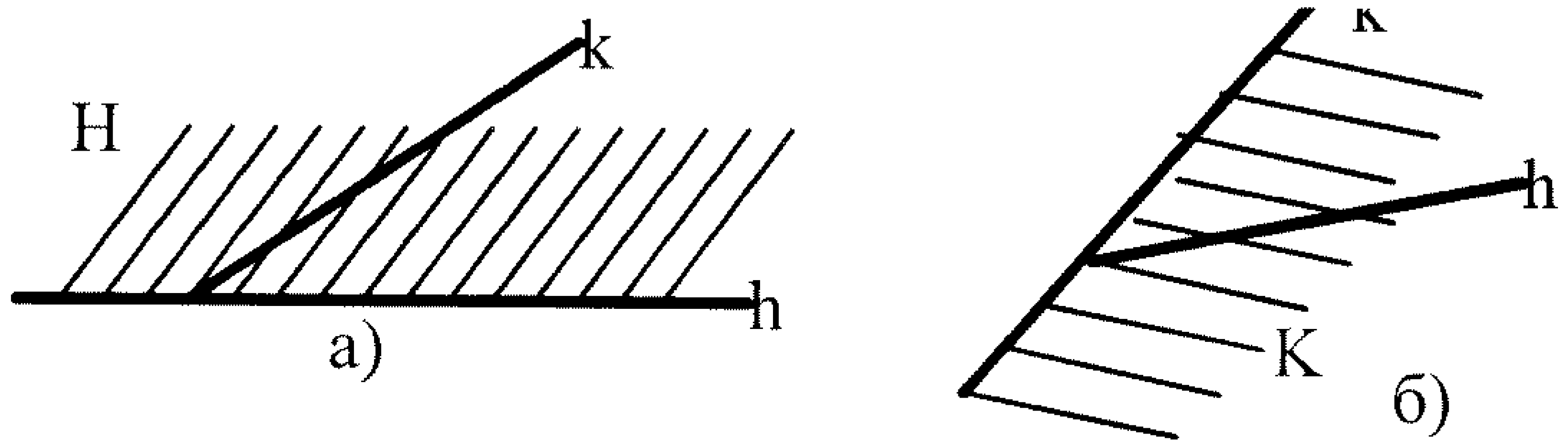


Рис. 5

Аналогично, сторона k угла принадлежит границе полуплоскости K, а сторона $h\subset K$ (рис. 5б).

Определение: *в<u>нутренней областью</u> $\angle hk$ называется пересечение полуплоскостей $H\cap K$. Точки внутренней области угла называются его <u>внутренними точками</u> (рис. 6). Точки плоскости, отличные от вершины угла и не принадлежащие его внутренней области и сторонам, называются <u>внешними</u> относительно этого угла.*

Самостоятельно докажите следующую лемму.

Лемма 4. Если концы отрезка лежат на разных сторонах неразвернутого угла, то любая внутренняя точка отрезка лежит во внутренней области угла.

Понятие внутренней области угла используется для введения понятия внутреннего луча.

Определение: *луч, исходящей из вершины угла и целиком состоящий из внутренних точек этого угла, называется <u>внутренним лучом</u> угла.*

Лемма 5. Если M – внутренняя точка угла AOB, то луч [OM) является внутренним лучом этого угла.

Докажите лемму 5 самостоятельно.

<u>Теорема 5</u> – *о внутреннем луче угла.*

Внутренний луч неразвернутого угла пересекает любой отрезок с концами на разных сторонах угла.

Пусть $\angle hk$ – данный угол с вершиной O, l – внутренний луч угла. Возьмем $\forall A\in h$ и $\forall B\in k$. Докажем, что l пересекает [AB] во внутренней точке.

Доказательство.

□ На луче, дополнительном к h, возьмем точку C, тогда $A\overset{*}{O}C$ по аксиоме II_2. Прямая $\bar{l}$, содержащая луч l, пересекает [AC] в точке O, тогда по теореме 1 Паша она пересекает один из отрезков [BC] или [AB]. Докажем, что прямая $\bar{l}$ не пересекает отрезок [CB]. Действительно, луч l и [BC] не имеют общих точек, так как все точки внутреннего луча l угла принадлежат полуплоскости с границей OB, содержащей луч h=[OA), а все точки отрезка [BC], кроме точки B – другой полуплоскости с той же границей OB.

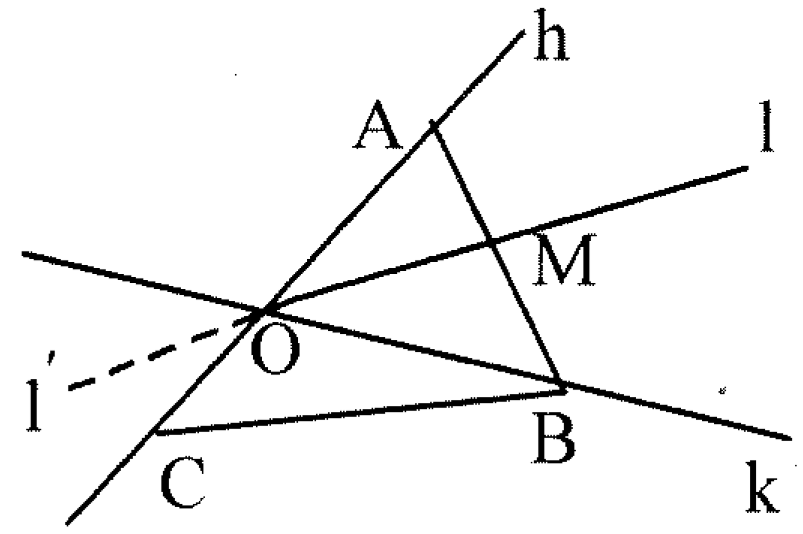


Рис. 7

Аналогично показывается, что дополнительный к l луч l′ не пересекает отрезок [BC].

Таким образом, прямая $\bar{l}$ пересекает отрезок [AB] в некоторой точке M. Пересечение осуществляет именно луч l, так как дополнительный к нему луч l′ лежит в той полуплоскости с границей OA, где нет точек отрезка [AB]. Итак, $l\cap[AB]=M$ ■.

Задачи для самостоятельной работы.

1. Точка M лежит во внешней области $\angle AOB$. Докажите, что все точки луча [OM) лежат во внешней области угла.
2. Лучи k и l имеют общее начало с лучом h и лежат в одной полуплоскости с границей, проходящей через h. Докажите, что либо k – внутренний луч $\angle lh$, либо l – внутренний луч $\angle hk$.
3. Луч l является внутренним лучом $\angle hk$. Докажите, что $\angle hl$ и $\angle lk$ не имеют общих внутренних точек.
4. [OM) – внутренний луч $\angle AOB$. Докажите, что лучи [OA) и [OB) лежат в разных полуплоскостях с общей границей OM.
5. Луч l является внутренним лучом $\angle hk$, а m- внутренним лучом $\angle hl$. Докажите, что m-внутренний луч $\angle hk$.
6. На плоскости даны четыре точки A,B,C,D. Доказать, что если отрезки [AB] и [CD] пересекаются, то точки B и D лежат в одной полуплоскости с границей AC.
7. Точки A и B лежат в данной полуплоскости. Докажите, что все точки [AB] лежат в этой полуплоскости. Будут ли все точки прямой AB лежать в этой полуплоскости ?

§ 3. Наложения и равенство фигур

П.1. Понятия наложения и равенства фигур

Существенным отличием аксиоматики Атанасяна от аксиоматики Гильберта евклидовой планиметрии является введение нового отношения Δ_3 (“наложение”) вместо отношения “равенство отрезков и углов”. Поэтому вместо аксиом конгруэнтности Гильберта формулируются другие аксиомы (аксиомы наложения), а все определения и теоремы о равенстве фигур вводятся и доказываются не так, как по схеме Гильберта.

Понятие равенства в теории $\mathfrak{I}(\Sigma_A)$ вводится с помощью наложения, которое является основным. Предполагается, что могут существовать отображения плоскости в себя, которые называются наложениями. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III, состоящей из семи аксиом. Для упрощения формулировок этих аксиом вводится понятие равенства фигур.

Определение: *фигура Φ называется равной фигуре Φ', если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ',т.е. каждая точка фигуры Φ переходит в некоторую точку фигуры Φ',и каждая точка фигуры Φ' имеет единственный прообраз, принадлежащий фигуре Φ.*

Запись Φ = Φ' означает, что фигура Φ равна фигуре Φ'.

Сформулируем теперь аксиомы наложения. В школьном курсе геометрии их семь.

П.2. Группа III – аксиомы наложения

III_1. Каждая фигура равна самой себе (Φ = Φ')

III_2. $\Phi = \Phi' \Rightarrow \Phi' = \Phi$.

III_3. $(\Phi_1 = \Phi_2 \wedge \Phi_2 = \Phi_3) \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_3$.

III_4. Если при наложении концы отрезка [AB] отображаются в концы отрезка [A'B'], то отрезок [AB] отображается на отрезок [A'B'].

Рассмотрим некоторые свойства наложений, вытекающие из аксиом III_1 - III_4 ([5], [6]).

1^0. При наложении различные точки переходят в различные (т.е. наложение – это инъективное отображение плоскости в себя).

Допустим, что утверждение неверно, т.е. при некотором наложении какие-то две точки A и B (A≠B) переходят в одну и ту же точку C. Тогда фигура {A,B}, состоящая из двух точек, равна фигуре {C}, со-

стоящая из одной точки. По аксиоме III_2 : $\{A,B\}=\{C\} \Rightarrow \{C\}=\{A,B\}$. Тогда по определению равенства существует наложение, при котором одна точка C отображается в две точки A и B, что противоречит определению отображения, а наложение – это отображение.

2^0. При наложении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Дано: точки A,B,C не лежат на одной прямой,

f – наложение и A',B',C' – образы этих точек при f.

Докажем, что A',B',C' не лежат на одной прямой.

Доказательство.

□Допустим, что утверждение неверно и точки A',B',C' лежат на одной прямой. Тогда одна из них, например, B' лежит между A' и C' по аксиоме II_3. По аксиоме III_4 отрезок [AC] отображается на отрезок [A'C'], поэтому какая-то точка M∈[AC] отображаются в точку B'∈[A'C']. Но по условию точка B также отображается в точку B' при f. Получаем противоречие со свойством 1^0.■

Из свойства 1^0 и аксиомы III_4 следует, что при наложении отрезок отображается на отрезок, причем концы отрезка отображаются в концы. Поэтому фигура, равная отрезку, является отрезком.

III_5. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и при том только один.

3^0. Если при наложении две точки A и B переходят соответственно в точки A' и B', то луч [AB) переходит в луч [A'B'), а прямая AB в прямую A'B'.

Дано: две точки A и B (A≠B),

наложение f и A',B' - образы точек A,B при f.

Доказать: 1) луч [AB) переходит в луч [A'B'),

2) прямая AB переходит в прямую A'B'.

Доказательство.

□**1)** Докажем, что луч [AB) переходит в луч [A'B'). Возьмем любую точку M∈[AB), M≠B, тогда $\overline{B\overset{*}{A}M}$ и по аксиоме II_3 либо $A\overset{*}{M}B$, либо $A\overset{*}{B}M$. Пусть M' = f(M) , тогда по аксиоме III_4 из условия $A\overset{*}{M}B$ следует, что $A'\overset{*}{M'}B'$, а из условия $A\overset{*}{B}M$ следует, что $A'\overset{*}{B'}M'$ и кроме того, $\overline{B'\overset{*}{A'}M'}$. Отсюда мы заключаем, что в любом случае по аксиоме II_1 M' – точка прямой A'B' и $\overline{B'\overset{*}{A'}M'}$. Это значит, что B' и

M' лежат по одну сторону от точки A', т.е. принадлежат одному лучу с началом A', тогда M'∈[A'B').

Докажем теперь, что любая точка N'∈[A'B') является образом некоторой точки луча [AB). По аксиоме III_5 на луче [AB) существует точка N такая, что [AN]=[A'N']. Пусть f(N)=N". По доказанному выше N"∈[A'B'). Так как f(A)=A' и f(N)=N", то по аксиоме III_4 отрезок [AN] переходит в отрезок [A'N"] при f, а это значит, что [AN]=[A'N"]. Так как [AN]=[A'N"] и [AN]=[A'N'] , то по аксиомам III_2 и III_3 [A'N"]=[A'N'], и эти отрезки отложены на луче [A'B'). Отсюда в силу аксиомы III_5 получаем, что N'=N", т.е. точка N' имеет прообраз N∈[A'B').

2) Докажем, что при наложении f прямая AB переходит в прямую A'B'.

На луче, дополнительном к [AB), возьмем точку C, тогда по аксиоме II_2 $B\overset{*}{A}C$, т.е. A∈[BC]. Пусть C'=f(C), тогда по аксиоме III_4 A'∈[B'C'], т.е. $B'\overset{*}{A'}C'$. Это значит, что лучи [A'C') и [A'B') - дополнительные. По доказанному в части 1) этой теоремы лучи [AB) и [AC) переходят соответственно в лучи [A'B') и [A'C'). По аксиоме II_2 каждая прямая есть объединение любых двух ее дополнительных лучей и их начала, поэтому AB = [AB) ∪ [AC) ∪ {A}, A'B' = [A'B') ∪ [A'C') ∪ {A'}. Следовательно, при наложении f прямая AB переходит в прямую A'B'. Теорема полностью доказана.■

4^0. Всякое наложение является преобразованием плоскости.

Как известно, отображение f является преобразованием плоскости, если оно инъективно и сюръективно. Так как по свойству 1^0 наложение f является инъекцией, то для доказательства свойства 4^0 достаточно доказать, что f- сюръекция, т.е. каждая точка M' плоскости имеет прообраз.

Доказательство.

□Возьмем три точки A,B,C, не лежащие на одной прямой, тогда по свойству 2^0 их образы A',B',C' при наложении f также не лежат на одной прямой. По свойству 3^0 прямые AB, AC, BC перейдут соответственно в прямые A'B', A'C', B'C'.

Пусть M' – произвольная точка плоскости. Если она лежит на одной из прямых A'B', A'C' или B'C', то она имеет прообраз M, лежащий соответственно на прямой AB, AC или BC. Если M' не принадлежит ни одной из этих прямых, то возьмем, например, точку P' ∈[A'B'] и рассмотрим прямую P'M'. В силу теоремы Паша P'M' пересечет одну из прямых B'C' или A'C' в некоторой точке Q'. Точки P' и Q' имеют

прообразы P и Q, тогда по свойству 3^0 имеет прообраз и прямая P'Q', а следовательно, и точка M'∈P'Q'■.

5^0. При наложении f полуплоскость с границей a переходит в одну из полуплоскостей с границей a' = f(a).

6^0. При наложении неразвернутый (развернутый) угол переходит в неразвернутый (развернутый) угол.

Докажите свойства 5^0 и 6^0 наложений самостоятельно.

III_6. Если ∠hk- неразвернутый угол и ∠hk = ∠h'k', то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k- в луч k'.

Так как ∠h'k' и ∠k'h' - один и тот же угол, то из аксиомы III_6 следует, что если ∠hk = ∠h'k' = ∠k'h', то существуют два наложения : при одном из них луч h переходит в луч h', а луч k- в луч k', а при другом - луч h переходит в луч k', а луч k – в луч h'.

Будем говорить, что ∠hk отложен от луча h в полуплоскость λ, если луч h принадлежит границе полуплоскости λ, а луч k⊂λ.

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

§4. I и II признаки равенства треугольников

П.1. Понятие треугольника

Определение: *<u>треугольником</u> называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одно прямой.*

Указанные три точки называются вершинами треугольника, а отрезки – его сторонами. Треугольник с вершинами A,B,C обозначается : ΔABC, ΔBCA и т. д. Три угла $\angle BCA$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называются углами треугольника ABC. Часто их обозначают так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Пересечение внутренних областей углов треугольника называется его внутренней областью.

По общему определению равенства фигур ΔABC называется равным $\Delta A'B'C'$, если существует наложение f, при котором ΔABC отображается на $\Delta A'B'C'$. При этом, очевидно, каждая сторона ΔABC отображается на какую-нибудь сторону $\Delta A'B'C'$, поэтому каждая вершина первого треугольника отображается в какую-нибудь вершину второго. Запись $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ означает, что треугольники равны и $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$.

П.2. I признак равенства треугольников

<u>Теорема 6</u>. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ / $[AB] = [A'B'], [AC] = [A'C'], \angle A = \angle A'$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.

□1) $\angle BAC=\angle B'A'C' \Rightarrow \exists f$ / $A'=f(A)$, $[A'B')=f([AB))$, $[A'C')=f([AC))$, f – наложение (акс. III_6).

2) $(f(B)=B_1$, $f(C)=C_1) \Rightarrow f([AB])=[A'B_1]$, $f([AC])=[A'C_1]$ (акс. III_4).

3) $[AB])=[A'B_1]$, $f([AC])=[A'C_1] \Rightarrow [AB]=[A'B_1]$, $[AC]=[A'C_1]$.

4) По условию $[AB]=[A'B']$, $[AC]=[A'C']$, тогда с учетом 3) и аксиом III_2 и III_3 $[A'B_1]=[A'B']$ и $[A'C_1]=[A'C']$.

5) $[A'B_1]=[A'B']$, $[A'C_1]=[A'C'] \Rightarrow B_1=B'$, $C_1=C'$. (акс. III_5)

6) $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, $f(A)=A' \Rightarrow f(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$.

7) $\Delta ABC)=\Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C'$■.

П.3. II признак равенства треугольников

<u>Теорема 7</u> . Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A'B'C'$ / $[AB]=[A'B']$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$.

Доказательство.

□1. $\exists\, C''\in[A'C')$ / $[A'C'']=[AC]$ (рис. 8). (акс. III_5)

2. $[AB]=[A'B']$, $[AC]=[A'C'']$, $\angle A=\angle A' \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C''$ (теор. 6)

3. $\Delta ABC=\Delta A'B'C'' \Rightarrow \angle B = \angle A'B'C''$

4. $(\angle B=\angle A'B'C'')\wedge(\angle B=\angle A'B'C') \Rightarrow \angle A'B'C''=\angle A'B'C'$ (акс.III_2,III_3)

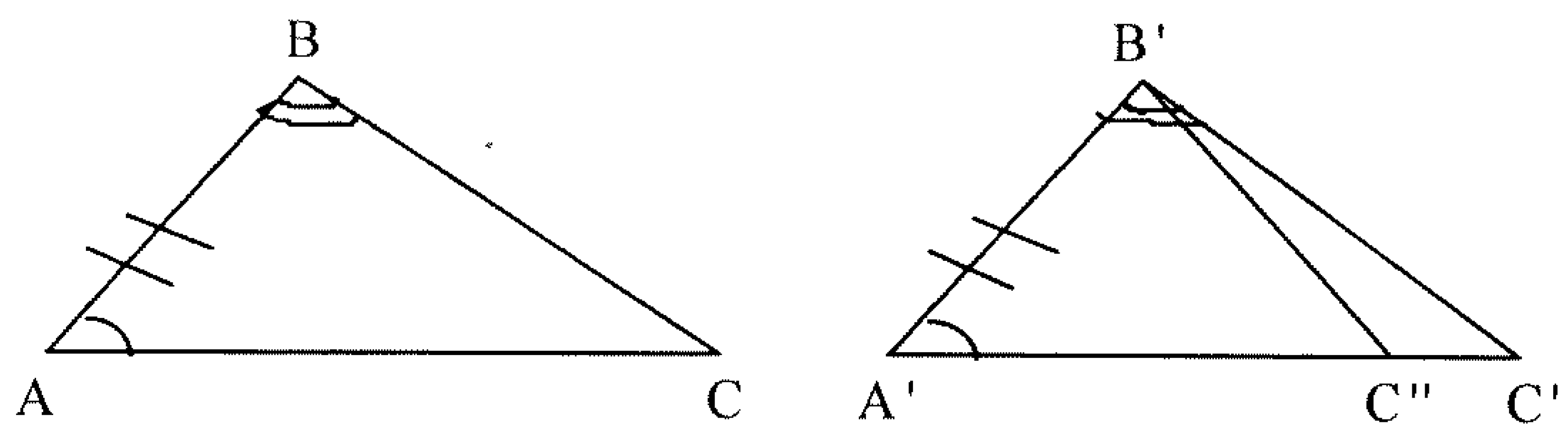


Рис. 8

5. $\angle A'B'C''=\angle A'B'C'$, и эти углы отложены от луча $[B'A')$ в одну полуплоскость с границей A'B', тогда по аксиоме III_7 $[B'C')=[B'C'')$.

6. $[B'C')=[B'C'') \Rightarrow C' = C'' = A'C' \cap B'C'$ (следствие 1^0, §1).

7. $C' = C'' \Rightarrow [A'C'']=[A'C']$.

8. $[A'C'']=[A'C']$, $[AC]=[A'C''] \Rightarrow [AC]=[A'C']$.

9. $([AB]=[A'B'], [AC]=[A'C']; \angle A=\angle A') \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C'$ (теорема 6)■.

После введения аксиом I-III групп можно:

1) ввести понятия “ > ” и “ < ” для отрезков и углов и построить теорию сравнений отрезков и углов;
2) ввести понятие равнобедренного треугольника и доказать, что углы при его основании равны;
3) ввести понятие смежных углов и доказать, что углы, смежные с равными углами, равны;
4) ввести понятие вертикальных углов и доказать, что они равны.

§4. I и II признаки равенства треугольников

П.1. Понятие треугольника

Определение: *<u>треугольником</u> называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одно прямой.*

Указанные три точки называются вершинами треугольника, а отрезки – его сторонами. Треугольник с вершинами A,B,C обозначается : ΔABC, ΔBCA и т. д. Три угла $\angle BCA$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называются углами треугольника ABC. Часто их обозначают так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Пересечение внутренних областей углов треугольника называется его внутренней областью.

По общему определению равенства фигур ΔABC называется равным $\Delta A'B'C'$, если существует наложение f, при котором ΔABC отображается на $\Delta A'B'C'$. При этом, очевидно, каждая сторона ΔABC отображается на какую-нибудь сторону $\Delta A'B'C'$, поэтому каждая вершина первого треугольника отображается в какую-нибудь вершину второго. Запись $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ означает, что треугольники равны и $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$.

П.2. I признак равенства треугольников

<u>Теорема 6</u>. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A'B'C'$ / $[AB] = [A'B']$, $[AC] = [A'C']$, $\angle A = \angle A'$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Доказательство.

□1) $\angle BAC=\angle B'A'C' \Rightarrow \exists f \,/ A'=f(A)$, $[A'B')=f([AB))$, $[A'C')=f([AC))$, f – наложение (акс. III_6).

2) $(f(B)=B_1$, $f(C)=C_1) \Rightarrow f([AB])=[A'B_1]$, $f([AC])=[A'C_1]$ (акс. III_4).

3) $[AB])=[A'B_1]$, $f([AC])=[A'C_1] \Rightarrow [AB]=[A'B_1]$, $[AC]=[A'C_1]$.

4) По условию $[AB]=[A'B']$, $[AC]=[A'C']$, тогда с учетом 3) и аксиом III_2 и III_3 $[A'B_1]=[A'B']$ и $[A'C_1]=[A'C']$.

5) $[A'B_1]=[A'B']$, $[A'C_1]=[A'C'] \Rightarrow B_1=B'$, $C_1=C'$. (акс. III_5)

6) $f(B)=B'$, $f(C)=C'$, $f(A)=A' \Rightarrow f(\Delta ABC)=\Delta A'B'C'$.

7) $\Delta ABC)=\Delta A'B'C' \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C'$■.

П.3. II признак равенства треугольников

<u>Теорема 7</u> . Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A'B'C'$ / $[AB]=[A'B']$, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$.

Доказать: $\Delta ABC=\Delta A'B'C'$.

Доказательство.

□1. $\exists\, C''\in[A'C')/[A'C'']=[AC]$ (рис. 8). (акс. III_5)

2. $[AB]=[A'B']$, $[AC]=[A'C'']$, $\angle A=\angle A' \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C''$ (теор. 6)

3. $\Delta ABC=\Delta A'B'C'' \Rightarrow \angle B = \angle A'B'C''$

4. $(\angle B=\angle A'B'C'')\wedge(\angle B=\angle A'B'C')\Rightarrow\angle A'B'C''=\angle A'B'C'$ (акс.III_2,III_3)

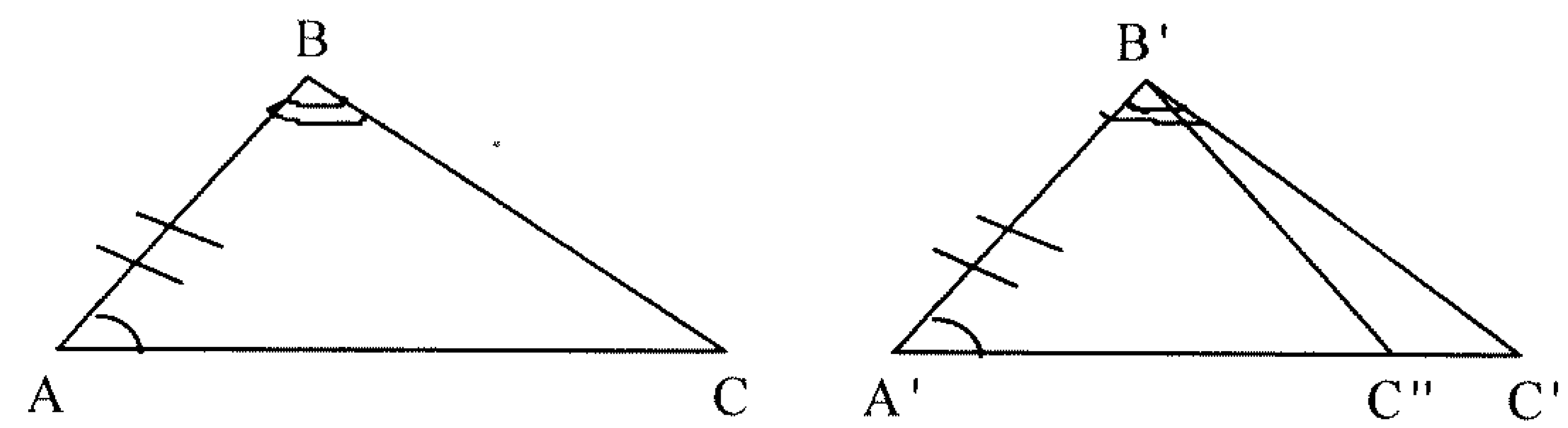


Рис. 8

5. $\angle A'B'C''=\angle A'B'C'$, и эти углы отложены от луча $[B'A')$ в одну полуплоскость с границей A'B', тогда по аксиоме III_7 $[B'C')=[B'C'')$.

6. $[B'C')=[B'C'') \Rightarrow C' = C'' = A'C'\cap B'C'$ (следствие 1^0, §1).

7. $C' = C'' \Rightarrow [A'C'']=[A'C']$.

8. $[A'C'']=[A'C']$, $[AC]=[A'C''] \Rightarrow [AC]=[A'C']$.

9. $([AB]=[A'B']$, $[AC]=[A'C']$, $\angle A=\angle A')\Rightarrow\Delta ABC=\Delta A'B'C'$ (теорема 6)■.

После введения аксиом I-III групп можно:

1) ввести понятия “ > ” и “ < ” для отрезков и углов и построить теорию сравнений отрезков и углов;
2) ввести понятие равнобедренного треугольника и доказать, что углы при его основании равны;
3) ввести понятие смежных углов и доказать, что углы, смежные с равными углами, равны;
4) ввести понятие вертикальных углов и доказать, что они равны.

§ 5. Прямой угол. Перпендикулярные прямые

П.1. Определение прямого угла и перпендикулярных прямых

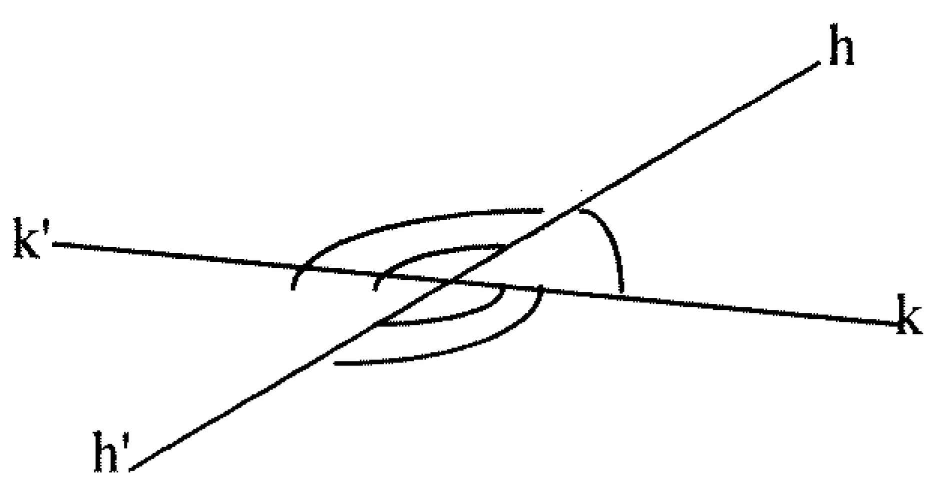


рис. 9

Каждый неразвернутый угол имеет два смежных с ним угла. На рисунке 9 смежными с углом $\angle hk$ являются $\angle hk'$ и $\angle kh'$. Эти углы вертикальные и, поэтому равны между собой.

Определение: *угол называется* *<u>прямым</u>, если он равен каждому из углов, смежных с ним.*

Лемма 6. Угол, равный прямому углу, является прямым.

Докажите это предложение самостоятельно, используя определение прямого угла и теорему о равенстве углов, смежных с равными.

Следствие: угол, смежный прямому, также является прямым.

Две прямые при пересечении образуют четыре неразвернутых угла. Если один из них, например, $\angle 1$ прямой, тогда смежные с ним углы $\angle 2$ и $\angle 4$ - также прямые. В этом случае является прямым и $\angle 3$ как смежный с прямым углом $\angle 2$.

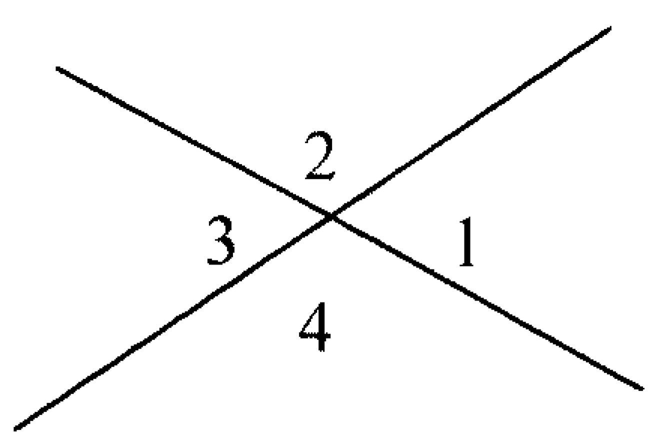


рис. 10.

Таким образом, или все четыре угла между прямыми являются прямыми, или ни один из них не является прямым.

Определение: *две пересекающиеся прямые называются <u>перпендикулярными</u>, если они при пересечении образуют четыре прямых угла.*

Обозначение : $a \perp b$.

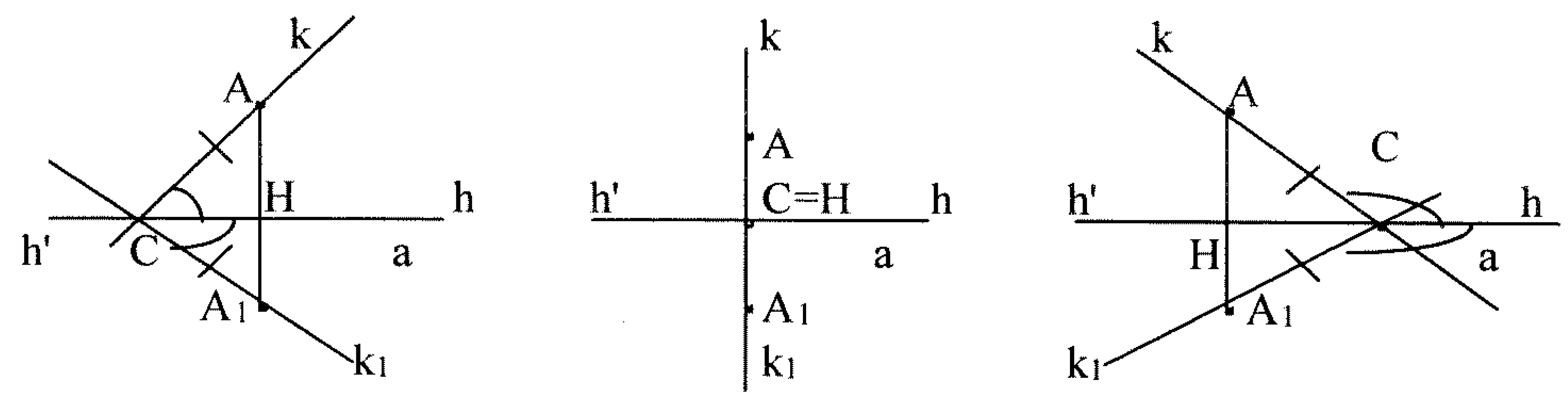
П.2. Теорема о перпендикулярности прямых

<u>Теорема 8.</u> Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

Доказательство.

I. Пусть даны прямая a и точка $A \notin a$.

1. $\exists\, C \in a$ (акс. I_2).
2. $\exists\, CA$ (акс. I_1).



а) б) в)

Рис. 9

Обозначим луч [CA) через k, дополнительные лучи прямой a с началом C через h и h', а полуплоскость с границей a, не содержащую точку A, – через λ.

3. $\exists\, k_1 \in \lambda / \angle hk_1 = \angle hk$ (акс. III_7).
4. $\exists\, A_1 \in k_1 / [CA_1] = [CA]$ (акс. III_5).
5. Точки A и A_1 принадлежат разным полуплоскостям с границей a, тогда по аксиоме II_4 прямая a пересекает $[AA_1]$ во внутренней точке $H \in [AA_1]$.

Покажем, что прямая AH и является перпендикулярной к прямой a.

Относительно расположения точек C и H возможны три случая:

а) C=H (рис. 9б), тогда $\angle hk_1 = \angle hk$, и эти углы смежные, значит, они оба прямые;

b) $H \in h$ (рис. 9а), тогда $\Delta ACH = \Delta A_1CH$ по I признаку равенства треугольников, и значит, равны углы при вершине H, которые являются смежными, следовательно, эти углы прямые;

c) $H \in h'$ (рис. 9в), тогда $\angle ACH = \angle A_1CH$ как углы, смежные с равными углами $\angle hk$ и $\angle hk_1$. В виду этого с учетом п.3 и п.4 доказательства имеем: $\Delta ACH = \Delta A_1CH$ по теореме 6. Из равенства треугольников следует, что равны смежные углы при вершине H, т.е. эти углы прямые.

Итак, во всех трех случаях а), б), в) прямые AH и a пересекаются под прямым углом, и значит, по определению являются перпендикулярными.

§ 5. Прямой угол. Перпендикулярные прямые

П.1. Определение прямого угла и перпендикулярных прямых

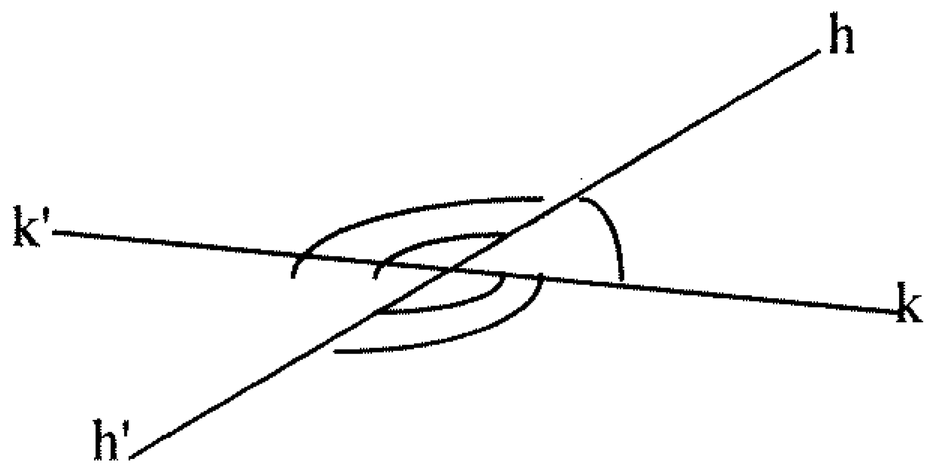


рис. 9

Каждый неразвернутый угол имеет два смежных с ним угла. На рисунке 9 смежными с углом $\angle hk$ являются $\angle hk'$ и $\angle kh'$. Эти углы вертикальные и, поэтому равны между собой.

Определение: *угол называется <u>прямым</u>, если он равен каждому из углов, смежных с ним.*

Лемма 6. Угол, равный прямому углу, является прямым.

Докажите это предложение самостоятельно, используя определение прямого угла и теорему о равенстве углов, смежных с равными.

Следствие: угол, смежный прямому, также является прямым.

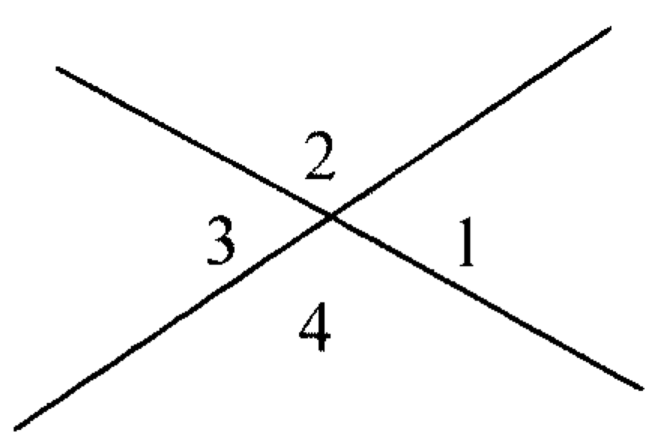


рис. 10.

Две прямые при пересечении образуют четыре неразвернутых угла. Если один из них, например, $\angle 1$ прямой, тогда смежные с ним углы $\angle 2$ и $\angle 4$ - также прямые. В этом случае является прямым и $\angle 3$ как смежный с прямым углом $\angle 2$.

Таким образом, или все четыре угла между прямыми являются прямыми, или ни один из них не является прямым.

Определение: *две пересекающиеся прямые называются <u>перпендикулярными</u>, если они при пересечении образуют четыре прямых угла.*

Обозначение : $a \perp b$.

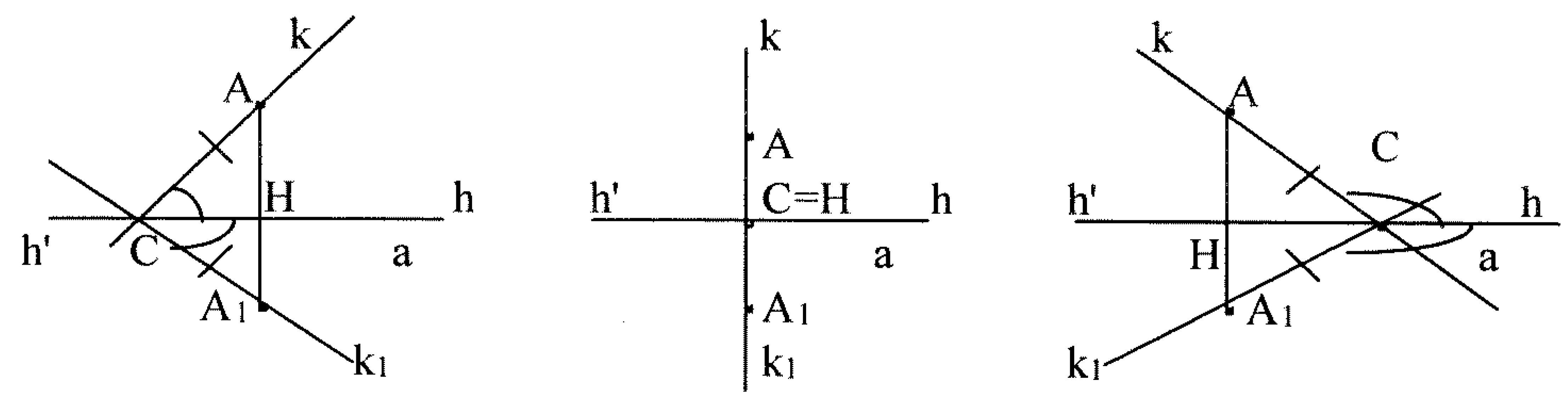
П.2. Теорема о перпендикулярности прямых

<u>Теорема 8.</u> Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.

Доказательство.

I. Пусть даны прямая a и точка $A \notin a$.

1. $\exists\, C \in a$ (акс. I_2).
2. $\exists\, CA$ (акс. I_1).



а) б) в)

Рис. 9

Обозначим луч [CA) через k, дополнительные лучи прямой a с началом C через h и h', а полуплоскость с границей a, не содержащую точку A, – через λ.

3. $\exists\, k_1 \in \lambda / \angle hk_1 = \angle hk$ (акс. III_7).
4. $\exists\, A_1 \in k_1 / [CA_1] = [CA]$ (акс. III_5).
5. Точки A и A_1 принадлежат разным полуплоскостям с границей a, тогда по аксиоме II_4 прямая a пересекает $[AA_1]$ во внутренней точке $H \in [AA_1]$.

Покажем, что прямая AH и является перпендикулярной к прямой a.

Относительно расположения точек C и H возможны три случая:

a) C=H (рис. 9б), тогда $\angle hk_1 = \angle hk$, и эти углы смежные, значит, они оба прямые;

b) $H \in h$ (рис. 9а), тогда $\Delta ACH = \Delta A_1CH$ по I признаку равенства треугольников, и значит, равны углы при вершине H, которые являются смежными, следовательно, эти углы прямые;

c) $H \in h'$ (рис. 9в), тогда $\angle ACH = \angle A_1CH$ как углы, смежные с равными углами $\angle hk$ и $\angle hk_1$. В виду этого с учетом п.3 и п.4 доказательства имеем: $\Delta ACH = \Delta A_1CH$ по теореме 6. Из равенства треугольников следует, что равны смежные углы при вершине H, т.е. эти углы прямые.

Итак, во всех трех случаях а), б), в) прямые AH и a пересекаются под прямым углом, и значит, по определению являются перпендикулярными.

Докажем теперь, что AH – единственная прямая, проходящая через точку A так, что $AH\perp a$. Допустим противное: $\exists\, b/A\in b,\ b\perp a$. Пусть $b\cap a = F$ (рис. 10). Тогда все углы при вершинах H и F- прямые. Проведем прямую FA_1 и рассмотрим ΔAFH и ΔA_1FH, которые равны по I признаку, откуда следует, что $\angle AFH=\angle A_1FH$.Кроме того, $\angle AFH=\angle HFQ$ по предположению. Получили, что от луча FH в одну полуплоскость с границей a отложены два угла $\angle HFA_1$ и $\angle HFQ$, равные $\angle HFA$, что невозможно в силу аксиомы III_7. Значит, AH- единственная прямая, перпендикулярная a.

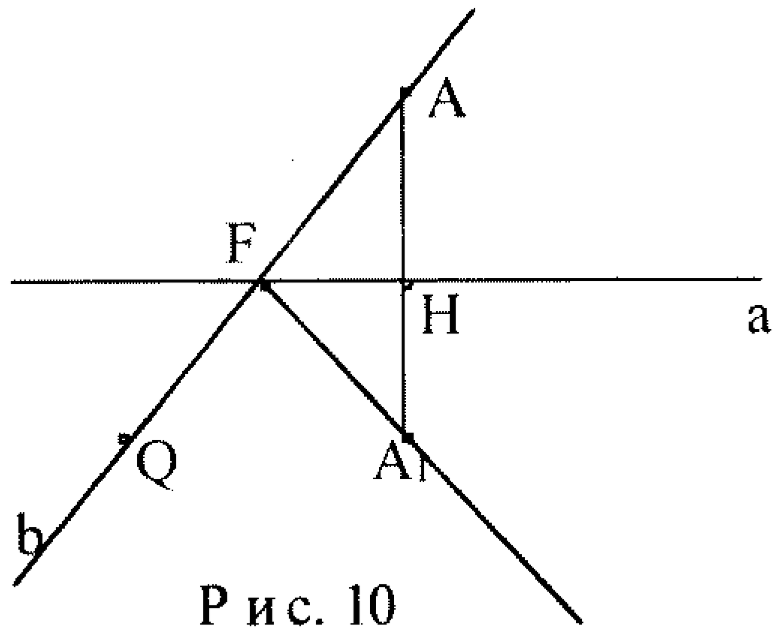


Рис. 10

Заметим, что в рассмотренном доказательстве вместе с существованием перпендикулярной к a прямой AH, доказано и существование прямого угла, так как нам известен способ его построения.

II. Пусть теперь даны прямая a и точка $A\in a$ (рис. 11). Зафиксируем один из лучей прямой a с началом в точке A (обозначим его h) и одну из полуплоскостей с границей a (обозначим ее λ).

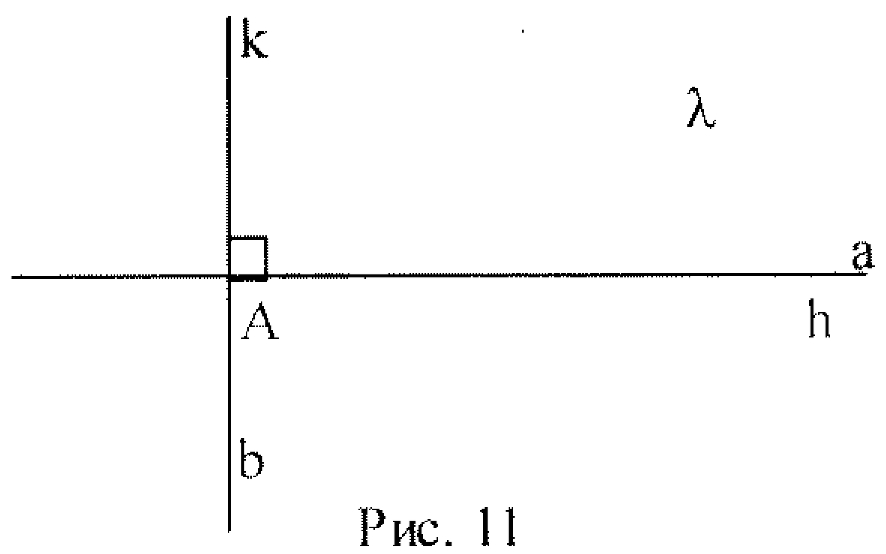


Рис. 11

От луча h в полуплоскость λ отложим $\angle hk$, равный прямому углу, что возможно в силу аксиомы III_7, тогда $\angle hk$ – прямой по лемме 6. Прямая b, содержащая луч k, и является прямой, перпендикулярной к прямой a и проходящей через точку A. Единственность прямой b следует из той же аксиомы III_7■.

§6. Теоремы о существовании непересекающихся прямых и о внешнем угле треугольника

Лемма 7. Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются.

Докажите эту лемму самостоятельно методом “от противного”.

Теорема 9. Каковы бы ни были прямая a и точка B, не лежащая на прямой a, существует прямая, проходящая через точку B и не пересекающая прямую a.

Дано: прямая a и точка $B\notin a$ (рис. 12).

Доказать: $\exists\, b/B\in b,\ a\cap b=\varnothing$.

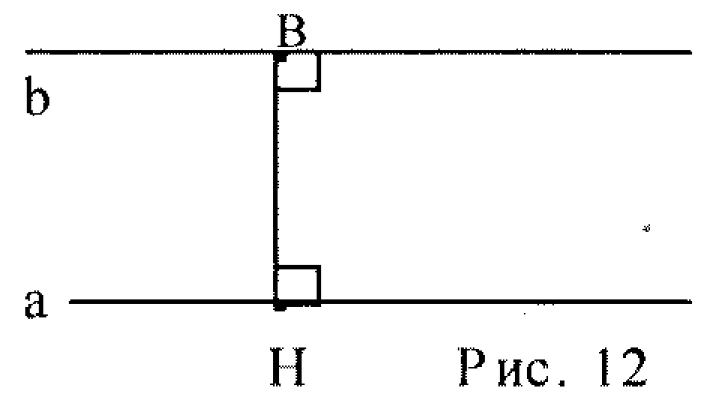


Рис. 12

Доказательство.

□1)$\exists$ BH $/B\in BH,\ BH\perp a$ (теорема 8).

2)$\exists$ b $/B\in b,\ b\perp BH$ (теорема 8).

3)$a\cap b=\varnothing$ (лемма 7)■.

Заметим, что без введения аксиомы параллельных невозможно ответить на вопрос о числе прямых, проходящих через точку B и не пересекающих a.

Теорема 10. Если при пересечении двух данных прямых третьей прямой окажется, что внутренние накрест лежащие углы равны, то данные прямые не пересекаются.

Дано: прямые a,b,c $/a\cap c=A$, $b\cap c=B$ и $\angle 1=\angle 2$.

Доказать: $a\cap b = \varnothing$.

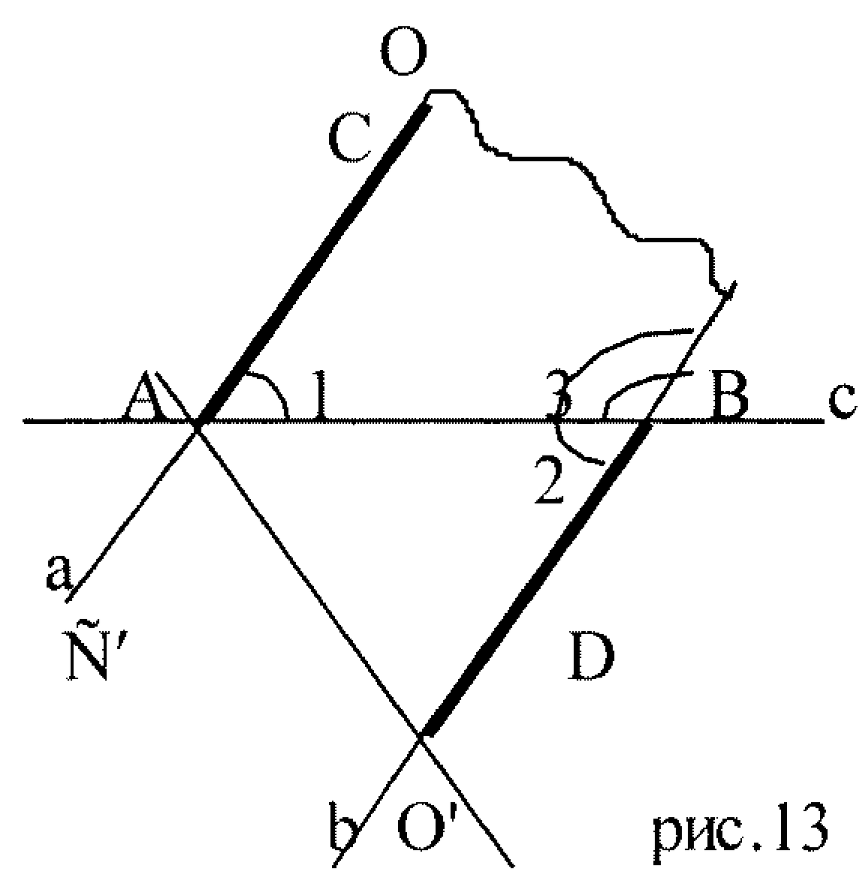


рис.13

Доказательство.

□Предположим противное: пусть $a\cap b=O$ и $O\in[AC)$ (рис. 13). На луче [BD) отложим отрезок [BO']=[AO] и рассмотрим треугольники AOB и AO'B. $\Delta AOB=\Delta AO'B$ по I признаку равенства треугольников, тогда $\angle 3=\angle BAO'$. Так как по условию $\angle 1=\angle 2$, то равны и смежные с ними углы, т.е. $\angle 3=\angle BAC'$, где C' – точка луча, дополнительного к [AC). Получили противоречие с аксиомой III_7: в одну и ту же полуплоскость от луча [AB) отложены два угла $\angle BAO'$ и $\angle BAC'$, равных углу $\angle B$. Следовательно, наше предложение неверно, т.е. $a \cap b = \varnothing$■.

Заметим, что без введения аксиомы параллельных теорему, обратную к теореме 10, ни доказать, ни отвергнуть невозможно.

Теорема 11 – *о внешнем угле треугольника.*

Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.

Дано: ΔABC, $\angle BAD$- внешний угол.

Доказать: $\angle BAD > \angle B$.

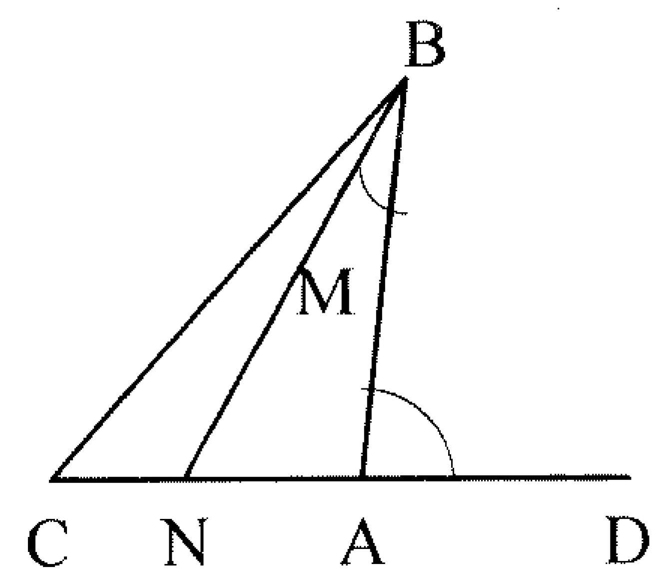


Рис.14

Доказательство.

1. $\angle B$ и $\angle BAD$ – накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AB (рис. 14). Так как AD и BC пересекаются, то по теореме 10: $\angle B \neq \angle BAD$, т.е. $\angle BAD > \angle B$ или $\angle BAD < \angle B$.

2. Докажем, что условие $\angle BAD < \angle B$ не имеет места. Действительно, если предположить, что $\angle BAD < \angle B$, то существует внутренний луч [BM) угла $\angle B$ такой, что $\angle BAD = \angle ABM$.

3. Так как [BM) – внутренний луч $\angle B$, то по теореме 5 [BM) пересечет отрезок [AC] в некоторой точке N. Получаем противоречие с теоремой 10: равны накрест лежащие углы BAD и ABM при пересечении прямых AD и BM секущей AB, но $AD \cap BM = N$. Следовательно, наше предположение неверно и $\angle BAD > \angle B$.

Аналогично можно доказать, что $\angle BAD > \angle C$■.

Заметим, что без введения аксиомы о параллельных ответить на вопрос, будет ли внешний угол треугольника равен сумме внутренних его углов, с ним несмежных, или нет, невозможно.

Развивая дальше теорию $\Im(\Sigma_A)$, можно доказать также следующие факты.

1. Каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая лежит на отрезке [6].
2. Каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну биссектрису [6].
3. Биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают [7].
4. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны [7].

§ 7. Аксиома существования длины отрезка. Измерение отрезков

П.1. Понятие длины отрезка

Обозначим через L множество всех отрезков плоскости, а через R_+^* множество всех положительных действительных чисел.

Говорят, что установлено измерение отрезков, если определено отображение $l: L \to R_+^*$, удовлетворяющее следующим аксиомам.

D_1. Если [AB]=[CD], то l([AB])=l([CD]).

D_2. Если $A\overset{*}{B}C$, то l([AB])+l([BC])=l([AC]).

D_3. Существует [PQ] такой, что l([PQ])=1.

Отрезок [PQ] (и любой равный ему отрезок), удовлетворяющий аксиоме D_3, называется *линейной единицей* или *единичным отрезком*. Положительное число l([AB]) с указанием линейной единицы называется *мерой* или *длиной* отрезка [AB].

Естественно возникает вопрос, правомерно ли такое определение, можно ли множеству L отрезков поставить в соответствие множество чисел из R_+^* с соблюдением аксиом D_1, D_2, D_3, и будет ли это соответствие однозначным?

Основная задача теории измерения отрезков как раз и заключается в том, чтобы на основе аксиом Атанасяна и теории действительного числа доказать существование и единственность длины каждого отрезка при выбранной линейной единице.

Оказывается, что только с помощью аксиом I-III групп Атанасяна невозможно дать положительный ответ на вопрос о существовании длины отрезка. Необходимо ввести еще одну аксиому, которая называется аксиомой существования длины отрезков.

IV_1. При произвольно выбранном единичном отрезке каждый отрезок имеет определенную длину.

В этой аксиоме утверждается, что измерение отрезков возможно, т.е. при произвольно выбранном единичном отрезке каждому отрезку соответствует определенное положительное число так, что выполняются аксиомы D_1, D_2, D_3. Аксиома IV_1 утверждает существование длины отрезков, т.е. существование отображения $l: L \to R_+^*$, и тем самым избавляет нас от поиска этого отображения.

П.2. Некоторые свойства длин отрезков

1^0. $[AB]<[CD] \Leftrightarrow l([AB])<l([CD])$.

Доказательство.

□Пусть $[AB]<[CD]$. Тогда на отрезке $[CD]$ существует точка M такая, что $[CM]=[AB]$. В силу аксиом D_1 и D_2 $l([CM])=l([AB])$ и $l([CD])=l([CM])+l([MD])$ или $l([CD])=l([AB])+l([MD])$. Но $l([MD])>0$, поэтому $l([CD])>l([AB])$.

Обратно. Пусть $l([AB])<l([CD])$. Как известно, возможно одно из трех соотношений : 1) $[AB]=[CD]$, 2) $[AB]>[CD]$, 3) $[AB]<[CD]$. Первый и второй случаи не могут иметь места, так как в первом случае по аксиоме D_1 $l([AB])=l([CD])$, а во втором случае по доказанному $l([AB])>$ $>l([CD])$. Следовательно, $[AB]<[CD]$■.

Определение: *будем говорить, что отрезок [EF] <u>укладывается в отрезке [AB] n раз</u> ($n \in N$), если на отрезке [AB] существуют попарно различные точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ такие, что*

1. $A\overset{*}{A_1}A_2,\ A_1\overset{*}{A_2}A_3, \dots, A_{n-2}\overset{*}{A_{n-1}}B$,

2. $[AA_1]=[A_1A_2]= \dots =[A_{n-1}B]=EF$ *(рис. 15).*

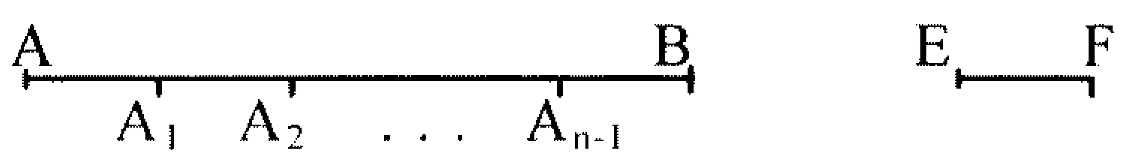


Рис. 15.

Из этого определения на основании аксиомы II_2 и теоремы 3 следует, что при $i<j<n-1$ $A\overset{*}{A_i}A_j$.

2^0. Если отрезок [EF] укладывается в отрезке [AB] n раз, то $l([AB]) = n \cdot l([EF])$.

Доказательство.

По условию на [AB] существуют попарно различные точки $A_1,\dots,A_{n-1}$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) определения. Так как $A\overset{*}{A_1}A_2$, то по аксиомам D_1 и D_2 $l([AA_1])+l([A_1A_2])=l([AA_2])$ или $l([AA_2])=2l([EF])$. Так как $A\ \overset{*}{A_2}A_3$, то в силу тех же аксиом D_1 и D_2 получим $l([AA_2])+$ $+l([A_2A_3])=l([AA_3])$ или $l([AA_3])=3l([EF])$. Аналогично, $l([AA_4])=4l([EF])$, ..., $l([AA_{n-1}])=(n-1)\cdot l([EF])$, $l([AB])=n\cdot l([EF])$■.

<u>Теорема 12</u> – *предложение Архимеда.*

Если [AB] и [CD] – произвольные отрезки, то на луче [AB) существует конечное множество точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ таких, что $A\overset{*}{A_1}A_2$, $A_1\overset{*}{A_2}A_3, \dots, A_{n-2}\overset{*}{A_{n-1}}A_n$; $[AA_1]=[A_1A_2]= \dots =[A_{n-1}A_n]=[CD]$ и $A\overset{*}{B}A_n$.

Доказательство.

□На основании аксиомы IV_1 введем измерение отрезков, взяв за линейную единицу отрезок [CD]. Возьмем натуральное число $n>l([AB])$, где $l([AB])$- длина отрезка [AB]. На луче [AB) отложим последовательно отрезки $[AA_1]=[A_1A_2]= \dots =[A_{n-1}A_n]=[CD]$. Тогда по свойству 2^0 $l([AA_n])=nl([CD])=n$, òàê êàê $l([CD])=1$. Òàêèì îáðàçîì, $l([AA_n])>l([AB])$, тогда по свойству 1^0 $[AA_n]>[AB]$, и значит, $A\overset{*}{B}A_n$■.

Замечание. Предложение Архимеда было доказано как следствие из аксиом I_1-I_2, II_1-II_4, III_1-III_7 и IV_1. Можно доказать, что из аксиом групп I,II,III и предложения Архимеда следует утверждение аксиомы IV_1. Значит, вместо аксиомы IV_1 можно было принять предложение Архимеда.

П.3. Теорема единственности длин отрезков

<u>Теорема 13.</u> Если выбран единичный отрезок [PQ], то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором выполняются аксиомы D_1, D_2, D_3 измерения отрезков.

Доказательство.

□Пусть утверждение теоремы неверно, т.е. при выбранном единичном отрезке [PQ] существуют по крайней мере два соответствия l и l_1, каждое из которых удовлетворяет аксиомам D_1, D_2, D_3. Тогда существует отрезок [MN] такой, что $l([MN])\neq l_1([MN])$. Пусть $l([MN]) = a$, $l_1([MN]) = b$, и для определенности положим $b>a$.

Возьмем натуральное число $K > \dfrac{1}{b-a}$ и рассмотрим отрезок [AB], в котором [MN] укладывается K раз. По свойству 2^0 $l([AB])=K\cdot l([MN]) =K\cdot a$, $l_1([AB])=K\cdot l_1([MN])=K\cdot b$. Так как $l_1([AB])=K\cdot b>1$, а $l_1[PQ]=1$, то по свойству 1^0 $[AB]>[PQ]$.

Пользуясь предложением Архимеда, на [AB) отложим последовательно отрезки $[AA_1]=[A_1A_2]=\ldots=[A_{n-1}A_n]=[PQ]$ так, чтобы $A_{n-1}\in[AB]$ и $A\overset{*}{B}A_n$. По свойству 2^0 имеем: $l([AA_{n-1}])=l_1([AA_{n-1}])=n-1$, $l([AA_n])=l_1([AA_n])=n$ (*).

Из условия $A\overset{*}{A}_{n-1}B$ по аксиоме II_3 имеем $\overline{A\overset{*}{B}A_{n-1}}$, тогда по теореме 3 с учетом условия $A\overset{*}{B}A_n$ получаем, что $A_{n-1}\overset{*}{B}A_n$, откуда следует, что $[AA_{n-1}]<[AB]<[AA_n]$. Отсюда по свойству 1^0 получаем $l[AA_{n-1}]<l[AB]<l[AA_n]$ и $l_1[AA_{n-1}]<l_1[AB]<l_1[AA_n]$ или с учетом (*) $n-1<K\cdot a<n$ и $n-1<K\cdot b<n$, откуда следует, что $0<K\cdot b-K\cdot a<1$.

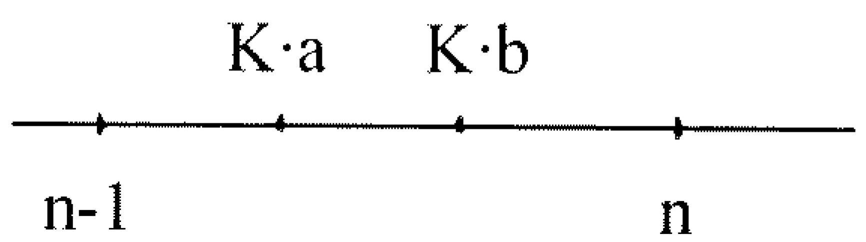


Рис. 16.

Так как $K\cdot b-K\cdot a<1$, то $K<\dfrac{1}{b-a}$, что противоречит условию выбора K. Полученное противоречие говорит о невозможности нашего предположения, но тогда условия D_1, D_2, D_3 *единственным* образом определяют длину каждого отрезка■.

Заметим, что длина отрезка зависит от выбора единичного отрезка. Можно доказать [6], что при переходе от одного единичного отрезка к другому длины всех отрезков умножаются на одно и то же число.

§8. Аксиома существования отрезка данной длины. Предложения Дедекинда для отрезков и углов

П.1. Аксиома существования отрезка данной длины

IV_2. Каково бы ни было действительное число $d>0$, существует отрезок, длина которого равна d.

<u>Теорема 14</u> – *об откладывании отрезка данной длины.*

Каково бы ни было действительное число $d>0$, и каков бы ни был луч h с началом A, на луче h существует единственная точка B такая, что $l([AB])=d$.

Доказательство.

□Пусть дано $d\in R_+^*$, тогда по аксиоме IV_2 существует отрезок [CD] такой, что $l([CD])=d$. По аксиоме III_5 об откладывании отрезка, равного данному отрезку, на луче h существует и единственная точка B такая, что $[AB]=[CD]$, откуда по аксиоме D_1 $l([AB])=l([CD])=d$■.

Аксиома IV_2 позволяет доказать существование биективного соответствия между точками прямой и действительными числами, если на прямой определены координаты точек. Это является основой доказательства предложения Дедекинда.

П.2. Теоремы Дедекинда для отрезков и углов

Из курса математического анализа хорошо известен принцип Дедекинда во множестве всех действительных чисел. Сформулируем его для числового отрезка.

Пусть все действительные числа числового отрезка [a,b], где $a<b$, разделены на два класса так, что выполнены условия:

a) каждое число отрезка [a,b] относится к одному и только классу;
b) число a относится к первому классу, а число b – ко второму; каждый из классов содержит числа, отличные от a и b;
c) каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса.

Тогда либо в первом классе есть наибольшее число, либо во втором – наименьшее.

Пользуясь этим принципом, докажем теорему Дедекинда для точек отрезка на прямой.

<u>Теорема 15.</u> Пусть все точки отрезка [AB] разбиты на два класса K_1 и K_2 так, что выполняются условия:

а) каждая точка [AB] попадает в один и только один из классов K_1 или K_2 ;

б) $A\in K_1$, $B\in K_2$. Каждый из классов K_1 и K_2 содержит точки, отличные от A и B;

в) каждая точка класса K_1, отличная от точки A, лежит между точкой A и любой точкой класса K_2.

Тогда существует точка $C\in[AB]$ такая, что любая точка, лежащая между A и C, принадлежит K_1, а любая точка, лежащая между C и B, принадлежит K_2.

Точка C называется граничной точкой разбиения, она принадлежит либо K_1, либо K_2.

Доказательство.

□Пусть все точки отрезка [AB] разбиты на классы K_1 и K_2, удовлетворяющие условиям а)–в) теоремы. Введем на прямой AB систему координат так, что A – начало, [AB) – положительная полупрямая, тогда A(0), B(b) и b>0. Точка M(x) лежит между точками A и B тогда и только тогда, когда $0<x<b$ в силу определения координат точки на прямой и аксиомы D_2 измерения длин. Таким образом, вместе с разбиением на классы K_1 и K_2 точек отрезка [AB] разбиваются на классы Ω_1 и Ω_2 числа отрезка [0;b], которые являются координатами точек [AB]. При этом $0\in\Omega_1$, $b\in\Omega_2$ и каждое число класса Ω_1 меньше любого числа класса Ω_2. По принципу Дедекинда для числового отрезка [0,b] существует число x_0, которое является наибольшим в Ω_1 или наименьшим в Ω_2. Ясно, что $0<x_0<b$. По аксиоме IV_2 на луче [AB) есть такая точка C, что $l[AC]=x_0$, т.е. $C(x_0)$ – искомая. Действительно, так как $0<x_0<b$, то $A\overset{*}{C}B$. Пусть $A\overset{*}{M}(x)C$, тогда $0<x<x_0$, поэтому $x\in\Omega_1$, а $M\in K_1$. Пусть теперь $C\overset{*}{M}(x)B$, тогда $x_0<x<b$, поэтому $x\in\Omega_2$, а $M\in K_2$ ■.

Следствие (теорема Дедекинда для углов): пусть все внутренние лучи $\angle hk$ вместе с его сторонами разбиты на два класса I и II так, что:
а) каждый внутренний луч $\angle hk$ попадает в один и только один класс;
б) $h\in I$, $k\in II$ и каждый класс содержит лучи, отличные от h и k;
в) всякий луч $x\in I$, $x\neq h$ лежит между h и любым лучом $y\in II$. Тогда существует единственный внутренний луч p угла $\angle hk$ такой, что все внутренние лучи $\angle hp$ принадлежат I классу, а все внутренние лучи $\angle pk$ принадлежат классу II.

Действительно, в силу теоремы о внутреннем луче угла между внутренними лучами угла и точками произвольного отрезка AB с концами на сторонах угла существует биективное соответствие (рис. 17).

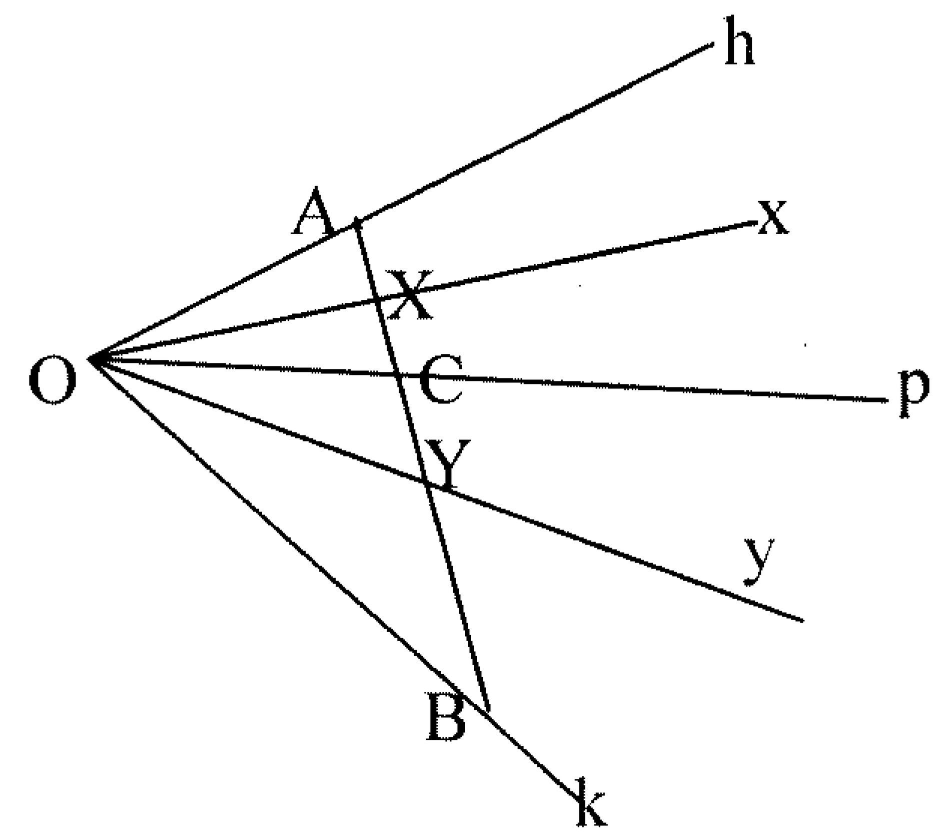


Рис. 17

При этом разбиению лучей на два класса будет соответствовать разбиение точек отрезка [AB] на классы, удовлетворяющее условиям теоремы Дедекинда для отрезков. Тогда на [AB] существует и единственная граничная точка C, тогда луч [OC)- так же граничный.

Эта теорема понадобится нам при доказательстве существования параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

В системе аксиом Гильберта, как мы знаем, предложение Дедекинда для отрезков включается в список аксиом, она относится к группе аксиом непрерывности.

Аналогично длине отрезка определяется мера угла, доказывается теорема о существовании и единственности меры угла. В геометрии чаще всего используется градусная мера угла. За единицу измерения при этом принимается $\frac{1}{90}$ градусной меры прямого угла и обозначается 1^0. Тогда градусная мера развернутого угла 180^0, а градусная мера любого неразвернутого угла заключается в пределах от 0^0 до 180^0.

Итак, аксиомы I-IV групп дают возможность решить проблему измерения отрезков и углов, установить биективное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, что позволяет установить несчетность множества точек прямой. Кроме этого можно строго логически обосновать факты пересечения окружности с прямой и двух окружностей [40].

а) каждая точка [AB] попадает в один и только один из классов K_1 или K_2 ;

б) $A \in K_1$, $B \in K_2$. Каждый из классов K_1 и K_2 содержит точки, отличные от А и В;

в) каждая точка класса K_1, отличная от точки А, лежит между точкой А и любой точкой класса K_2.

Тогда существует точка $C \in [AB]$ такая, что любая точка, лежащая между А и С, принадлежит K_1, а любая точка, лежащая между С и В, принадлежит K_2.

Точка С называется граничной точкой разбиения, она принадлежит либо K_1, либо K_2.

Доказательство.

□Пусть все точки отрезка [AB] разбиты на классы K_1 и K_2, удовлетворяющие условиям а)–в) теоремы. Введем на прямой АВ систему координат так, что А – начало, [AB) – положительная полупрямая, тогда A(0), B(b) и b>0. Точка M(x) лежит между точками А и В тогда и только тогда, когда $0<x<b$ в силу определения координат точки на прямой и аксиомы D_2 измерения длин. Таким образом, вместе с разбиением на классы K_1 и K_2 точек отрезка [AB] разбиваются на классы Ω_1 и Ω_2 числа отрезка [0;b], которые являются координатами точек [AB]. При этом $0 \in \Omega_1$, $b \in \Omega_2$ и каждое число класса Ω_1 меньше любого числа класса Ω_2. По принципу Дедекинда для числового отрезка [0,b] существует число x_0, которое является наибольшим в Ω_1 или наименьшим в Ω_2. Ясно, что $0<x_0<b$. По аксиоме IV_2 на луче [AB) есть такая точка С, что $l[AC]=x_0$, т.е. $C(x_0)$ – искомая. Действительно, так как $0<x_0<b$, то $A\overset{*}{C}B$. Пусть $A\overset{*}{M(x)}C$, тогда $0<x<x_0$, поэтому $x \in \Omega_1$, а $M \in K_1$. Пусть теперь $C\overset{*}{M(x)}B$, тогда $x_0<x<b$, поэтому $x \in \Omega_2$, а $M \in K_2$ ■.

Следствие (теорема Дедекинда для углов): пусть все внутренние лучи $\angle hk$ вместе с его сторонами разбиты на два класса I и II так, что:

а) каждый внутренний луч $\angle hk$ попадает в один и только один класс;

б) $h \in I$, $k \in II$ и каждый класс содержит лучи, отличные от h и k;

в) всякий луч $x \in I$, $x \neq h$ лежит между h и любым лучом $y \in II$. Тогда существует единственный внутренний луч p угла $\angle hk$ такой, что все внутренние лучи $\angle hp$ принадлежат I классу, а все внутренние лучи $\angle pk$ принадлежат классу II.

Действительно, в силу теоремы о внутреннем луче угла между внутренними лучами угла и точками произвольного отрезка АВ с концами на сторонах угла существует биективное соответствие (рис. 17).

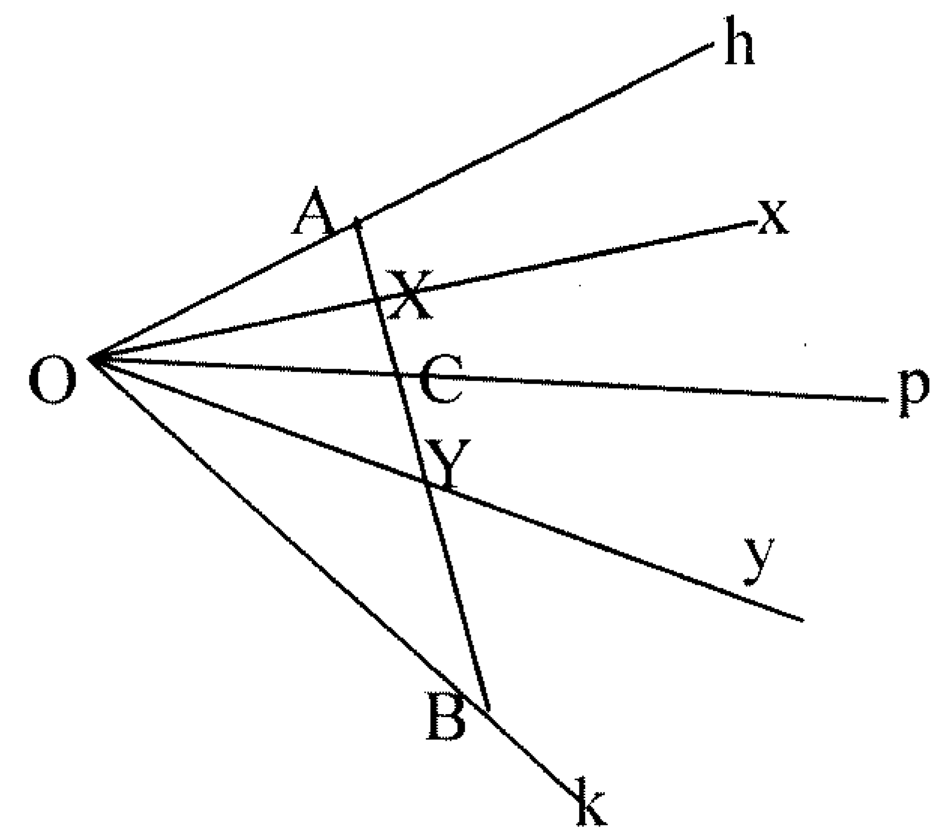


Рис. 17

При этом разбиению лучей на два класса будет соответствовать разбиение точек отрезка [AB] на классы, удовлетворяющее условиям теоремы Дедекинда для отрезков. Тогда на [AB] существует и единственная граничная точка С, тогда луч [OC)- так же граничный.

Эта теорема понадобится нам при доказательстве существования параллельных прямых на плоскости Лобачевского.

В системе аксиом Гильберта, как мы знаем, предложение Дедекинда для отрезков включается в список аксиом, она относится к группе аксиом непрерывности.

Аналогично длине отрезка определяется мера угла, доказывается теорема о существовании и единственности меры угла. В геометрии чаще всего используется градусная мера угла. За единицу измерения при этом принимается $\frac{1}{90}$ градусной меры прямого угла и обозначается 1^0. Тогда градусная мера развернутого угла 180^0, а градусная мера любого неразвернутого угла заключается в пределах от 0^0 до 180^0.

Итак, аксиомы I-IV групп дают возможность решить проблему измерения отрезков и углов, установить биективное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, что позволяет установить несчетность множества точек прямой. Кроме этого можно строго логически обосновать факты пересечения окружности с прямой и двух окружностей [40].

§9. Аксиома параллельных Евклида. Абсолютная и собственно евклидова геометрии

Совокупность рассмотренных выше аксиом I-IV групп аксиоматики Атанасяна евклидовой плоскости недостаточна для обоснования евклидовой геометрии, необходима еще аксиома параллельности.

Та аксиоматическая теория, которая строится на основе аксиом I-IV групп, называется *абсолютной геометрией*. Этот термин введен Я. Бояи в связи с тем, что абсолютная геометрия является общей частью геометрии Евклида и геометрии Лобачевского.

К абсолютной геометрии относятся все те факты, которые мы рассматривали до сих пор.

Группа V – аксиома параллельности евклидовой геометрии.

V_E. Каковы бы ни были прямая a и точка A, лежащая вне прямой , существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a.

<u>Теорема 16.</u> Каковы бы ни были прямая a и точка $A \notin a$, через точку A проходит *одна и только одна* прямая, не пересекающая a.

Справедливость ее следует из теоремы 9 абсолютной геометрии о существовании непересекающихся прямых и аксиомы V_E.

На евклидовой плоскости непересекающиеся прямые называются *параллельными.*

Докажите самостоятельно следующие следствия из аксиом Σ_A.

1. Отношение параллельности прямых обладает свойствами симметричности ($a//b \Rightarrow b//a$) и транзитивности ($(a//b,\ b//c) \Rightarrow a//c$).
2. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.
3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то
   а) накрест лежащие углы равны;
   б) соответственные углы равны;
   в) сумма односторонних углов равна 180^0.

(*Указание*: использовать метод “от противного”.)

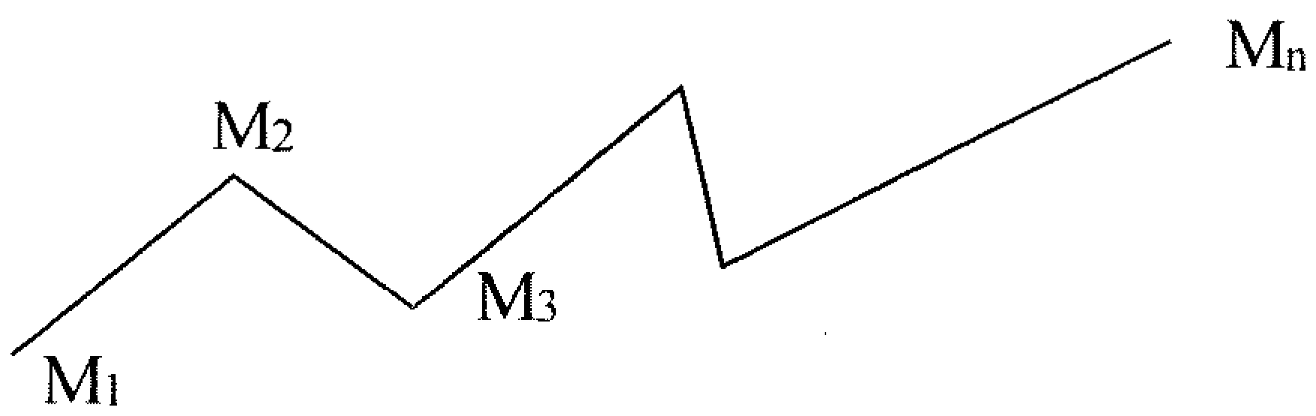
Теперь можно доказать, что сумма углов треугольника равна 180^0, внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных, все предложения, эквивалентные V постулату Евклида и сам постулат; можно, далее, развить всю теорию подобия фигур и теорию измерения площадей.

Все те предложения евклидовой геометрии, для доказательства которых вместе с аксиомами I-IV групп необходима и аксиома параллельности V_E или следствия из нее, составляют *собственно евклидову* геометрию. К ней относятся и те предложения, которые перечислены в этом параграфе.

§ 10. Измерение площадей многоугольников в евклидовой геометрии

П.1. Понятие простого многоугольника

Система отрезков $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, ... ,$[M_{n-1}M_n]$ $(n \geq 2)$ называется *ломаной*, соединяющей точки M_1 и M_n и обозначается так: $M_1M_2 \ldots M_n$ (рис. 18).



Отрезки $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, ... ,$[M_{n-1}M_n]$ называются *сторонами* или *звеньями* ломаной, а точки M_1 ,M_2 , ... , M_n – *вершинами*, причем M_1 и M_n называются *концами* ломаной. Если концы ломаной совпадают, то она называется *замкнутой*. Ломаная называется *простой*, если:

1) все ее вершины различны,
2) ни одна из вершин не является внутренней точкой стороны,
3) никакие две стороны не имеют общей внутренней точки.

Определение: *простая замкнутая ломаная называется простым многоугольником. Вершины и стороны ломаной называются вершинами и сторонами многоугольника. Многоугольник, имеющий n вершин, называется n-угольником.*

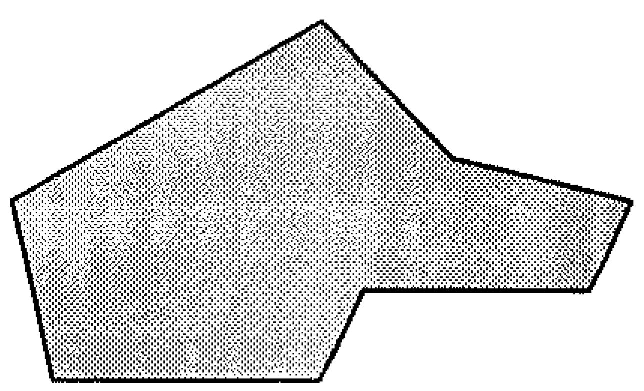


Рис. 19

В дальнейшем будем рассматривать только простые многоугольники и (рис.19) называть их многоугольниками для простоты изложения.

Согласно теореме Жордана многоугольник разбивает множество всех точек плоскости, не принадлежащих ему, на два подмножества, одно из которых называется *внутренней*, а другое *внешней* областью многоугольника. Точки внутренней области называются *внутренними точками* многоугольника.

Фигура, являющаяся объединением многоугольника F и его внутренней области, также называется *многоугольником*.

Будем говорить, что многоугольник F разложен на многоугольники F_1, ... , F_k, если никакие два из многоугольников F_1, ... , F_k не имеют общих внутренних точек и $F=F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$. На рис. 20 многоугольник F разложен на треугольники F_1,F_2,F_3,F_4. В этом случае F называют также суммой многоугольников $F_1,\ldots,F_k$ и пишут: $F=F_1+F_2+\ldots+F_k=\sum_{i=1}^{k} F_i$. Можно доказать, что каждый многоугольник можно разложить на конечное число треугольников Δ_i различными способами так, что $F=\bigcup_i \Delta_i$, и никакие два из треугольников не имеют общих внутренних точек, а могут иметь только либо общую вершину, либо общую сторону. Тогда $F=\sum_i \Delta_i$.

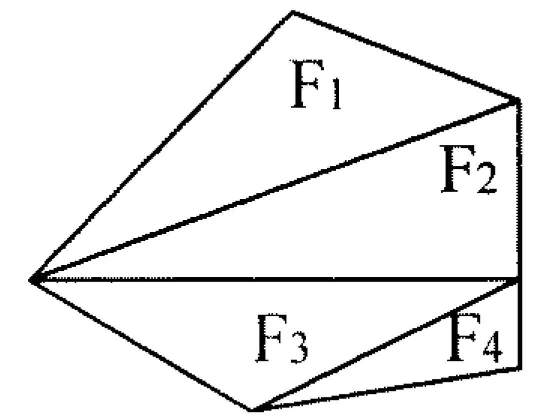


Рис. 20

П.2. Понятие площади многоугольника

В отличие от теории измерения отрезков и углов теория измерения площадей существенно зависит от принятой аксиомы V_E , поэтому она относится к собственно евклидовой геометрии.

Рассмотрим множество M всех многоугольников плоскости, где установлено измерение отрезков при линейной единице [PQ].

Говорят, что установлено *измерение площадей* многоугольников, если определено отображение $S\colon M \to R_+^*$,удовлетворяющее следующим аксиомам:

П1. Если $F_1=F_2$, то $S(F_1)=S(F_2)$.

П2. Если $F_1+F_2=F$, то $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$.

П3. Если Q – квадрат со стороной, равной линейной единице, то $S(Q)=1$.

Положительное число S(F) называется *мерой* или *площадью* многоугольника F, а квадрат Q – *единичным квадратом* или *единицей площади.*

Основная задача теории измерения площадей заключается в доказательстве существования и единственности отображения $S\colon M \to R_+^*$, удовлетворяющего аксиомам П1-П3, т.е. в доказательстве существования и единственности площади у каждого многоугольника при выбранной единице площади.

Заметим, что в школьном курсе геометрии вовсе не ставится вопрос о существовании площади плоской фигуры. Там считается совершенно очевидным и само собой разумеющимся, что каждая плоская фигура имеет площадь. Проблема же заключается в том, как найти число, выражающее площадь фигуры. С педагогической точки зрения такое изложение учения о площадях вполне оправдано, так как для школьников недоступна даже постановка проблемы о существовании площади.

Однако основанная на наглядных представлениях уверенность в существовании площади плоской фигуры без логической проверки может привести к ошибке, так как существуют фигуры, ограниченные непрерывными замкнутыми кривыми без кратных точек, которые все-таки не имеют площади – это так называемые неквадрируемые фигуры.

Прежде, чем доказывать теорему существования и единственности площади многоугольника, рассмотрим несколько вспомогательных предложений.

П.3. Площадь прямоугольника и треугольника

Теорема 17. Если измерение площадей возможно, то при выбранной единице площади площадь прямоугольника со сторонами x и y равна x·y.

Доказательство.

□Предполагаем, что каким-то образом установлено отображение $S{:}M\to R_+^*$, удовлетворяющее аксиомам П1, П2, П3. Надо доказать, что если P – прямоугольник со сторонами x и y, то S(P)= x·y.

Так как прямоугольник вполне определяется своими сторонами, то ясно, что S(P)=f(x, y). Функция f(x, y) определена для всех $x, y\in R_+^*$ и принимает только положительные значения, она обладает свойствами:

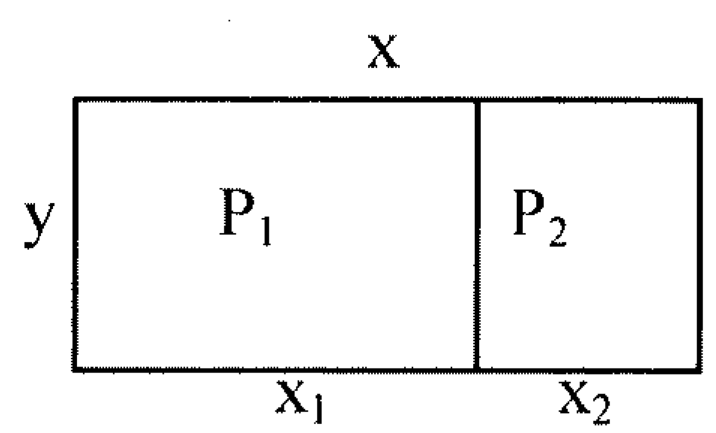


Рис. 21

1) f(x,y)=f(y,x),
2) $f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y)$,
3) f(x,y)=f(1,y)x.

Свойство 1) вытекает из аксиомы П1, если учесть, что два прямоугольника со сторонами x, y и y, x равны.

Свойство 2) следует из аксиомы П2 (рис. 21).

Для доказательства свойства 3) рассмотрим прямоугольники, у которых одна сторона, например, у не изменяется, т.е. $y=y_0=\text{const}$. На множестве таких прямоугольников площадь прямоугольника будет уже функцией одного переменного x. Обозначим $f(x,y_0)=g(x)$. Функция g(x) определена для всех x>0 и принимает только положительные значения. В силу свойства 2): $g(x_1+x_2)=g(x_1)+g(x_2)$ (*).

Покажем, что g(x) монотонно возрастает, т.е. если x'>x, то g(x')>g(x).

Если x'>x, то $x'=x+x_1$, где $x_1>0$, тогда $g(x')=g(x+x_1)=g(x)+g(x_1)$ в силу (*). Так как $g(x_1)>0$, то g(x')>g(x).

А теперь докажем, что g(x)=g(1)x для $\forall x\in R_+^*$.

а) $g(nx)=g(\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n})=\underbrace{g(x)+g(x)+\ldots+g(x)}_{n}=ng(x)$, что следует из равенства (*) для $\forall x\in R_+^*$ и $\forall n\in N$.

б) при $x=\dfrac{1}{n}$ получим $g(nx)=g\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\right)=g(1)=ng\left(\dfrac{1}{n}\right)$, тогда $g\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}g(1)$ для $\forall n\in N$.

в)при $x=\dfrac{m}{n}$ получаем

$$g(x)=g\left(\frac{m}{n}\right)=g\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=mg\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}g(1) \text{ для } \forall n,\ m\in N.$$

г) пусть $\forall x\in R_+^*$, тогда для $\forall n\in N$ найдется $m\in N$ такое, что $\dfrac{m}{n}<x<\dfrac{m+1}{n}$.(**)

Отсюда в виду монотонности g(x), получим, что

$$g\left(\frac{m}{n}\right)<g(x)<g\left(\frac{m+1}{n}\right) \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}g(1)<g(x)<\frac{m+1}{n}g(1),$$

что дает $\dfrac{m}{n}<\dfrac{g(x)}{g(1)}<\dfrac{m+1}{n}$ (***).

Из (**) следует, что последовательности $\dfrac{m}{n}$ и $\dfrac{m+1}{n}$ сходятся к одному пределу x при $n\to\infty$, тогда из (**) и (***) получаем, что

$x=\dfrac{g(x)}{g(1)}$ или $g(x)=g(1)\cdot x$. Но тогда $f(x, y)=xf(1,y)$ при любом фиксированном y, т.е. вообще при любых y. По свойству 1) $f(x, y)=xf(1,y)=xf(y,1)$, где $f(y,1)$ – это функция типа $g(x)$, так как вторая переменная здесь постоянная, поэтому $f(y,1)=f(1,1)y$. Но $f(1,1)$ – это площадь квадрата со стороной, равной единице измерения, поэтому $f(1,1)=S(Q)=1$. Итак, $f(x, y)=xf(1,y)=xyf(1,1)=xy$, т.е. $S(P)=xy$■.

Замечание. Из этой теоремы следует, что если между многоугольниками и положительными числами мы установим несколько соответствий, то во всех случаях прямоугольнику со сторонами x и y будет соответствовать число xy.

Теорема 18. Если измерение площадей существует, то площадь треугольника равна половине произведения любой из его сторон на соответствующую высоту, т.е. $S(\Delta)=\frac{1}{2}a\cdot h_a$.

Доказательство.

□Предположим, что имеется какое-то соответствие $S:M\to R_+^*$, удовлетворяющее аксиомам П1-П3. Надо доказать, что в этом соответствии треугольнику ABC соответствует число $\frac{1}{2}a\cdot h_a$.

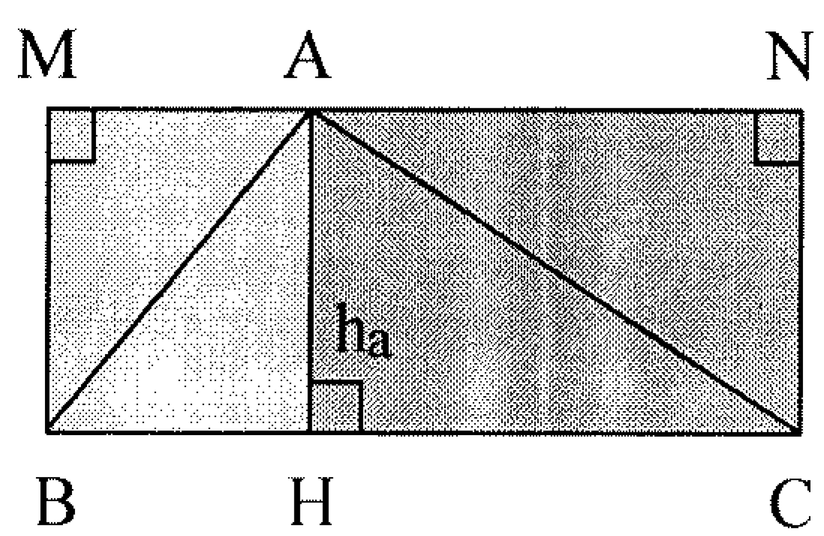


Рис. 22

Построим прямоугольник BMNC со сторонами a и h_a, тогда по предыдущей теореме $S_{BMNC}=ah_a$. Рассмотрим треугольники $\Delta ABM=\Delta BHA$ и $\Delta AHC=\Delta CNA$. Эти треугольники равны по гипотенузе и катету как прямоугольные, тогда по аксиоме П1 имеем: $S_{\Delta AMB}=S_{\Delta BHA}$ и $S_{\Delta AHC}=S_{\Delta CNA}$.

Так как прямоугольник BMNC разложен на треугольники BMA, ACB, CNA, то по аксиоме П2 имеем: $S_{BMNC}=S_{\Delta ABC}+(S_{\Delta AMB}+S_{\Delta CNA})=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta BHA}+S_{\Delta CHA}=2S_{\Delta ABC}$,

откуда $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{BMNC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ ■.

Задания.

1) Докажите самостоятельно, что $S_{\Delta ABC}$ не зависит от выбора стороны и соответствующей высоты, т.е. что $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$.

2) Получите формулы для вычисления площади параллелограмма и трапеции.

Замечание. Каково бы ни было соответствие S: $M\to R_+^*$, $S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ при выбранной единице площади.

П.4. Теорема существования и единственности площади многоугольника

Теорема 19. На множестве M многоугольников плоскости существует и притом единственное отображение $S:M\to R_+^*$, удовлетворяющее аксиомам П1,П2,П3, площади.

Доказательство.

□Докажем сначала единственность искомого отображения.

Предположим, что имеются два отображения $S:M\to R_+^*$ и $H:M\to R_+^*$, каждое из которых удовлетворяет аксиомам площади П1, П2, П3. Возьмем произвольный многоугольник $F\in M$ и разобьем его на конечное число треугольников Δ_1, Δ_2 ,..., Δ_r, тогда $F=\sum_{i=1}^{r}\Delta_i$. В каждом треугольнике Δ_i отметим сторону a_i и соответствующую ей высоту h_i. Отображения S и H каждому треугольнику Δ_i будут относить в силу теоремы 16 одно и то же значение $S(\Delta_i)=H(\Delta_i)=\frac{1}{2}a_i\cdot h_i$.

Отсюда в силу аксиомы П2 получим, что для любого многоугольника F: $S(F)=\sum_{i=1}^{r}S(\Delta_i)=\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i\cdot h_i}{2}=\sum_{i=1}^{r}H(\Delta_i)=H(F)$ (▲), т.е. отображения S(F) и H(F) совпадают. Единственность отображения доказана.

Перейдем теперь к доказательству существования отображения, удовлетворяющего аксиомам П1-П3. Так как многоугольник можно представить в виде суммы треугольников Δ_i разбиения, то для того, чтобы выполнялась аксиома П2, надо определить площадь многоугольника как сумму площадей треугольников разбиения. Поэтому мы докажем, что отображение $S:M\to R_+^*$ по закону $S(F)=\sum_{i=1}^{r}\frac{a_i\cdot h_i}{2}$ и есть искомое отображение, удовлетворяющее аксиомам площади.

Для того, чтобы данное определение площади было корректным, надо доказать, что она не зависит от способа разбиения многоугольника на треугольники. Начнем с треугольника и докажем сначала, что при разбиении треугольника на более мелкие треугольники площадь исходного треугольника равна сумме площадей треугольников разбиения независимо от способа разбиения.

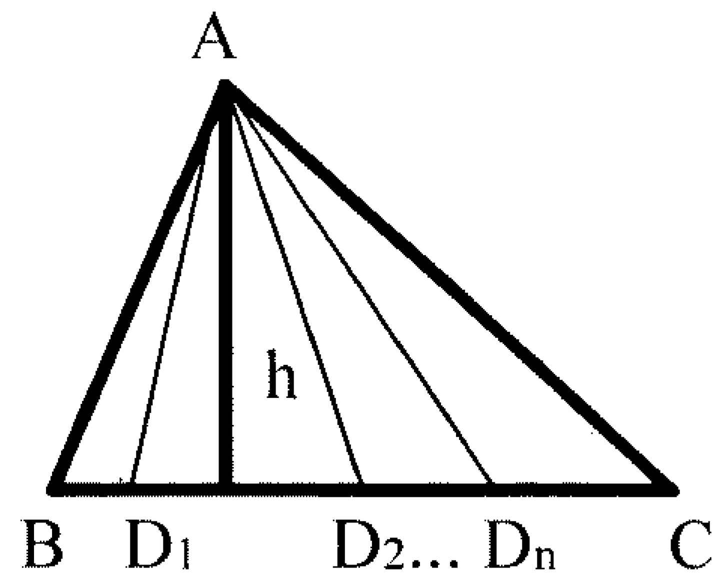


Рис. 23

1) Разбиение производим с помощью трансверсалей, проходящих через одну вершину (рис. 23). В этом случае ΔABC составлен из треугольников BAD_1 , D_1AD_2 ,..., D_nAC, которые имеют общую высоту h, проведенную из их общей вершины A. Сумма площадей треугольников разбиения будет

$$\frac{|BD_1|\cdot h}{2}+\frac{|D_1D_2|\cdot h}{2}+\ldots+\frac{|D_nC|\cdot h}{2}=\frac{\left(|BD_1|+|D_1D_2|+\ldots+|D_nC|\right)\cdot h}{2}=\frac{|BC|\cdot h}{2}$$

т.е. сумма площадей треугольников разбиения равна площади ΔABC. (Здесь через $|BC|$ обозначена длина отрезка [BC]).

2) Рассмотрим теперь произвольное разбиение треугольника ABC на мелкие треугольники (рис. 24а) так, как описывалось в п.1. этого параграфа. Соединим все вершины треугольников разбиения с вершиной A и получим новую серию треугольников, у которых одна вершина A, а противоположные ей стороны являются сторонами треугольников разбиения. Рассмотрим один из треугольников разбиения – ΔPQR (рис. 24б). Его площадь можно представить в виде алгебраической суммы площадей трех треугольников APQ, AQR, ARP. Они получаются из ΔPQR заменой одной из вершин на вершину A. Знак, с которым надо брать площади треугольников в этой сумме определяется по следующему правилу. Если вершина, которая заменяется на вершину A, лежит по одну сто-

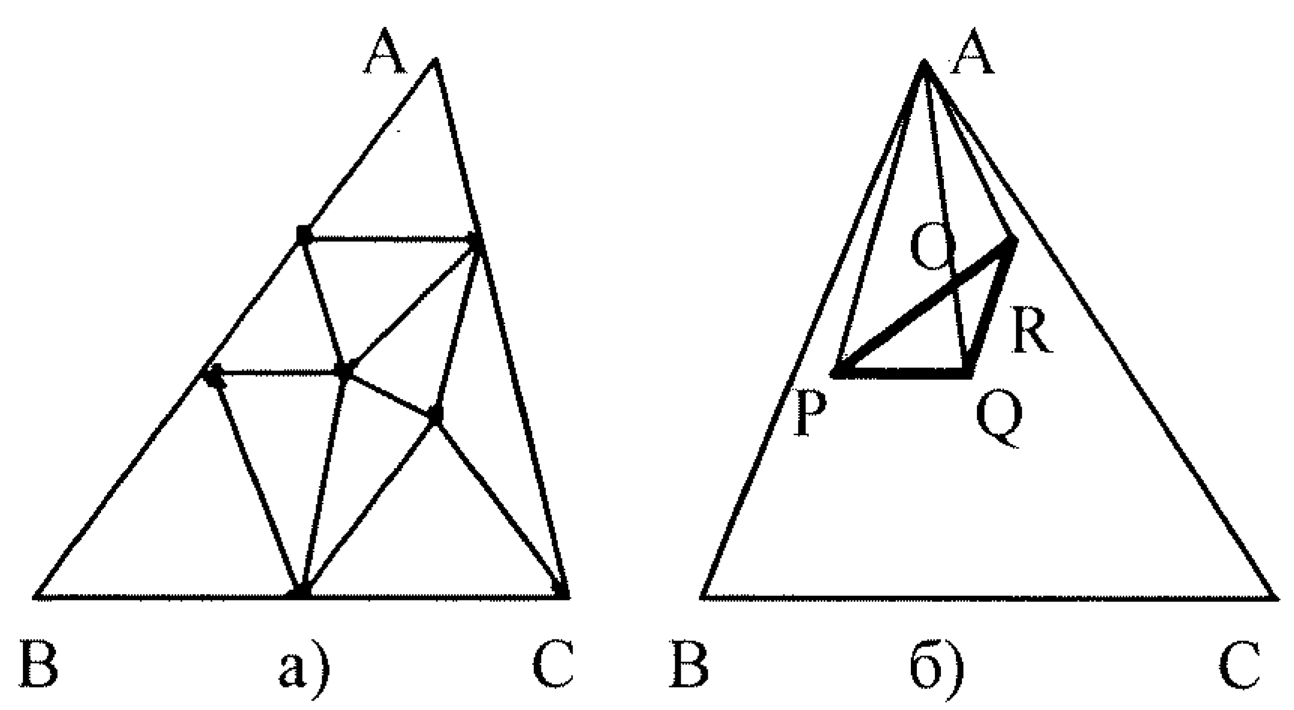


Рис. 24

рону с A относительно прямой, содержащей две другие вершины, то площадь этого треугольника берется со знаком “+”, а если по разные стороны, то со знаком “-”. Если при замене вершиной A три точки оказываются на одной прямой, то слагаемое считается равным нулю.

Рассмотрим, например, расположение ΔPQR на рис. 24б. По доказанному

$$\left.\begin{aligned} S_{PQR} &= S_{PQO}+S_{ORQ},\\ S_{APQ} &= S_{APO}+S_{PQO},\\ S_{ARQ} &= S_{ARO}+S_{QRO},\\ S_{APR} &= S_{APO}+S_{ARO},\end{aligned}\right\}\Rightarrow S_{PQR}=S_{APQ}+S_{ARQ}-S_{APR}.$$

Мы проверили правильность нашего утверждения о представлении S_{PQR} в виде алгебраической суммы $S_{APQ,}$ S_{AQR} и S_{ARP} на конкретном примере расположения ΔPQR. Можно было бы рассмотреть и другие случаи расположения и убедиться в правильности утверждения.

Представив площадь каждого треугольника разбиения в виде алгебраической суммы площадей треугольников с вершиной A, сложим площади всех треугольников разбиения. Мы получим сумму площадей треугольников AXY, где [XY] – сторона треугольника разбиения. Если [XY] лежит во внутренней области треугольника ABC, то S_{AXY} входит в нашу сумму дважды, так как [XY] является общей стороной двух треугольников разбиения. Так как эти треугольники расположены по разные стороны от [XY], то один раз S_{AXY} входит со знаком «+», а второй раз со знаком «-». Значит, эти слагаемые уничтожаются.

Если [XY] лежит на стороне [BC] треугольника ABC, то S_{AXY} входит в нашу сумму только один раз, причем со знаком “+”. Если же [XY] лежит на [AB] или [AC], то $S_{AXY} = 0$.

В итоге сумма площадей треугольников разбиения равна сумме площадей треугольников AXY со сторонами [XY] на [BC]. Как было показано, эта сумма равна S_{ABC}. Итак, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$, т.е. S_{ABC} равна сумме площадей треугольников любого разбиения.

3) Докажем теперь, что сумма площадей треугольников разбиения любого многоугольника F на треугольники не зависит от способа разбиения. Возьмем два его разбиения на треугольники Δ_i' (i=1, ..., k) и на треугольники Δ_j'' (j=1,...,n). Пусть $\Sigma_1=S(\Delta'_1)+S(\Delta'_2)+\ldots+S(\Delta'_k)$, $\Sigma_2=S(\Delta''_1)+\ldots+S(\Delta''_n)$.

Докажем, что $\Sigma_1=\Sigma_2$.

Треугольники первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение многоугольника F на выпуклые треугольники, четырехугольники, пятиугольники, шестиугольники (рис. 25). Разобьем

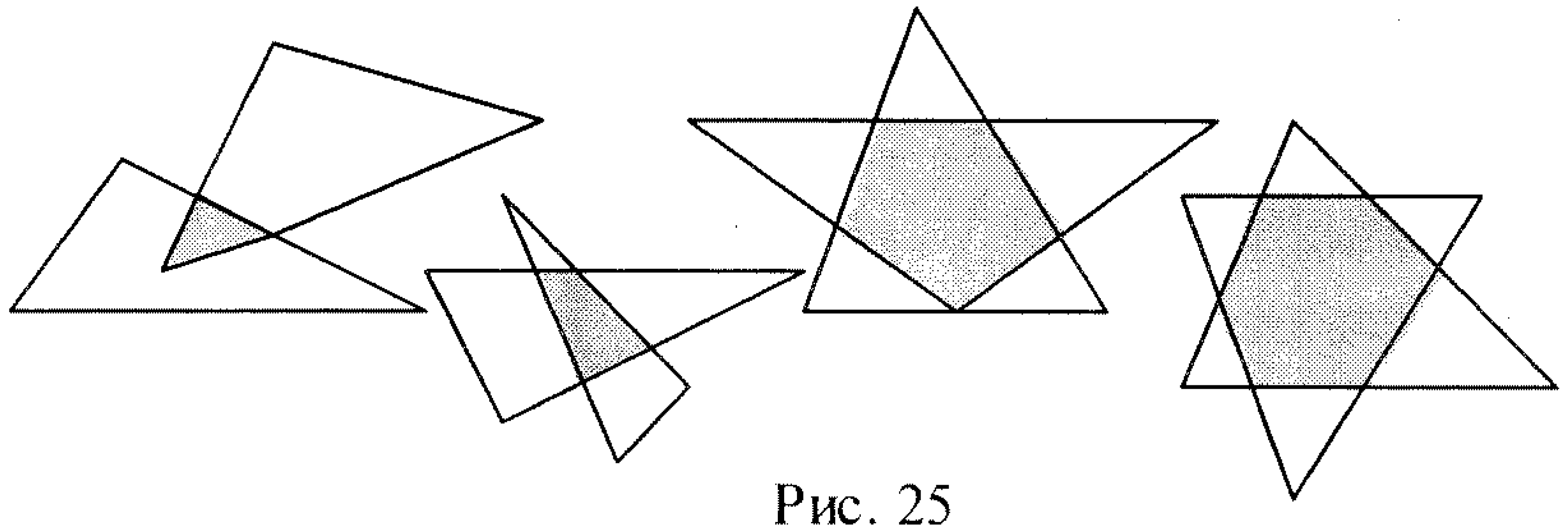


Рис. 25

их на треугольники Δ_1, Δ_2, ... , при этом каждый треугольник Δ'_i и Δ''_j разобьется на треугольники Δ_r и площадь каждого из треугольников Δ'_i и Δ''_j будет равна сумме площадей соответствующих треугольников Δ_r уже третьего разбиения. Тогда $\Sigma=S(\Delta_1)+S(\Delta_2)+...+S(\Delta_r)$ и $\Sigma_1=\Sigma$, $\Sigma_2=\Sigma$, откуда $\Sigma_1=\Sigma_2$. Здесь мы учитываем, что сумма площадей треугольников разбиения треугольника не зависит от способа разбиения.

Определение: *<u>площадью треугольника</u> будем называть половину произведения стороны на соответствующую высоту, а <u>площадью многоугольника</u> – сумму площадей треугольников любого разбиения данного многоугольника на треугольники.*

Нам остается доказать, что определенная таким образом площадь удовлетворяет аксиомам площади.

1. Пусть $F_1=F_2$, тогда существует наложение f: $F_1 \to F_2$. Пусть F_1 разбит на треугольники, тогда наложение f отобразит их на такое же число равных треугольников, разбивающих F_2. Равные треугольники имеют равные основания и высоты, а следовательно, и равные площади, тогда $\sum_{i=1}^{r} a_i h_i = \sum_{i=1}^{r} a'_i h'_i$, т.е. $S(F_1)=S(F_2)$.
2. Пусть $F=F_1+F_2$. Пусть F_1 разбит на треугольники Δ'_k, а F_2 - на треугольники Δ''_j. При этом получается разбиение F на треугольники Δ'_k и Δ''_j. Отсюда ясно, что $S(F)=S(F_1)+S(F_2)$.
3. Разобьем диагональю квадрат Q со стороной, равной единице длины, на два равных прямоугольных треугольника с катетами, равными единице длины. Для каждого из них $a_i=1$, $h_i=1$, поэтому

$S(Q)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} a_i h_i = \frac{1}{2}(1\cdot 1+1\cdot 1)=1.$ Теорема доказана полностью■.

П.5. Равновеликие и равносоставленные многоугольники

Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны.

Докажите, что равновеликость есть отношение эквивалентности на множестве **M**.

Два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников.

Докажите, что равносоставленность есть отношение эквивалентности на множестве **M**.

Очевидно, что если два многоугольника равносоставлены, то они и равновелики. На этом свойстве основан метод разложения при вычислении площади многоугольника F: его разбивают на конечное число многоугольников таких, чтобы из них можно было составить многоугольник F′, площадь которого известна. Именно таким способом мы нашли формулу для вычисления площади треугольника по известной формуле для прямоугольника.

§11. Эквивалентность систем аксиом Атанасяна и Вейля евклидовой плоскости

П.1. Об эквивалентности двух систем аксиом

В §2 главы I было введено понятие эквивалентности двух аксиом относительно некоторой основной системы аксиом. Заметим, что если какую-либо из аксиом заменить эквивалентным ей предложением или даже все аксиомы заменить им эквивалентными предложениями, то, очевидно, получим ту же самую совокупность следствий, что и из исходной системы, т.е. ту же самую аксиоматическую теорию. Поэтому естественно назвать *эквивалентными* такие две аксиоматики Σ и θ, которые определяют одну и ту же аксиоматическую теорию $\Im(\Sigma)=\Im(\theta)$. Это значит, что эквивалентные аксиоматики – это такие, что в теории $\Im(\Sigma)$ определяются основные понятия и выполняются аксиомы аксиоматики θ, а в теории $\Im(\theta)$ определяются основные понятия и выполняются аксиомы аксиоматики Σ. Другими словами каждая из двух эквивалентных аксиоматик допускает интерпретацию в другой аксиоматике.

Выше было описано обоснование геометрии евклидовой плоскости по Вейлю (§2 главы II) и по Атанасяну (глава III). Поэтому целью наших дальнейших рассуждений будет доказательство эквивалентности аксиоматики Атанасяна школьного курса геометрии и аксиоматики Вейля.

П.2. Векторы на плоскости

Пусть геометрия евклидовой плоскости E_2 построена как аксиоматическая теория аксиоматики Атанасяна школьного курса геометрии (§§2-10 главы III), т.е. как теория $\Im(\Sigma_A)$. Построим геометрическую теорию векторов на плоскости. Сначала надо определить основные объекты аксиоматики Σ_W, т.е. точки и векторы, и основные отношения: сложение векторов, умножение вектора на число, скалярное умножение векторов, откладывание вектора от точки, а затем доказать, что так определенные основные понятия удовлетворяют аксиомам Σ_W при n=2 (§2, п.7,8 главы II).

По существу в процессе изучения геометрии перечисленные задачи решались дважды: в девятом классе средней школы ([7], глава IX, §§1-3; глава XI, §3) и на I курсе университета при изучении

аналитической геометрии. Поэтому рассмотрение этого материала мы перенесли на одно из практических занятий.

Итак, аксиоматика Σ_W Вейля евклидовой плоскости допускает интерпретацию в аксиоматике Σ_A.

П.3. Система аксиом Вейля евклидовой плоскости и её связь с аксиоматикой Атанасяна

Пусть теперь за основу аксиоматического построения евклидовой планиметрии принята аксиоматика Вейля, изложенная в §2 главы II. База структуры евклидовой плоскости состоит из двух множеств: множества точек E_2 и множества векторов V_2, на котором определяется структура двумерного евклидова векторного пространства (обозначается оно $\widetilde{V}_2$) и для которого аксиомы размерности группы III формулируются следующим образом.

III₁. Существуют два линейно независимых вектора.

III₂. Любые три вектора линейно зависимы.

Формулировки всех остальных аксиом из Σ_W не изменяются. Как было сказано в §2 главы II, множество $\widetilde{V}_2$ является вспомогательным, а его свойства известны нам из курса линейной алгебры.

Дадим определения всем основным понятиям аксиоматики Σ_A евклидовой планиметрии и понятиям, фигурирующим в формулировках аксиом из Σ_A, а сами эти аксиомы докажем как следствия из системы аксиом Σ_W. Будем нумеровать только определения основных понятий Σ_W.

Определение 1: *<u>точка</u> – это неопределяемое понятие в обеих аксиоматиках, это элемент множества E_2,, т.е. тот же элемент, который назван "точкой" по Вейлю.*

Определение 2: *пусть A – произвольная точка плоскости E_2, $\vec{a}\neq\vec{0}$ - произвольный вектор пространства $\widetilde{V}_2$. <u>Прямой</u> с начальной точкой A и направляющим вектором $\vec{a}$ называется множество точек M плоскости E_2, таких, что* $\overrightarrow{AM}=t\vec{a}$, *где* $t\in R$.

Обозначать такую прямую будем так: $l=(A, \vec{a})$.

Итак, $l=(A, \vec{a})=\{M\in E_2 \mid \overrightarrow{AM}=t\vec{a}, t\in R\}$.

Если взять вектор $\vec{b}\neq\vec{0}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ ($\alpha\in R$, $\alpha\neq 0$), то $\overrightarrow{AM}=t\vec{a}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=(t\alpha)\vec{b}$, где $(t\alpha)\in R$. Следовательно, вектор $\vec{b}$ также является направляющим вектором прямой l. В виду этого одномерное векторное пространство $V_1=\{t\vec{a}\}$, натянутое на вектор $\vec{a}$, называется направляющим подпространством прямой l, которую можно определить и так: $l=\{A,V_1\}=\{M\in E_2\mid\overrightarrow{AM}\in V_1\}$.

Определение 3: *будем говорить, что точка M* *<u>принадлежит прямой</u>* <u>$l=(A,\ \vec{a})$</u>, *если существует действительное число* t, *такое, что* $\overrightarrow{AM}=t\vec{a}$.

Обозначение: $M\in l$.

Докажите самостоятельно следующие утверждения.

1. Начальная точка принадлежит прямой: $A\in l=(A,\ \vec{a})$.
2. В качестве начальной точки можно взять любую другую точку этой прямой.

Указание. Докажите, что если $B\in l=(A,\ \vec{a})$, то прямые l и $l'=(B,\ \vec{a})$ совпадают как множества точек.

Далее проверим выполнимость аксиом принадлежности AI_1 - AI_2 и аксиомы параллельных AV_E аксиоматики Σ_A.

AI_1. Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует и единственная прямая, содержащая эти точки.

Дано: $A,B\in E_2$, $A\neq B$.

Доказать: $\exists l\mid A,B\in l$.

Доказательство.

□Так как $A\neq B$, то по основному отношению Δ_4 паре точек A,B соответствует вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ из $\tilde{V}_2$ и $\vec{a}\neq\vec{0}$. Рассмотрим прямую $l=(A,\ \vec{a})$, при этом $A\in l$, так как A – начальная точка. Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=1\bullet\vec{a}$, то $B\in l$. Значит, прямая, проходящая через точки A и B, существует, это прямая l. Докажем теперь, что l – единственная. Действительно, если предположить существование еще одной прямой l' такой, что $A\in l'$ и $B\in l'$, то $l'=(A,\ \vec{b})$ и $\overrightarrow{AB}=\vec{a}=\alpha\vec{b}$. Так как прямые l и l' проходят через точку A и их направляющие векторы коллинеарны, то $l=l'$■.

Следствие: прямую можно задать парой различных её точек A и B и обозначать AB.

Итак, $l=AB=\{M\in E_2\mid\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\}$.

AI_2. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство.

□1) Пусть дана прямая $l=(A,\vec{a})$. Возьмём любое действительное число t и рассмотрим вектор $t\vec{a}$. По аксиоме V_1 Вейля $\exists B\in E_2\mid\overrightarrow{AB}=t\vec{a}$, откуда в силу определения 3) получаем, что $B\in l$. Таким образом, для каждого $t\in R$ получим свою точку на прямой l. Так как действительных чисел бесконечно много и каждому соответствует точка на l, то на прямой l существует бесчисленное множество точек.

2) По аксиоме III_1 Вейля в $\tilde{V}_2$ существуют два линейно независимых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем любую точку $A\in E_2$. По аксиоме V_1 Вейля существуют точки M и N, такие, что $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\vec{b}$. Рассмотрим прямую $l=(A,\ \vec{p})$. Если предположить, что $M\in l$ и $N\in l$, то $\overrightarrow{AM}=\vec{a}=\alpha\vec{p}$ и $\overrightarrow{AN}=\vec{b}=\beta\vec{p}$, откуда $\vec{a}=\frac{\alpha}{\beta}\vec{b}$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, что противоречит условию. Следовательно, точки A, M, N не лежат на одной прямой■.

AV_E. Какова бы ни была прямая a и точка B вне её, через B проходит не более одной прямой, не пересекающей прямую a.

Доказательство.

□Даны прямая $l=(A,\ \vec{a})$ и $B\notin a$. Рассмотрим всевозможные прямые, проходящие через точку B, направляющие векторы которых не коллинеарны вектору $\vec{a}$. Пусть прямая □$=(B,\ \vec{b})$, где $\vec{b}\quad\vec{a}$, является одной из них. Покажем, что □$\cap m\neq\varnothing$. Так как $\vec{a}\quad\vec{b}$, то любой вектор из V_3 можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, в частности, $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. По аксиоме V_1 Вейля существуют точки P и Q, такие, что $\overrightarrow{AP}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ}=-\beta\vec{b}$, откуда $P\in l$, $Q\in m$. Тогда $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}-(-\beta\vec{b})=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BQ}$, откуда $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}$ в силу аксиомы V_2

Вейля. Из равенства $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}$ следует, что P=Q и эта точка является общей для прямых l и m.

Среди прямых, проходящих через точку B, имеется ещё одна прямая b=(B, $\vec{a}$). Покажем, что именно b является той единственной прямой, которая не пересекает l. Действительно, если предположить, что $b\cap l=C$, то l=(C, $\vec{a}$) и b=(C, $\vec{a}$), т.е. l=b, что невозможно, так как по условию $B\notin l$, но $B\in b$■.

Определим теперь отношение “лежать между”, как это сделано в [4].

Пусть дана прямая l с направляющим векторным подпространством V_1. Рассмотрим множество $V'_1=V_1\backslash\{\vec{0}\}$. Введём в V'_1 бинарное отношение $\uparrow\uparrow$ сонаправленности следующим образом.

Определение: *будем говорить, что вектор* $\vec{a}\in V'_1$ <u>*сонаправлен*</u> *с вектором* $\vec{b}\in V'_1$, *если* $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ *и* $\lambda>0$.

Докажите самостоятельно.

1) Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то $\vec{a}+\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

2) Отношение сонаправленности векторов есть отношение эквивалентности на V'_1.

В силу утверждения 2) множество V'_1 можно факторизовать по отношению $\uparrow\uparrow$, т.е. построить фактор-множество $V'_1/_{\uparrow\uparrow}$. Покажем, что оно содержит только два элемента. Для этого возьмём $\vec{a}\in V'_1$, тогда по аксиоме I_4 Вейля существует и ему противоположный вектор $\vec{b}=-\vec{a}=(-1)\vec{a}$. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не сонаправлены, то классы эквивалентности, определяемые ими, не совпадают, т.е. $K_{\vec{a}}\neq K_{\vec{b}}$. Любой вектор $\vec{x}\in V'_1$ можно представить в виде $\vec{x}=\mu\vec{a}$, $\mu\neq0$. Если $\mu>0$, то $\vec{x}\in K_{\vec{a}}$, а если $\mu<0$, то $\vec{x}=-|\mu|\vec{a}=|\mu|(-1)\vec{a}=|\mu|\vec{b}$, поэтому $\vec{x}\in K_{\vec{b}}$. Итак, $V'_1/_{\uparrow\uparrow}=\{K_{\vec{a}},K_{\vec{b}}\}$. Каждый из элементов фактор-множества $V'_1/_{\uparrow\uparrow}$ называется *направлением* на прямой l.

Значит, на каждой прямой имеются два и только два направления. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежат разным направлениям, то говорят, что они *противоположно направлены*, и пишут $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{y}$.

Определение 4: *говорят, что точка M лежит между точкой A и точкой B* ($A\overset{*}{M}B$), *если* $\overrightarrow{AM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{MB}$.

Проверим выполнимость аксиом порядка II_1 - II_4 аксиоматики Σ_A в теории $\Im(\Sigma_W)$.

II_1. Если $A\overset{*}{C}B$, то A,B,C – три различные точки одной прямой и $B\overset{*}{C}A$.

Доказательство.

□Пусть $A\overset{*}{C}B$, тогда по определению4 $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$, откуда $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$. Рассмотрим прямую $l=(A,\overrightarrow{AB})=\{M\mid\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}\}$. Имеем, $A\in l$ как начальная точка; $B\in l$, так как $\overrightarrow{AB}=1\cdot\overrightarrow{AB}$; $C\in l$, так как $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$, т.е. $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, $\lambda>0$. Итак, точки A,B,C лежат на одной прямой l, и они различны, так как векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ - ненулевые.

Кроме того, из условия $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CB}$ следует, что $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA}$, т.е. $B\overset{*}{C}A$■.

II_2. Всякая точка $O\in l$ делит $l\backslash\{0\}$ на два непустых подмножества h′ и h″ так, что 1) $h'\cap h''=\varnothing$; 2) $h'\cup h''=l\backslash\{0\}$. При этом выполняются также условия:

а) если M_1 и M_2 <u>принадлежат</u> одному подмножеству, то O не лежит между M_1 и M_2 ($M_1\overset{*}{O}M_2$),

б) если M_1 и M_2 принадлежат разным подмножествам, то $M_1\overset{*}{O}M_2$.

Доказательство.

□Пусть дана прямая l и точка $O\in l$, тогда $l=(O,\vec{p})$. Так как рассматривается множество $l\backslash\{0\}$, то тем самым исключается из рассмотрения вектор $\overrightarrow{00}=\vec{0}$. Разделим множество $l\backslash\{0\}$ на подмножества h′ и h″ следующим образом. Отнесем к h′ те точки M прямой l, для которых $\overrightarrow{OM}\uparrow\uparrow\vec{p}$, а к h″ - те точки N прямой l, для которых $\overrightarrow{ON}\uparrow\downarrow\vec{p}$. Ясно, что это разбиение удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы, так как на l имеются только два направления. Докажем, что выполняются также и условия а) и б). Пусть M_1, $M_2\in h'$, тогда $\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\vec{p}$, и $\overrightarrow{OM_2}\uparrow\uparrow\vec{p}$, откуда $\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM_2}$, но тогда $\overrightarrow{M_1O}\uparrow\downarrow\overrightarrow{OM_2}$ и $\overline{M_1\overset{*}{O}M_2}$. Если же $M_1\in h'$, $M_2\in h''$, то $\overrightarrow{OM_1}\uparrow\uparrow\vec{p}$, $\overrightarrow{OM_2}\uparrow\downarrow\vec{p}$, откуда $\overrightarrow{OM_1}\uparrow\downarrow\overrightarrow{OM_2}$, но тогда $\overrightarrow{M_1O}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM_2}$ и $M_1\overset{*}{O}M_2$■.

Теперь можно ввести понятия луча, отрезка, угла в теории $\Im(\Sigma_W)$, как это сделано в §2.

AII₃. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Доказательство.

□Сначала докажем, что из трёх данных точек A,B,C прямой l по крайней мере одна лежит между двумя другими. Для этого рассмотрим ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Так как на прямой l имеются только два направления, то обязательно по крайней мере два из этих трёх векторов сонаправлены. Возможны три случая: а) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{CA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$. В случае а) $A\overset{*}{B}C$, в случае б) $B\overset{*}{C}A$, а в случае в) $C\overset{*}{A}B$. Значит, хотя бы одна точка из данных лежит между двумя другими.

Пусть для определенности $B\overset{*}{C}A$. Покажем, что при этом случаи а) и б) невозможны. В самом деле, по определению 4: $\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA}$, тогда $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA}$, откуда по аксиоме V_2 Вейля $\overrightarrow{BA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CA}$ или $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$. Это значит, что $\overline{A\overset{*}{B}C}$ и $\overline{C\overset{*}{A}B}$.

Аналогичные рассуждения проводятся для случаев а) и б).¦

Прежде, чем перейти к доказательству предложения AII₄, введём понятие системы координат или репера $R=\{O, A_1, A_2\}$ на плоскости и понятие координат точки M как координат её радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\overrightarrow{OA}_1, \overrightarrow{OA}_2\}$так, как это делалось при изучении аналитической геометрии на I курсе.

Докажите самостоятельно лемму.

Точка M(x,y) лежит между двумя точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ тогда и только тогда, когда существует $\lambda\in R$ и $\lambda>0$, такое, что

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

AII₄. Всякая прямая l делит множество остальных точек плоскости $E_2\backslash\{l\}$ на два подмножества α' и α'' так, что 1)$\alpha'\cap\alpha''=\varnothing$; 2)$\alpha'\cup\alpha''=E_2\backslash\{l\}$. При этом выполняются также следующие условия:

а) если M_1 и M_2 принадлежат одному подпространству, то l не имеет общих точек с $[M_1M_2]$,

б) если M_1 и M_2 принадлежат разным подпространствам, то l пересекает $[M_1M_2]$ во внутренней точке.

Доказательство.

□Пусть l – данная прямая. Возьмём на ней две различные точки O и A и точку B вне её (рис.26). По основному отношению Δ_4 этим точкам соответствуют векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, причём $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ линейно независимы. Тогда рассмотрим систему координат $R=\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$. Как известно, если M – любая точка плоскости, то $M(x, y)_R \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, причём для всех

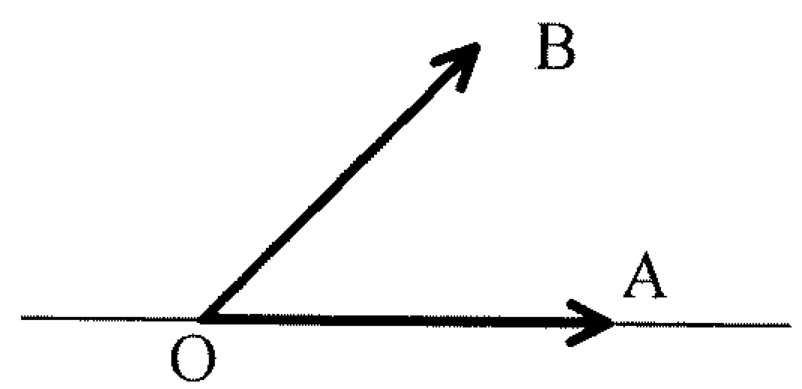


Рис. 26

точек $M\in l$ выполняется условие $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}$, откуда следует, что для них y=0. Следовательно, для всех точек плоскости, не принадлежащих l, т.е. для точек множества $E_2\backslash\{l\}$, вторая координата $y\neq0$.

Разобьём множество $E_2\backslash\{l\}$ на два подмножества α' и α'' следующим образом. Отнесём к α' те точки $M(x,y)\in E_2\backslash\{l\}$, для которых y>0, а к α'' – те точки $N(x,y)\in E_2\backslash\{l\}$, для которых y<0. Ясно, что такое разбиение удовлетворяет условиям 1) и 2). Покажем, что выполняются также и условия а) и б).

а) Пусть $M_1(x_1,y_1)\in\alpha'$ и $M_2(x_2,y_2)\in\alpha'$, тогда $y_1>0$ и $y_2>0$.

Для любой точки $M(x,y)\in[M_1M_2]$ по лемме выполняются условия

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \lambda>0.$$

Выясним, есть ли на $[M_1M_2]$ точка, принадлежащая прямой 1 ? Для этого надо выяснить, может ли для точек $[M_1M_2]$ выполняться условие $y=0$ или $\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0$? Если предположить, что $y_1+\lambda y_2=0$, то $y_1=-\lambda y_2$, что невозможно при условиях $y_1>0$, $y_2>0$, $\lambda>0$. Следовательно, $1\cap[M_1M_2]=\varnothing$.

б) Пусть $M_1(x_1,y_1)\in\alpha'$, $M_2(x_2,y_2)\in\alpha''$, тогда $y_1>0$, $y_2<0$.

Как и в случае а) выясняем возможность обращения в нуль второй координаты какой-либо точки $M(x,y)\in[M_1M_2]$.

$y_1+\lambda y_2=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{y_1}{y_2}$. Так как числа y_1 и y_2 по условию противоположных знаков, то существует и единственное $\lambda>0$, при котором $y=0$. Следовательно, на отрезке $[M_1M_2]$ существует точка, лежащая и на прямой 1, т.е. $1\cap[M_1M_2]\neq\varnothing$■.

Теперь обычным образом можно ввести понятие полуплоскости (гл.III,§2).

Введём понятие длины отрезка и проверим выполнимость в $\Im(\Sigma_W)$ предложений AIV_1 и AIV_2 аксиоматики Атанасяна Σ_A.

Определение: *<u>длиной отрезка</u> [AB] назовем модуль вектора* $\overrightarrow{AB}$, *который сопоставляется паре точек (A,B) по основному отношению* Δ_4. *Длина отрезка [AB] называется также расстоянием между точками A и B и обозначается* $\rho(A,B)$ *или* $|AB|$.

Итак, $|AB|=|\overrightarrow{AB}|$.

Определение: *два отрезка назовём <u>равными</u>, если равны их длины.*

AIV_1. Каждый отрезок имеет вполне определенную длину.

Доказательство.

□Пусть [AB] – данный отрезок, $A\neq B$, тогда соответствующий паре точек A и B вектор $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$. По аксиоме IV_4 Вейля $\overrightarrow{AB}^2>0$ и существует $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}>0$. Остаётся проверить, что определённая нами длина удовлетворяет аксиомам длины D_1, D_2, D_3 (гл. III, §7)

D_1. Если [AB]=[CD], то по определению |AB|=|CD|.

D_2. Пусть $A\overset{*}{B}C$, тогда $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, откуда $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\lambda>0$ и по свойствам пространства $\widetilde{V}_2$: $|\overrightarrow{AB}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|$. По аксиоме V_2 Вейля: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, откуда $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=(\lambda+1)\overrightarrow{BC}$. Тогда $|\overrightarrow{AC}|=(\lambda+1)|\overrightarrow{BC}|$. Это равенство перепишем в виде $|\overrightarrow{AC}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|$ и с учётом, что $|\overrightarrow{AB}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|$, получим $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$, откуда следует |AC|=|AB|+|BC|.

D_3. Возьмём любой ненулевой вектор $\vec{a}\in\overline{V}_2$, обозначим $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, тогда $|\vec{a}_0|=1$.

Возьмём любую точку $P\in E_2$, тогда по аксиоме V_1 Вейля найдётся $Q\in E_2$ такая, что $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}_0$. Ясно, что $|\overrightarrow{PQ}|=|\vec{a}_0|=1$. Значит, существует отрезок [PQ] на плоскости, длина которого равна 1■.

AIV_2. Каково бы ни было действительное число $d>0$, существует отрезок, длина которого d.

Доказательство.

□Пусть $d>0$ – данное действительное число. Возьмём любую точку $A\in E_2$ и любой ненулевой вектор $\vec{a}\in\widetilde{V}_2$. По аксиоме IV_4 Вейля $\vec{a}^2>0$ и $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}>0$. По свойствам множества действительных чисел для двух положительных чисел $|\vec{a}|$ и d найдётся $\lambda>0$, такое, что $\lambda|\vec{a}|=d$. Рассмотрим вектор $\lambda\vec{a}$. По аксиоме V_1 Вейля найдётся такая точка B, что $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}$. Тогда $|\overrightarrow{AB}|=\lambda|\vec{a}|=d$. Следовательно, существует отрезок [AB], длина которого равна d■.

Для определения понятия “наложение” рассмотрим движения плоскости.

Определение: *<u>движением</u> плоскости называется такое её преобразование* f, *которое сохраняет расстояние между любыми двумя точками:* $\rho(M, N)=\rho(f(M), f(N))$.

Напомним некоторые свойства движений плоскости, которые доказаны в пособии Атанасяна Л.С. и Базылева В.Т. “Геометрия. Часть I”, §§ 41- 44.

1. При любом движении репер переходит в репер, причём ортонормированный – в ортонормированный.

2. Каковы бы ни были два ортонормированных репера R и R′, существует и единственное движение, которое R переводит в R′, а каждую точку $M(x,y)_R$ – в точку $M'(x,y)_{R'}$.

Следствие: всякое движение однозначно определяется парой ортонормированных реперов.

3. При движении три коллинеарные точки переходят в три коллинеарные; три неколлинеарные точки – в три неколлинеарные; сохраняется отношение “лежать между”.

4. При движении отрезок переходит в отрезок, луч – в луч, прямая – в прямую, полуплоскость – в полуплоскость, угол – в угол.

5. При движении сохраняется скалярное произведение векторов, а также линейная комбинация векторов.

6. Множество движений плоскости является группой.

Равенство фигур на плоскости определяется с помощью движений.

Определение: *фигура F называется* *<u>равной</u>* *фигуре F′, если существует движение d, которое фигуру F переводит в фигуру F′.*

Выше равенство отрезков было определено через равенство их длин. Покажем, что эти два определения равенства отрезков равносильны.

□Пусть [AB]=[CD], тогда ∃ движение d: [AB]→[CD] и при этом сохраняются их длины: |AB|=|CD|. Итак, [AB]=[CD] ⇒ |AB|=|CD|.

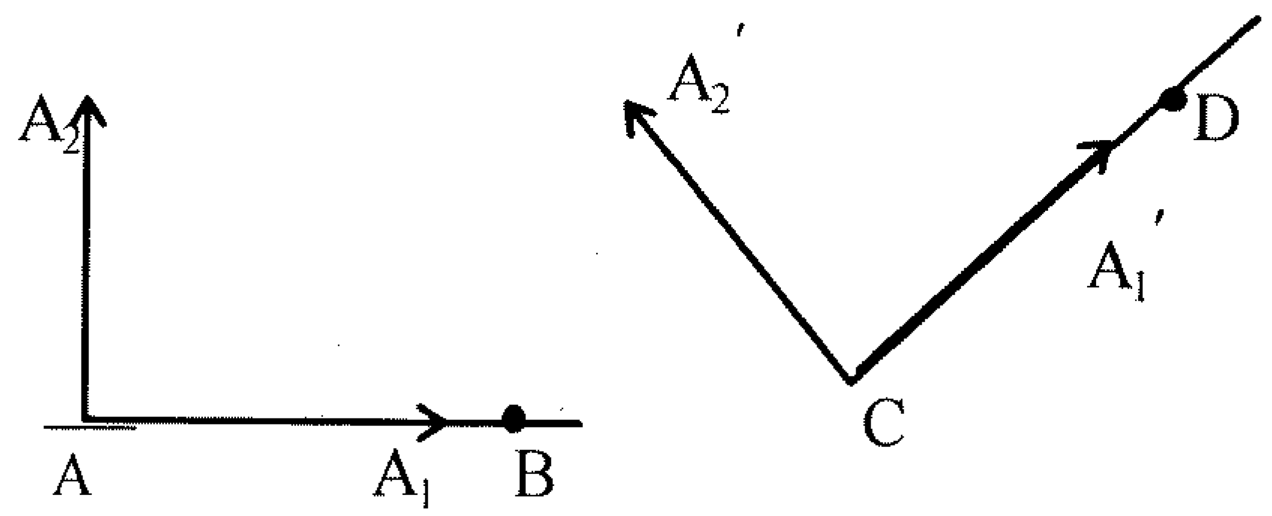


Рис. 27

Обратно. Пусть [AB]=[CD]⇔|AB|=|CD|. Покажем, что существует движение d, при котором [AB] переходит в [CD]. Для этого рассмотрим пару ортонормированных реперов $R=\{A,A_1,A_2\}$ и

$R'=\{C,A'_1,A'_2\}$ таких, что $\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $A_1\in[AB]$ и $\overrightarrow{CA_1'}=\dfrac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$, $A'_1\in[CD)$ (рис.27). Если |AB|=|CD|=a, то $B(a,0)_R$ и $D(a,0)_{R'}$. Тогда существует единственное движение d, при котором R переходит в R′, а точка $B(a,0)_R$ переходит в $D(a,0)_{R'}$ по свойству 2 движений. Так как при d: A→C, B→D, то по свойству 4 [AB]→[CD]■.

Из групповых свойств движений следует, что равенство фигур является отношением эквивалентности на множестве всех фигур.

Определение 5: *<u>наложениями</u> плоскости E_2 будем называть движения этой плоскости.*

А теперь проверим выполнимость аксиом группы III аксиоматики Σ_A в теории $\Im(\Sigma_W)$.

Справедливость предложений $AIII_1$, $AIII_2$, $AIII_3$ следует из групповых свойств движений.

$AIII_4$ имеет место в силу свойства 4 движений плоскости.

$AIII_5$. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и при том только один.

Дано: отрезок [AB] и луч [OX).

Доказать: ∃B′∈[OX) / [OB′]=[AB], B′ – единственная.

Доказательство.

□Рассмотрим ортонормированные реперы (рис.28) $R=\{A,A_1,A_2\}$ и $R'=\{O,A'_1,A'_2\}$, где $A_1\in[AB)$, $A'_1\in[OX)$.

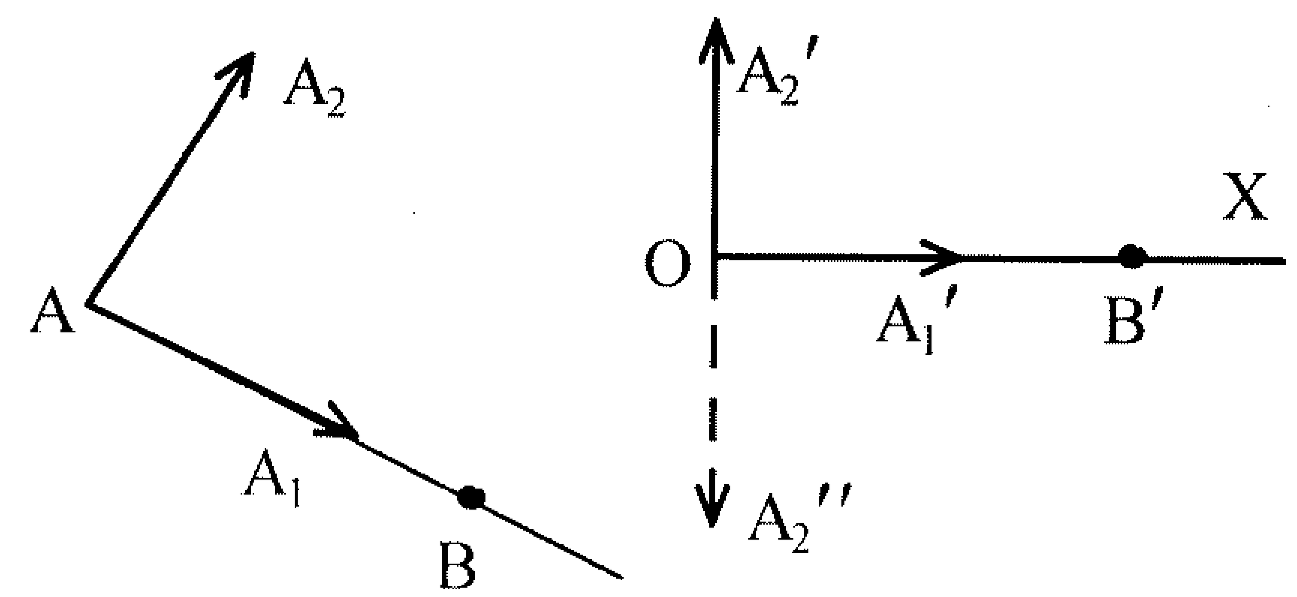


Рис. 28

По свойству 2 существует движение d, переводящее R в R′. Пусть d(B)=B′, тогда d([AB])=[OB′]=[AB]. При этом, если $B(a,0)_R$, то $B'(a,0)_{R'}$.

Движение d переводит луч [AB) в луч [OX). Существует ещё только одно движение g такое, что g([AB))=[OX). Это движение g переводит репер R в репер $R''=\{O,A'_1, A''_2\}$, где $\overrightarrow{OA''_2} = -\overrightarrow{OA'_2}$. Движение g переводит точку $B(a,0)_R$ в точку $B''(a,0)_{R''}$, т.е. в ту же точку B′. Следовательно, $B'\in[OX)$ / $[OB']=[AB]$, единственная■.

AIII$_6$. Если неразвёрнутый угол hk равен углу h′k′, то существует наложение, при котором h→h′, k→k′.

Доказательство.

□Так как $\angle hk=\angle h'k'$, то по определению равенства фигур существует движение (наложение) d, при котором $\angle hk\to\angle h'k'$, т.е. h→h′, k→k′, а вершина O угла hk переходит в вершину O′ угла h′k′ (свойство 4)■.

AIII$_7$. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и при том только один.

Дано: ∠hk, луч h′, исходящий из точки A′, и полуплоскость α′, ограниченная прямой, содержащей луч h′ (рис.29).

Доказать: $\exists k'\in\alpha'$ / $\angle hk=\angle h'k'$.

Доказательство.

□Рассмотрим ортонормированные реперы $R=\{A,A_1,A_2\}$ и $R'=\{A',A'_1,A'_2\}$, где $A_1\in h$, A_2 лежит в полуплоскости α, ограниченной прямой AA_1 и содержащей луч k; $A'_1\in h'$, $A'_2\in\alpha'$. Тогда существует движение d, переводящее R в R′. Это движение переводит луч h в луч h′, полуплоскость α в полуплоскость α′. Пусть d(k)=k′, $k'\in\alpha'$, тогда при движении d угол hk переходит в угол h′k′, следовательно, эти

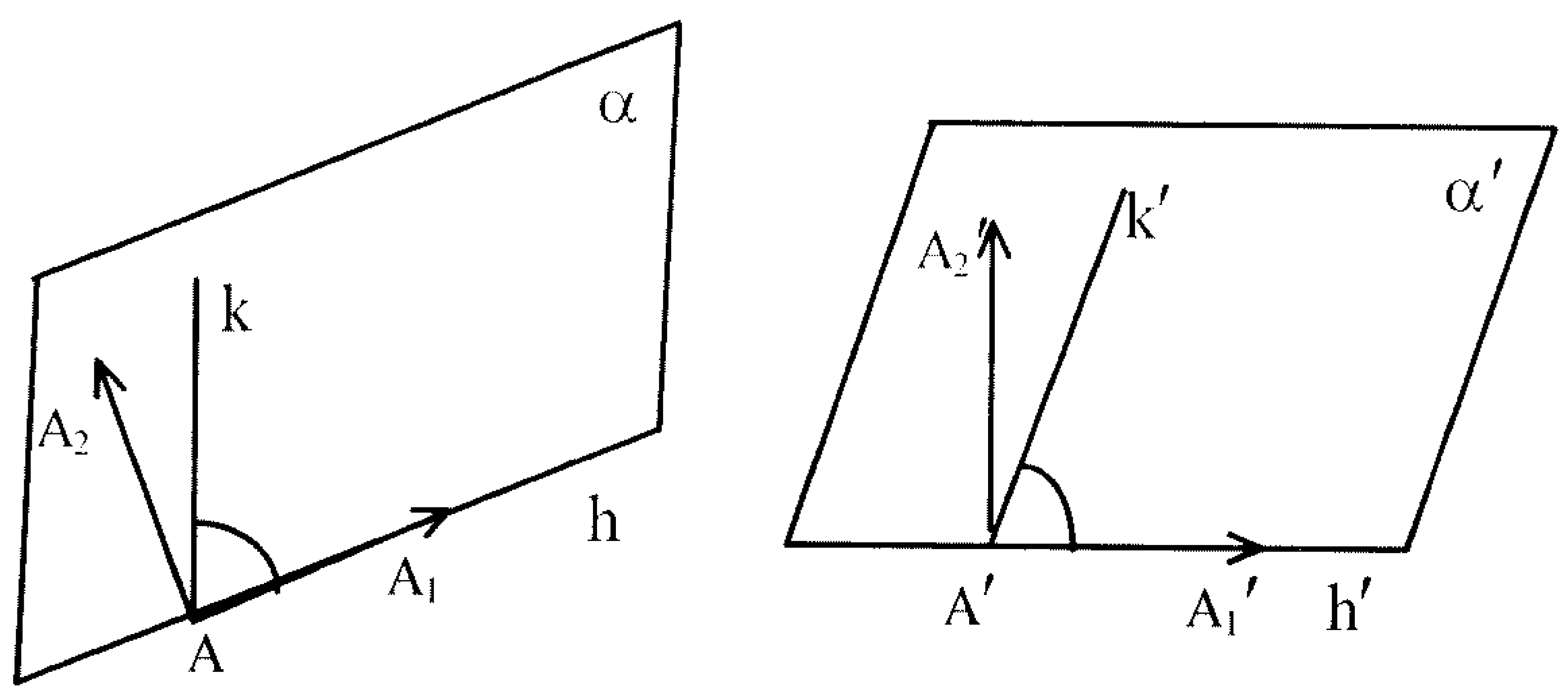


Рис. 29

углы равны и k′ – искомый луч.

Докажем теперь, что k′ – единственный. Предположим, что $\exists k''$/ $k''\in\alpha'$, $\angle hk=\angle h'k''$. В силу транзитивности равенства фигур $\angle h'k'=\angle h'k''$, тогда существует движение g, при котором ∠h′k′ переходит в ∠h′k″. При этом движении h′→h′, α′→α′, в силу чего $R'=\{A',A'_1,A'_2\}$ переходит в себя, т.е. g=e. Поэтому g(k′)=k′ и k″=k′■.

Итак, мы убедились, что все аксиомы системы аксиом Атанасяна школьного курса геометрии являются следствиями из системы аксиом Вейля, т.е. существует интерпретация аксиоматики Σ_A в теории $\Im(\Sigma_W)$. Отсюда и из п.2 этого параграфа следует, что доказана теорема.

Теорема. Аксиоматики Вейля и Атанасяна евклидовой плоскости эквивалентны.

Следствие 1: система аксиом Атанасяна школьного курса геометрии непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика действительных чисел.

Действительно, в §4 главы II была доказана непротиворечивость аксиоматики Σ_W евклидова пространства E_3. Точно также доказывается, что аксиоматика Σ_W плоскости E_2 непротиворечива. Кроме того, существует интерпретация системы аксиом Атанасяна в непротиворечивой аксиоматике Σ_W. Тогда по теореме из п.1 §4 главы II система аксиом Атанасяна плоскости E_2 также непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика действительных чисел (§2 главы II).

Следствие 2: система аксиом Атанасяна евклидовой плоскости полна.

Это следует из полноты системы аксиом Вейля плоскости E_2 и из эквивалентности аксиоматик Σ_A и Σ_W.

§12. Доказательство независимости аксиомы параллельных Евклида и непротиворечивости геометрии Лобачевского

П.1. Ещё раз о независимости системы аксиом

Как было установлено в §4 главы II, для доказательства независимости какой-либо аксиомы A_i из системы аксиом A от остальных аксиом этой системы обычно строится модель системы аксиом A*, полученной из A заменой аксиомы A_i её отрицанием $\rceil A_i$, т.е. фактически доказывается непротиворечивость системы аксиом $A^*=(A\setminus\{A_i\})\cup(\rceil A_i)$.

Ясно, что доказательство независимости каждой из аксиом системы A таким образом — дело громоздкое. Если для доказательства непротиворечивости системы аксиом достаточно построить одну модель, в которой реализуются все аксиомы системы, то для доказательства независимости системы аксиом нужно построить столько моделей, сколько имеется аксиом в системе, причем каждая модель должна реализовать все аксиомы, кроме одной – исследуемой на независимость.

Кроме того, аксиомы в системе аксиом находятся в порядковой зависимости, т.е. формулировка следующих аксиом предполагает, что предыдущая аксиома выполняется. Поэтому в этих случаях бессмысленно ставить вопрос о независимости. Например, нельзя доказать независимость аксиомы порядка II_2 системы Σ_A, с помощью которой вводится понятие луча, так как заменив аксиому II_2 её отрицанием, мы не сможем вообще ввести понятие луча, угла, а следовательно, не сможем формулировать те аксиомы (например, III_5-III_7), где фигурируют эти понятия. Отсюда следует, что для аксиоматики Σ_A или для аксиоматики Лобачевского проблема независимости не может быть решена до конца. Однако можно доказать независимость некоторых аксиом ([19],[23]). Мы остановимся подробнее на доказательстве независимости аксиомы V_E системы аксиом Σ_A планиметрии от остальных аксиом из Σ_A, составляющих систему аксиом абсолютной геометрии, так как этот вопрос имеет принципиальное значение.

П.2. Интерпретация Клейна системы аксиом плоскости Лобачевского. Проверка аксиом принадлежности, порядка и аксиомы параллельных V_Λ

Из сказанного выше следует, что для доказательства независимости аксиомы параллельных Евклида от остальных аксиом евклидовой плоскости, надо в системе аксиом Атанасяна Σ_A заменить аксиому V_E её отрицанием и доказать непротиворечивость вновь полученной системы аксиом. Но если мы в системе аксиом Σ_A евклидовой плоскости аксиому параллельных V_E заменим её отрицанием, то получим систему аксиом Σ_Λ плоскости Лобачевского ($\Sigma_\Lambda=(\Sigma_A\setminus\{V_E\})\cup V_\Lambda$).

Следовательно, *доказательство независимости аксиомы параллельных Евклида от аксиом абсолютной геометрии является одновременно доказательством непротиворечивости системы аксиом плоскости Лобачевского.*

Итак, мы должны построить какую-либо модель системы аксиом Атанасяна плоскости Лобачевского, т.е. мы должны найти совокупность конкретных объектов с конкретными отношениями между ними, для которых справедливы все аксиомы абсолютной геометрии ($\Sigma_A\setminus\{V_E\}$) и аксиома параллельных Лобачевского V_Λ:

Через точку, лежащую вне прямой, можно провести не менее двух прямых, не пересекающих данную прямую.

С этой целью рассмотрим модель, называемую моделью или *интерпретацией Клейна.*

Конкретное множество, на объектах которого строится интерпретация Клейна, – это евклидова плоскость E_2, которая построена с помощью аксиоматики Σ_A Атанасяна, т.е. как теория $\Im(\Sigma_A)$. Зафиксируем на E_2 некоторый круг G с центром в точке O и радиуса 1 с граничной окружностью g, которую назовём *абсолютом.* В отличие от точек и прямых евклидовой плоскости точки и прямые плоскости Лобачевского будем называть Λ-точками и Λ-прямыми.

Так как в формулировках аксиом Атанасяна кроме основных понятий встречаются и определяемые (отрезок, луч, угол, полуплоскость), то мы не будем составлять сразу весь интерпретационный словарь, а предварительно убедимся в справедливости тех аксиом, с помощью которых вводятся эти определяемые понятия. А именно, после определения понятий "точка", "прямая", "принадлежность" мы сразу же покажем справедливость тех аксиом, которые описывают свойства отношения принадлежности точки прямой, а затем уже дадим следующее определение интерпретационного словаря.

Определение 1: *Λ-точкой будем называть любую внутреннюю точку круга G.*

Из определения 1 следует, что ни одна точка окружности g и ни одна точка евклидовой плоскости, не принадлежащая кругу G, не является Λ-точкой. На рисунке 30 A, B, C - Λ-точки, а U, V, P, Q не являются Λ-точками. Таким образом, плоскость Лобачевского - это внутренняя область круга G, т.е. int G.

Определение 2: *Λ-прямой будем называть любую хорду круга G без концов.*

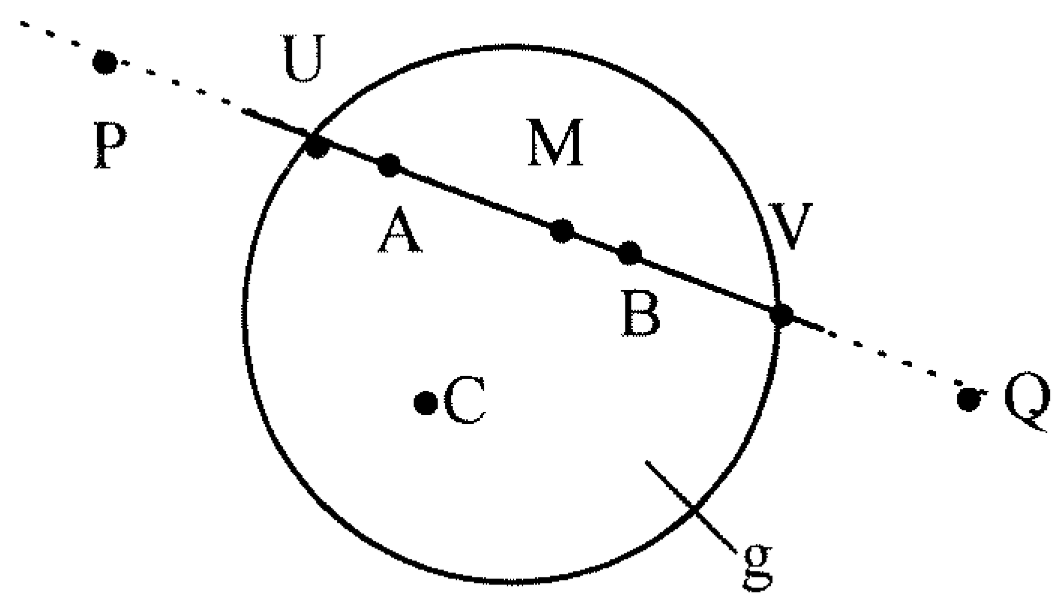


Рис.30

Например, хорда UV, является Λ-прямой (рис.30), но точки U и V этой Λ-прямой не принадлежат, как и точки P и Q прямой UV, не принадлежащие кругу G.

Определение 3: *принадлежность Λ-точки Λ-прямой будем понимать в обычном евклидовом смысле, т.е. если точка* $A\in[UV]$, *где* $A\neq U$, $A\neq V$, $U,V\in g$, *то будем считать, что Λ-точка A принадлежит Λ-прямой UV.*

Покажем теперь, что для таким образом определённого отношения принадлежности Λ-точки Λ-прямой справедливы аксиомы принадлежности I_1 и I_2 аксиоматики $\sum_A$ и аксиома параллельных Лобачевского V_Λ.

I_1. Каковы бы ни были две Λ-точки, существует Λ-прямая, проходящая через эти Λ-точки, и притом только одна.

I_2. На каждой Λ-прямой лежат по крайней мере две Λ-точки. Существуют три Λ-точки, не лежащие на одной Λ-прямой.

Предложения I_1 и I_2 верны в силу свойств евклидовой плоскости (рис.30).

V_Λ. Через Λ-точку, не лежащую на данной Λ-прямой, можно провести по крайней мере две Λ-прямые, не пересекающие данную.

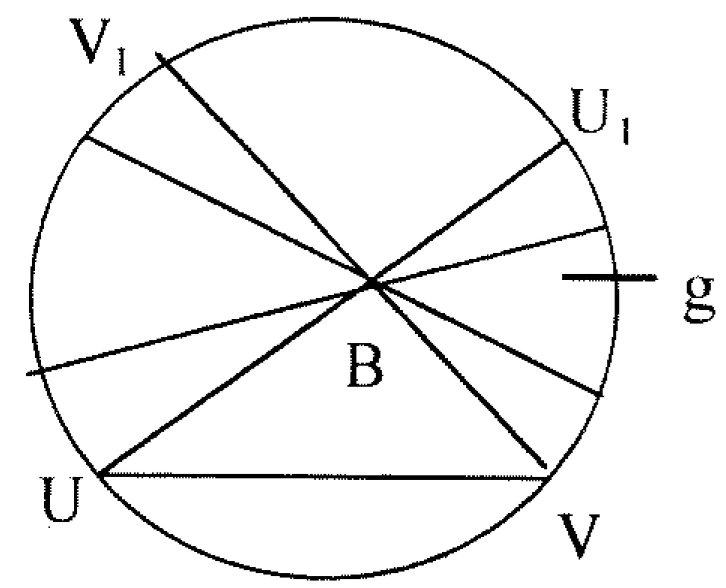


Рис. 31

Предложение V_Λ верно, так как через Λ-точку $B\notin UV$ можно, очевидно, провести бесчисленное множество хорд круга G, не пересекающих Λ-прямую UV (рис.31).

Заметим, что две из этих хорд U_1U и V_1V в нашей модели параллельны UV, а остальные сверхпараллельны UV.

Определение 4: *отношение "лежать между" для трёх Λ-точек одной Λ-прямой будем понимать в евклидовом смысле, т.е. если точки A,B,M∈int G и* $A\overset{*}{M}B$, *то будем считать, что Λ-точка M лежит между Λ-точками A и B (рис.30).*

Будем употреблять обозначение $A\overset{*}{M}B$ и для Λ-точек.

Покажем, что при таком определении "лежать между" для Λ-точек выполняются аксиомы порядка II_1 -II_4.

II_1. Если Λ-точка B лежит между Λ-точками A и C, то A, B, C - три различные Λ-точки одной Λ-прямой и Λ-точка B лежит также между Λ-точками C и A.

II_3. Из трёх Λ-точек на Λ-прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Предложения II_1 и II_3 верны, так как они выполняются для всех точек евклидовой плоскости, в том числе и для точек из int G.

II_2. Λ-точка M Λ-прямой UV разбивает множество всех остальных точек этой Λ-прямой на два непустых подмножества (Λ-полупрямые) так, что M лежит между любыми двумя Λ-точками разных подмножеств и не лежит между двумя Λ-точками одного и того же подмножества.

В этом предложении Λ-полупрямая MV с началом M - это пересечение евклидовой полупрямой [MV) с внутренностью круга G (рис.30),т.е. это полухорда MV ([MV]-евклидов отрезок, M∈int G, V∈g), поэтому предложение II_2 верно в силу соответствующего свойства евклидовой плоскости.

Теперь обычным образом вводятся понятия Λ-отрезка и Λ-угла. На рисунке 32 изображены Λ-отрезки AB и CD, а на рисунке 34 изображен Λ-угол hk.

II₄. Λ-прямая UV разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости Лобачевского на два подмножества (Λ-полуплоскости) так, что Λ-отрезок, соединяющий Λ-точки одной Λ-полуплоскости, не пересекается с Λ-прямой UV во внутренней точке, а Λ-отрезок, соединяющий Λ-точки разных Λ-полуплоскостей, пересекается с UV во внутренней Λ-точке.

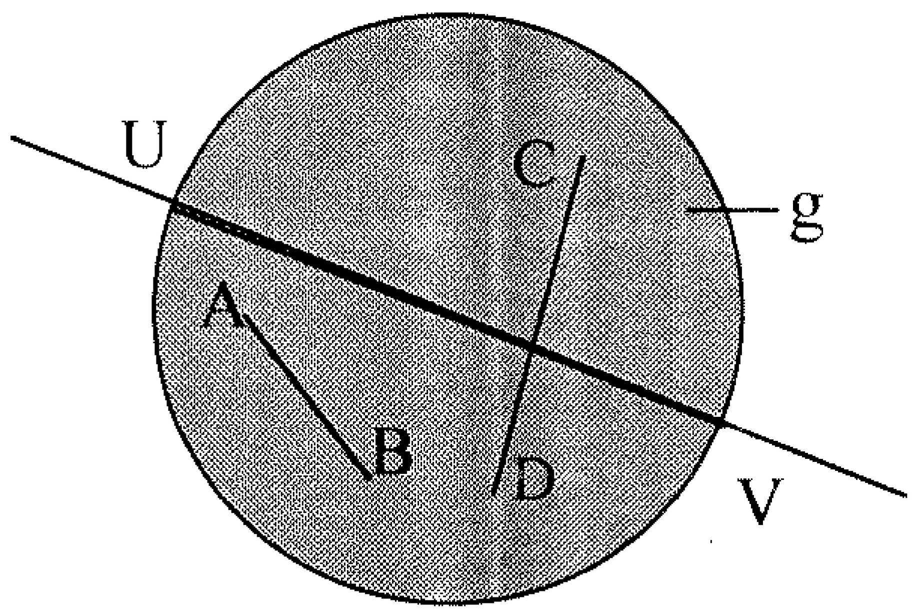


Рис. 32

В этом предложении Λ-полуплоскость с границей UV – это пересечение евклидовой полуплоскости с границей (UV) с внутренностью круга G (рис.32), т.е. это множество внутренних точек сегмента круга G, отсекаемого хордой [UV]. Поэтому II_4 справедливо в силу соответствующей аксиомы II_4 евклидовой плоскости.

П.3. Понятие Λ-преобразования

Чтобы определить понятия "Λ-наложения" и равенства Λ-отрезков и Λ-углов, рассмотрим ряд вспомогательных понятий. Напомним, что на плоскости E_2 простым отношением трёх точек A,B,C одной прямой называется число (AB,C)=λ, такое, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{CB}$, а сложным отношением четырёх точек A,B,C,D одной прямой – число

$$(AB,CD)=\frac{(AB,C)}{(AB,D)}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства сложного отношения:

1°. $(AB,CD)=(AB,CD') \Rightarrow D=D'$.

2°. $\forall A,B,C,D\in l \quad (AB,CD)=(BA,DC)=(CD,AB)$.

Самостоятельно убедитесь, что эти свойства верны.

Если точки $M_i(x_i,y_i)$ (i=1,2,3,4) - четыре точки прямой, заданные своими координатами, то

$$(M_1M_2,M_3M_4)=\frac{(x_1-x_3)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_1-x_4)}=\frac{(y_1-y_3)(y_4-y_2)}{(y_3-y_2)(y_1-y_4)}.$$ Одна из этих формул теряет смысл, если $M_i\in l$ и $l\|(Oy)$ или $l\|(Ox)$.

Определение: *биективное отображение $f{:}G\to G$ назовём* <u>*Λ-преобразованием*</u>, *если оно удовлетворяет условиям:*

а) внутренние точки круга G переходят во внутренние точки этого же круга, а граничные точки G - в граничные, т.е. f: int G→ intG и g→g,

б) любая хорда окружности g переходит в некоторую хорду этой же окружности,

в) сохраняется сложное отношение соответственных точек.

Примеры Λ - преобразований.

Пример 1. Любое движение евклидовой плоскости, имеющее центр абсолюта своей неподвижной точкой, индуцирует во множестве G некоторое Λ-преобразование. В частности, тождественное преобразование, поворот вокруг центра O круга G, симметрия с осью, проходящей через центр O круга G, являются примерами Λ-преобразований.

Пример 2. Выберем на плоскости E_2 прямоугольную декартову систему координат Oxy с началом в центре круга G, тогда $G=\{M(x,y)\in E_2/x^2+y^2\le 1\}$, $g=\{M(x,y)\in E_2/x^2+y^2=1\}$, $\text{int } G=\{M(x,y)\in E_2/x^2+y^2<1\}$.

Рассмотрим отображение f: G→G, которое в системе координат Oxy задаётся формулами $x'=\dfrac{a-x}{1-ax}$, $y'=\dfrac{y\sqrt{1-a^2}}{1-ax}$, где $|a|<1$.

(1)

Так как для точек M(x, y) множества G $1\le x\le 1$, то $1-ax\ne 0$, поэтому каждая точка круга G имеет образ. С учетом формул (1) получим

$$1-x'^2-y'^2=1-\frac{(a-x)^2+y^2-a^2y^2}{(1-ax)^2}=\frac{1-a^2}{(1-ax)^2}(1-x^2-y^2).$$

(2)

Это значит, что если $1-x^2-y^2\ge 0$, то и $1-x'^2-y'^2\ge 0$, поэтому образ M'(x',y') любой точки M(x,y) круга G удовлетворяет уравнению круга с началом O и радиуса 1, т.е. f(G)=G'=G.

Из формул (1) получим также, что $x=\dfrac{a-x'}{1-ax'}$, $y=\dfrac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'}$.

(1′)

Здесь $1-ax'\neq 0$, так как $-1\leq x'\leq 1$ для точек круга G. Из (1′) видно, что каждая точка круга G имеет и единственный прообраз. Следовательно, отображение (1) является биекцией множества G.

Из равенства (2) следует, что точки абсолюта g при f переходят в точки абсолюта g, а точки int G – в точки int G, т.е. f – это биекция внутренней области круга G на внутреннюю область того же круга G, т.е. для f выполняется условие а) определения Λ-преобразования.

Как показывают формулы (1) и (1′), преобразование f совпадает с обратным ему преобразованием f^{-1}, т.е. $f=f^{-1}$, откуда следует, что f – инволютивное преобразование.

Проверим теперь выполнение условий б) и в) определения.

б) Рассмотрим уравнение прямой l, содержащей некоторую хорду UV абсолюта g, $Ax+By+C=0$.

Так как эта прямая пересекает окружность g в точках U и V, то расстояние её от начала координат меньше радиуса, равного единице, т.е. $\rho(0,1)=\dfrac{|A\cdot 0+B\cdot 0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<1$ или $\sqrt{A^2+B^2}>|C|$, откуда $A^2+B^2>C^2$.

Используя формулы (1′), найдём уравнение образа 1′ прямой 1 при f.

$$A\frac{a-x'}{1-ax'}+B\frac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'}+C=0 \quad \text{или} \quad x'(-A-\ aC)\ +\ y'\sqrt{1-a^2}\ +\ C$$
$+aA = 0$.

Последнее уравнение определяет прямую 1′. Покажем, что она также пересекает абсолют g. Так как $A^2+B^2>C^2$, то $A^2(1-a^2)+B^2(1-a^2)>C^2(1-a^2)$, откуда получим $A^2+a^2A^2\ +B^2-a^2B^2\ >A^2a^2\ +C^2$ или $(A+aC)^2+B^2(1-a^2)>(Aa+C)^2$, т.е. $\rho(0,1')<1$, так как $A'^2+B'^2>C'^2$.

Таким образом, если UV – некоторая хорда окружности g, а $U'=f(U)$, $V'=f(V)$, то все точки хорды UV переходят в точки хорды U′V′. Но так как $f^{-1}=f$, то все точки хорды U′V′ переходят в точки хорды UV. Значит, хорда UV переходит в хорду U′V′.

в) Пусть $M_i(x_i, y_i)$ – четыре точки, лежащие на одной прямой 1, пересекающей ось Oy, а $M'_i(x'_i, y'_i)$ – их образы при f. Используя первую из формул (1′), находим $x_i-x_j=\dfrac{a^2-1}{(1-ax'_i)(1-ax'_j)}(x'_i-x'_j)$, где $i, j=1,2,3,4$, $i\neq j$. Подставляя это в формулу, выражающую сложное отношение в координатах, получаем $(M_1M_2, M_3M_4)=(M'_1M'_2, M'_3M'_4)$. Если точки M_i лежат на прямой, параллельной оси Oy, то мы придём к

тому же выводу, если возьмём выражение сложного отношения через координаты y_i точек M_i.

Итак, мы показали, что формулы (1) задают инволютивное Λ-преобразование.

П.4. Некоторые свойства Λ-преобразований

1°. Если f и g – Λ-преобразования, то $f\circ g$ и f^{-1} являются Λ-преобразованиями.

Задание .Докажите это свойство, исходя из определения или из формул (1) Λ-преобразования.

2°. Всякое Λ-преобразование сохраняет отношение “лежать между” точек круга G.

Напомним, что на евклидовой плоскости $A\overset{*}{B}C\Leftrightarrow(AC,B)=\lambda>0$.

Пусть $A,B,C\in G$ и $A\overset{*}{B}C$, а A',B',C' – образы точек A,B,C при Λ-преобразовании f. Обозначим через UV хорду, на которой лежат A,B,C, а через U′V′ образ этой хорды при f. Если A и C являются концами хорды UV, то A′ и C′ будут концами хорды U′V′. В этом случае утверждение 2° очевидно. Предположим, что $U\neq A$, $U\neq C$. Тогда $(AC,BU)=(A'C',B'U')$ или $\dfrac{(AC,B)}{(AC,U)}=\dfrac{(A'C',B')}{(A'C',U')}$. Так как для внутренних точек круга G $\overline{A\overset{*}{U}C}$, то $(AC,U)<0$. По той же причине $(A'C',U')<0$. По условию имеем $(AC,B)>0$. Тогда из равенства $\dfrac{(AC,B)}{(AC,U)}=\dfrac{(A'C',B')}{(A'C',U')}$ получаем, что $(A'C',B')>0$, а это значит, что $A'\overset{*}{B}'C'$.

Следствие: при Λ-преобразовании отрезок, принадлежащий кругу G, переходит в отрезок того же круга; в частности, полухорда круга G переходит в полухорду того же круга; любой сегмент круга G переходит в сегмент того же круга.

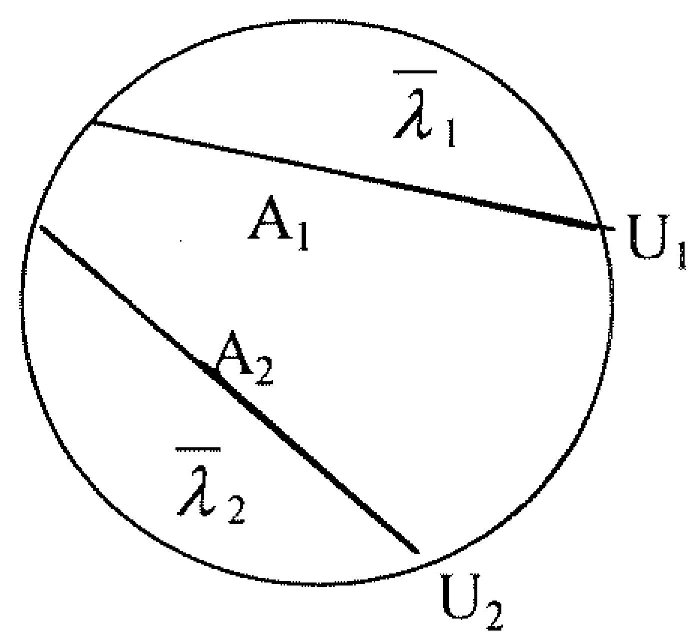


Рис. 33

Пусть UV – хорда круга G, AU – полухорда этой хорды, а $\overline{\lambda}$ – один из сегментов, ограниченный хордой UV. Пару AU, $\overline{\lambda}$ назовём *Λ-флагом* и обозначим (AU, $\overline{\lambda}$). На рисунке 33 изображены два Λ-флага (A_1U_1, $\overline{\lambda}_1$) и (A_2U_2, $\overline{\lambda}_2$). В силу следствия из свойства 2° получаем, что Λ-преобразование любой Λ-флаг переводит в Λ-флаг.

3°. Какова бы ни была точка $A \in \text{int } G$, существует инволютивное Λ-преобразование, при котором $A \to O$, $O \to A$, где O – центр круга G.

В самом деле, пусть $|OA|=a<1$. Выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы в этой системе A(a,0). Тогда Λ-преобразование, заданное формулами (1), – искомое. (Проверьте это самостоятельно).

4°. Каковы бы ни были Λ-флаги $J_1=(A_1U_1, \overline{\lambda}_1)$ и $J_2=(A_2U_2, \overline{\lambda}_2)$, существует Λ-преобразование, которое J_1 переводит в J_2 (рис.33).

По свойству 3° существуют инволютивные Λ-преобразования f_1 и f_2 такие, что $O=f_1(A_1)$, и $O=f_2(A_2)$, где O – центр круга G. Пусть $f_1(J_1)=J_1'$, $f_2(J_2)=J_2'$. Рассмотрим Λ-преобразование $f_\circ$ такое, что $J_2'=f_\circ(J_1')$ ($f_\circ$ - это вращение вокруг точки O или композиция вращения вокруг точки O и отражения от диаметра круга G). Тогда $f=f_2 \bullet f_\circ \bullet f_1$ является искомым Λ-преобразованием, так как $f(J_1)=f_2 \bullet f_\circ \bullet f_1(J_1)=f_2 \bullet f_\circ(J_1')=f_2(J_2')=f_2^{-1}(J_2')=J_2$.

Следствие: каковы бы ни были полухорды A_1U_1 и A_2U_2, существует Λ-преобразование, которое полухорду A_1U_1 переводит в полухорду A_2U_2.

Действительно, обозначим через $\overline{\lambda}_1$ – один из сегментов, ограниченный хордой, содержащей A_1U_1 , а через $\overline{\lambda}_2$ – один из сегментов, ограниченный хордой, содержащей A_2U_2. При этом получим два Λ-флага ($A_1U_1, \overline{\lambda}_1$) и ($A_2U_2, \overline{\lambda}_2$), для которых существует Λ-

преобразование f: ($A_1U_1, \overline{\lambda}_1$) $\to$ ($A_2U_2, \overline{\lambda}_2$), тогда при f полухорда A_1U_1 переходит в полухорду A_2U_2 .

5°. Если Λ-преобразование какой-нибудь Λ-флаг переводит в себя, то оно является тождественным преобразованием круга G.

Доказательство приведено в работе [3].

П.5. Проверка аксиом наложения в модели Клейна

Определение 5: *будем называть* <u>*Λ-наложением*</u> *всякое Λ-преобразование круга G.*

В этом пункте для простоты изложения Λ-отрезки, Λ-лучи, Λ-углы, Λ-полуплоскости и Λ-наложения будем называть просто отрезками, лучами, углами, полуплоскостями и наложениями.

Определение: *фигуру F плоскости Лобачевского ($F \subset \text{int}G$) будем называть* <u>*равной*</u> *фигуре F', если существует наложение, при котором F переходит в F'.*

III₁. Φ=Φ, так как существует наложение, являющееся тождественным Λ-преобразованием e такое, что Φ=e(Φ).

III₂. $\Phi_1=\Phi_2 \Rightarrow \Phi_2=\Phi_1$.

В самом деле, $\Phi_1=\Phi_2 \Rightarrow \exists f \,/ f(\Phi_1)=\Phi_2$ и f-наложение, тогда из определения 5 и свойства 1^0 получаем $f^{-1}(\Phi_2)=\Phi_1$, откуда $\Phi_2=\Phi_1$.

III₃. $\Phi_1=\Phi_2$, $\Phi_2=\Phi_3 \Rightarrow \Phi_1=\Phi_3$.

В самом деле, из равенств $\Phi_1=\Phi_2$, $\Phi_2=\Phi_3$ следует существование наложений $f_1:\Phi_1 \to \Phi_2$ и $f_2:\Phi_2 \to \Phi_3$, откуда следует, что $f_2 \circ f_1(\Phi_1)=\Phi_3$. В силу свойства 1^0, определения 5 и определения равенства фигур получаем, что $\Phi_1=\Phi_3$.

III₄. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка A'B', то отрезок AB отображается на отрезок A'B'.

Справедливость этого утверждения имеет место в силу следствия из свойства 2^0 Λ-преобразований и определения 5.

III₅. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Доказательство.

□Пусть AB – данный отрезок, отложенный на луче h, а h' – луч, исходящий из точки A'. Докажем, что существует точка $B' \in h'$, такая, что AB=A'B'.

Обозначим через AU и A'U'- полухорды круга G, на которых лежат лучи h и h', а через UV и U'V' соответствующие хорды. По следствию из свойства 4^0 и в силу определения 5 существует наложение f:

$AU \to A'U'$, тогда $h'=f(h)$. Если при $f: B \to B'$, то $B' \in h'$. По определению равенства фигур в силу III_4 получим $AB=A'B'$.

В нашей модели на луче h' имеется единственная точка B' такая, что $AB=A'B'$. В самом деле, $U'=f(U)$, $V'=f(V)$, поэтому $(UV,AB)=(U'V',A'B')$. Если допустить, что существует другая точка $B'' \in h'$ и $AB=A'B''$, то аналогично получаем $(UV,AB)=(U'V',A'B'')$. Поэтому $(U'V',A'B')= =(U'V',A'B'')$ и по свойству1 сложного отношения $B'=B''$■.

III_6. Если неразвернутый угол hk равен углу $h'k'$, то существует наложение, при котором $h \to h'$, $k \to k'$.

Доказательство.

□Пусть $\angle hk=\angle h'k'$, тогда существует наложение которое $h \to h'$, $k \to k'$ или $h \to k'$, $k \to h'$. В первом случае утверждение предложения III_6 очевидно, поэтому рассмотрим только второй случай. Пусть $\exists f/f(h)=k'$, $f(k)=h'$. Рассмотрим инволютивное Λ-преобразование f_1, которое вершину угла hk переводит в центр O круга G (свойство 3^0). Пусть $f_1(h)=h_1$, $f_1(k)=k_1$. Рассмотрим теперь отражение f_2 от прямой, содержащей биссектрису угла h_1k_1, тогда $f_2(k_1)=h_1$, $f_2(h_1)=k_1$.

Λ-преобразование $f^*=ff_1f_2f_1$ есть искомое наложение, так как $f^*(h)= =ff_1f_2f_1(h)=ff_1f_2(h_1)=ff_1(k_1)=ff_1^{-1}(k_1)=f(k)=h'$ и аналогично $f^*(k)=k'$■.

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Пусть даны $\angle hk$ и флаг $(A'U', \bar{\lambda}')$ (рис.34). Докажем, что существует единственный луч $k' \subset \bar{\lambda}'$ такой, что $\angle hk=\angle h'k'$.

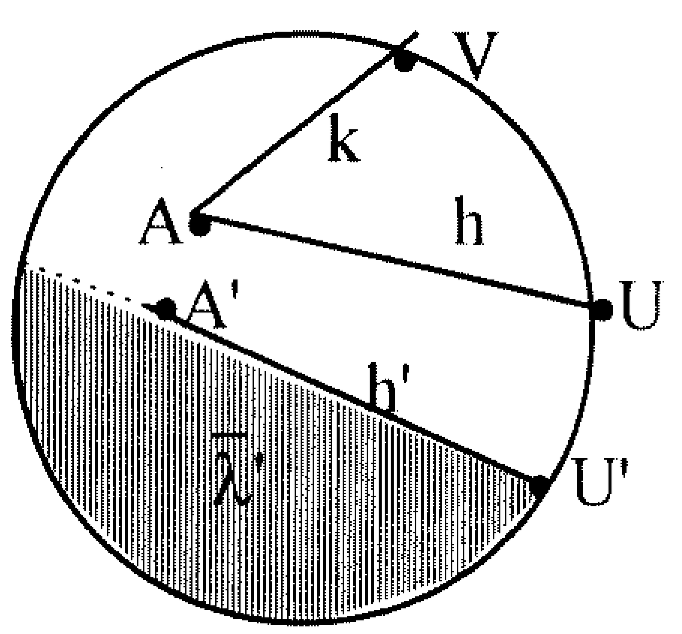


Рис.34

Рассмотрим флаги $J=(AU, \bar{\lambda})$ и $J'=(A'U', \bar{\lambda}')$ такие, что $h=AU$, $h'=A'U'$, $k \subset \bar{\lambda}$. По свойству 4^0 существует наложение f, такое, что $J'=f(J)$, тогда $f(k)=k'$, $k' \subset \bar{\lambda}'$, $f: \angle hk \to \angle h'k' \Rightarrow \angle hk= =\angle h'k'$, откуда следует, что луч k'- искомый.

Если предположить, что $\exists k''/ /\angle hk=\angle h'k''$ и $k'' \subset \bar{\lambda}'$, тогда $\angle h'k'=\angle h'k''$ и, следовательно, существует наложение $f/h'=f(h')$, $k''=f(k')$. В виду этого при наложении f флаг J' отображается на себя. Это в силу свойства 5^0 означает, что $f = e$, но тогда $k'=k''$.

П.6. Проверка аксиом IV группы

Введем теперь определение Λ-длины Λ-отрезка.

Пусть дан Λ-отрезок AB Λ-прямой UV. Условимся концы хорды обозначать так, чтобы точка U была расположена со стороны точки A, т.е. чтобы B не принадлежала полухорде AU (рис.35).

Определение: *Λ-длиной Λ-отрезка AB Λ-прямой UV будем называть число* $|AB|_\Lambda = \ln\left(\frac{UB}{UA}:\frac{VB}{VA}\right)$ *(3), где UB, UA, VB, VA – евклидовы длины соответствующих отрезков.*

Заметим, что обычно в литературе, посвященной геометрии Лобачевского, в формулу (3) вводится некоторая положительная константа C, фиксация которой равносильна выбору единичного Λ-отрезка PQ в плоскости Лобачевского. Для простоты рассуждений будем считать, что $C=1$, в связи с чем установлена и единица измерения Λ-длины.

Прежде, чем проверить выполнимость аксиомы IV_2 для модели Клейна, докажем вспомогательное предложение.

Лемма. Λ-преобразование сохраняет Λ-длину Λ-отрезка, т.е. является Λ-движением.

Пусть AB – данный Λ-отрезок Λ-прямой UV, а f-Λ – преобразование, при котором $A \to A'$, $B \to B'$, $U \to U'$, $V \to V'$ (рис.35).

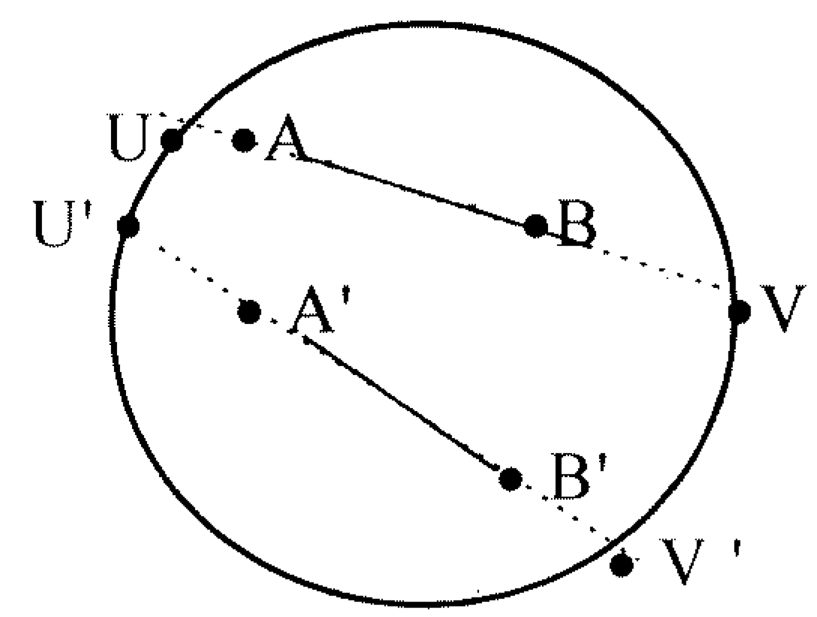


Рис.35

Докажем, что $|AB|_\Lambda=|A'B'|_\Lambda$.

В самом деле, $|AB|_\Lambda= \ln\left(\frac{UB}{UA}:\frac{VB}{VA}\right) = \ln\frac{(BA,U)}{(BA,V)} = =\ln(BA,UV)$, тогда $|A'B'|_\Lambda= =\ln(B'A',U'V')$. По определению Λ-преобразования при f сохра-няется сложное отношение четырех точек прямой, т.е. $(BA,UV)= =(B'A',U'V')$, откуда следует, что $\ln(BA,UV)= \ln(B'A',U'V')$ или $|AB|_\Lambda=|A'B'|_\Lambda$.

Теперь приступим к проверке аксиом группы IV.

IV_1. При выбранной единице измерения Λ-отрезков каждый Λ-отрезок имеет определенную Λ-длину.

При нашей договоренности о выборе точек U и V для любого Λ-отрезка AB отношение $\frac{UB}{UA}:\frac{VB}{VA}>1$, поэтому правая часть равенства (3) имеет смысл и $\ln\left(\frac{UB}{UA}:\frac{VB}{VA}\right)>0$,так как при основании, бóльшем единицы (e≈2,7>1), логарифмы чисел, бóльших единицы, положительны. Таким образом, с помощью равенства (3) устанавливается соответствие $d:L\to R_+^*$. Покажем, что это отображение удовлетворяет аксиомам D_1,D_2 и D_3 длины.

1. Рассмотрим равные Λ-отрезки AB и CD. В силу определения равенства фигур существует Λ-движение (наложение), при котором AB→ CD и при этом сохраняется Λ-длина Λ-отрезка, т.е. $|AB|_\Lambda=|CD|_\Lambda$. Следовательно, аксиома D_1 выполняется.

2. Пусть теперь $A\overset{*}{M}B$, докажем, что $|AB|_\Lambda=|AM|_\Lambda+|MB|_\Lambda$. В самом деле, $|AM|_\Lambda=\ln\left(\frac{UM}{UA}:\frac{VM}{VA}\right)$, $|MB|_\Lambda=\ln\left(\frac{UB}{UM}:\frac{VB}{VM}\right)$, тогда

$$|AM|_\Lambda+|MB|_\Lambda=\ln\left(\frac{UM}{UA}:\frac{VM}{VA}\right)+\ln\left(\frac{UB}{UM}:\frac{VB}{VM}\right)=$$

$$=\ln\left(\left(\frac{UM}{UA}:\frac{VM}{VA}\right)\cdot\left(\frac{UB}{UM}:\frac{VB}{VM}\right)\right)=\ln\left(\frac{UM\cdot VA\cdot UB\cdot VM}{UA\cdot VM\cdot UM\cdot VB}\right)=$$

$=\ln\left(\frac{UB}{UA}:\frac{VB}{VA}\right)=|AB|_\Lambda$. Следовательно, выполняется и аксиома D_2.

3. Возьмем любую Λ-точку P и проведем через нее Λ-прямую UV. На
Λ-прямой UV будем искать такую Λ-точку Q, чтобы $|PQ|_\Lambda=1$ или
$|PQ|_\Lambda=\ln\left(\frac{UQ}{UP}:\frac{VQ}{VP}\right)=\ln\left(\frac{UQ}{VQ}:\frac{UP}{VP}\right)=\ln\frac{UQ}{VQ}-\ln\frac{UP}{VP}=1.$ Отсюда

$\ln\frac{UQ}{VQ}=1+\ln\frac{UP}{VP}$ или $\frac{UQ}{VQ}=e^{1+\ln\frac{UP}{VP}}=\lambda$, причем λ – вполне определенное положительное число. На евклидовом отрезке UV существует и единственная точка Q, делящая отрезок UV в данном отношении λ. В виду этого существует Λ-точка Q, а следовательно, и Λ-отрезок PQ/$|PQ|_\Lambda=1$. Итак, выполняется и аксиома D_3 длины.

IV_2. Каково бы ни было действительное число d>0, существует отрезок, длина которого равна d.

Доказательство этого утверждения дословно совпадает с доказательством аксиомы D_3 длины, только вместо числа 1 в равенствах записывается данное число d.

Итак, мы убедились, что в модели Клейна выполняются все аксиомы Атанасяна абсолютной геометрии плоскости и аксиома параллельных Лобачевского. Построением этой модели мы доказали следующую фундаментальную теорему.

Теорема. Геометрия Лобачевского, построенная на аксиомах I_1-I_2; II_1-II_4; III_1-III_7; IV_1-IV_2, V_Λ, непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Одновременно мы доказали и независимость аксиомы параллельных Евклида от остальных аксиом евклидовой геометрии.

Вопросы и задания к главе III

П.1. Вопросы для самопроверки

1. Какие аксиоматики используются для построения школьного курса геометрии в настоящее время ? В чем их особенности ?
2. Каковы основные понятия аксиоматики Σ_A евклидовой плоскости ?
3. Какие группы аксиом выделяются в аксиоматике Σ_A ?
4. В какой из аксиом порядка постулируется существование по крайней мере трех точек на прямой ?
5. Из какой аксиомы порядка следует незамкнутость прямой ?
6. Как определяются понятия луча, полуплоскости, угла в теории $\Im(\Sigma_A)$?
7. Что такое наложение ?
8. Как определяется равенство любых двух фигур ?
9. Каковы аксиомы и свойства наложений ?
10. Как определяется прямой угол и перпендикулярность прямых ?
11. Как вводится понятие длины отрезка ?
12. Какова основная задача теории измерений отрезков ?
13. Какая аксиома лежит в основе теории измерений ?
14. Как читается предложение Архимеда ?
15. Как доказывается биективность соответствия между точками прямой и действительными числами ?
16. Как читается предложение Дедекинда для отрезков, углов ?
17. V постулат Евклида- это аксиома или теорема в $\Im(\Sigma_A)$?
18. Что такое абсолютная и собственно евклидова геометрии ? Приведите предложения, относящиеся к той и другой геометриям.
19. Как вводится понятие площади многоугольника ? Каковы аксиомы площади ?
20. Изложите идею доказательства теоремы о площади прямоугольника.
21. Сформулируйте теорему существования и единственности площади многоугольника.
22. Теория измерения площадей относится к абсолютной или к собственно евкидовой геометрии ? А теория измерения длин отрезков ?
23. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, проведенную к этой стороне $\left(S = \frac{1}{2}ah_a\right)$.

24. Докажите, что площадь треугольника не зависит от способа разбиения его на более мелкие треугольники.
25. Докажите, что сумма площадей треугольников разбиения любого простого многоугольника на треугольники не зависит от способа разбиения.
26. Что же принимается за площадь произвольного многоугольника ?
27. На какие аксиомы и теоремы опирается доказательство однозначности площади многоугольника ?
28. Перечислите последовательность предложений (аксиом и теорем), применяемых при доказательстве существования площади многоугольника.
29. Какие две системы аксиом называются эквивалентными ? Как доказывается их эквивалентность ?
30. Дайте определения некоторых основных понятий геометрии в теории $\Im(\Sigma_W)$.
31. Дайте определения основных понятий аксиоматики Вейля в теории $\Im(\Sigma_A)$.
32. Какие предложения теории векторного пространства используются при доказательствах аксиом Атанасяна плоскости E_2 в теории $\Im(\Sigma_W)$?
33. Докажите, что в теории $\Im(\Sigma_W)$ через точку вне данной прямой можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.
34. В чем суть доказательства независимости аксиомы от остальных аксиом системы ?
35. Почему доказательство независимости аксиомы параллельных от остальных аксиом системы Σ_A евклидовой плоскости является доказательством непротиворечивости системы аксиом плоскости Лобачевского ?
36. Приведите все определения интерпретационного словаря модели Клейна плоскости Лобачевского.
37. Почему в модели Клейна выполняются аксиомы принадлежности и порядка аксиоматики Лобачевского, а также аксиома параллельности Лобачевского ?
38. Что такое Λ-преобразование в модели Клейна? Приведите примеры Λ- преобразований.
39. Перечислите свойства Λ- преобразований.
40. Выполните проверку аксиом наложения в модели Клейна.

41. Как определяется длина отрезка плоскости Лобачевского в модели Клейна ? Докажите выполнимость аксиом длины.
42. Выполните проверку аксиом IV_1 и IV_2 , связанных с длинами отрезков.

П.2. Упражнения

1) *Докажите* следующий признак полупрямой :
Полупрямая AB прямой a – это та часть прямой a, которая вместе с точкой B попадает в одну полуплоскость с границей c, где c - любая прямая, проходящая через точку A(начало луча) и отличная от прямой a.
2) *Докажите*, что если точка C принадлежит лучу AB, то лучи AB и AC совпадают, т.е. точку B в обозначении луча можно заменить любой точкой этого луча.
3) *Дайте определение* смежных углов. Докажите, что углы, смежные к равным углам, равны между собой.
4) *Дайте определение* вертикальных углов. Докажите, что вертикальные углы равны.
5) *Докажите* теорему о делении отрезка любой его внутренней точкой.
6) *Докажите*, что каждый отрезок имеет и единственную середину, которая лежит на этом отрезке.
7) *Дайте определения* медианы, высоты, биссектрисы треугольника, *докажите* их существование и единственность в каждой вершине треугольника.
8) *Докажите*, что в равнобедренном треугольнике высота, медиана, биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.
9) *Сформулируйте и докажите* III признак равенства треугольников.
10) *Докажите 4-ый признак* равенства треугольников : если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого и сторона первого треугольника, противолежащая одному из этих углов, равна соответствующей стороне другого, то такие треугольники равны.
11) *Докажите*, что при наложении полуплоскость отображается на полуплоскость.
12) *Докажите*, что на каждом отрезке существуют точки, которые делят его на n равных частей ($n \in N$, $n>1$).
13) *Введите* координаты точек на прямой (на плоскости) и докажите, что существует биекция между точками прямой (плоскости) и действительными числами (упорядоченными парами действительных чисел). Какие аксиомы при этом используются ?

14) *Докажите* лемму Саккери: если в четырехугольнике с прямыми углами A и B стороны AD и BC равны, то $\angle C=\angle D$; если же стороны AD и BC не равны, то из двух углов C и D тот больше, который прилежит к меньшей стороне.
15) *Докажите*: если в четырехугольнике ABCD $\angle A=\angle B=d$ и $\angle C\neq\angle D$, то против большего угла лежит большая боковая сторона.
16) *Докажите*, что если M – внутренняя точка угла Ohk, то [OM) – внутренний луч этого угла.
17) *Докажите*: если при пересечении двух данных прямых a и b третьей прямой окажется, что сумма внутренних односторонних углов равна 2d, то прямые a и b не пересекаются.
18) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.
19) Если две прямые не пересекаются, то при пересечении их третьей прямой сумма внутренних односторонних углов равна2d.
20) *Докажите*, что если имеет место V постулат, то существует подобные, но неравные треугольники.
21) Проверочный тест “Структура евклидовой плоскости по Атанасяну”.

	Понятия, утверждения	Аксиома (указать группу)	Основное понятие	Определяемое понятие (после какой группы аксиом)	Теорема (после какой группы аксиом)
1.	Если $\overset{*}{ABC}$, то A,B,C – три различные точки одной прямой.				
2.	Существуют хотя бы 3 точки, не лежащие на одной прямой.	$\oplus$, I_2			
3.	Если a//b, то при пересечении их третьей прямой образуются равные соответственные углы.				
4.	$A \in l$.				

5.	$\forall l, \exists A,B / A,B \in l$.				
6.	Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, с ним не смежного.				
7.	Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним.				
8.	$\forall[AB]$, $\forall[OX)$ $\exists! C \in [OX) / [OC]=[AB]$.				
9.	Существует бесконечное множество точек, принадлежащих прямой.				
10.	$\overset{*}{A\,B\,C}$.		⊕		
11.	V постулат Евклида.				
12.	Точка $O \in l$ делит $l \backslash \{0\}$ на два непустых подмножества.				
13.	Сумма углов треугольника равна 2d.				
14.	$\angle hk = \angle h'k' \Rightarrow \exists$ наложение $f / f(h)=h', f(k)=k'$.				
15.	$\forall A,B\ \exists C / A\overset{*}{C}B$.				
16.	$\forall \angle hk$, $\forall [OX), \forall \lambda$-полуплоскость с границей (ox) $\exists [OY) \in \in \lambda / \angle XOY = \angle hk$.				
17.	Сумма внутренних углов треугольника $\leq 2d$.				⊕, IV
18.	$(\Delta ABC, \Delta A'B'C', [AB]=[A'B'], \angle A=\angle A', \angle B=\angle B') \Rightarrow \Delta ABC= =\Delta A'B'C'$.				
19.	$\Phi_1=\Phi_2$.			⊕,II	

Для образца заполнения таблицы выполнены задания 2), 10), 17) и 19).

22) *Определите* сложение векторов плоскости E_2. Докажите выполнимость аксиом сложения Вейля.

23) *Определите* умножение вектора на действительное число. Докажите выполнимость аксиом Вейля умножения вектора на число.

24) *Определите* скалярное умножение векторов. Докажите выполнимость аксиом Вейля скалярного произведения.

25) *Определите* понятие "откладывания вектора от точки". Докажите выполнимость аксиом Вейля откладывания вектора от точки.

26) *Докажите*, что любые три вектора плоскости E_2 линейно зависимы.

27) Проверочный тест "Структура евклидовой плоскости по Вейлю".

	Понятия и утверждения	Пространство V_2	Пространство E_2	Основное понятие	Аксиома (указать группу)	Определение	Теорема
1.	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.	⊕			⊕		
2.	$\rho(A,B)=\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert$.						
3.	Любые три вектора линейно зависимы.						
4.	$\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.	⊕					⊕
5.	$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$						
6.	$\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.						
7.	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ для $\forall A,B,C$.						
8.	$M(x,y)_{(0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$		⊕			⊕	
9.	$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0}$.						
10.	$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.						

11.	$\left\lvert \alpha \cdot \overrightarrow{AB} \right\rvert = \lvert\alpha\rvert \left\lvert \overrightarrow{AB} \right\rvert$.						
12.	$(-1)\vec{a} = \vec{a}$.						
13.	$\overset{*}{ABC}$.						
14.	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{\vec{a}_2}$.						
15.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha$.						
16.	$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.		$\oplus$	$\oplus$			

Для образца заполнения таблицы выполнены задания1), 4), 8), 16).

28) *Рассмотрите* структуру евклидова пространства E_3 по Атанасяну. *Докажите* некоторые следствия из аксиом принадлежности:

—Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

—Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

29) *Докажите* следующие следствия из аксиом наложения пространства E_3:

—Если при наложении три точки A,B и C, не лежащие на одной прямой, переходят в точки A',B' и C', то плоскость ABC переходит в плоскость A'B'C'.

—При наложении плоскость переходит в плоскость, а полуплоскость- в полуплоскость, причем граница полуплоскости переходит в границу полуплоскости.

—При наложении четыре точки, не лежащие в одной плоскости, переходят в четыре точки, также не лежащие в одной плоскости.

—Любое наложение является преобразованием пространства.

—При наложении полупространство с границей α переходит в одно из полупространств с границей α', где α' – образ плоскости α.

30) *Докажите* эквивалентность систем аксиом Вейля и Атанасяна евклидова пространства.

Список литературы

1. Алеев Р.Ж. Лекции по основаниям геометрии. – Челябинск: ЧелГУ, 1993.
2. Александров А.Д. Основания геометрии. - М., 1987.
3. Атанасян Л.С. Основания геометрии: Методическое пособие для студентов-заочников. - М., 1960.
4. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Часть I.-М.,1986; Часть II.-М.,1987.
5. Атанасян Л.С. Основания школьного курса планиметрии: Пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. -М.:МГПИ им. В. И. Ленина, 1989.
6. Атанасян Л.С., Денисова Н. С., Силаев Е. В. Курс элементарной геометрии. Часть I. Планиметрия. - М., 1992.
7. Атанасян Л.С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия: Учебник для 7-9 кл. сред. шк .- М., 1992.
8. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия. Часть II.- М., 1975.
9. Бахвалов С. В., Иваницкая В. П. Основания геометрии. - М.,1972.
10. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. - М., 1969.
11. Бородин А.И., Бугай А.С. Выдающиеся математики. – Киев,1987.
12. Бояи Я. Аппендикс. - М., Л., 1950.
13. Бурбаки Н. Архитектура математики. - В сб.: Математическое просвещение , вып. 5.- М., 1960- с. 99-112.
14. Бурбаки Н. Теория множеств. - М., 1965.
15. Бюлер В. Гаусс. Биографическое исследование. - М., 1989.
16. Васильева М.В. Методическая разработка к спецкурсу “Основания геометрии ”.- М., 1984.
17. Виленкин Н.Я. и др. Современные основы школьного курса математики. -М., 1980.
18. Волошинов А.В. Пифагор. - М., 1993.
19. Гильберт Д. Основания геометрии. - М.,Л., 1948.
20. Евклид. Начала .- М., Л., 1948.
21. Егоров И.П. Геометрия. - М.,1979.
22. Егоров И.П. Основания геометрии. -М., 1984.
23. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. - М., 1971.
24. Каган В.Ф. Основания геометрии : В 2-х томах. - М., 1949.
25. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. - М., 1963.

26. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : В 2-х томах. - М., 1987.

27. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т I.- М., 1989.

28. Колмогоров Н.А. Математика - наука и профессия. - М., 1988.

29. Колмогоров Н.А. Геометрия 6-8. - М., 1979.

30. Костин В.И. Основания геометрии. - М., 1948.

31. Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. - М., 1979.

32. Ливанова А. Три судьбы. Постижение мира. - М., 1975.

33. Математический энциклопедический словарь. - М., 1995.

34. Погорелов А.В. Геометрия. - М., 1983.

35. Подран В.Е. Модели в геометрии. - Новгород, 1992.

36. Рид К. Гильберт. - М., 1977.

37. Розенфельд Б.А. История неевклидовой геометрии. - М., 1976.

38. Смилга В.В. В погоне за красотой. - М., 1965.

39. Столл Р.Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. - М., 1968.

40. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. - М., 1961.

41. Шоке Г. Геометрия. - М., 1970.

42. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. - М., Л., 1938.

43. Яглом И.М. Герман Вейль. - М., 1967.

УДК 514.01

Печатается по постановлению
учебно-методической
комиссии физико-математического факультета

Материалы к лекциям и практическим занятиям по основаниям геометрии: учебное пособие для студентов педагогического университета / сост. В.А. Баранова. Челябинск, ЧГПУ, 2013. 149 с.

Это пособие адресовано студентам физико-математического факультета педагогического университета дневного и заочного отделений и имеет цель помочь в самостоятельном изучении и сознательном усвоении важного для профессиональной подготовки учителя математики раздела «Основания геометрии», а также при подготовке к экзаменам и практическим занятиям, при выполнении курсовых и дипломных работ. Оно содержит достаточно подробное изложение нескольких важных тем:

– основные исторические этапы развития учения об основаниях геометрии и создания современного аксиоматического метода;

– общие вопросы аксиоматики;

– аксиоматическое обоснование евклидовой геометрии (в основу положена система аксиом Атанасяна и др. школьного курса геометрии);

– теория измерения длин отрезков и площадей многоугольников.

В работе доказывается эквивалентность систем аксиом Атанасяна и Вейля евклидовой плоскости, а также независимость аксиомы параллельных Евклида от аксиом абсолютной геометрии; приводятся вопросы для самоконтроля, необходимые упражнения, темы рефератов и индивидуальных творческих заданий, примеры проверочных тестов и список литературы.

Рецензенты: М.М. Кипнис, д-р физ.-мат. наук, профессор

А.А. Попова, д-р физ.-мат. наук, доцент