МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Практико-ориентированные задачи на оптимизацию для физико-математического профиля

Выпускная квалификационная работа

по направлению 44.03.05, педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Физика. Математика»

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/084-5-1
Джуманиязова Азиза Султанбековна

Научный руководитель:
доцент, кандидат педагогических наук,
Эрентраут Елена Николаевна

Проверка на объем заимствований:
60,97 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 4 » июля 2017 г.
зав. кафедрой МиМОМ
Суховиенко Е.А.

Челябинск

2017 год

Содержание

Введение

Модернизация образования последнего десятилетия в Российской Федерации определяет новые подходы к обновлению и развитию всей образовательной системы.

В настоящее время в школьном математическом образовании одним из преимущественных направлений является подготовка учащихся к использованию математики в решении широкого круга проблем, возникающих в реальном мире за пределами образовательного процесса. Это обусловлено, с одной стороны, возросшим в последние десятилетия значением математики в общей системе знаний. С другой стороны, причина происходящих в сфере российского образования изменений заключается в том, что математические методы проникают в разнообразные сферы жизнедеятельности людей, знания основ (и не только) математики все больше востребованы в повседневной жизни.

В связи с чем, актуализировалась необходимость обеспечения перехода от предметно-ориентированного обучения к практико-ориентированному, реализующему системно-деятельностный подход, предполагающий подготовку школьника к профессиональной и общественной жизни. Одним из средств реализации выделенных подходов в образовательные практики выступают практико-ориентированные задачи на оптимизацию, которые обеспечивают связь изучаемой предметной области с окружающей действительностью, практическими навыками, умениями, реальной жизнью. Поэтому современные требования к результатам обучения математике включают не только овладение предметными знаниями, но и умениями применять данные знания в ситуациях повседневной жизни, при решении практических задач. В Концепции развития математического образования в РФ от 24 декабря 2013 года также подчеркивается необходимость приобретения школьниками «знаний и навыков, применяемых в повседневной жизни и профессиональной деятельности».

Повышенное внимание практико-ориентированных заданий прослеживается и в содержании контрольно-измерительных материалов для ОГЭ и ЕГЭ. Однако результаты государственной итоговой аттестации учащихся 9-х и 11-х классов свидетельствуют о низком уровне сформированности умений использовать математические знания и методы для решения практико-ориентированных задач на оптимизацию. Очевидно, что такие результаты являются следствием недостаточного внимания к обучению школьников практико-ориентированным задачам на оптимизацию в силу некоторых причин, среди которых следующие:

- недостаточно разработаны методические аспекты обучения школьников решению практико-ориентированных задач на оптимизацию;
- в частности, нет смысловой и методической ясности в вопросе о том, в какой форме и объеме практико-ориентированные задачи целесообразно включить в обязательную программу школьного курса математики;
- крайне мало необходимых современных учебно-методических пособий для школьников, содержание которых ориентировано на реализацию практико-ориентированного обучения математике на основной и старшей ступенях общего образования.

Анализ исследований последних лет, отражающих тенденции развития школьного математического образования позволил выделить три основных направления: развитие математического мышления, организация учебной исследовательской деятельности школьников (Т.А. Полякова, Е.В. Сухорукова, Л.В. Форкунова и др.); изучение путей осуществления межпредметных связей математики с другими дисциплинами: физикой (И.В. Зубова и др.) биологией (С.Н. Дворяткина и др.), экономикой (А.Г. Еленкин, М.Ю. Тумайкина и др.), химией (Е.В. Иващенко и др.); включение практико-ориентированных задач в отдельные разделы школьного курса математики (В.С. Абатурова, Е.М. Ложкина, С.Ю. Полякова Л.Э. Хаймина, и др.).

Изучение школьного курса математики в 10-11 классах играет решающую роль в системе профильного обучения, так как универсальность математических методов позволяет в формальных понятиях алгебры, геометрии и математического анализа на уровне общенаучной методологии отразить связь теоретического материала различных областей знаний с практикой. Поэтому практико-преобразующая деятельность, как проявление функционирования содержания курса математики определяет значимость математики в подготовке учащихся к продолжению образования в процессе профессионального становления.

Цель дипломной работы: Разработать элективный курс для учащихся 10-11 классов по теме «Практико-ориентированные задачи на оптимизацию для физико-математического профиля»

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. На основе анализа педагогической и методической литературы уточнить понятие практико-ориентированной задачи, охарактеризовать требования к ним и рассмотреть методические условия применения практико-ориентированных задач в курсе математики и уровни сложности практико-ориентированных задач, подбор и систематизация различных задач на оптимизацию по способам их решения;
2. Разработать методические рекомендации по применению практико-ориентированных задач на уроке;
3. Разработать элективный курс для учащихся 10-11 классов по теме «Практико-ориентированные задачи на оптимизацию для физико-математического профиля»
4. Апробация методических материалов на тему «Разработка элективного курса практико-ориентированных задач на оптимизацию».
5. Предоставить результаты констатирующего этапа опытно-экспериментальной работы.

Объект работы: Процесс изучения практико-ориентированных задач на оптимизацию в школе.

Предмет работы: Практико-ориентированные задачи на оптимизацию.

Гипотеза исследования - если методику обучения школьников построить на основе решения математических задач с практическим содержанием, то это позволит повысить уровень готовности учащихся к применению знаний и умений в процессе своей жизнедеятельности.

Глава 1. Практико-ориентированные задачи в курсе математике

В этой главе рассмотрено определение практико-ориентированной задачи, цель их использования, виды. Какие задачи относят к практико-ориентированным. Рассмотрены требования, предъявленные к практико-ориентированным задачам, примеры, в которых отражена трактовка этих требований. Сформулированы методические условия применения практико-ориентированных задач. Распределение задач по уровням сложности. Определение уровней сложности по критериям.

1.1. Понятие практико-ориентированной задачи

Рассмотрим понятие «задача» в педагогической литературе. В широком смысле задача рассматривается как проблемная ситуация с явно заданной целью, которую необходимо достичь. В более узком смысле задачей также называют саму эту цель, данную в рамках проблемной ситуации, то есть то, что требуется сделать. Т.Ф. Ефремова [54] под задачей предлагает считать цель, к которой стремятся, которую хотят достичь, обстоятельства, затруднения, которые надо преодолеть. Под математической задачей она понимает вопрос математического характера, требующий нахождения решения по известным данным с соблюдением определенных условий. В словаре Ожегова определение задачи звучит следующим образом: «Задача – упражнение, которое выполняется посредством умозаключения, вычисления»[28].

Д. Пойа, рассматривая роль задач в математике, писал: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности» [32]. Математические задачи являются одной из главных составляющих содержания учебного предмета математики, который включает также и теоретический материал. Но и теоретический материал учащиеся усваивают в процессе решения задач. Поэтому решение задач является основной деятельностью при обучении математике.

Наиболее распространенным является определение задачи как системы (Г.А. Балл, Ю.М. Колягин, Л.М. Фридман, А.Ф. Эсаулов) [3], [17],[44].

Авторы по-разному очерчивают круг явлений, относящихся к объему понятия «задача». Термин «задача» употребляют для обозначения объектов, относящихся к трем различным категориям:

1. к категории словесной формулировки этой ситуации (Л.М. Фридман, А.А. Столяр и др.)[39];

2. к категории цели действий субъекта, требования, поставленного перед субъектом (А.Н. Леонтьев, В.Н. Пушкин и др.)[18];

3. к категории ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута (Г.А. Балл, Л.Л. Гурова, Ю.М. Колягин, Ю.Н. Кулюткин, П.М. Эрдниев, А.Ф. Эсаулов и др.)[50].

В каждой из трактовок по-разному подходят к отношению между субъектом и задачей. Сторонники трактовки задачи как ситуации, в которой должен действовать субъект, явно включают субъекта в само понятие задачи.

Так, Г.А. Балл рассматривает задачу как некоторую ситуацию, в которой оказывается и должен действовать субъект. Он выделяет три подхода к характеристике понятия[3]:

- задача представляет собой определенную ситуацию, требующую от субъекта некоторого действия;

- в задаче представляется ситуация, в которой требуется от субъекта отыскать действие, направленное на установление связи неизвестного с известным, в условиях, когда субъект не владеет способом этого действия;
- представленное в задаче действие направленно на нахождение неизвестного посредством его существующей связи с неизвестным.

Ю.М. Колягин отмечает в своих работах, что без субъекта нет задачи.

Исходным понятием считает систему «человек – задачная ситуация, где под вторым компонентом понимается множество Р взаимосвязанных через некоторые свойства и отношения элементов. Если человеку, который вступил в контакт с этим множеством, и ему известны все его элементы, все их свойства и отношения, то такую ситуацию Р называют фиксированной по отношению к данному человеку. Если же человеку хотя бы один элемент неизвестен, либо одно свойство или отношение, то систему Р называют проблемной по отношению к данному субъекту. Если у человека возникает потребность в определении неизвестных ему элементов, свойств и отношений из множества Р, проблемный характер у которого зафиксирован, становится задачей для данного объекта. Решить задачу – значит преобразовать данную проблемную ситуацию в соответствующую ей стационарную или установить, что такое преобразование в данных условиях не возможно.»[17].

Сторонники третьей трактовки задачи субъект не включают в понятие задачи. Наиболее четко эту точку зрения выражает Л.М. Фридман. Он определяет задачу как модель проблемной ситуации, которая выражается с помощью знаков естественного или научного языка. Он отмечает «Проблемная ситуация возникает тогда, когда субъект в своей деятельности, направленной на некий объект, встречает какое-то затруднение, преграду. Однако проблемная ситуация – это не просто затруднение, преграда в деятельности субъекта, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти.»[44]. Таким образом, Л.М. Фридман включает субъект в понятие проблемной ситуации. Значит, задача есть модель ситуации, элементом которой является субъект, осознавший затруднение в своей деятельности.

В современной методической и психологической литературе принята следующая классификация задач.

По характеру требования:

- задачи на доказательство;
- задачи на построение;
- задачи на вычисление.

По функциональному назначению:

- задачи с дидактическими функциями;
- задачи с познавательными функциями;
- задачи с развивающими функциями.

По методам решения:

- задачи на геометрические преобразования;
- задачи на векторы и др.

По числу объектов в условии задачи и связей между ними:

- простые;
- сложные.

По компонентам учебной деятельности:

- организационно-действенные;
- стимулирующие;
- контрольно-оценочные.

Кроме того, по величине проблемности различают задачи: стандартные и нестандартные; теоретические и практические; устные и письменные; одношаговые, двушаговые и др.; устные, полуустные, письменные и т.д.[31].

Л.М. Фридман четко различает понятие задачи и проблемной ситуации по следующим признакам:

1. проблемная ситуация всегда богаче содержанием, чем задача, ибо задача – это модель ситуации, отражающая лишь некоторые ее стороны;

2. для каждой проблемной ситуации существует одна или несколько задач, которые могут отличаться друг от друга как совокупностью представленных в них свойств ситуации, так и языком, на котором задача выражена;

3. проблемная ситуация существует реально, вне зависимости от какого-то языка, а задача всегда связана с языком, на котором она изложена[44].

Таким образом, в настоящей работе под понятием «задача» будем рассматривать ситуацию, включающую цель и условия для ее достижения.

В задаче выделяют следующие основные компоненты:

1. условие – начальное состояние;

2. базис решения – теоретические основы решения;

3. решение – преобразование условия задачи для нахождения требуемого;

4. заключение – конечное состояние.

Дидактическая типология задач УОРЗ – стационарная (для данного субъекта) задачная система, где У – условие задачи, З – заключение (цель) задачи, Р – решение задачи, О – обоснование (базис) решения задачи, x, y, z – неизвестные компоненты задачи [22].

Математическими задачами считаются задачи, в которых переход от состояния У к состоянию З осуществляется математическими средствами, т.е.

математическим характером О и Р. Если все четыре компонента (У, О, Р, З) – математические объекты, то называют задачу чисто математической; если математическими являются только компоненты О и Р, то ее называют прикладной математической задачей.

Для формирования и проверки сформированности умений и способностей применять математические знания и способы деятельности в ситуациях, встречающихся в повседневной жизни, необходимо разрабатывать специальные, отличающиеся по содержанию и применяемым подходам к решению задачи.

Такие задачи называют по-разному: компетентностные, контекстные, ситуационные, сюжетные, практико-направленные, компетентностно-ориентированные, учебно-практические позволяющие проверять уровень сформированности различных компетенций. В нашем исследовании мы будем их называть «практико-ориентированные задачи на оптимизацию», учитывая их целевое назначение в процессе обучения.

Математические знания должны использоваться в различных ситуациях, чтобы у учащихся не сложилось впечатление, что математика далека от их повседневных потребностей. В плане наиболее близкими для них являются ситуации, связанные с личной повседневной жизнью, затем со школьной жизнью, работой и спортом, жизнью окружающего их общества. В связи с этим, актуальным является разработка заданий, в которых рассматриваются ситуации, возможные в нашей действительности [16].

Под практико-ориентированной задачей понимается, прежде всего, математическая задача. К ним относятся такие задачи, у которых контекст обеспечивает подлинные условия для использования математики при решении, оказывает влияние на решение и его истолкование. Не исключается использование задач, у которых условие исходит из каких-либо гипотез, если оно не слишком отдалено от реальной ситуации.

Целью использования данного типа заданий является формирование умений действовать в социально-значимой ситуации. Научить учащихся работать с информацией, то есть добывать, объяснять, отобрать, критически оценить, найти наилучшее решение, научить взаимодействовать в паре, в группе в процессе решения образовательных задач на основе диалога, развить свои точки зрения, чувства, убеждения и желания в поисковой творческой деятельности учащихся [33].

Таким образом, под практико-ориентированными задачами на оптимизацию будем понимать математические задачи, в содержание которых описаны ситуации из окружающей действительности, в которых нужно найти наиболее выгодное решение, связанные с формированием практических навыков использования математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни, в том числе с использованием материалов краеведения, элементов производственных процессов.

Решение задач такого типа в большей степени строиться на построении модели реальной ситуации, описанной в конкретной задаче. Именно составление модели требует высокого уровня математической подготовки и является результатом обучения, который целесообразно назвать общекультурным (общеобразовательным) [16].

Важными отличительными особенностями практико-ориентированных задач на оптимизацию являются:

- значимость (общекультурная, познавательная, профессиональная, социальная) получаемого результата, что обеспечивает познавательную мотивацию учащегося;
- условие задачи сформулировано как сюжет, ситуация или проблема, для разрешения которой необходимо использовать знания из разных разделов

основного предмета – математики, из другого предмета или из жизни, на которые нет явного указания в тексте задачи;

- информация и данные в задаче могут быть представлены в различной форме (рисунок, таблица, схема, диаграмма, график и т.д.), что потребует распознавания объектов;
- указание (явное или неявное) области применения результата, полученного при решении задачи.

Кроме выделенных четырех обязательных характеристических особенностей, практико-ориентированные задачи на оптимизацию имеют следующие:

1. По структуре эти задачи – нестандартные, т.е. в структуре задачи некоторые из ее компонентов неопределенны;

2. Наличие избыточных, недостающих или противоречивых данных в условии задачи, что приводит к объемной формулировке условия;

3. Наличие нескольких способов решения, причем данные способы могут быть неизвестны учащимся, и их потребуется сконструировать [33]. Практико-ориентированные задания должны быть очень тщательно продуманы, так как они позволяют оценить умение логически понимать содержание, уметь представить себе реальную ситуацию, связать разные части текста, отвлечься от излишних подробностей и нацелено выбрать нужную информацию.

Большую роль играют занимательные задачи практического содержания. Это разнообразные задачи, созданные человечеством в течении многих лет, и показывающие практическое применение математических знаний в повседневной жизни, среди них: математические задачи на различные жизненные ситуации, математические фокусы с игральными картами, задачи на взвешивание монет, задачи, связанные с переливаниями, занимательные задания со спичками и монетами, занимательные задания на товарно-денежные отношения, математические задачи с использованием циферблата часов, задачи с использованием теории множеств. Они позволяют учащимся усвоить материал на более высоком уровне. Способствуют развитию логического мышления. Так же имеются задачи на считывание информации, представленной в виде графиков роста акций, температуры и т.д., задач на анализ практической ситуации - оптимальное решение проблемы, моделирующую реальную или близкую к реальной ситуацию (выгодную покупку, экономичную поездку и т.д.). В задачах геометрического содержания большое внимание уделяется проверке навыков конструктивного мышления, умению находить площади и объемы нестандартных фигур с помощью хорошо известных формул. Решение задач такого типа развивают общеучебные умения школьников, т.к. учебная деятельность при этом приобретает исследовательский и практико-ориентированный характер. При этой работе происходит: □

- извлечение основного содержания прочитанного или услышанного; □

- точная формулировка мыслей, построение оригинальных высказываний по заданному вопросу или теме; □

- исследование различных вариантов решения задач, выбор наилучшего, принимая во внимание различные критерии; □

- сотрудничество с другими (учениками и учителем) при выполнении общего задания; □

- планирование действий и времени; □

- оценка результатов своей деятельности и т.д. [33].

Можно также использовать задания, способствующие формированию творческой информационной компетентности: написание рефератов, эссе, сообщений, составление тестов, кроссвордов и мини – пособий. Обучение с использованием практико-ориентированных заданий приводит к более прочному усвоению информации, так как возникают ассоциации с конкретными действиями и событиями. Особенность этих заданий (необычная формулировка, связь с жизнью, межпредметные связи) вызывают повышенный интерес учащихся, способствуют развитию любознательности, творческой активности. Учащихся захватывает сам процесс поиска путей решения задач. Они получают возможность развивать логическое и ассоциативное мышление.

Практико-ориентированная технология обучения позволяет ученика из пассивного объекта педагогического воздействия превратить в активного субъекта учебно-познавательной деятельности.

Дидактическими целями практико-ориентированных заданий на оптимизацию являются:

- закрепление и углубление теоретических знаний;
- овладение умениями и навыками по учебной дисциплине;
- формирование новых умений и навыков;
- приближение учебного процесса к реальным жизненным условиям;
- изучение новых методов научных исследований;
- овладение общеучебными умениями и навыками;
- развитие инициативы и самостоятельности.

Виды практико-ориентированных заданий на оптимизацию:

- Аналитические (определение и анализ цели, выбор и анализ условий и способов решения, средств достижения цели);
- Организационно-подготовительные (планирование и организация практико-ориентированной работы, индивидуальной, групповой или коллективной по созданию объектов, анализ и исследование свойств объектов труда, формирование понятий и установление взаимодействий между ними);
- Оценочно-коррекционные (формирование действий оценки и коррекции процесса и результатов деятельности, поиск способов совершенствования,

анализ деятельности) [13]. Таким образом, практико-ориентированные задания способствуют ознакомлению учащихся с разнообразным математическим материалом, имеющим прикладной характер и развивающим творческие способности и познавательные интересы учащихся.

1.2. Требования к практико-ориентированным задачам на оптимизацию

Подбор задач для создания образовательных продуктов обеспечит достижение максимального обучающего, развивающего и воспитательного эффекта при использовании таких продуктов в преподавании математики в школе.

Практико-ориентированные задачи на оптимизацию в обучении выполняют все функции, свойственные школьным математическим задачам, на которые указывает Л.В. Фридман: формирование мотивации к учению и познавательного интереса; приобретение новых знаний иллюстрация и конкретизация учебного материала; контроль и оценка учебной деятельности и т. д. [45]. Эти функции реализуются как через математический аппарат, используемый при формулировании и решении задачи, так и через ее сюжетную основу. Соответствующего воспитательного и образовательного эффекта возможно ожидать лишь от задач, удовлетворяющих определенным требованиям. В.Г. Болтянский считает, что «Практико-ориентированные задачи имеют в общеобразовательной школе важное значение, прежде всего, для воспитания интереса к математике. На примере хорошо составленных практико-ориентированных задач учащиеся будут убеждаться в значении математики для различных сфер человеческой деятельности, в ее пользе и необходимости для практической работы, увидят широту возможности математики, поймут ее роль в современной культуре» [5].

По утверждению Н.А. Терешина, одна из функций практико-ориентированных задач на оптимизацию состоит в том, чтобы дать учащимся представление о возможностях использования математики для решения проблем, поставленных другими областями знаний [41]. Такая задача носит не только дидактический характер, в ней соединена достоверность описываемой ситуации и доступность ее разрешения, средствами школьного курса математики. Практико-ориентированная задача на оптимизацию – это, прежде всего, учебная задача и, она способствует обучению математике, приобретению знаний именно в этой области. Важным этапом решения практико-ориентированной задачи на оптимизацию является ее перевод на язык математики. Для этого необходимо понимание нематематической ситуации, описанной в ее сюжетной основе. Учащиеся могут опираться только на уже имеющиеся у них знания и жизненный опыт. Если таковые отсутствуют или недостаточны, то решение и математической части задачи становится трудным для школьников. Немаловажным является и то, что сама постановка задачи должна быть интересна для школьника. Интерес этот может состоять в получении новой, значимой для него информации об окружающем мире, в возможности проверить на практике результат задачи или в объяснении математической природы явлений, которым он может быть свидетелем в реальной жизни.

Имеются требования к практико-ориентированным задачам. И.А. Рейнгард считал обязательным «наличие в задачах реального практического содержания» [34], которое должно сочетаться с доступностью изложения. В.М. Брадис отмечал, что в формулировках практико-ориентированных задач важна реальность и правдоподобность числовых данных, возможность отыскать недостающие данные в справочниках или получить в результате измерений [7].

М. Мирзоахмедов выдвинул требование соответствия содержания задачи школьного курса программе по математике [24]. Также в задаче, по его мнению, не должны быть использованы неизвестные учащимся термины. Похожие требования предлагает принять и А. Ахлимерзаев, добавляя следующие: не узкопрофильная направленность; наличие у учащихся необходимых умений решать стандартные задачи [1].

Достаточно широкий перечень требований к таким задачам приводит М.И. Якутова: сохранение в сюжетной основе условий, имеющих место в реальной действительности; использование в задаче известных, легко определяемых или интуитивно ясных учащимся понятий; краткость и простота анализа сюжетного содержания задачи [49]. И.М. Шапиро выдвигает такие требования к задачам на приложения, которые он называет задачами с практическим содержанием: познавательная ценность задачи и ее воспитывающее влияние на учеников; доступность школьниками используемого в задаче нематематического материала; реальность описываемой в условии задачи ситуации, числовых значений данных, постановки вопроса и полученного решения [47]. Л.Э. Хаймина делает попытку систематизировать все ранее сформулированные требования по трем направлениям:

1. Требования к методике использования данных задач в процессе обучения математики:

- рациональное включение прикладных задач в каждую тему;
- наличие в небольшом количестве задач с недостающими, избыточными, противоречивыми данными.

2. Требования к представленным видам деятельности:

- наличие прикладных задач всех типов;
- использование заданий, требующих самостоятельного составления задач.

3. Требования к формулировке прикладной задачи и организации ее в цепочки:

• формулировка ряда прикладных задач в виде последовательных целевых указаний к определенному виду деятельности и установки на порядок ее осуществления: «измерьте…», «рассмотрите…» и т. п.

• наличие «цепочек» познавательных задач различных видов (логических и творческих…)» [46].

В работе В.А. Петрова [30] сформулированы следующие требования к задачам:

1. Производственная реальность сюжета.

2. Математическая существенность сюжета.

3. Естественность вопроса задачи.

4. Математическая содержательность.

5. Терминологический лаконизм.

Некоторые из рассмотренных требований уже не отвечают современному образованию. Так, например, требованию краткости и простоты анализа сюжетного содержания или требованию терминологического лаконизма не соответствуют контекстные задачи, которые носят практико-ориентированный характер и обладают довольно сложным и обширным сюжетным содержанием, требующим тщательного анализа условия для построения математической модели. Задачи практико-ориентированные могут быть использованы на всех этапах обучения, а не только после решения достаточного числа стандартных математических задач по изучаемой теме [13].

Основываясь на анализе такого типа задач в обучении и обобщая выделенные другими авторами требования, формируется ряд требований, разделяющий их на требования к сюжету содержания и требования к математическому содержанию задачи.

I. Требования к сюжетному содержанию задачи.

1.1. Отражение в тексте задачи реального объекта, его свойств.

1.2. Демонстрация в содержании сюжета задачи связи математики с другими науками, практическими областями деятельности.

1.3. Наличие в тексте задачи проблемы или свойств объекта, для изучения которых необходимо применить математику.

1.4. Соответствие сюжетного содержания возрастным особенностям (познавательным интересам) школьника.

1.5. Доступность содержания сюжета для понимания учащимся: используемые нематематические термины известны школьникам в результате изучения других дисциплин, легко определяемы или интуитивно ясны.

II. Требования к математическому содержанию задачи.

2.1. Математическая содержательность решения задачи.

2.2. Соответствие численных данных задачи реальным значениям.

2.3. Соответствие фактических данных реальному процессу, объекту, ситуации, описанных в задаче.

2.4. Единство задач, применяемых в преподавании математики в школе [13].

I. Требования к сюжетному содержанию задачи.

1.1. Отражение в тексте задачи реального объекта, его свойств.

На примере следующей задачи покажем нарушение этого требования:

Кузнечик прыгает по прямой большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 15 см, малый – 5 см. Как ему попасть из точки О в точку А, находящуюся от О на расстоянии 3 см [8].

Обосновать практическую значимость этой задачи довольно затруднительно. Понятно, что прыжок реального кузнечика может и не соответствовать указанным величинам и направлениям. Кроме того, проанализировав формулировку задачи, естественно задать вопрос, в каком направлении может прыгать кузнечик, только в одну сторону или туда и обратно? Этот вопрос оказывается существенным для поиска решения. Ту же математическую идею продемонстрируем, например, с помощью такой ситуации:

Необходимо разметить деревянную планку, сделав засечки через каждые 3 см. Можно ли для этого воспользоваться спичечным коробком, длина которого равна 5 см, а ширина 3,5 см?

Сюжетное содержание этой задачи, согласно высказанному требованию, описывает возможные действия с реальными предметами (деревянной планкой, спичечным коробком). Понятно, что разметка планки начинается с одного из концов и вопрос «о направлении» из первой задачи здесь снимается.

1.2. Демонстрация в содержании сюжета задачи связи математики с другими науками, практическими областями деятельности.

Это требование состоит в предоставлении в сюжетном содержании задачи фактов, свидетельствующих о связи математики с другими науками. Приведем примеры задач, иллюстрирующих связь геометрии с естествознанием:

Полное солнечное затмение – одно из самых удивительных природных явлений. Оно происходит тогда, когда Луна оказывается между Землей и Солнцем, заслоняя собой солнечный свет. Постройте математическую модель этого явления и укажите условия, при которых оно возможно. Докажите, что *угол подъема Полярной звезды над горизонтом в данной точке численно равен широте этой точки.*

Известно, что по форме некоторые вирусы являются правильными многогранниками. Это было установлено по их теням под электронным микроскопом. Как по тени определить вид правильного многогранника? [10].

1.3. Наличие в тексте задачи проблемы или свойств объекта, для изучения которых необходимо применить математику.

Примеры таких задач приведены при обсуждении предыдущего требования. Однако в литературе встречаются задачи, в которых это требование нарушено. Такой является задача о садовнике: У садовника имеется 32 м провода, которым он хочет обозначить на земле границу клумбы. Форму клумбы ему надо выбрать из следующих вариантов (рис. 1).

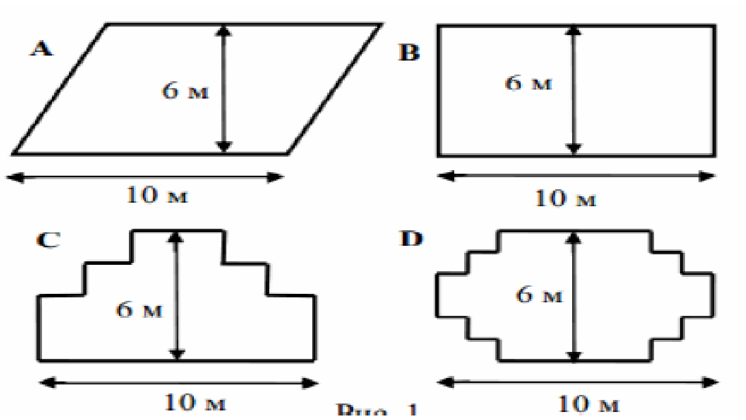


Рис. 1.

Обведите в таблице слово «Да» или «Нет» около каждой формы клумбы в зависимости от того, хватит или не хватит садовнику 32 м провода, чтобы обозначить ее границу.

Форма клумбы

Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы?

Форма клумбы	Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы?
Форма A	Да / Нет
Форма B	Да / Нет
Форма C	Да / Нет
Форма D	Да / Нет

1.4. Соответствие сюжетного содержания возрастным особенностям (познавательным интересам) школьника.

Несоответствие сюжетного содержания задачи познавательным интересам школьников может привести к обратному эффекту, снижая интерес школьника к математике, утверждению его во мнении о скучности этой учебной дисциплины. А.В. Шевкин справедливо отмечает по поводу использования различных сюжетных содержаний при составлении задач: «…есть ли у нас уверенность, что через сюжетное содержание задач можно и нужно решать какие - либо проблемы? ...Задачи на оборонную тематику, включенные в предвоенные сборники задач, или задачи про «Продовольственную программу» вряд ли помогли выиграть войну или решить проблемы сельского хозяйства. Спору нет, сюжетное содержание задач должно иметь связь с жизнью, но эта связь должна проходить в области естественных жизненных интересов ребенка... Сборник школьных задач... не должен подменять энциклопедии...» [13], [48].

Вот пример такой неудачной задачи:

Стол строгального станка весит вместе с обрабатываемой деталью Р = 100кг. Скорость v прохождения стола под резцом равна 1 м/с, а время разгона стола до начала резания равно 0,5 с. Определить, каков должен быть коэффициент трения стола о направляющие, чтобы усилие, требуемое для разгона стола до начала резания, не превышало 40 кг [8].

Сюжетное содержание этой задачи носит узкопрофессиональный характер и довольно сложен для восприятия современному школьнику, да и учителю.

Из возрастной психологии известно, что, например, для учащихся в возрасте 10 - 12 лет ведущей является практическая деятельность [27]. Обучение в этом возрастном периоде происходит в большей степени с опорой на наглядность.

1.5.Доступность содержания сюжета для понимания учащимся: используемые нематематические термины известны школьникам в результате изучения других дисциплин, легко определяемы или интуитивно ясны.

Выполнение этого требования иллюстрирует следующая задача. Сведения, использованные в ее содержании, хорошо известны учащимся из курса географии:

Спутник пролетает над точкой А земной поверхности. Сколько времени наблюдатель, находящийся в точке А будет видеть спутник (от момента его появления из-за горизонта и до момента захода спутника за горизонт) если $R_{\text{Земли}} \approx$ *6300 км, высота спутника над Землей 220 км, а время облета Земли спутником (один виток) T ≈ 90 мин [11].*

Сюжет содержания задачи может содержать не только факты из различных школьных дисциплин. Возможно использование сведений об известных объектах, часто встречаемых в хозяйственной деятельности и производственной.

2. Требования к математическому содержанию задачи.

2.1. Математическая содержательность решения задачи.

При решении практико-ориентированной задачи на оптимизацию в науке сначала строят ее содержательную модель (физическую, химическую, биологическую), а затем исследуют ее математическими средствами. При подборе задач на приложения для школьников необходимо учитывать, что обучение математике является основной целью решения таких задач. Задачи, в которых математический аппарат является вспомогательным, а главная идея решения заключается в применении физических, химических, экономических или других закономерностей решаются на занятиях по соответствующим дисциплинам. Пример задачи, которая не соответствует рассматриваемому требованию:

На дне водоема глубиной H лежит монета. Мы смотрим на монету по вертикали сверху. Каково кажущееся расстояние от поверхности воды до монеты. Показатель преломления n воды известен [40].

Для решения этой задачи, прежде чем перейти к математической модели, необходимо построить и подробно исследовать ее физическую модель. Для построения математической модели нужны сведения из тригонометрии на уровне определений. Верно, что такая задача должна быть решена в курсе физики.

2.2. Соответствие численных данных задачи реальным значениям.

Приведем пример выполнения этого требования.

Масса мотка медной проволоки равна 2,8 кг, диаметр проволоки равен 0,4 см. Сколько метров проволоки в мотке? [9].

Для решения задачи необходимо знать удельную плотность меди. Это значение легко найти в соответствующей таблице, имеющейся в любом справочнике по физике: $\rho = 8{,}9\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Формула зависимости плотности от массы тела и его объема имеется там же и хорошо известна учащимся: $\rho = \frac{m}{V}$. Характерно, что здесь, как и в предыдущем примере, используются знания из школьного курса физики, но физическая модель задачи достаточно проста.

Приведем пример нарушения требования соответствия числовых данных, имеющих место на практике. Здесь речь может идти не только о реалистичности приводимых данных, таких ошибок в задачах практически нет. Чаще всего нарушения касаются представлений числовых данных. Например, они приводятся с излишней точностью или в форме, которую невозможно получить прямым измерением:

Под каким углом на Землю падает луч Солнца, если вертикально воткнутый в Землю шест возвышается над Землей на 6 м и отбрасывает тень, равную $6\sqrt{3}$ *м?*

Числовые данные в этой задаче подобраны так, чтобы вычисления были удобными. В результате решения имеем: tgα = $6\sqrt{3}$; α = 60°. Однако на практике длину тени, равную $6\sqrt{3}$, с помощью измерений, например, рулеткой, получить невозможно.

Приведем пример задачи, соответствующей заявленному требованию.

В день летнего солнцестояния (21 - 22 июня) Солнце на широте Москвы поднимается над горизонтом на угол приблизительно равный 57°. Найдите, какой длины будет ваша тень в этот момент.

Характерно, что в процессе решения этой задачи, учащиеся используют сведения, полученные в курсе географии: устанавливаются межпредметные связи. Кроме того, это задача с недостающими данными. Для ее решения необходимо знать свой рост. Важно и то, что формулировка задачи носит личностный характер, т. е. обращена к конкретному ученику. Из-за разницы в росте получатся различные ответы. В этой ситуации у школьников сразу возникает желание узнать, а что получилось у одноклассника? Такая ситуация создает условия для формирования познавательного интереса. Поэтому, такая задача не станет «проходной», которая после ее решения будет сразу забыта. Небольшое обсуждение полученных результатов не только поднимет интерес учащихся к изучению математики, но и послужит образовательным целям: позволит им лучше запомнить определение тангенса угла [13].

2.3. Соответствие фактических данных реальному процессу, объекту, ситуации, описанных в задаче.

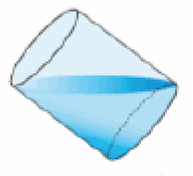
Не все практико-ориентированные задачи отвечают всем указанным выше требованиям. Чаще всего встречается нарушение: сюжет не отражает реальной ситуации в полной мере, ее описание дано схематично и упрощенно. Такой была задача о кузнечике. Приведем еще один пример:

Предположим, что вы захотели сварить себе кашу. Возьмите кастрюлю, насыпьте крупу и наклоните кастрюлю так, чтобы крупа закрыла половину дна. Заметьте точку на стенке кастрюли, ближайшую к ее краю, до которой поднялась крупа, и зажмите ее пальцем. Пересыпьте крупу в другое место, а в эту кастрюлю налейте жидкость до полученной отметки. Можете начинать варить кашу. Пока она варится, подумайте, почему отношение объемов крупы и жидкости не зависит ни от количества взятой крупы, ни от размеров кастрюли [10].

В сюжетном содержании задачи не указывается, из какой крупы можно сварить такую кашу. Вычисления показывают, что отношения объема крупы и жидкости приблизительно равно 1:4,5. Однако из опыта известно, что для варки, например, манной каши соотношение жидкости и крупы берется иное – примерно 1:20, что существенно отличается от ответа задачи. Следовательно, по этому «рецепту» вкусной каши у ученика может и не получиться.

Такие задачи выполняют общие функции учебных математических задач, однако не могут дать правильного представления о приложениях математики. Ценность задач такого рода в обучении состоит, скорее всего, в том, что, используя знакомые школьникам реальные объекты, удается в доступной форме объяснить суть задания, пояснить математическое содержание и т. д. Такие задачи имеют чисто дидактический характер и ближе к так называемым текстовым задачам, к которым не предъявляются требования реалистичности сюжета.

Немного изменим сюжетное содержание последней задачи:



Для приготовления порции домашней лапши по рецепту необходимо взять 100 мл воды. Имеется стакан цилиндрической (рис. 2) формы объемом 200 мл. Можно ли с его помощью отмерить нужное количество жидкости?

В этом случае надо наклонить стакан так, чтобы оставшаяся в нем жидкость закрыла все дно (рис. 2). Тогда жидкость займет ровно половину объема стакана. Теперь указана вполне реальная ситуация, в которой может быть применен описанный способ [13].

2.4. Единство задач, применяемых в преподавании математики в школе.

При раскрытии этого важного требования нельзя ограничиться несколькими примерами, т. к. оно связано с механизмами включения практико-ориентированных задач в общую систему обучения математике в школе. В методической литературе выделены три направления использования практико-ориентированных задач на уроке математики:

1) задачи или практические задания для введения новых понятий и теорем;

2) несложные задачи для первичного закрепления введенных понятий и теорем;

3) более сложные задачи для включения понятия в систему известных фактов. Такие задачи решаются учащимися в классе и дома, которые применяются с дальнейшей целью закрепления изученного материала, формирования математических умений.

Задачи последней группы также могут быть включены в различные итоговые и проверочные работы. Во внеурочное время задачи включались в содержание факультативных, кружковых занятий по математике [15].

Итак, перечень требований к математическому содержанию практико-ориентированных задач позволяет отбирать задачи этого типа из различных источников, переформулировать их согласно заданным требованиям.

В настоящее время предлагается включать практико-ориентированные задачи в содержание обучения. Они представлены в форме наиболее близкой к той, в которой такие задачи имеют место в реальности или в соответствующей области знаний. Конечно, для их решения на уроке требуется значительное время, которое не всегда возможно выделить. Однако появившиеся в настоящее время разнообразные формы внеурочной работы (проектная и исследовательская деятельность, курсы по выбору) позволяют решить эту проблему.

1.3. Методические условия применения практико-ориентированных задач на оптимизацию в курсе математики

Понятие «условие» многоаспектно. Под условиями понимают:

а) требования, обязательства, предложения одной из договаривающихся сторон по отношению к другой, на основе которых заключается какой-либо договор, сделка, соглашение;

б) взаимные обязательства договаривающихся сторон, обеспечивающие заключение или соблюдение договора, соглашения;

в) нормы, правила поведения, принятые в узком - обычно привилегированном - общественном кругу; условности [38].

Методические условия - обоснование и выбор формы проведения урока, его разнообразие, т.е. методы которые использует учитель для того чтобы достигнуть цели.

Сформулированы методические условия применения практико-ориентированных задач на оптимизацию.

Соответствие содержания практико-ориентированных задач на оптимизацию содержанию обучения математике.

Под содержанием задачи понимают условие задачи, решение которой требуется найти. В свою очередь содержание обучения рассматривают как оптимальную полноту знаний, которых достаточно для того, чтобы освоить ту деятельность, к которой готовится учащийся; как логическую строгость знаний. Любые знания должны быть построены на умозаключениях и доказательствах или опровержениях без логических ошибок; как классификация, которая не должна быть непонятной. Основные классификации должны быть построены по всем правилам логики (понятия, определения, классификация, утверждения, умозаключения и доказательства); как четкое разделение и связь между теоретическими и основанными на опыте знаниями; как разнообразие языков знаний.

Схематические, модельные, систематические представления знаний необходимы для лучшего сохранения знаний в памяти [13].

Отбор практико-ориентированных задач математики для использования в обучении школьников должен производиться с учетом возрастных интересов и жизненного опыта учащихся, профиля их обучения, опираться на имеющиеся у учащихся сведения из других школьных дисциплин, а также поддерживать изучение других линий школьного курса математики.

Активизация познавательного интереса обучаемых.

Как известно, мотивация к обучению является необходимой причиной его успешности. Формирование интереса к познанию возможно через содержание учебного материала и через процесс обучения.

Познавательный интерес – избирательная направленность личности на явления и предметы окружающей действительности. Такая направленность определяется постоянным стремлением к познанию, к новым, более полным и глубоким знаниям. Развиваясь, познавательный интерес способствует положительному отношению к учению. Познавательный интерес носит поисковый характер. Под его влиянием у человека возникают вопросы, ответы на которые он сам постоянно и активно ищет [2]. Поисковая же деятельность школьника совершается с увлечением, он испытывает эмоциональный подъем, радость от успехов. В формировании познавательного интереса школьника выделяется несколько этапов. И первый из них – любопытство – естественная реакция человека на все новое и неожиданное. Любопытство может быть вызвано интересным фактом, неожиданным результатом опыта, но оно привлекает внимание ученика только к материалу данного урока и не переносится на другие уроки. Таким образом, любопытство неустойчивый, ситуативный интерес. Более высокой стадией интереса является любознательность – желание глубже разобраться, понять изучаемое явление. Однако любознательность обычно не распространяется на изучение всего предмета. Материал одной темы или раздела увлекает, другой же материал может оказаться скучным для ученика и интерес к предмету пропадает. Поэтому, на ее основе нужно стремиться сформировать устойчивый интерес к предмету, при котором ученик понимает структуру, логику курса, используемые в нем методы поиска и доказательства новых знаний, в учебе его захватывает сам процесс постижения новых знаний, а самостоятельное решение проблем, нестандартных задач доставляет удовольствие [14].

Проявление познавательного интереса учащихся способствует успешной реализации линии практико-ориентированных задач и успешности обучения математике в целом. Оценка отношения к учению позволит определить наличие у учащихся мотивации к такому виду учебной деятельности. Методики оценки интереса и отношения к учению основаны на проведении анкетирования учащихся. Одна из таких методик, направленная на оценку познавательного интереса, приведена в работе И.М. Смирновой [37].

Из известных приемов формирования познавательного интереса и положительного отношения к учению при реализации линии практико-ориентированных задач, возможно использовать следующее: через содержание практико-ориентированных задач имеется возможность создавать ситуации новизны, актуальности, приближения к важным открытиям в науке и технике, знакомства с культурными ценностями в искусстве, архитектуре и т. п. [29]. Эффективным методом стимулирования учения является анализ жизненных ситуаций, описанных в содержании сюжета практико-ориентированных задач. Такие задачи способствуют поддержанию познавательного интереса у учащихся.

Владение школьниками практико-ориентированными умениями.

Умения трактуют как совокупность последовательно развертывающихся действий, часть из которых может быть автоматизирована (навыки), основанных на теоретических знаниях и направленных на решение задач развития гармоничной личности.

К практико-ориентированным умениям будем относить умения действия, которые основаны на теоретико-практических знаниях направленных на решение жизненных задач.

Достижение школьниками определенного уровня овладения практико-ориентированными умениями является показателем результативности обучения. Для проверки уровня овладения умением необходимо иметь набор контрольно-измерительных материалов. Выбор заданий, отражающих промежуточные (этапные) результаты обучения традиционно определяется двумя критериями: их выполнение обеспечивает возможность дальнейшего изучения материала, а также создает основу для применения полученных умений на следующем этапе. Кроме того, математическое содержание заданий должно соответствовать содержанию обучения математике на выбранном этапе и по уровню не превосходить требования к обязательным результатам такого обучения. Отбор заданий определяется логикой курса математики, задачами этапов реализации линии практико-ориентированных задач и выделенными в связи с этим практико-ориентированными умениями. При этом каждое конкретное умение характеризуется не одним каким-либо заданием, а некоторой их совокупностью с выбранным уровнем сложности, который может быть связан как с уровнями математизации предлагаемой содержательной модели, так и с уровнем сложности применяемых математических методов решения [13].

Процесс математизации является составной частью математического моделирования реального объекта. Так как ранее было сказано, что задача это есть модель ситуации и при решении практико-ориентированных задач важно составить математическую модель, целесообразно рассмотреть более подробно про математическое моделирование. Термин «модель» широко используется не только в математике, но в других науках и практических областях деятельности. «Модель» происходит от латинского «modelus», что означает мера, мерило, образец, норма. Согласно энциклопедическому словарю, модель – это любой образ, аналог (условный или мысленно представляемый) какого-либо объекта, который в процессе исследования его замещает [6]. Здесь термин «объект» понимается в широком смысле: объектом может быть не только физическое тело (предмет), но и любые реальная ситуация, явление, процесс. Там же дано наиболее общее понятие о моделировании. Моделирование – это исследование каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их моделей. Моделирование также подразумевает и применение построенных моделей для создания новых объектов с заданными характеристиками, рационализации способов их построения [6].

Математическая модель, согласно математическому энциклопедическому словарю, это «приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики» [21]. Как известно, построение математической модели опирается на систему предположений (гипотез): о форме рассматриваемого реального тела, о пропорциональности заданных величин и т. д. Выбор гипотезы – один из наиболее важных этапов построения модели. Именно это определяет степень ее адекватности реальному объекту.

Общий подход к построению математической модели изучаемого объекта описан А.Д. Мышкисом [26] и состоит в выделении тех его характеристик, которые с одной стороны содержат более или менее полную информацию об объекте, а с другой допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что выделенным характеристикам объекта возможно поставить в соответствие подходящие математические понятия. Тогда обнаруженные и предполагаемые связи между отдельными частями изучаемого объекта могут быть записаны с помощью математических отношений. В результате получается математическое описание изучаемого объекта, т. е. его математическая модель. С одной из древнейших математических моделей, геометрией Евклида, учащиеся и знакомятся в школе. Прямые, плоскости, фигуры и т. п. являются моделями окружающего нас пространства [13].

Математическое моделирование является ведущим методом изучения окружающей действительности и играет фундаментальную роль в многочисленных приложениях математики, выступая генератором наиболее прогрессивных направлений в развитии науки и техники. Математическое абстрагирование естественнонаучной, инженерной, экономической, социальной проблемы позволяет глубже проникнуть в суть рассматриваемого явления, чем непосредственное наблюдение или экспериментальное исследование. Как указывает Н.Н. Моисеев, «наука только и может иметь дело с моделями, с приближенным описанием действительности, отражающими те или иные стороны реальной действительности. Математическая модель – это лишь специальный способ описания, позволяющий для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей – это основной метод познания, используемый в естественных науках» [25].

Математика применяется не непосредственно к реальному объекту, а к его математической модели. При изучении реального объекта, выявляются его свойства, которые могут быть описаны на языке той или иной науки. Таким образом, утверждает А.Д. Мышкис [26], строится механическая, или физическая, или биологическая, или социальная модель объекта. Это его содержательная модель – собственно практико-ориентированная задача, в которой подобран упрощенный объект, который с одной стороны отражает основные свойства исходного объекта, с другой стороны допускает достаточно простое математическое описание. При построении содержательной модели не учитывается ряд несущественных для достижения заданной цели свойств реального объекта [13].

Рядом авторов выделены принципы построения моделей, их типы, требования к математической модели [20], [26], [35], [42]. Анализ результатов этих исследований позволил резюмировать ряд особенностей метода математического моделирования.

1. Математика применяется не к реальному объекту, а к его содержательной модели.

2. У одного объекта может быть несколько математических моделей. Создаваемая модель должна отражать те свойства реального объекта, которые

входят в проблему его исследования. Для исследования реального объекта могут быть использованы математические модели различных типов. Для исследования различных объектов может быть использована одна модель. (Принцип множественности моделей)

3. Соответствие математической модели реальному объекту относительно и имеет рамки применимости. (Требование адекватности модели реальному объекту)

4. Если выбранные математические средства позволяют провести исследование реального объекта в приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, то выбранная модель является достаточно простой. (Требование достаточной простоты)

5. Модель должна давать возможность с помощью математических методов получить необходимую информацию о реальном объекте. (Свойство полноты математической модели)

6. В большинстве случаев сложный объект возможно расчленить на ряд агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными стандартные, хорошо изученные математические модели. (Принцип агрегирования)

7. Оценка результатов исследования математической модели происходит по следующим направлениям: верификация (проверка адекватности результата поставленной задаче); оценка точности и единственности полученных результатов [13].

Это, хотя и схематичное, описание особенностей математического моделирования дает представление о способе его применения для «математического понимания природы» [19], о направлениях формирования способности к такой деятельности.

Таким образом, представления о математическом моделировании имеют общекультурную и общеобразовательную ценность и составляют математическую культуру каждого – и ученика, и учителя. Подтверждением этому мнению служат исследования многих ученых: математиков, методистов, педагогов, психологов.

Представления о модели, математической модели, методе математического моделирования, его этапах, особенностях, принципах построения математических моделей составляют методологическую основу обучения школьников практическим приложениям математики [13].

Выполнение описанных выше условий позволит более эффективно применять практико-ориентированные задачи в процессе обучения учащихся математике.

1.4. Уровни сложности практико-ориентированных задач на оптимизацию

Распределение учебных задач по уровням сложности является необходимой процедурой для обеспечения качественного обучения математике. В методической литературе этому вопросу уделено большое внимание. Существуют различные подходы к понятиям «трудности» и «сложности», которые определяются как субъективная и объективная характеристики задачи. Трудность – субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим ее учеником [4]. Сложность – это объективная характеристика задачи, которая определяется структурой процесса поиска решения [4]. Различными авторами предложены методики расположения задач по степени возрастания трудности и сложности [17]. Так, например, Ю.М. Колягин предлагает образец задач в зависимости от числа компонентов, являющихся неизвестными и придающими ситуации проблемный характер [17]. Автор указывает на универсальность своей типологии, которая может быть применена к любым задачам, в том числе и нематематического характера.

Частные задачи всех трех этапов реализации практико-ориентированных задач на оптимизацию сформулированы с учетом, необходимости обучения школьников математизации реальных объектов. На основе этого вывода выделены уровни сложности выполнения этапа математизации (который будет описан в следующей главе) при решении практико-ориентированных задач на приложения математики, которые и являются уровнями сложности таких задач. Анализ возможных затруднений учащихся при подборе математической равносильности реальным объектам и отношений между ними в сюжетном содержании задач на приложения математики позволил сделать некий вывод [13].

Наименьшие затруднения у учащихся вызывают задачи, в содержании сюжета которых реальные объекты уже сопоставлены с их математическими моделями. Например, в тексте задачи уже названа геометрическая фигура, которая является моделью реального объекта: «Хоккейная коробка в форме прямоугольника имеет площадь...», «Поверхность откидного столика имеет форму треугольника...».

Наибольшие затруднения в решении практико-ориентированных задач на оптимизацию связаны с установлением реальных объектов и отношений между ними, которые необходимо математизировать для построения модели. Таким образом, определены два крайних уровня сложности этих задач – низкий и высокий. Между этими двумя уровнями сложности можно выделить два переходных. Таким образом, практико-ориентированные задачи на оптимизацию по степени возрастания сложности имеют четыре уровня:

1) В тексте задачи имеется прямое указание на математическую модель.

2) Прямого указания на модель нет, но объекты и отношения задачи однозначно сопоставимы с соответствующими математическими объектами и отношениями.

3) Объекты и отношения задачи соотносимы с математическими объектами и отношениями, но неоднозначно, требуется учет реально сложившихся условий.

4) Объекты и отношения задачи явно не выделены или их математическая равносильность неизвестна школьникам [13].

Задачи первых двух уровней сложности, как правило, не вызывают у школьников затруднений при построении математической модели и готовят к решению задач третьего уровня. Одна из особенностей задач третьего уровня состоит не только в нестандартном построении математической модели, но и в неопределенности выбора математического аппарата для их решения. Это сближает такие задачи с практико-ориентированными задачами, поставленными в реальной ситуации.

Рассмотрим эти уровни подробнее.

I. В тексте задачи имеется прямое указание на математическую модель.

На первом уровне рассматриваются такие содержательные модели реальности, объекты и отношения которых практически не требуют математизации. Математическая модель представлена в явном виде. Например, такова следующая задача:

Для определения того, что керамическая плитка имеет квадратную форму, измеряют и сравнивают ее диагонали. Достаточна ли такая проверка?

При переводе на математический язык, получаем такую задачу:

Верно ли, что если диагонали прямоугольника равны, то этот прямоугольник – квадрат?

Также примером задач этого уровня служат задачи на использование различных инструментов для проведения измерений. В содержательной модели таких задач имеется прямое указание на математическую модель. Для их решения необходимо только найти подходящий математически аппарат, т. е. выполнить внутримодельное решение.

Если под рукой не оказалось чертежного угольника, то прямой угол можно получить двукратным перегибанием листа бумаги любой формы. Объясните, почему в данном случае получаются прямые углы? [13].

II. Прямого указания на модель нет, но объекты и отношения задачи однозначно сопоставимы с соответствующими математическими объектами и отношениями.

На втором уровне объекты и отношения задачи хорошо знакомы учащимся из жизненного опыта или в результате изучения других школьных дисциплин, поэтому школьники могут легко соотнести их с соответствующими математическими объектами и отношениями. Большинство задач этой группы составляют задачи, назначение в обучении которых связано с формированием математических понятий.

Приведем содержательную модель такой задачи, которая может стать основой для нескольких задач:

Лестница прислонена к стене дома.

Составим следующий набор задач по этой содержательной модели:

На какую максимальную высоту можно подняться по лестнице длиной L, отстоящей от стены на расстояние b.

Какой длины должна быть лестница, чтобы по ней можно было взбираться на высоту h? Ее нижний конец при этом отстоит от стены на расстояние b.

Фонарь висит на стене дома на высоте h. Можно ли в нем заменить лампочку, воспользовавшись лестницей длины L. Лестница не съезжает со стены, если прислонена к ней под углом α.

У этих задач одна математическая модель – прямоугольный треугольник, но для их внутримодельного решения используется разный математический аппарат: для первых двух задач – теорема Пифагора, для последней – определение косинуса угла в прямоугольном треугольнике. Таким образом, подобный набор задач позволяет во взаимосвязи формировать ряд понятий, объединенных понятием прямоугольного треугольника [13].

III. Объекты и отношения задачи соотносимы с математическими объектами и отношениями, но неоднозначно, требуется учет реально сложившихся условий.

На третьем уровне объекты и отношения содержательной модели неоднозначно соотносимы с их математической равносильностью. Соответствующая математическая модель выбирается в зависимости от реальных условий, описанных в задаче.

Например, на карте Красноярского края Красноярск и другие города занимают определенную площадь, а, значит, их математической моделью может служить некоторая геометрическая фигура. Но на политической карте Европы столицы государств, в том числе и Москва, отмечены небольшими кружочками. В этом случае математическая модель города – точка, которая, как известно, не имеет размеров.

В следующих примерах построение математической модели усложнено тем, что в условии задачи есть объекты, математическое истолкование которых также неоднозначно.

Рассчитать протяженность Африки в километрах вдоль 20-го меридиана. *Если принять, что Земля имеет форму геоида (Геоид - выпуклая замкнутая поверхность, совпадающая с поверхностью воды в морях и океанах в спокойном состоянии и перпендикулярная к направлению силы тяжести в любой ее точке [51]), то такая модель Земли не позволит решить эту задачу средствами школьной геометрии. Меридиан в географии – воображаемая линия сечения поверхности земного шара плоскостью, проведенной через какую-либо точку земной поверхности и ось вращения Земли. Если моделью формы Земли будет шар, то для решения задачи будет использована известная школьникам формула длины дуги окружности [13].*

На какой широте Земли длина параллели в два раза меньше, чем длина экватора?

Казалось бы, что понятия широта, параллель, экватор хорошо знакомы учащимся. Эти понятия изучаются в курсе географии 6 класса [52]. Однако понятие широты может быть определено по-разному. Часто встречается такое определение: Географической широтой заданной точки называется величина в градусах дуги меридиана от экватора до параллели, проходящей через эту точку.

Приведенное определение является, по сути, наглядной иллюстрацией широты на глобусе, которая, как известно, имеет форму шара. Если принять, что Земля – геоид, то строгое определение широты таково: Географическая широта точки М это величина угла φ м между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора, отсчитываемый от 0° до 90° в обе стороны от экватора, причем к северу от экватора широта считается положительной, а к югу – отрицательной, $-90° \leq φм \leq 90°$.

Значит, при поиске математической равносильности понятия широты, учащиеся могут встретить два приведенных выше определения. Школьникам необходимо выбрать, каким из них целесообразно воспользоваться при решении этой задачи.

Приведем пример задачи, в которой выбор подходящего математического аппарата для внутримодельного решения зависит от конкретных условий, имеющих место в реальности.

На плоскости обозначены три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой. Через точку А проложите прямую, параллельную прямой ВС.

Задача имеет несколько решений. Выбор подходящего математического аппарата для внутримодельного решения зависит от условий, которые могут появиться в реальной ситуации прокладывания этой параллельной прямой. Например, если нужно построить забор, параллельно данному, то возможно предположить, что построения на местности ограничены шириной улицы. Также ограничения могут возникнуть со стороны возможности использования геодезических (Геодезия - наука об определении положения объектов на земной поверхности, о размерах, форме и гравитационном поле Земли и других планет.) инструментов. Если же построения проводятся не на местности, а, например, в плотницком деле для разметки деревянных деталей, то и математическая модель будет соответствовать этим реальным условиям [13].

IV. Объекты и отношения задачи явно не выделены или их математическая равносильность неизвестна школьникам.

На четвертом уровне объекты и отношения, подлежащие математизации, в содержательной модели не выделены. Приведем это на примере следующей задачи:

Определите, на какой табурет (рис. 3а),(рис. 3б) можно сесть без риска оказаться на полу?

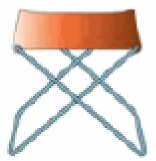
 

Рис. 3а Рис. 3б

В тексте задачи речь идет о табурете, а объекты, которые необходимо математизировать, - это его ножки и сидение, точнее их взаимное расположение. Математической равносильностью этих объектов являются отрезки, которые на рисунке 3б образовывают треугольник. Т.к. эта фигура является «жесткой», то именно на такой табурет можно садиться. Ясно, что, пользуясь жизненным опытом, школьники могут указать правильное решение. Однако просьба воспроизвести необходимые математические рассуждения вызывает затруднения даже у студентов старших курсов математического факультета ЮУрГГПУ [13].

В следующей задаче требуется выделить нужные характеристики объекта и учесть их при ее решении.

В магазине имеются чайники четырех моделей. Выберите тот чайник, в котором вода будет остывать дольше всего.

При такой формулировке задачи учащиеся исследуют вопросы об объеме чайников и материале, из которого они изготовлены. Если эти параметры совпадают, то решение задачи сводится к сравнению их поверхностных площадей.

Определение уровня сложности практико-ориентированных задач на оптимизацию целесообразно проводить по двум критериям: новизна для школьников объектов и отношений содержательной модели задачи; сложность подбора математической равносильности к этим объектам и отношениям.

Выбор этих критериев обоснован тем, что у учащихся уже имеются некоторые приобретенные знания и в какой-то мере жизненный опыт, соответствующие их возрасту и содержанию школьной программы. Так, поиск решения задачи о табуретах у учащихся старшего школьного возраста не вызовет затруднений. Ими уже накоплены для этого необходимые предметные знания и жизненный опыт, поэтому для них эта задача будет задачей невысокого уровня сложности. Следовательно, уровень сложности практико-ориентированной задачи на оптимизацию – характеристика непостоянная. Так, одной и той же задаче, решенной, например, в 9 классе на уроке и в 11 классе на итоговой аттестации, может быть присвоен разный уровень сложности. Это может быть связано, например, с изменением оценивания первого критерия (степени новизны для школьников объектов и отношений содержательной модели) за время обучения. Определение уровней сложности задач на приложения позволит выделить базовые задачи, решение которых является обязательным для всех учащихся заданной возрастной группы [13].

Таким образом, на начальном этапе реализации линии практико-ориентированного обучения (речь идет об этапе математизации) целесообразно использовать задачи первого и второго уровня сложности, на основном этапе – задачи с первого по третий уровень сложности, и лишь для последнего, заключительного этапа будет характерно присоединение задач четвертого уровня к первым трем.

Глава 2. Применение практико-ориентированных задач на оптимизацию в процессе изучения курса математики

Во второй главе описаны методические рекомендации решения практико-ориентированных задач на оптимизацию, выделены умения в процессе практико-ориентированного обучения. Далее разработана программа элективного курса и сборник задач, подобранных из различных источников и сгруппированных по темам курса. Также описан педагогический эксперимент по апробации элективного курса на учащихся 10 класса и его результаты. Также приведены результаты констатирующего этапа опытно-экспериментальной работы.

2.1. Методические особенности обучению решения практико-ориентированных задач на оптимизацию.

Целесообразность выделения такой линии как практико-ориентированные задачи на оптимизацию следует из современных целей школьного математического образования, отраженных в соответствующих нормативных документах, и назревшей потребности систематизировать такие приложения, определить цели и результаты их изучения. Методологическая (Методология — учение о методах, способах и стратегиях исследования предмета.) функция линии практико-ориентированных задач на оптимизацию состоит в изучении понятий и методов, объединяющих содержание не только методических, но и предметных линий всего школьного курса математики. К ее базовому понятию естественно отнести понятие математической модели, т. к. оно проявляется во всех средствах обучения приложениям математики в школе. Математическим методом выделяемой линии является метод математического моделирования [13], [28].

Работа с практико-ориентированной задачей на оптимизацию осуществляется в 3 этапа.

1 этап. Формализация (построение математической модели условия). (Формализация – отображение результатов мышления в точных понятиях и утверждениях.)

1.1. Устанавливать соответствие между содержательной и математической моделью объекта в зависимости от предъявленных условий;

1.2. Соотносить реальные объекты различной природы с одной математической моделью.

1.3. Описывать реальный объект несколькими математическими моделями.

1.4. Оценивать полноту исходных данных для построения математической модели.

2 этап. Внутримодельное решение.

2.1. Выбирать подходящие методы исследования реальных объектов в зависимости от поставленной задачи;

2.2. Составлять математическую модель с учетом требуемой точности описания реальных объектов задачи.

3 этап. Интерпретация результата (истолкование, разъяснение).

3.1. Анализировать использованные математические методы решения с точки зрения их рациональности для исследования реального объекта;

3.2. Интерпретировать результат исследования математической модели с требуемой погрешностью.

Можно выделить следующие принципы конструирования практико-ориентированных задач на оптимизацию по математике в школе:

1. Математизации знаний.

2. Соответствия содержания практико-ориентированных задач на оптимизацию математики познавательным возможностям и интересам учащихся.

3. Доступности для изучения на школьном уровне средств математизации знаний.

4. Достоверности содержания практико-ориентированных задач на оптимизацию математики.

5. Открытости содержания линии практико-ориентированных задач на оптимизацию [13].

На основе этапов решения практико-ориентированных задач на оптимизацию можно выделить 10 типов задач:

1) Формулировку математического утверждения, отбор формул, понятий, которые необходимо использовать для ответа на вопрос задачи (здесь и далее имеется в виду практико-ориентированная задача). Например,

Какой математический факт используют строители при расчете количества расходных материалов (обоев) для ремонта квадратной комнаты шириной 4,5 м и высотой 2,5 м.?

2) Выбор задачи, в которой математической моделью является следующее утверждение, понятие, формула из предложенных задач.

Например,

Найти фигуру на рисунке 4, площадь которой находиться по формуле: $S = a^2 \frac{6-\pi}{4}$

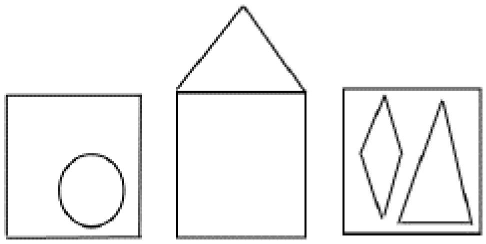


Рис. 4

3) Среди данных задач найти такие, у которых математические модели совпадают.

Например,

1. Квартира состоит из 3 комнат общей площадью 42 м2. Первая комната по площади в 2 раза меньше второй, а вторая – на 3 м^2 *больше третьей. Чему равна площадь каждой комнаты в этой квартире?*

2. За книгу, ручку и тетрадь Саша заплатил 270 р. Ручка в 3 раза дороже тетради и на 25 р. дешевле книги. Сколько стоит тетрадь?

3. Мотоциклист проехал расстояние между двумя городами, равное 980 км, за 4 дня. В первый день он проехал на 80 км меньше, чем во второй день, в третий день – половину расстояния, пройденного за первые два дня, а в четвѐртый день – оставшиеся 140 км. Какое расстояние проехал мотоциклист в третий день?

4. Периметр четырехугольника равен 46 дм. Первая его сторона в 2 раза меньше второй и в 3 раза меньше третьей стороны, а четвертая сторона на 4 см больше первой стороны. Чему равны длины сторон этого 4х-угольника?

4) Описание математической модели реальных объектов (у одного объекта может быть несколько моделей).

Например,

Опишите модель школьного стадиона.

5) Отобразить ситуацию, описанную в тексте задачи графически, в таблице (и наоборот, перевести табличную, графическую информацию в текстовую).

6) Перевести задачу с естественного языка на математический.

Пример задачи: *пол прямоугольной формы выложили квадратными дощечками с длиной стороны 4 дм. Всего потребовалось 280 плиток. Найдите длину пола, если ширина его равна 200 сантиметров.*

7) Привести несколько математических моделей решения задачи, выбрать рациональное с точки зрения рассматриваемой реальной ситуации. Для решения задач этого типа можно использовать пример задач рассматриваемых в типе 2.

8) Установить требуемую точность (допустимую погрешность) результата.

Например, дописать единицы измерения для величин:

Площадь комнаты 18 ___

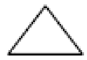
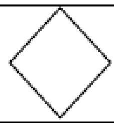
Ширина телевизора 45 ___

Диаметр кружки 0,8 ___

9) Оценка достаточности данных для построения математической модели объекта, есть ли лишние данные. К задачам данного типа относятся все задачи, суть которых заключается в ответе на вопрос: «Хватает ли информации для решения поставленной задачи?»

10) Выбор из предложенных математизаций одного объекта ту, которая соответствует заданному условию.

Соотнесите формулу площади и фигуру.

$S = ah$	
$S = \frac{{d_1}^2}{2}$	
$S = \frac{ah}{2}$	

Как уже было указано выше, основными компонентами любой математической задачи являются: условие задачи, базис задачи, решение задачи, обоснование решения задачи. В свою очередь в практико-ориентированной задаче можно выделить следующие компоненты, составляющие ее структуру:

- содержательный. Этот компонент включает содержание учебного материала, базовые математические понятия, на которые опирается решение предлагаемой задачи, этапы математического моделирования;

- деятельностный. Данный компонент характеризуется теми практико-ориентированными математическими умениями, которые планируется сформировать у школьников в процессе работы с предложенной задачей;

- задачный. Компонент содержит систему классификаций практико-ориентированных задач и характеристику уровней их сложности;

- процессуальный. Последний по описанию, но не по значению предлагаемый компонент определяет временные этапы реализации практико-ориентированных задач.

Постановка задачи заключается в предложении для решения, выполнения, обсуждения, получения конечного результата, составление исходных материалов и определение необходимой цели для решения задачи [50].

Под формой постановки любой задачи, в том числе и практико-ориентированной понимают точную формулировку условия задачи, в которой описывается вся входная, необходимая для решения, и выходная информация.

Выходной информацией по задаче считают те данные, которые будут представлены учащимися как результат работы по решению предложенной задачи.

Предлагая для решения практико-ориентированную задачу, следует помнить о том, что она должна быть привлекательна для учащихся конкретного класса, имеющих свои отличительные особенности в сфере интересов, жизненного опыта и т.п. Этого можно добиться, если предлагать учащимся задачи, оформленные в виде рисунков, схем и др.

Таким образом, представленные выше типология задач, а также требования к форме постановки практико-ориентированной задачи и ее содержанию позволяют сформулировать следующие методические особенности обучения решению практико-ориентированных задач в курсе планиметрии [13]:

- предлагая для решения учащимся практико-ориентированную задачу необходимо учитывать их интересы в повседневной жизни и опираться на имеющийся у них жизненный опыт;

- особое внимание следует уделять формулировки задачи, которая должна быть привлекательна и по форме и по содержанию для конкретных учащихся, только тогда можно обеспечить условия, полного включения учащихся в работу над задачей, которую в идеальном варианте они должны воспринимать как цель своей учебной деятельности в определенный момент времени;

- при работе над решением задачи необходимо значительное количество времени отводить на этап моделирования, т.е. представление описанной в задачи ситуации в виде математической модели, работа с которой будет завершающим этапом решения;

2.2. Алгоритм решения практико-ориентированных задач на оптимизацию

Задачи на оптимизацию решают по обычной схеме из трех этапов математического моделирования: 1) составление математической модели; 2) работа с моделью; 3) ответ на вопрос задачи. Прежде чем переходить к конкретным примерам решения задач на оптимизацию, дадим некоторые рекомендации методического плана.

Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Проанализировав условия задачи, выделите *оптимизируемую величину* (сокращенно: О. В.), т.е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идет речь. Обозначьте ее буквой y (или S, V, R, t — в зависимости от фабулы).

2) Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., примите за *независимую переменную* (сокращенно: Н. П.) и обозначьте ее буквой x (или какой-либо иной буквой). Установите *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи), т. е. область определения для искомой О. В.

3) Исходя из условий задачи, выразите y через x. Математическая модель задачи представляет собой функцию $y = f(x)$ с областью определения X, которую нашли на втором шаге.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = f(x)$, $x \in X$ найдите $y_{\text{наим.}}$ или $y_{\text{наиб.}}$ в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются теоретические установки, которые мы получили в п. 1.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Здесь следует дать конкретный ответ на вопрос задачи, опираясь на результаты, полученные на этапе работы с моделью.

Часто спрашивают, так ли обязательно при оформлении решения разбивать его на этапы. Формально этого никто не требует. Однако, решение будет легче записать и значительно легче проверить, если оно разумным образом структурировано, проще говоря, разбито по шагам.

2.3. Методические рекомендации решения практико-ориентированных задач на оптимизацию

1. Переписать на язык математики практико-ориентированную задачу на оптимизацию (составить функцию).
2. Определить оптимизированную величину и область определения (область значения).
3. Необходимо выбрать способ решения, это зависит от оптимизированной величины (определена или неопределенна,). Решение аналитическим способом или с помощью производной.
4. Решение задачи. После получения результатов необходимо обратить внимание на область допустимых значений (отбор корней).
5. Произвести полное исследование значений функций.
6. Сформулировать ответ согласно поставленной в условии задачи. Именно методические рекомендации помогают учащимся избежать ошибок, а учителю определить на каком этапе ученик сделал ее.

2.4. Рабочая программа элективного курса

«Практико-ориентированные задачи на оптимизацию»

Краткая аннотация

«Никогда не считай, что ты
знаешь всё, что тебе уже
больше нечему учиться».

Н.Д. Зелинский

Математика практически единственный учебный предмет, в котором задачи используются и как цель, и как средство обучения, а иногда и как предмет изучения. Ограниченность учителя временными рамками урока и временем изучения темы, нацеленность учителя и учащихся на достижение ближайших целей, к сожалению, мало способствует формированию крепких математических навыков в решении стандартных задач и развитию умений в решении задач творческого характера, нестандартных задач, задач повышенного уровня сложности, при решении которых необходимы знания разделов математики, выходящих за пределы школьного курса. Представленная программа элективного курса предполагает решение ключевых и дополнительных задач, многие из которых понадобятся как при подготовке к экзаменам, в частности ЕГЭ, так и при учебе в высших учебных заведениях. Элективный курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учащихся в решении задач по математике и позволит, учитывая специфику учебного заведения, целенаправленно подготовить учащихся - спортсменов к сдаче экзамена в форме ЕГЭ.

Пояснительная записка

Российский математик XIX в. П.Л. Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижениями наибольшей выгоды». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т. д.

Задачи подобного рода носят общее название — *задачи на оптимизацию* (от латинского слова optimum — «наилучший»), В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причем надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает свое наименьшее или наибольшее, (наилучшее в данных условиях) значение.

Программа элективного курса предназначена для учащихся 10-11 классов, рассчитана на 34 часа. Разработана на основе примерной программы по математике для 10-11 классов. Содержание программы соотнесено с примерной программой по математике и опирается на учебники Алимова А.Ш. и Колягина Ю.М.

Цель курса - создание условий для формирования и развития у обучающихся самоанализа и систематизации полученных знаний, подготовка к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Задачи курса:

- формирование и развитие у старшеклассников аналитического и логического мышления при проектировании решения задачи;
- расширение, дополнение и углубление курса математики;
- формирование опыта творческой деятельности учащихся через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач;
- формирование навыка работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов;
- развитие коммуникативных и общеучебных навыков работы в группе, самостоятельной работы, умений вести дискуссию, аргументировать ответы и т.д.

Рассчитанная на 34 часа программа, может быть реализована за 2 учебных года в 10-11 классах, по 1 часу в неделю на протяжении 4-х полугодий.

Виды деятельности на занятиях: лекция учителя, беседа, практикум, консультация, работа с компьютером.

Предполагаемые результаты

Изучение данного курса дает учащимся возможность:

- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;
- освоить основные приемы решения задач;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;
- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;
- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;

- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе интернет-ресурсов, в ходе подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ.

Учебно-тематический план

№ П / п	Название разделов и тем	Количество часов		
		всего	теории	Практики
1.	Введение	2	1	1
2.	Алгоритм решения	2	1	1
2.1.	Составление математической модели задачи	2	1	1
2.2.	Работа с моделью и ответ	2	1	1
2.3.	Решение задач на оптимизацию	5	1	4
3.	Наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена в задачах	4	1	3
4.	Применение теорем о среднем геометрическом и среднем арифметическом в задачах	3	1	2
5.	Применение производной для решения задач.	3	1	2
6.	Задачи о кредитах.	7	2	5
7.	Экономические задачи.	3	1	2
8.	Заключительное занятие.	1	-	1
	Итого	34		

Методическое обеспечение

В процессе изучения материала используются как традиционные формы обучения, так и самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным и методическим материалом.

Занятия включают в себя теоретическую и практическую части, в зависимости от целесообразности. Основные формы проведения занятий: беседа, дискуссия, консультация, практическое занятие, защита проекта. Особое значение отводится самостоятельной работе учащихся, при которой учитель на разных этапах изучения темы выступает в разных ролях, чётко контролируя и направляя работу учащихся.

Предполагаются следующие формы организации обучения: индивидуальная, групповая, коллективная, взаимное обучение, самообучение.

Средства обучения: дидактические материалы, творческие задания для самостоятельной работы, мультимедийные средства, справочная литература.

Технологии обучения: информационные, проектные, исследовательские. Занятия носят проблемный характер. Предполагаются ответы на вопросы в процессе дискуссии, поиск информации по смежным областям знаний.

Контроль результативности изучения учащимися программы

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля: самостоятельная работа, практикумы, домашняя контрольная работа, тестирование.

2.5. Апробация методических материалов на тему «Разработка элективного курса практико-ориентированных задач на оптимизацию»

Апробация проводилась в МОУ СОШ п. Арчаглы-Аят в десятом классе. Во время педагогической практики были проведены обобщающе-повторительные занятия, домашние работы, контрольные работы, математические диктанты, на которых учащиеся занимались изучением решения практико-ориентированных задач на оптимизацию.

Список учащихся 10 класса

№	ФИО	Элективный курс.
1.	Агыбаев Куаныш	+
2.	Антонов Степан	+
3.	Безкаровайная Светлана	+
4.	Габитдинов Денис	-
5.	Гучанова Алла	-
6.	Иванова Валентина	+
7.	Калапкин Егор	+
8.	Комлев Данила	+
9.	Кушнырева Анастасия	-
10.	Поливин Эмиль	+
11.	Ракаева Алина	+
12.	Сарсенов Нурхан	-

8 из 12 учеников ходили на все занятия элективного курса «Практико-ориентированные задачи на оптимизацию», остальные не могли присутствовать из-за дополнительных занятий по робототехнике.

Перед началом проведения элективного курса была предложена контрольная работа на проверку остаточных знаний. Половина учащихся не смогли справиться с предложенными заданиями.

После двух домашних работ проводился анализ полученных результатов (в начале следующего урока). При выполнении домашних работ ученики не справлялись с некоторыми заданиями.

После разбора ошибок, как правило, предлагалось решение этих задач и примерные такие задачи, с которым учащиеся справлялись лучше, так как поняли, почему и где они допустили ошибки.

Контрольную работу сделали почти все на положительные оценки. Для 10 класса была предложена контрольная работа, состоящая из 3 задач по теме

«Наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена в задачах», «Задачи о кредитах» и «Экономические задачи».

Система оценивания контрольной работы: Первому заданию ставится 1 балл, а для второго задания – по 2 балла, а для третьего – 4 балла. Оценка «5» - выше 8 баллов, «4» - выше 6 баллов, «3» - выше 4 баллов, «2» - выше 1 балла.

Из 8 учащихся 10 класса оценку «2» получили 0 человек, оценку «3» получили 3 человека, оценку «4» получили 3 человека, оценку «5» получили 2 человека.

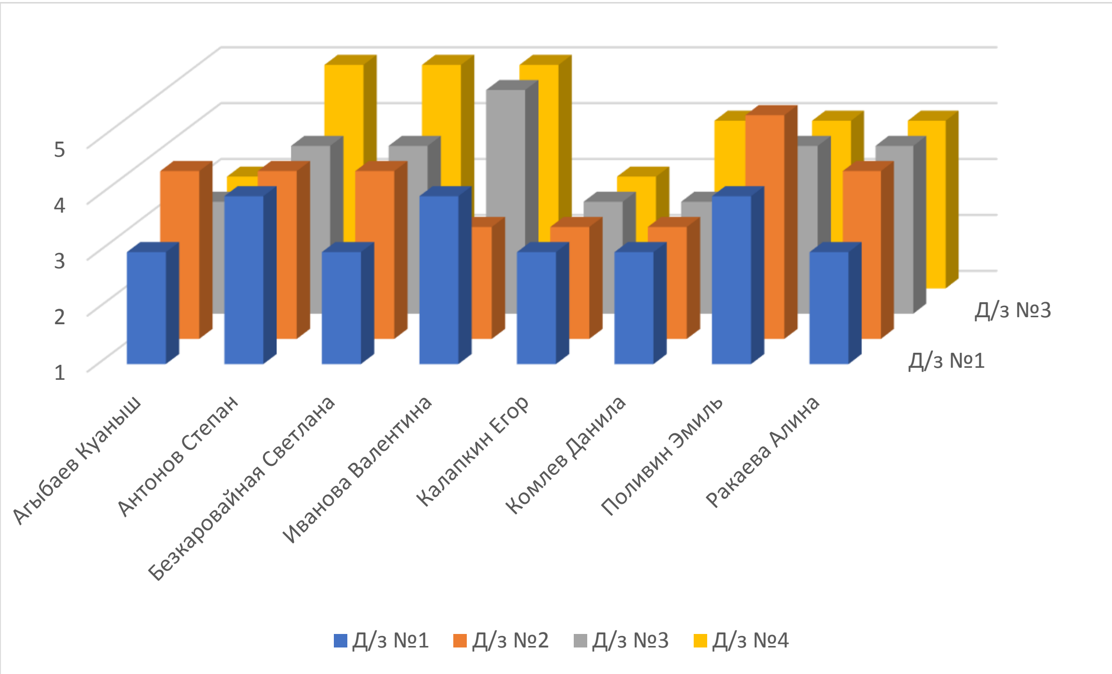
Результаты проверочных работ 10-го класса Арчаглы-Аятской средней школы

№	ФИО	Контрольная работа на проверку остаточных знаний	Д/з №1	Д/з №2	Д/з №3	Д/з №4	Итоговая контрольная работа
1.	Агыбаев Куаныш	2	3	4	3	3	3
2.	Антонов Степан	3	4	4	4	5	4
3.	Безкаровайная Светлана	3	3	4	4	5	4
4.	Иванова Валентина	4	4	3	5	5	5
5.	Калапкин Егор	2	3	3	3	3	3
6.	Комлев Данила	2	3	3	3	4	3
7.	Поливин Эмиль	4	4	5	4	4	5
8.	Ракаева Алина	2	3	4	4	4	4

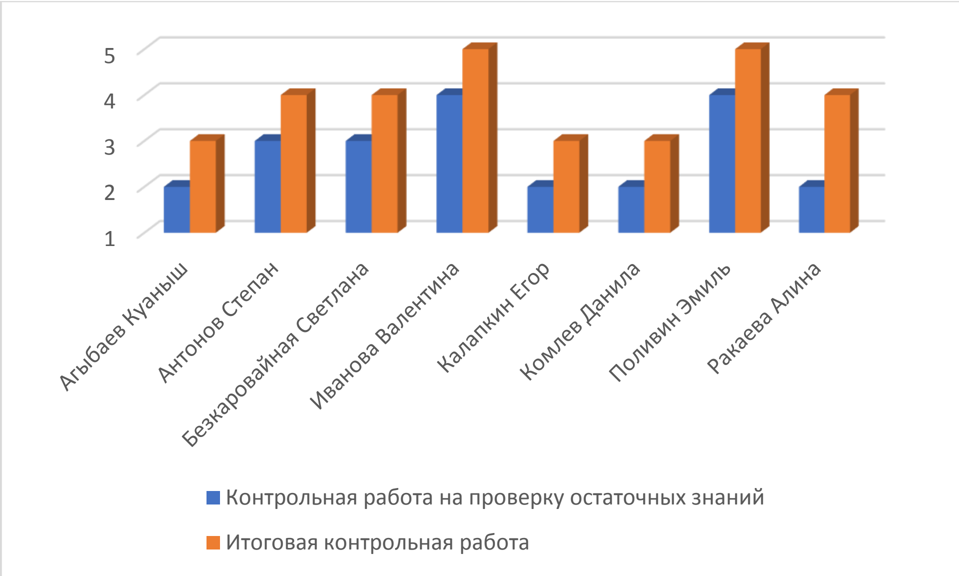
Результаты контрольной работы

№	ФИО	1а	1б	2а	2б	3	Общая оценка
1.	Агыбаев Куаныш	1	1	1	1	0	3
2.	Антонов Степан	1	1	2	2	1	4
3.	Безкаровайная Светлана	1	1	1	1	2	4
4.	Габитдинов Денис	1	0	0	0	0	2
5.	Гучанова Алла	1	1	1	0	0	2
6.	Иванова Валентина	1	1	2	2	3	5
7.	Калапкин Егор	1	0	1	1	1	3
8.	Комлев Данила	1	1	1	1	0	3
9.	Кушнырева Анастасия	0,5	0,5	0	0	0	2
10.	Поливин Эмиль	1	1	2	2	4	5
11.	Ракаева Алина	1	1	2	1	2	4
12.	Сарсенов Нурхан	1	1	1	1	0	3

Обработка результатов домашних заданий



Статистика оценок за две контрольные работы



Я сделала сравнительный анализ по контрольной работе таким способом: раздала всем контрольную работу тем, кто ходил на элективный курс и тем, кто не ходил. Из диаграммы видно, что те, кто ходил на элективный курс, сделали контрольную работу без «2», а те, кто не ходил на элективный курс, сделали плохо. А те ученики, которые ходил на элективный курс, достигли «хорошего» уровня знаний. И я считаю, что цель моей дипломной работы достигнута.

Из полученных результатов контрольной работы мы видим, что качество знаний повысилось, так как большинство учеников контрольную работу написали лучше, что подтверждает гипотезу.

2.6. Результаты констатирующего этапа опытно-экспериментальной работы

Для решения двух задач констатирующего этапа ОЭР по изучению состояния подготовки студентов к осуществлению практико-ориентированного обучения математике в школе и отношения студентов к проблеме обучения школьников практическим приложениям математики, понимания ее актуальности и необходимости прохождения специальной методической подготовки по этому направлению, предлагалась анкета, состоящая из 11 вопросов. Опрос был размешен на сайте https://www.survio.com в период с 07.10.2016 по 28.01.2017 и доступен всем пользователям сети интернет. Участникам опроса было предложено ответить на вопросы анкеты:

Вопросы анкеты объединены в два блока:

1. *Информационный*. Включает вопросы, позволяющие оценить информированность студентов в области практических приложений математики (вопросы 2, 3); выявляющие наличие у них представлений о путях использования таких приложений в обучении математике в школе (вопросы 1, 6, 8, 9).

2. *Мотивационный*. Выявляет следующие аспекты: понимание студентами необходимости изучения в школе практических приложений математики (вопросы 4, 5, 7) и актуальности этой проблемы (вопросы 10, 11).

К анкетированию привлекались студенты, обучающиеся на данный момент в ЮУрГГПУ на физико-математическом факультете. Анкетированием охвачено всего 85 студентов. Анализ результатов анкетирования проведен следующим образом. Ответы участников анкетирования дифференцированы по следующим *двум группам*: *первая,* 31 человек (36% от общего числа) – студенты, имеющие опыт преподавания математики (работали в школе, занимались индивидуально с учащимися и т. п.), *вторая,* 54 человек – студенты, не имеющие профессионального опыта.

Анкетирование показало, что студенты, имеющие профессиональный опыт, продемонстрировали большую осведомленность в вопросах обучения школьников практическим приложениям математики. Так, при ответе на вопрос о выборе задачи на приложения из предложенных, все студенты первой группы безошибочно указали задачу, которая действительно отражает применение математики в реальной ситуации.

Несмотря на то, что на вопрос «Изучали ли Вы в вузе в цикле математических дисциплин прикладные разделы?» 89% участников обеих групп дали отрицательный ответ (остальные 11% посещали спецкурсы соответствующей тематики или вспомнили отдельные прикладные задачи), 60% опрашиваемых смогли привести примеры практических приложений математики при ответе на вопрос 2. Однако в большинстве случаев в приведенных примерах указывались очень широкие направления приложений, такие как «применение математического аппарата в разных науках», «при моделировании жизненных процессов» и т. п. Это свидетельствует о недостаточной методической и математической подготовке выпускников в области приложений математики.

На вопрос «Использовал ли Ваш школьный учитель примеры, иллюстрирующие применение математики в жизни. Если «да», то укажите, с какой целью?» 51% опрашиваемых дали отрицательный ответ. Остальные 49% участников в качестве целей использования практических приложений в обучении наиболее часто указывали следующие: «иллюстрация теории», «повышение интереса к предмету». Никто из студентов не отметил среди таких целей необходимость обучения приложениям математики к решению практических проблем. Это означает, что студенты не осознают бинарного назначения практических приложений математики в обучении школьников.

С этими данными согласуются и ответы на следующий вопрос: «В числе целей обучения математике в школе указывается необходимость развития умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера, т. е. на необходимость изучения практических приложений математики. Назовите несколько причин, которые подтверждают эту необходимость». В 82% ответов в качестве такой причины указывалась необходимость повышения интереса к изучению математики. Этот результат свидетельствует об одностороннем и неполном представлении студентов о роли практико-ориентированного обучения математике в школе.

На вопросы «Назовите несколько источников практических приложений математики для использования на уроке», «Известны ли Вам методические разработки для обучения практическим приложениям математики во внеурочное время: на курсах по выбору, в проектной деятельности и т. п.? Если да, то укажите одну» студенты первой группы (с опытом преподавания) чаще давали ответ «да», чем студенты второй группы. Но здесь в обеих группах в 89% случаев встречались довольно общие или формальные ответы («интернет», «специальные книги», «учебник»), свидетельствующие об отсутствии у опрашиваемых конкретной информации по данным вопросам, или ими выбирался вариант ответа «этим вопросом не интересовался». Остальные 11% опрашивамых приводили в качестве примеров такой литературы журналы «Квант», «Математика в школе» без указания конкретных статей или авторов публикаций. Исчерпывающих ответов на поставленные вопросы не дал никто из участников.

Анализ результатов анкетирования показал, что студенты, обладающие даже небольшим профессиональным опытом, реже выбирали такие варианты ответов, как «затрудняюсь ответить», «нет, этим вопросом не интересовался» и т. п. Число студентов, выбравших эти ответы, среди имеющих профессиональный опыт, составило 15%, а среди тех, кто не имел такого опыта – 26%. При определении отношения к рассматриваемой проблеме, 96% участников из обеих групп дали положительный ответ на два последних вопроса анкеты: «Считаете ли Вы проблему обучения школьников практическим приложениям математики актуальной?», «Хотели бы Вы ознакомиться с вопросами практико-ориентированного обучения математике в школе глубже?»

Анализ результатов анкетирования подтверждает необходимость специальной методической подготовки учителя в этом направлении. Ответы студентов обеих групп на ряд вопросов анкеты, их заинтересованное участие в анкетирование демонстрирует наличие у них мотивации к изучению этого раздела методической подготовки учителя математики.

Заключение

В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития многих направлений математики. Математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений и, в конечном счете, содействует повышению производительности труда и устойчивому поступательному развитию народного хозяйства.

Использование практико-ориентированных задач на оптимизацию при изучении математики оправдано тем, что они с достаточной полнотой закладывают понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучше. Решая задачи указанного типа, наблюдаем, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, а с другой - большую эффективную их применимость к решению жизненных практических задач. Практико-ориентированные задачи на оптимизацию помогают ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности.

Решение практико-ориентированных задач на оптимизацию способствует углублению и обогащению наших математических знаний. Через задачи мы знакомимся с экстремальными свойствами изучаемых функций, с некоторыми свойствами неравенств. Эти задачи могут серьезно повлиять на содержание учебного материала, на аспекты применения положений изучаемой теории на практике.

В настоящее время в нашей стране большое внимание уделяется вопросам повышения эффективности и качества во всех сферах производства. В этой связи особую значимость приобретает умение решать так называемые задачи на оптимизацию, которые возникают там, где необходимо выяснить как с помощью имеющихся средств достичь наилучшего результата, как получить нужный результат с наименьшей затратой средств, материалов, времени, труда и т.п.

Проанализировав методическую и педагогическую литературу, мы дали более точное понятие практико-ориентированной задачи. Охарактеризовали и обобщили имеющиеся требования к практико-ориентированным задачам: 1) требования к сюжетному содержанию задачи; 2) требования к математическому содержанию задачи.

Рассмотрели методические условия применения практико-ориентированных задач в курсе математики, а именно:

- Соответствие содержания практико-ориентированных задач содержанию обучения математике;
- Активизация познавательного интереса обучаемых;
- Владение школьниками практико-ориентированными умениями.

Разработаны методические рекомендации по применению практико-ориентированных задач на уроках ознакомления с новым материалом и работы во внеурочное время.

Экспериментальное преподавание проводилось в МОУ СОШ п. Арчаглы-Аят среди учащихся 10 класса. Достаточно высокий уровень усвоения знаний учащихся позволяет судить об эффективности элективных занятий при обучении математики и применение разработанной на основе общих методов решения практико-ориентированных задач на оптимизацию способствовал формированию у учащихся четкого понимания роли этих задач как на уроках, так и в жизненной ситуации.

Таким образом, выдвинутая гипотеза подтверждается. Считаю, что поставленная цель достигнута, задачи выполнены.

Перспектива дальнейшего применения материала выпускной квалификационной работы состоит в том, что она может быть использована в качестве дополнительного пособия при ознакомлении с методикой преподавания практико-ориентированных задач на оптимизацию.

Практико-ориентированные задачи можно решать разными методами, но во всех методах необходимо использовать исследования (логические), которые обосновано должны приводить к правильному ответу. Только при решении практико-ориентированных задач на оптимизацию, ученики включены в полный цикл, где необходимо составить, переформулировать, решить, провести исследование и выбрать нужный ответ. А составлением условий задач можно заниматься во время проектной деятельности.

Список литературы

1. Ахлимерзаев А. Прикладная направленность изучения начал математического анализа в старших классах средней школы как средство усиления принципов политехнизма в обучении: дис. … канд. пед. наук. Фергана, 1991.

2. Бабанский Ю.К. Развитие познавательного интереса школьников // Дополнительное образование. 2003. № 3. С. 15.

3. Балл Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» // Вопросы психологии. 1970. № 6. С 10-15.

4. Бахвалов Н. Большой экономический словарь. М.:Институт новой экономики.А.Н.Азрилиян.2003.

5. Болтянский В.Г. Математическая культура и эстетика // Математика в школе. 1982. № 2. С. 40-43.

6. Большой энциклопедический словарь. 2-е изд. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000. 1456 с.

7. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе. М., Гос. учебно-педагог. изд. мин. прос. РСФСР, 1954. 504 с.

8. Варданян С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Кн. Для учащихся 6-8 кл. ср. шк. / под ред. В.А. Гусева. М.: Просвещение, 1989. 144 с.

9. Геометрия. Пробный учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / В.Н. Руденко, Г.А. Бахурин, А.Я. Цукарь. М., ИД «Искатель» 2013. 320 с.

10. Геометрия: Учеб.пособие для 11 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2014. 319 с.

11. Гуткин Л.И. Сборник задач по математике с практическим содержанием. М.: Высшая школа, 1968. 112 с.

12. Дидактические аспекты организации факультативов [Электронный ресурс]. URL: http://festival.1september.ru/articles/594252/, (дата обращения: 20.12.2016)

13. Егупова М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике: дис. … д-ра пед. наук. М., 2014.

14. Журнал статей. Статьи, поданные в журнал. Публикация научных статей [Электронный ресурс]. URL: http://www.gyrnal.ru/statyi/ru/94/, (дата обращения: 20.04.16).

15. Избранные вопросы математики. Факультативный курс. 10 кл. / под ред. В.В Фирсова. М.: Просвещение, 1980. 186 с.

16. Использование практико-ориентированных заданий при обучении математике с целью развития математической грамотности школьников[Электронный ресурс]. URL: http://collegy.ucoz.ru/publ/39-1-0-16692(дата обращения: 25.01.2017).

17. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. 112 с.

18. Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения. Том 1. / под. ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко, А.А. Леонтьева, А.В. Петровского. М: Педагогика, 1983. 392 с.

19. Математика и математическое образование в современном мире. В сб. Математика в образовании и воспитании / Арнольд В.И.; под.ред. В.Б. Филиппов. М.: Фазис, 2000. 256 с.

20. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие / К.К. Васильев, М.Н. Служивый. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 170 с.

21. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: «Советская энциклопедия», 1988. 847 с.

22. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1980.

23. Методическая разработка по внеклассной работе по теме: Олимпиадные задания в школе. Методическая разработка [Электронный ресурс]. URL: http://nsportal.ru/shkola/vneklassnaya-rabota/library/2011/04/06/olimpiadnye-zadaniya-v-shkole-metodicheskaya, (дата обращения: 5.12.2016).

24. Мирзоахмедов М. Методика обучения решению прикладных задач при углубленном изучении математики: дис. ... канд. пед. наук. Душанбе, 2012.

25. Моисеев Н.Н. Математические модели экономической науки. М.: Наука, 1973. 64 с.

26. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. Изд. 3-е, исправленное. М.: КомКнига, 2014. 192 с.

27. Общая психология: учеб.для студ. пед. ин-тов / А.В. Петровский, А.В. Брушлинский, В.П. Зинченко и др.; под ред. А.В. Петровского. М.: Просвещение, 1986. 464 с.

28. Ожегов С.И. Словарь русского языка: 53000 слов / под общ.ред. проф. Л.И. Скворцова. 24-е изд., испр. М: Оникс, Мир и образование, 2013. 1200 с.

29. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов / под ред. Ю.К. Бабанского. М.: Просвещение, 1983. 386 с.

30. Петров, В.А. Прикладные задачи на уроках математики: Кн. для учителя. Смоленск: СГПУ, 2012. 268 с.

31. Печко А. Методика преподавания математики в основной школе. Курс лекций [Электронный ресурс]. URL: http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=696962, (дата обращения: 14.03.2017)

32. Пойа Д. Математическое открытие / Д. Пойа. М.: Наука, 1970.

33. Практико-ориентированные задачи: структура, уровни сложности и алгоритм их составления[Электронный ресурс]. URL: http://festival.1september.ru/articles/642510/(дата обращения: 25.11.16).

34. Рейнгард И.А. Сборник задач по геометрии и тригонометрии с практическим содержанием. М.: Учпедгиз, 1960. 116 с.

35. Рузавин Г.И. Математизация научного знания. М.: Мысль, 1984. 207 с.

36. Сергеев И.Н., Олехник С.Н., Гашков С.Б. Примени математику. М.: Наука, 2013. 240 с.

37. Смирнова И.М. Педагогика геометрии. М.: Прометей, 2014. 336 с.

38. Статья по психологии [Электронный ресурс]. URL: http://o-psihologii.info/deti/ped/878-soderzhanie-obucheniya.html, (дата обращения: 24.03.2017)

39. Столяр А. А. Педагогика математики. Минск: Высшая шк., 1986.

40. Тарасов Л.В., Тарасова А.Н. Беседы о преломлении света / под ред. В.А. Фабриканта. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 176 с.

41. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2014. 96 с.

42. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Рассказы о прикладной математике. М.: Наука, 1981. 210 с.

43. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. URL: http://минобрнауки.рф/документы/938/файл/749/10.12.17-Приказ_1897.pdf (дата обращения: 17.04.2017).

44. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. М.: Просвещение, 1984.

45. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике. М.: Либроком, 2009. 248 с.

46. Хаймина Л.Э. Задачи прикладной направленности в обучении математике: учебно-методическая разработка для учителей школ и студентов математического факультета. Архангельск: Помор.гос. ун-т им. М.В. Ломоносова, 2010. 47 с.

47. Шапиро И.М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики. М: Просвещение, 1990. 96 с.

48. Шевкин А.В. Как не надо обновлять тематику школьных задач // Математика в школе. 1995. №2. С.51-53.

49. Якутов М.И. Пути реализации прикладной направленности курса алгебры восьмилетней школы: дис. ... канд. пед. наук. М., 1988.

Приложение

АНКЕТА

«Практико-ориентированные задачи на оптимизацию в школе»

Фамилию указывать необязательно, т.к. ответы будут использованы в обобщенном виде. Можно выбирать *несколько* вариантов ответа.

1. Какая из приведенных ниже задач, по Вашему мнению, отражает применение математики в реальной ситуации:

1) С крыши дома одновременно взлетели три птицы. В какой момент они окажутся в одной плоскости?

2) На фронтоне дома разбилось стекло круглой формы. Какие размеры надо снять, для того чтобы заказать новое?

а) задача 1; в) ни одна из приведенных;

б) задача 2; г) затрудняюсь ответить.

2. Приведите один-два примера известных Вам практических приложений математики.

3. Изучали ли Вы в вузе в цикле математических дисциплин прикладные разделы? Если «да», то приведите один-два примера.

а) нет; б) да. в) не знаю

4. Использовал ли Ваш школьный учитель примеры, иллюстрирующие применение математики в жизни? Если «да», то укажите, с какой целью.

а) нет б) да

5. Среди целей обучения математике в школе указывается необходимость развития умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера. Назовите несколько причин, которые подтверждают необходимость изучения практических приложений математики.

Возможные варианты ответов студентов:

Практические приложения:

• *служат для иллюстрации математической теории;*

• *помогают устанавливать связь обучения математике с реальностью;*

• *служат содержательной основой для обучения методу математического моделирования;*

• *способствуют повышению интереса к изучению математики;*

• *способствуют профессиональной ориентации школьников.*

6. Перечислите несколько известных Вам форм использования практических приложений в обучении математике.

Возможные варианты ответов студентов:

• *задачи практического характера;*

• *примеры, иллюстрирующих применение изучаемой математической теории в различных областях знаний;*

• *практические работы по изучению свойств реальных объектов;*

• *проектные и исследовательские задания практического характера.*

7. По Вашему мнению, обучение школьников практическим приложениям математики целесообразно осуществлять:

а) на уроке; в) и на уроке, и во внеурочное время;

б) во внеурочное время; г) затрудняюсь ответить.

8. Назовите несколько источников практических приложений математики для использования на уроке.

Возможные варианты ответов студентов:

• *Учебник математики.*

• *Дидактические материалы.*

• *Специальные сборники задач.*

• *Научно-популярная литература для школьников.*

• *Периодическая печать для учителей математики: журналы «Математика»; «Математика в школе».*

• *Периодическая печать для школьников: журналы «Математика для школьников», «Квант».*

9. Известны ли Вам методические разработки для обучения практическим приложениям математики во внеурочное время: на элективных курсах, в проектной деятельности и т. п.? Если да, то укажите одну.

а) да, таких разработок достаточное количество;

б) да, но таких разработок недостаточно;

в) нет, таких разработок не встречал;

г) нет, этим вопросом не интересовался.

10. Считаете ли Вы проблему обучения школьников практическим приложениям математики актуальной?

а) да; б) нет; в) затрудняюсь ответить.

11. Хотели бы Вы ознакомиться с вопросами практико-ориентированного обучения математике в школе глубже?

а) да; б) нет; в) затрудняюсь ответить.

Вопрос о Вас: Имеете ли Вы опыт преподавания математики?

а) да, работаю в школе в настоящее время;

б) да, работал в школе в течении времени;

в) да, занимаюсь со школьниками индивидуально;

г) да, проходил педагогическую практику;

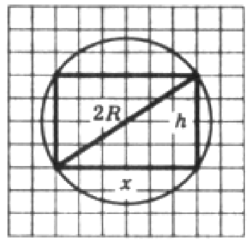
д) нет.

Сборник практико-ориентированных задач на оптимизацию

Задача 1. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы ее прочность была наибольшей?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — прочность балки, поскольку в задаче требуется выяснить, когда прочность балки будет наибольшей. Обозначим О. В. буквой *y*.



2) Прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. Объявим независимой переменной (Н. П.) ширину балки, обозначим ее буквой *x*. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R (рис. 1), то $0 \le x \le 2R$ (при $x = 0$ и при $x = 2R$ прямоугольник «вырождается» в отрезок, равный диаметру окружности) — таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = [0; 2R]$.

3) Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (по теореме Пифагора). Значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$. Прочность балки *y* пропорциональна произведению xh^2, т. е. $y = kxh^2$

(где коэффициент k — некоторое положительное число). Значит,

$y = kx(4R^2 - x^2)$, где $x \in [0; 2R]$

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

На этом этапе для функции $y = kx(4R^2 - x^2), x \in [0; 2R]$ надо найти $y_{\text{наиб.}}$.Воспользуемся алгоритмом из п. 1. Имеем:

$y = 4kR^2x - kx^3;$

$y' = 4kR^2 - 3kx^2.$

Критических точек нет. Найдем стационарные точки. Приравняв производную к нулю, получим

$$4kR^2 - 3kx^2 = 0;$$

$$x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}, x_2 = -\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Заданному отрезку $[0; 2R]$ принадлежит лишь точка x_1.

Осталось вычислить значения функции $y = kR^2x - kx^3$ в точке x_1 и на концах отрезка, т. е. в точках 0 и $2R$:

$$f(0) = 0, \qquad f(2R) = 0, \qquad f(x_1) = f(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0.$$

Значит, $y_{\text{наиб.}} = f(\frac{2R}{\sqrt{3}})$

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

В задаче спрашивается, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Мы выяснили, что ширина x прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки, равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдем высоту:

$$h^2 = 4R^2 - x^2 = 4R^2 - \frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2}{3}.$$

Значит, $h = \frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, а потому $\frac{h}{x} = \sqrt{2}$

Ответ. Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$

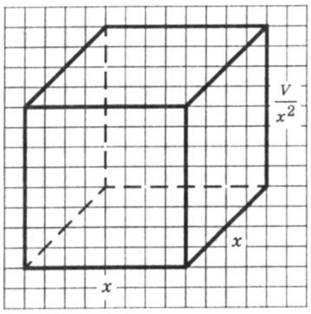
<u>Замечание.</u> Квалифицированные мастера приходят к такому же результату, опираясь на свой опыт, но, разумеется, они принимают указанное отношение равным 1,4 (приближенное значение иррационального числа $\sqrt{2}$ как раз равно 1,4).

Задача 2. Бак, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать V литров жидкости. При какой стороне основания площадь поверхности бака (без крышки) будет наименьшей?

Решение. <u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

1) Оптимизируемая величина (О. В.) — площадь поверхности бака, поскольку в задаче требуется выяснить, когда эта площадь будет наименьшей. Обозначим О. В. буквой S.

2) Площадь поверхности зависит от измерений прямоугольного параллелепипеда. Объявим независимой переменной (Н. П.) сторону квадрата, служащего основанием бака; обозначим ее буквой *x*. Ясно, что $x > 0$. Других ограничений нет, значит, $0 < x < +\infty$. Таковы реальные границы изменения независимой переменной: $X = (0; +\infty)$.



3) Если h — высота бака, то $V = x^2h$, откуда находим $h = \frac{V}{x^2}$.

На рис. 2 изображен прямоугольный параллелепипед, указаны его измерения. Поверхность бака состоит из квадрата со стороной x и четырех прямоугольников со сторонами x и $\frac{V}{x^2}$. Значит, $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x^2} * x = x^2 + \frac{4V}{x}$.

Итак, $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x}$, где $x \in (0; +\infty)$

Математическая модель задачи составлена.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.* На этом этапе для функции , $S = x^2 + 4 * \frac{V}{x}$, где $x \in (0; +\infty)$ надо найти $y_{\text{наим.}}$. Для этого нужна производная функции:

$$S' = 2x - 4 * \frac{V}{x^2},$$

$$S' = \frac{2(x^3 - 2V)}{x^2}$$

На промежутке (0; +∞) критических точек нет, а стационарная точка только одна: S'=0 при $x = \sqrt[3]{2V}$.

Заметим, что при $x < \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' < 0$, а при $x > \sqrt[3]{2V}$ выполняется неравенство $S' > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{2V}$ — единственная стационарная точка, причем точка минимума функции на заданном промежутке, а потому, согласно теореме из п. 1, в этой точке функция достигает своего наименьшего значения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.* В задаче спрашивается, какой должна быть сторона основания, чтобы бак имел наименьшую поверхность. Мы выяснили, что сторона квадрата, служащего основанием такого бака, равна $\sqrt[3]{2V}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2V}$

Задача 3. Для монтажа оборудования необходима подставка объемом 1296 дм^3 в форме прямоугольного параллелепипеда. Квадратное основание подставки будет вмонтировано в пол, а ее задняя стенка — в стену цеха. Для соединения подставки по ребрам, не вмонтированным в пол или стену, используется сварка. Определите размеры подставки, при которых общая длина сварочного шва будет наименьшей.

Решение.

1) В основании подставки лежит квадрат. Пусть x длина его стороны, а y - высота подставки. Тогда ее объем равен x^2y и x^2y =1296, т.е. $y = \frac{1296}{x^2}$

2) Сварить надо 3 ребра верхнего основания и 2 ребра грани, параллельной стене. Значит, общая длина L сварки равна $3x + 2y$, т.е.

$$L(x) = 3x + 2 * \frac{1296}{x^2}, \ \ x > 0.$$

3) Найдем производную $L'(x) = \left(3x + \frac{2592}{x^2}\right)' = 3 - \frac{5184}{x^3} = \frac{3(x^2 - 1728)}{x^3}$.

Поэтому $L'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x^3 - 1728 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^3 = 12^3 \ \Leftrightarrow x = 12,$ т.е. функция $L(x)$ при $x > 0$ имеет единственную критическую точку x = 12.

4) Если $0 < x < 12,$ то $0 < x^3 < 1728$ и $L'(x) > 0$. Значит, x=12 является точкой минимума и $L_{\text{наим.}} = L(12)$. Тогда высота подставки равна $y = \frac{1296}{x^2} = \frac{1296}{144} = 9$.

Ответ: 12 дм, 12 дм и 9 дм.

Замечание. Возможно, но маловероятно решение без производных. Для этого используем неравенство $a + b + c \geq 3 * \sqrt[3]{abc}$ о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трех неотрицательных чисел.

$$L(x) = 3x + 2 * \frac{1296}{x^2} = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x + \frac{2592}{x^2} \geq 3 * \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{2592}{x^2}\right)}$$

$$= 3 * \sqrt[3]{3^3 * 216} = 54.$$

При этом равенство достигается, только если все три слагаемых равны между собой, т.е. $\frac{3}{2}\mathrm{x} = 2 * \frac{1296}{\mathrm{x}^2},\ \mathrm{x} = 1$.

Задача 4. Стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объем 108 дм^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество стали?

Решение. (Представьте, что персонально вы отвечаете за выполнение заказа по выпуску баков такой конфигурации, а сталь закупаете на свои собственные деньги.)

1) Пусть x — сторона основания, а y — высота бака в дециметрах. Тогда объем V равен

$S_{осн.} \cdot y = x^2 y$, т. е. $x^2 y = 108$**,** $y = \frac{108}{x^2}$.

Поверхность бака состоит из квадратного основания и четырех боковых граней, т. е.

$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{108}{x}$

2) Найдем критические точки функции $S = x^2 + \frac{432}{x}, x>0$

$S' = 2x - \frac{432}{x} = \frac{2(x^3-216)}{x^2}, S' = 0 \Leftrightarrow x = 6.$

3) Если $x < 6$, то $S' < 0$, а если $x > 6$, то $S' > 0$. Точка $x_0 = 6$ — единственная критическая точка, и она есть точка минимума функции $S = x^2 + \frac{432}{x}, x>0$. Значит, $£_{наим.} = S(6)$, т. е. наименьшее количество стали пойдет на бак размером 6 дм х 6 дм х 3 дм.

Ответ: основание — квадрат со стороной 6 дм, высота равна 3 дм.

Задача 5. Стальной бак без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объем 108 дм^3. При каких размерах бака на его изготовление пойдет наименьшее количество стали, если дополнительно известно, что сторона основания не должна превышать 4 дм?

Решение.

1) Пусть x — сторона основания, а y — высота бака в дециметрах. Тогда объем V равен

$S_{осн.} \cdot y = x^2y$, т. е. $x^2y = 108$**,** $y = \frac{108}{x^2}$.

Поверхность бака состоит из квадратного основания и четырех боковых граней, т. е.

$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{108}{x}$

2) Найдем критические точки функции $S = x^2 + \frac{432}{x}$, $x>0$

$S' = 2x - \frac{432}{x} = \frac{2(x^3-216)}{x^2}, S' = 0 \Leftrightarrow x = 6.$

3) Так как $0 < x \leq 4$, то $S' < 0$, и, значит, функция $S = x^2 + \frac{432}{x}$

убывает на (0; 4]. Поэтому $S_{наим} = S(4)$, т. е. наименьшее количество стали пойдет на бак размером 4 дм х 4 дм х $\frac{108}{16}$ дм.

Ответ: основание — квадрат со стороной 4 дм, высота равна 6,75 дм.

Задача 6. Невысокий стальной поддон без верхней крышки должен иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и объем 256 дм^3, а его высота не должна превышать 1 дм. При каких размерах поддона на его изготовление пойдет наименьшее количество стали?

Решение.

1) Пусть x — сторона основания, а y — высота бака в дециметрах. Тогда объем V равен

$S_{осн.} \cdot y = x^2y$, т. е. $x^2y = 108$, $y = \frac{108}{x^2}$.

Поверхность бака состоит из квадратного основания и четырех боковых граней, т. е.

$S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{1024}{x}$

2) Найдем критические точки функции $S = x^2 + \frac{432}{x}$, $x>0$

$S' = 2x - \frac{1024}{x^2} = \frac{2(x^3-512)}{x^2}, S' = 0 \Leftrightarrow x = 6.$

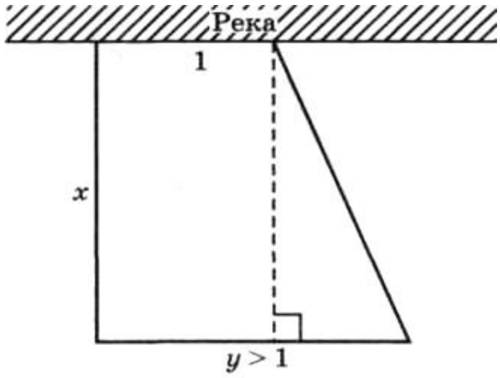
3) Так как $y \leq 1$, то $256 = x^2y \leq x^2$, $256 \leq x^2$, $x \geq 16$. Производная $S' > 0$, т. е. S возрастает на $[16; +\infty)$. Поэтому $S_{наим.} = S(16)$, т. е. наименьшее количество стали пойдет на поддон размером 16 дм х 16 дм х 1 дм.

Ответ: основание — квадрат со стороной 16 дм, высота равна 1 дм.

Задача 7. Участок имеет форму прямоугольной трапеции, меньшее основание которой равно 1 и находится на неогороженном берегу реки.

Забор, установленный вокруг участка на суше, имеет длину 7.

Найдите наибольшую площадь такого участка.



Решение.

1) Пусть x — высота трапеции, а $y > 1$ — ее большее основание (рис. 3). Если $x \geq 3$, то боковая сторона больше 3 и забор

длиннее 7. Значит, $0<x<3$ и $x + y + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 7$.

2) $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 7 - (x+y), x^2 + y^2 - 2y + 1 = 49 - 14(x+y) + x^2 + y^2 + 2xy, 2y(6-x) = 48 - 14, y = \frac{24-7x}{6-x}$.

Площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму оснований, т. е.

$$S = \frac{x(y+1)}{2} = \frac{x(24 - 7x + 6 - x)}{2(6-x)} = \frac{x(15-4x)}{6-x}, 0 < x < 3.$$

3) Исследуем S = *S(x)* с помощью производной:

$$S' = \frac{(15-8x)(6-x) - x(15-4x)(-1)}{(6-x)^2} = \frac{8x^2 - 4x^2 - 48x - 15x + 15x + 90}{(6-x)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 48x + 90}{(6-x)^2}.$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 45 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{12 \pm 3\sqrt{6}}{2} = 6 \pm 1{,}5\sqrt{6},$$

$x_2 = 6 + 1{,}5\sqrt{6} > 3$.

4) Ветви параболы $y = 2x^2 - 24x + 45$ направлены вверх, при переходе через меньший корень знак меняется с плюса на минус. Значит, $x_1 = \frac{12-3\sqrt{6}}{2} =$

$6 - 1{,}5\sqrt{6} < 3$ это точка максимума и тогда $S_{\text{наиб}} = \frac{1{,}5(4-\sqrt{6})(15-24+6\sqrt{6})}{1{,}5\sqrt{6}} =$ $\frac{(4-\sqrt{6})\cdot 3\cdot(2\sqrt{6}-3)}{\sqrt{6}} = \frac{3(11\sqrt{6}-24)}{\sqrt{6}} = 33 - 12\sqrt{6}.$

Ответ: $33 - 12\sqrt{6}.$

Наименьшее и наибольше значение квадратного трехчлена.

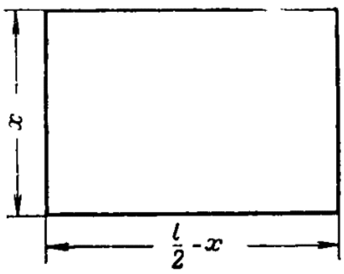
Теоретические факты:

Теорема.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет экстремальное значение, принимаемое им при: $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Это значение оказывается наименьшим, если a > 0, и наибольшим, если a < 0. Если существует y(макс), то y(мин) не существует, и наоборот.

Задача 8. Имеется проволока длины L. Требуется согнуть её так, чтобы получился прямоугольник, ограничивающий по возможности наибольшую площадь.



1) Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x. Тогда, очевидно, другая его сторона будет

$\frac{l}{2} - x$ а площадь $S = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$или $S = -x^2 + \frac{l}{2}x$

.

2) Эта функция принимает своё наибольшее значение при $x_0 = \frac{l}{4}$, что и будет искомым значением одной из сторон

прямоугольника. Тогда другая его сторона будет $\frac{l}{2} - x_0 = \frac{l}{4}$

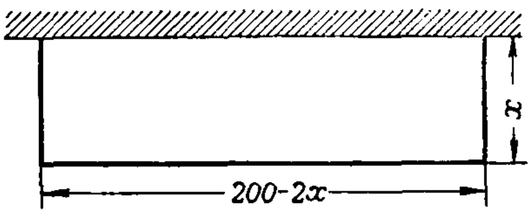
3) Т.е. наш прямоугольник оказывается квадратом. Полученное решение задачи можно резюмировать в форме следующей теоремы.

Теорема. Из всех прямоугольников, имеющих один и тот же периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.

Замечание.

В самом деле, мы видим, что площадь интересующего нас прямоугольника есть $S = x\left(\frac{l}{2} - x\right)$.Иначе говоря, есть произведение двух сомножителей x и $\frac{l}{2} - x$ Но сумма этих сомножителей есть $x + \left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{l}{2}$,т. е. число, не зависящее от выбора x. Значит, дело сводится к разложению числа $\frac{l}{2}$ на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. Как мы знаем, это произведение будет наибольшим при равенстве обоих слагаемых, т.е $x_0 = \frac{l}{4}$.

Задача 9. Из имеющихся досок можно построитъ забор длиною в 200 м. Требуется огородить этим забором прямоугольный двор наибольшей площади, используя для одной стороны двора заводскую стену.



1) Решение. Обозначим одну из сторон двора через x. Тогда другая его сторона будет равна $200 - 2x$ а его площадь будет

$S = x(200 - 2x)$

$S = -2x^2 + 200x$

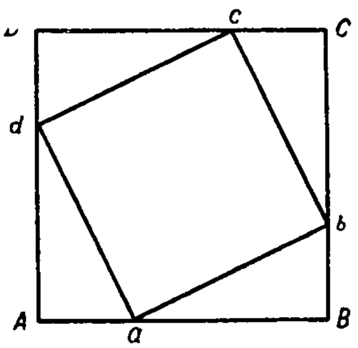
2) Согласно теореме наибольшее значение этой функции достигается ею при $x_0 = 50$

3) Итак, сторона двора, перпендикулярная к заводской стене, должна равняться 50 м, откуда для стороны, параллельной стене, получается значение 100 м, т. е. двор должен иметь форму половины квадрата.

Замечание. Если бы мы и здесь захотели использовать результат решения задачи 1, то непосредственно это нам бы не удалось, ибо $S = x(200 - 2x)$ есть произведение двух сомножителей, сумма которых равна 200 — x, т. е. зависит от x. Иначе говоря, мы не находимся в условиях задачи 1. Однако с помощью небольшого ухищрения можно всё же свести дело к задаче 1. В самом деле, рассмотрим вместо S величину z = 2S. Так как $z = 2x(200 - 2x)$,то эта функция есть произведение двух сомножителей, сумма которых уже не зависит от x и, стало быть, z(макс) достигается при $2x = 200 - 2x$

откуда x = 50.

Задача 10. Дан квадрат ABCD. От его вершины отложены равные отрезки Aa, Bb, Cc, Dd и точки a, b, c, d соединены прямыми. При каком значении Aa площадь квадрата abcd окажется наименьшей?



1) Решение. Если положить $Aa = x$ то, очевидно, окажется $aB = l - x$ и, стало быть, по теореме Пифагора будет

$$\overline{ab^2} = x^2 + (l - x)^2 = 2x^2 - 2lx + l^2$$

Но площадь S квадрата abcd как раз и равна $\overline{ab^2}$

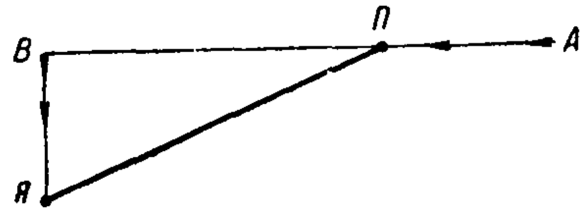
S=$2x^2 - 2lx + l^2$.

2) Поэтому наименьшее значение для S получится при $x_0 = \frac{l}{2}$

3) Таким образом, точки a, b, c и d нужно поместить в серединах сторон основного квадрата ABCD.

Задача 11. Из точек A и B по указанным стрелками направлениям выходят одновременно пароход и яхта. Их скорости соответственно равны 40 км/час и 16 км/час. Через сколько времени расстояние между ними окажется наименьшим, если AB = 145 км?[2]

Решение.



1) Отметим буквами П и Я положение парохода и яхты через t часов после выхода из точек А и В. Тогда $АП = 40t$ км , $ВЯ = 16t$ км и поэтому на основании теоремы Пифагора

$$ПЯ = \sqrt{ВП^2 + ВЯ^2} = \sqrt{(145 - 40t)^2 + (16t)^2}$$

$$ПЯ = \sqrt{1856t^2 - 11600t + 21025}$$

2) Наименьшее своё значение этот корень примет при том же самом t, при котором будет иметь наименьшее значение подкоренное выражение

т.е. при $t = \frac{11600}{3712} = 3\frac{1}{8}$ часа

3) Итак, пароход и яхта окажутся на кратчайшем расстоянии друг от друга через 3 часа 7 минут 30 секунд после выхода из точек А и В.

Применение теорем о среднем геометрическом и среднем арифметическом

Теоретические факты:

Теорема.

Пусть $x_1, x_2 \dots x_n$- неотрицательные числа и n- натуральное число. Тогда $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$. *Здесь равенство* имеет место тогда и только тогда когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

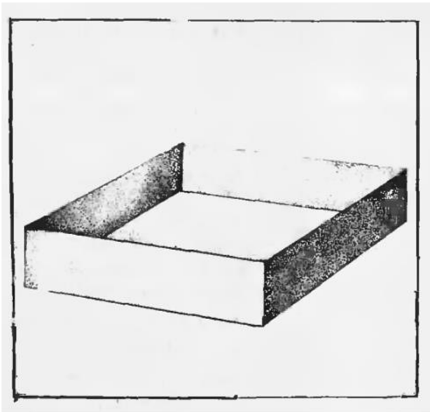
Следствия из теоремы:

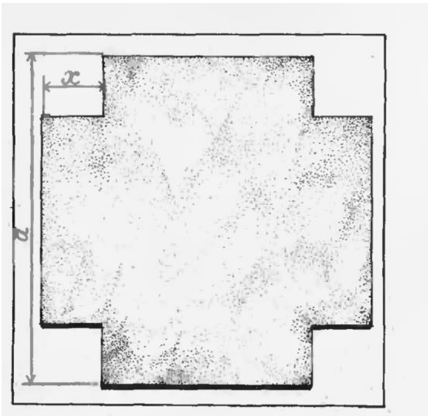
1) произведение n неотрицательных сомножителей (сумма которых постоянна) принимает наибольшее значение, когда все эти сомножители равны.

2) сумма неотрицательных слагаемых, произведение, которых постоянно, принимает наименьшее значение, когда все слагаемые равны.

3) Функция $z = x + \frac{P}{x} (P > 0)$

(в которой независимая переменная х принимает только положительные значения) достигает своего наименьшего значения при $x_0 = \sqrt{P}$ и только при этом значении х.





Задача 12. Из квадратного листа жести со стороной а сделать ящик наибольшего возможного объема, открытый сверху, вырезая равные квадраты по углам и загибая затем жесть так, чтобы образовать бока ящика.

Решение:

1) Пусть сторона каждого из вырезаемых квадратов равна х, найдем объем ящика $V = (a-2x)^2 x$. Применяя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем $4V = (a-2x)(a-2x)4x \leq \left(\frac{a-2x+a-2x+4x}{3}\right)^3 = \left(\frac{2a}{3}\right)^3$

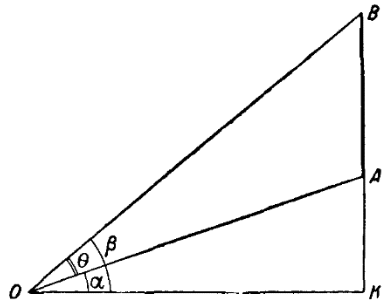
2) Следовательно, $V \leq \frac{1}{4}\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{2a^3}{27}$

3) Равенство достигается при $a - 2x = -4x$, то есть $x = \frac{a}{6}$

Задача 13. На вертикальной стене висит плакат АВ. На каком расстоянии о стены должен стоять наблюдатель, чтобы угол (θ), под которым он видит плакат, оказался наибольшим?

Решение:

1) Обозначим через точку К точку пересечения стены с горизонтальной прямой, проходящей через глаз О наблюдателя. Тогда искомое расстояние есть



ОК. Обозначим его через х положим $КА = а, КВ = b$. Если углы КОА и КОВ обозначить через α и β, то очевидно что

$$\theta = \beta - \alpha$$

Отсюда $tg\theta = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha tg\beta}$. Но $tg\alpha = \frac{a}{x}$, $tg\beta = \frac{b}{x}$. Стало быть, $tg\theta = \frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$.

2) Так как наибольшее значение θ будет при наибольшем значении его тангенса, то наша задача сводится к нахождению такого значения х, при котором дробь $\frac{b-a}{x+\frac{ab}{x}}$ будет наибольшей. Но ее числитель постоянен. Значит, нужно сделать наименьшим ее знаменатель $x + \frac{ab}{x}$.

3) По третьему следствию искомое значение $x_0 = \sqrt{ab}$

Применение производной для решения практических задач

Теоретические факты:

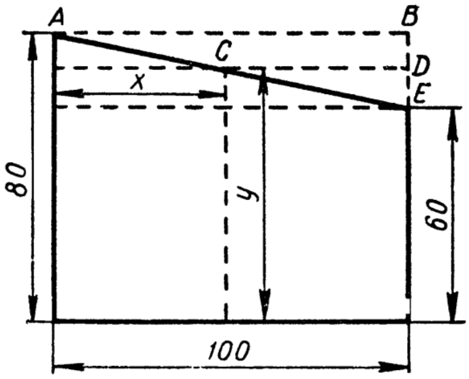
1) Производной данной функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной, когда это приращение стремится к 0.

2) Если функция $y = f(x)$ (имеющая производную) при $x = x_0$ принимает локальный максимум или минимум, то производная от этой функции при $x = x_0$ обращается в 0.

3) Для того чтобы функция(имеющая производную) имела при $x = x_0$ максимум или минимум, необходимо , чтобы производная при этом значении х была равна 0.

4) Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке $[a, b]$:

- Найти критические точки, лежащие внутри отрезка, т.е. на интервале (a,b).
- Вычислить значения функции в этих точках.
- Вычислить значения функции на концах отрезка.
- Из значений функций, найденных в предыдущих пунктах, выбрать наибольшее и наименьшее.



Задача 14. Задача о прямоугольнике наибольшей площади

Из куска, стекла, имеющего указанные на рисунке форму и размеры, нужно вырезать прямоугольную пластину наибольшей площади.

Площадь пластины $S = xy$.

1) За независимое переменное примем x$(0 < x \leq 100)$.Тогда из подобия треугольников ABE и CDE следует:

$\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE}$, $или$ $\frac{100-x}{100} = \frac{20-(80-y)}{20}$, откуда $y = -\frac{1}{5}x + 80$. Поэтому

$S = -\frac{1}{5}x^2 + 80x$.

2) Исследуем эту функцию на экстремум $S' = -\frac{2}{5}x + 80$,$-\frac{2}{5}x + 80 = 0$, $x = 200$. Найденное значение x выходит из промежутка изменения x. Поэтому внутри этого промежутка стационарных точек нет.

3) Значит наибольшее значение S принимает в одном из концов промежутка, а именно при x=100(мм), а тогда y=60(мм) и S=6000(мм^2)

Задача 15. Задача о скорости течения воды в трубе.

По трубе, сечение которой круг с радиусом r, течет вода. Известно, что скорость течения пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу профиля сечения (заполненного водой). Гидравлическим же радиусом профиля называется отношение площади профиля к длине смоченного (подводного) периметра профиля. При каком заполнении трубы водой скорость течения (при неизменных других условиях) будет наибольшей?

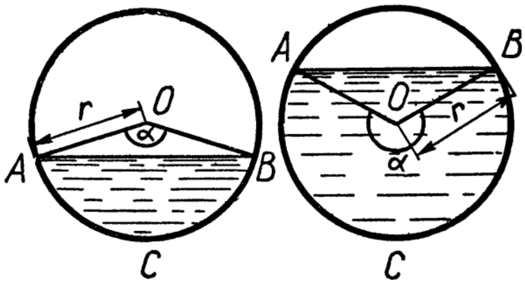


Рис. 24

Решение

1) Воспользуемся обозначениями: α- центральный угол сегмента заполнения трубы водой(в радианах)(рис 24). F - площадь этого сегмента и R - гидравлический радиус. Тогда площадь сектора OACB равна $\frac{1}{2}r^2\alpha$, а площадь треугольника AOB равна $\frac{1}{2}2rsin\frac{\alpha}{2}rcos\frac{\alpha}{2}$, или $\frac{1}{2}r^2sin\alpha$. Смоченный периметр равен $r\alpha$, а значит, $R = \frac{r}{2}\left(1-\frac{sin\alpha}{\alpha}\right)$. Эта формула будет верна и в том случае, если α будет больше π. Вообще, α может изменяться от 0 до 2π.

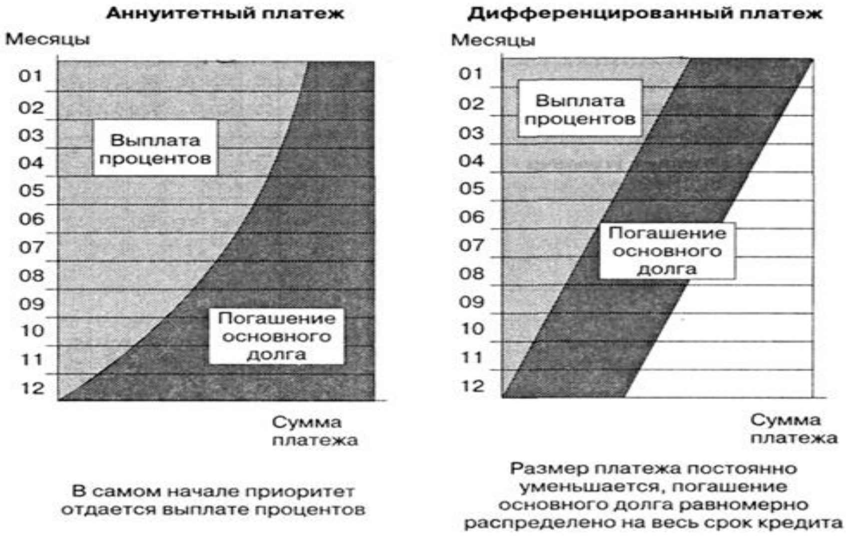
2) Найдем R' и составим уравнение для нахождения критических значений α. Получаем

$$\frac{r}{2}\cdot\frac{sin\alpha-\alpha cos\alpha}{\alpha^2}=0$$

3) Но $\alpha \neq 0$, поэтому $sin\alpha-\alpha cos\alpha=0$, или $tg\alpha=\alpha$. Полученное уравнение может быть решено графически. Единственный корень его $\alpha \approx 4{,}5$ или $\alpha \approx 258^0$. Нетрудно сообразить, что производная от R , равная $\frac{rcos\alpha}{2\alpha^2}(tg\alpha-\alpha)$ при переходе через $\alpha \approx 4{,}5$, меняет знак с «+» на «-» . Значит, при $\alpha \approx 258^0$ скорость течения будет наибольшей.

Начиная с 2015 года, в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня появилась новая практико-ориентированная задача №17, так называемая «банковская» задача. В данных задачах учащимся предлагается ознакомиться с разными схемами выплаты кредита банку со стороны заемщика.

Кредит – это ссуда, предоставленная банком заемщику под определенные проценты за пользование деньгами. Как известно, существует два вида платежей по кредиту: дифференцированный и аннуитетный.



Дифференцированные платежи рассчитываются исходя из того, что сумма погашения основного долга из месяца в месяц одинаковая, а сумма погашения процентов зависит от того, сколько насчитал банк за последний месяц.

При аннуитетных платежах размер ежемесячного платежа остается постоянным на всем периоде кредитования. Ежемесячный платеж рассчитывается как сумма процентов, начисленных на текущий период и суммы идущей на погашения суммы кредита.

Такие виды платежей рассматривались в КИМах по математике ЕГЭ 2015 года. Но кроме этих известных схем выплаты платежей по кредиту существуют и индивидуальные схемы расчета платежей по кредиту. Эти схемы представлены в задании №17 по математике профильного уровня ЕГЭ 2016 года. Кроме задач о кредитах учащимся предлагается в сборниках тренировочных вариантов познакомиться с задачами на выбор оптимального решения.

ЗАДАЧИ О КРЕДИТАХ

Задача 1

Рассмотрим задачу, которая раскрывает суть понятия «дифференцированный платеж» на простом примере. Допустим, что в *банке взят кредит 1200 рублей на 12 месяцев. Причем, каждый платежный период долг сначала возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Необходимо ответить на вопросы: Какую сумму нужно вернуть банку за весь платежный период? Какова сумма переплаты?*

Рассуждаем. Долг перед банком по состоянию на конец года должен уменьшаться до нуля равномерно, то есть последовательность долгов перед банком такова:

1200;1100; 1000; 900;800; 700; 600; 500; 400; 300; 200;100.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 10%. Тогда последовательность долгов будет такова:

1200·1.1; 1100·1.1; 1000·1.1; 900·1.1; 800·1.1; 700·1.1; 600·1.1; 500·1.1; 400·1.1; 300·1.1; 200·1.1;100·1.1. или 1320; 1210; 1100;990; 880; …110.

Обращаем внимание на то, разница между долговыми суммами равна 110 рублей. Теперь найдем ежемесячные выплаты:

1 месяц- 1320-1100=220

2 месяц- 1210-1000=210

3 месяц- 1100- 900=200

4 месяц- 990- 800=190

5 месяц – 880-700=180 и так далее. И последняя **наименьшая** выплата равна 110 рублей. Замечаем, что выплаты уменьшаются ежемесячно на 10 рублей.

Такова схема дифференцированного платежа. Далее можно найти сумму всех выплат. Она равна: 220+210+200+…+110 = 1980 (рублей). Таким образом, переплата составляет 65%.

Задача 2

15-го января 2015 года планируется взять кредит в банке на сумму 1.5 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования? Какова сумма переплаты?

Решение. Построим математическую модель этой задачи и исследуем ее. Пусть S - сумма кредита. Долг перед банком по состоянию на конец второго года должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{24S}{24}; \frac{23S}{24}; \frac{22S}{24}; \dots; \frac{S}{24}$. Занесем эти данные в таблицу:

Месяц и год	15 января 2015 г	15 февраля 2015 г	15 марта 2015г	15 апреля 2015г	…	15 декабря 2016 года	15 января 2017 года
Долг перед банком	$\frac{24S}{24}$	$\frac{23S}{24}$	$\frac{22S}{24}$	$\frac{21S}{24}$	…	$\frac{S}{24}$	0

Найдем теперь размеры выплат:

1 месяц: $\frac{24 \cdot S \cdot 1.03}{24}$ - $\frac{23S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (24·1.03 – 23).

2 месяц: $\frac{23S \cdot 1.03}{24}$ - $\frac{22S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (23·1.03 – 22).

3 месяц:: $\frac{22S \cdot 1.03}{24}$ - $\frac{21S}{24}$ = $\frac{S}{24}$ (22·1.03 – 21).

…………………………………………

24 месяц: $\frac{S \cdot 1.03}{24}$ - 0 = $\frac{S}{24}$ (1·1.03 – 0).

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{24}$ (24·1.03+23·1.03+22·1.03+…+1·1.03-23-22-21-…-1) =

= $\frac{S}{24}$ (1.03(24+23+22+…+1) –(23+22+21+…+1)) = $\frac{S}{24}$ (1.03·300–276) = $\frac{S}{24}$·33 = $\frac{11 \cdot S}{8}$

Чтобы найти численное значение суммы всех выплат, надо подставить S=1,5. Получим, что сумма всех выплат равна 2,0625 миллионов рублей, или 2062500 рублей. Найдем сумму переплаты: 2062500-1500000=562500 (рублей).

Ответ: 2062500 рублей; 562500 рублей.

Задача 3

В июле планируется взять кредит 13 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастет на 20% по сравнению с концом предыдущего года; в июле каждого года необходимо выплатить часть долга; в конце июля каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга по сравнению с концом предыдущего года. Чему равна общая сумма выплат после полного погашения кредита , если наименьший годовой платеж равен 1,56 млн рублей?

Решение.

Заметим, что наименьшая выплата в условиях дифференцированного платежа – последняя. Она равна $\frac{13}{n}$·1,2. Составим уравнение: $\frac{13}{n}$·1,2.= 1,56. Отсюда находим, что n = 10. Значит, кредит взят на 10 лет.

Найдем теперь размеры выплат:

1 год: $\frac{10 \cdot 13 \cdot 1.2}{10}$ - $\frac{9 \cdot 13}{10} = \frac{13}{10}$ (1.2·10 – 9).

2 год: $\frac{9 \cdot 13 \cdot 1.2}{10} - \frac{8 \cdot 13}{10} = \frac{13}{10}$ (1.2·9 – 8).

……………

10 год: $\frac{13}{10}$ (1.2·1– 0).

Найдем сумму всех выплат: $\frac{13}{10}$(1,2·(10+9+…+1) – (9+8+…+1)) =27,3.

Значит, сумма всех выплат равна 27,3 млн рублей.

Задача 4

15-го января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастет на r% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть S сумма кредита равна , a = 1+0,01r. Долг перед банком должен уменьшаться до нуля равномерно. Тогда последовательность размеров долга будет иметь вид:

$\frac{15S}{15}; \frac{14S}{15}; \frac{13S}{15}; \dots \frac{S}{15}$.

Найдем выплаты:

1 месяц: $\frac{15S \cdot a}{15}$ - $\frac{14S}{15} = \frac{S}{15}$ (15·a – 14).

2 месяц: $\frac{14S \cdot a}{15}$ - $\frac{13S}{15} = \frac{S}{15}$ (14·a – 13).

……………………………………………

15 месяц: $\frac{S \cdot a}{15}$

Найдем сумму всех выплат:

$\frac{S}{15}$ (a(15+14+13+…+1) –(14+13+12+…+1)) = $\frac{S}{15}$ (a·120–105) = S(8a -7).

По условию общая сумма выплат после полного погашения кредита на 24% больше суммы, взятой в кредит. Значит, S(8a -7) =1,24 S. Решая это уравнение, находим a=1,03. Так как a= 1+0,01r, то r = 3%.

Ответ: 3%

Рассмотрим задачу, которая раскрывает суть понятия «**аннуитетный** платеж».

В общем виде задача формулируется так: 31 декабря 2014 года Андрей взял в банке **S** рублей в кредит под **a** процентов годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего года банк начисляет **a** процентов на оставшуюся сумму долга. Затем Андрей переводит в банк сумму **X** ежегодного платежа (транш). Весь долг Андрей должен выплатить за **n** лет, то есть за **n** равных платежей. Необходимо найти одну из неизвестных величин: **S, a, X, или n.**

Решим одну из таких задач.

Задача 5. Нахождение количества лет выплаты кредита

Максим хочет взять в банке кредит 1,5 миллиона рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Максим взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 тысяч рублей?

Решение.

1) В конце первого года долг составит:

1500000 · 1,1 – 350000 =1300000 (р.)

2) В конце второго года долг составит:

1300000 · 1,1 – 350000 = 1080000 (р.)

2) В конце третьего года долг составит:

1080000 · 1,1 – 350000 = 838000 (р.)

4)В конце четвертого года долг составит:

$838000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 571800$ (р.)

5)В конце пятого года долг составит:

$571800 \cdot 1{,}1 - 350000 = 278980$ (р.)

6) В конце шестого года долг составит:

$278900 \cdot 1{,}1 = 306878$ (р.)

Эта сумма менее 350000 руб. Значит, кредит будет погашен за 6 лет.

Ответ: 6 лет

Задача 6. Вычисление процентной ставки по кредиту.

31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Валерий переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть a - процентная ставка по кредиту.

1)В конце первого года долг составит:

$1000000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 660000 = 340000 + 10000 \cdot a$

2) В конце второго года долг составит:

$(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000.$

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение: $(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000 = 0;$

$a^2 + 134 \cdot a - 1440 = 0$

Решая уравнение, получаем, что a = 10.

Ответ: 10%

Задача 7. Нахождение суммы кредита

31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: $(1{,}1x – 2928200)$ рублей

2) В конце второго года долг (в рублях) составит:

$(1{,}1x – 2928200)\cdot 1{,}1 – 2928200 = 1{,}21x – 3221020 – 2928200 = 1{,}21x – 6149220$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$(1{,}21x – 6149220)\cdot 1{,}1 – 2928200 = 1{,}331x – 6764142 – 2928200 =$

$=1{,}331x – 9692342$

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей:

$(1{,}331x – 9692342)\cdot 1{,}1 = 2928200;$

$1{,}4641x – 10661576 = 2928200;$

$1{,}4641x = 13589776;$

$x = 9281999{,}8.$

Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей.

Ответ: 9282000 рублей.

Задача 8. Нахождение ежегодного транша

31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга(то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Решение.

1)В конце первого года долг составит:

$8599000 \cdot 1{,}14 – X = 9802860 – X$

2) В конце второго года долг составит:

$(9802860 - X) \cdot 1{,}14 – X = 11175260 – 2{,}14 \cdot X$

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит:

$(11175260 – 2{,}14 \cdot X) \cdot 1{,}14 – X = 12739796 – 3{,}4396 \cdot X$.

Составим уравнение:

$12739796 – 3{,}4396 \cdot X = 0$

$X = 3703860$ рублей

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей.

Задача 9 *В июле 2016 года планируется взять кредит на 4 года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:*

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга

- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц, год	*Июль 2016*	*Июль 2017*	*Июль 2018*	*Июль 2019*	*Июль 2020*
долг	*S*	*0.9S*	*0.7S*	*0.4S*	*0*

Найдите наименьшее S, при котором общая сумма выплат будет больше 20 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) должен уменьшаться до нуля на июль каждого года в соответствии с данной таблицей:

S; 0.9S; 0.7S; 0.4S; 0.

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 30%. Значит, долг в январе каждого года равен:

Месяц, год	Январь 2017	Январь 2018	Январь 2019	Январь 2020	Январь 2021
Долг	1.3S	1.3·0.9·S=1.17S	1.3·0.7·S=0.91S	1.3·0.4·S=0.52S	0

Найдем теперь выплаты с февраля по июнь каждого года:

1) $1.3 \cdot S - 0.9 \cdot S = 0.4 \cdot S$.

2) $1.17 \cdot S - 0.7 \cdot S = 0.47 \cdot S$

3) $0.91 \cdot S - 0.4S = 0.51 \cdot S$

4) $0.52 \cdot S - 0 = 0.52 \cdot S$

Найдем сумму всех выплат: $0.4 \cdot S + 0.47 \cdot S + 0.51 \cdot S + 0.52 \cdot S = 1.9 \cdot S$

Общая сумма выплат должна быть больше 20 млн рублей:

$1.9 \cdot S > 20$; $S > 10\frac{10}{19}$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 11. Значит, искомый размер кредита – 11 млн рублей. Ответ: 11 млн рублей

Задача 10

15-го января планируется взять кредит в банке на четыре месяца в размере 2 млн руб. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – целое число;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	*15.01*	*15.02*	*15.03*	*15.04*	*15.05*
Долг (в млн р.)	*2*	*1.6*	*1*	*0.5*	*0*

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 2,5 млн р.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

2; 1.6; 1; 0.5; 0.

Обозначим $k = 1+\frac{r}{100}$. Тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

2k; 1.6 k; 1k; 0.5k; 0.

Найдем теперь выплаты со 2-е по 14-е число каждого месяца:

2k-1.6; 1.6k-1; k-0.5; 0.5k.

Общая сумма выплат составляет:

$(2k-1.6) +(1.6k-1) + (k-0.5) + 0.5k = 5.1k – 3.1$

По условию, общая сумма выплат будет меньше 2.5 млн руб. Значит, составляем неравенство:

$5.1k – 3.1\leq 2.5$.Подставляя вместо k выражение $1+ \frac{r}{100}$ и решая неравенство, получим, что $r \leq 9\frac{41}{51}$. Наибольшее целое решение этого неравенства – число 9. Значит, искомое число процентов - 9%.

Ответ: 9%

Задача 11 (основная волна, 06.06.16)

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на 5 лет в размере S тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается неизменно равным S тысяч рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.
Найдите общую сумму выплат за 5 лет.
Решение.
Так как в июле 2017, 2018, и 2019 годов долг перед банком не меняется, то ежегодные выплаты равны по 0,2S тысяч рублей.
В январе 2020 года долг равен 1,2S, а в июле – (1,2S – 360) тысяч рублей.
В январе 2021 года долг равен 1,2(1,2S – 360) = 1,44S – 432;
а в июле – (1,44S – 792).
Так как к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью, то составим уравнение:
1,44S – 792 = 0; S = 550.
Найдем первые три выплаты: 0,2·550 = 110 (тыс руб).
Общая сумма выплат составляет: 3· 110 + 2·360 = 1050 (тыс руб)
Ответ: 1050 тысяч рублей

Задача 12 (из тренировочных работ СТАТГРАД, апрель 2016)
Планируется выдать льготный кредит (целое число млн р.) на 5 лет. В середине каждого года долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце первого, второго и третьего годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат превысит 10 млн р.?

Решение.

Пусть S – сумма кредита, X – сумма выплат в конце 4-го и 5-го годов. В конце первого, второго и третьего годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту. Значит, ежегодные выплаты равны по $0,2 \cdot S$ тысяч рублей. А выплаты за три первых года равны $3 \cdot 0,2S = 0,6 \cdot S$. Выплаты за 5 лет равны $(0,6 \cdot S + 2 \cdot X)$. По условию задачи составляем неравенство: $0,6 \cdot S + 2 \cdot X \geq 10$ (1).

Рассуждаем далее. В начале 4 года долг составит $1,2 \cdot S$. После выплаты в конце 4 года долг составит

$(1,2 \cdot S - X)$. В начале 5-го года долг составит $(1,2 \cdot S - X) \cdot 1,2$, а после выплаты долг станет равным нулю, то есть $(1,2 \cdot S - X) \cdot 1,2 - X = 0$.

Выразим из этого уравнения $X = \frac{36 \cdot S}{55}$ и подставим в неравенство (1):

$0,6 \cdot S + 2 \cdot \frac{36 \cdot S}{55} \geq 10$;

$S \geq 5\frac{5}{21}$.

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 6. Значит, наименьший размер кредита равен 6 млн рублей.

Ответ: 6 млн р.

Задача 13

В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- *каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;*
- *с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;*
- *в июле 2017,2018,2019 годов долг остается равным 4,2 млн рубле*
- *суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.*

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты равны 6,1 млн рублей.

Решение.

Сумма выплат за первые три года равна:

$4{,}2 \cdot 0{,}01 \cdot r \cdot 3 = 0{,}126 \cdot r$

Сумма выплат за последние два года равна $2 \cdot X$.

Так как общие выплаты равны 6,1 млн рублей, то составляем уравнение:

$0{,}126 \cdot r + 2X = 6{,}1$ (1).

В январе 2020 года долг составит: $4{,}2 + 4{,}2 \cdot 0{,}01r = 4{,}2\,(1+0{,}01r)$. После выплаты суммы X долг станет равным:

$4{,}2\,(1+0{,}01r) - X = 4{,}2t - X$, где $t = 1 + 0{,}01r$.

В январе 2021 года долг составит $(4{,}2t - X) \cdot t$

После выплаты суммы X долг станет равным нулю:

$(4{,}2t - X) \cdot t - X = 0$ (2).

Из уравнения (2) выразим X:

$X = \frac{4{,}2 \cdot t^2}{1+t}$ и подставим в равенство (1):

$12{,}6 \cdot (t - 1) + 2 \cdot \frac{4{,}2 \cdot t^2}{1+t} = 6{,}1$;

$t = 1{,}1$. Значит, $r = 10\%$

Ответ: 10%

Задача 14

Алексей приобрел ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение.

Продать ценную бумагу нужно в том момент, когда 10% от стоимости станут составлять не меньше 2 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не

менее 20 тыс. рублей. Это произойдет через семь лет после покупки ценной бумаги, когда ее стоимость будет равна 21 тыс рублей. И в этот момент 10% от стоимости этой бумаги будут равны 2100 рублей, то есть больше, чем 2000 р. Значит, надо продать бумагу, а вырученные деньги положить на счет в банке. Таким образом, ценную бумагу нужно продать в течение восьмого года.
Ответ: В течение 8 года

Задача 15

Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ *млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет (px – q). При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?*

Решение. Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной

$px - (0{,}5x^2 + x + 7) = -0{,}5x^2 + (p-1)x - 7$

Это выражение является квадратным трехчленом, оно достигает своего наибольшего значения $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$ при x = p-1. Прибыль за три года составит не менее 75 млн рублей, если $\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq 25.$ Решая это неравенство, получим, что $p \geq 9$ и $p \leq -7$. Так как цена продукции не может быть отрицательной, то $p \geq 9$. Таким образом, искомая наименьшая цена составляет 9 тыс. р.

Ответ: 9 тыс. рублей.

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Задача 1

В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один *рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

Решение: 1-й способ – с помощью составления опорной линейной функции.

Ознакомимся с решением экстремальных задач по теме «Линейная функция». Решение этих задач сводится к нахождению экстремума линейной функции

$y = кx + в$, где $к$ и $в$ – постоянные. Если эту функцию рассматривать на отрезке

$[\alpha; \beta]$, то она будет иметь на нем наибольшее и наименьшее значение. При $к > 0$ наименьшее значение у принимает в точке $x = \alpha$, а наибольшее – в точке $x = \beta$, при $к < 0$ функция у в точке $x = \alpha$ принимает наибольшее значение, а в точке $x = \beta$ - наименьшее. Решим задачу.

Пусть х рабочих в 1 шахте добывают алюминий ежедневно, тогда (100-х) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (5х) кг, количество добытого никеля – 15(100-х) кг.

Пусть у рабочих во 2 шахте добывают алюминий ежедневно, (300-у) рабочих добывают никель. Тогда количество добытого алюминия равно (15у) кг, количество добытого никеля – 5(300-у) кг.

Всего количество добытого алюминия (5х+15у);а количество добытого никеля - 15(100-х)+ 5(300-у)=1500-15х+1500-5у=3000-15х-5у.

Функция сплава: F(x) = (5x+15y) + (3000-15x-5y); F(x) = -10x+10y + 3000;

Учтем условие, при котором производится сплав алюминия и никеля: 2 кг алюминия и 1 кг никеля. Тогда $5x+15y=2(3000-15x-5y)$. Отсюда $y = -1,4x+600$. Поставим это выражение в функцию сплава: $F(x) = -10x+10(-1,4x+600) + 3000$; $F(x) = -24x +5400$. Эта линейная функция является убывающей. Наибольшее значение она принимает при $x=0$. Значит, $F(100)=5400$.

Ответ:5400

2-й способ – с помощью логических рассуждений и составления уравнения. Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то для наибольшей выгоды логично допустить, чтобы все рабочие в этой шахте добывали никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Рассуждаем дальше. Значит, рабочих 2-й шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля с учетом пропорции сплава. Пусть x рабочих 2 шахты добывают алюминий, тогда (300-x) рабочих добывают никель. Составим уравнение: $5 \cdot 3 \cdot x = 2 \cdot (5 \cdot (300-x) + 1500)$; $15x = 6000-10x$; $x = 240$.

Найдем y: $y=300-240=60$.Значит, 240 рабочих 2-й шахты должны добывать алюминий, 60 рабочих добывать никель. Тогда алюминия будет добыто
$240 \cdot 5 \cdot 3 = 3600$ (кг), никеля $1500 + 60 \cdot 5=1800$(кг). Всего $3600+1800=5400$ (кг).
Ответ: 5400 кг

3-й способ – методом перебора. Так как в 1 шахте добывают больше никеля, то пусть все рабочие добывают никель. Тогда в 1 шахте будет добыто 1500 кг никеля. Во 2 шахте больше добывают алюминия. Пусть все 300 рабочих добывают алюминий. Тогда алюминия будет добыто 4500 кг. Для сплава нужно алюминия в 2 раза больше, чем никеля. Значит, на 1500 кг никеля нужно 3000 кг алюминия. А у нас алюминия больше. Что делать? Значит, рабочих 2 шахты нужно перераспределить на добычу не только алюминия, но и на добычу никеля. Применим метод перебора.

Допустим, что 10 рабочих 2 шахты добывают никель, а 290 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 290·5·3= 4350 (кг), а никеля – 1500 + 10·5= 1550 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 20 рабочих 2 шахты добывают никель, а 280 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 280·5·3= 4200 (кг), а никеля – 1500 + 20·5= 1600 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 40 рабочих 2 шахты добывают никель, а 260 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 260·5·3= 3900 (кг), а никеля – 1500 + 40·5= 1700 (кг). Замечаем, что данные не удовлетворяют пропорции 1: 2. Значит, необходимо опять увеличить количество рабочих, добывающих никель. Допустим, что 60 рабочих 2 шахты добывают никель, а 240 рабочих – алюминий. Тогда алюминия будет добыто всего 240·5·3= 3600 (кг), а никеля – 1500 + 60·5= 1800 (кг). Замечаем, что данные удовлетворяют пропорции 1: 2, то есть на 1 часть никеля приходится 2 части алюминия: 1800: 3600. Итак, всего будет добыто 3600+1800=5400 (кг) алюминия и никеля. А количество изделий из сплава тогда будет равно 1800 штук.

Ответ: 5400 кг.

Задача 2

Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс»

4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение:

1-й способ – с помощью логики и арифметических действий.

Найдем стоимость 1$м^2$номера стандартного: 2000:21=$95\frac{2}{7}$ (рублей).

Найдем стоимость 1$м^2$номера «люкс»: 4500: 49 =$91\frac{41}{49}$ (рублей).

Так как стоимость 1$м^2$ стандартного номера дороже, то выгоднее разместить на этой площади больше номеров стандартных, и как можно меньше номеров «люкс». Начнем перебор количества номеров «люкс» с наименьшей цифры. Пусть номеров «люкс» будет 0. Тогда число 1099 не делится нацело на 21. Далее. Допустим, что номеров «люкс» будет 1. Тогда: 1099- 49=1050($м^2$);

1050: 21 = 50 (номеров стандартных). Значит, на площади 1050($м^2$)можно разместить 50 стандартных номеров. Тогда в сутки отель может заработать: 50· 2000 + 1· 4500=104500 (р.). Ответ: 104500 рублей.

2-й способ – с помощью составления опорной линейной функции.

Пусть х – количество стандартных номеров, у- количество номеров «люкс». Они занимают площадь 21х+49у. Составим равенство: 21х+49у = 1099. Выразим из этого равенства у = $\frac{-21x+1099}{49}$.

Составим функцию заработанных денег: S(х, у) =2000·х + 4500·у. Далее подставим в эту функцию выражение для у. Получим S(х) =71 $\frac{3}{7}$ ·х + 4500·$22\frac{3}{7}$. Это возрастающая линейная функция. Свое наибольшее значение она принимает при наибольшем значении х и наименьшем значении у. По условию х и у – натуральные числа. Значит, у=1 (это наименьшее натуральное число) и х=50. Значит, S (50, 1) = 2000·50 + 4500· 1=104500.

Ответ: 104500 рублей.

Задача 3

На каждом из двух комбинатов работают по 100 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали А или 1 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат , из которых собирают изделие , для изготовления которого нужна 1 деталь А и 3 детали В. При этом комбинаты договариваются изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий может собрать комбинат при таких условиях?

Решение. Пусть на первом комбинате x человек изготавливают деталь А, по 3 штуки за смену. Значит, всего 3x деталей А. Тогда (100 –x) человек изготавливают деталь В, по 1 штуке за смену. Всего (100-x) деталей В.

Пусть на втором комбинате изготавливают a деталей А и b деталей В. Тогда на изготовление деталей А требуется a^2 человеко-смен, а для изготовления детали В b^2 человеко-смен. По условию $a^2 + b^2 = 100$, так как в одну смену трудятся все 100 рабочих второго комбината. Сведем все данные в таблицу:

Комбинат	Количество деталей А	Количество деталей В
1-й комбинат	3x	100-x
2-й комбинат	a	b
Всего	3x +a	100 – x +b

Чтобы собрать наибольшее количество изделий, нужно соблюдать условие:

1 деталь А и 3 детали В. В противном случае лишние детали будут залеживаться, из них нельзя будет собрать изделие, пока не будет готова другая деталь. Значит, $3(3x + a) = 100 - x + b$; $10x = 100 + b - 3a$. (1)

В каждом изделии содержится 1 деталь А и 3 детали В. Значит, общее количество изделий равно числу изделий А.

Так как a и b – целые числа и $a^2 + b^2 = 100$, то возможны следующие случаи:

1) a=0, b=10. Тогда из равенства (1) x=11 и 3x +a=3·11 +0=33.
2) a=10, b=0. Тогда из равенства (1) x=7 и 3x +a=3·7 +10=31.
3) a=6, b=8. Тогда x=9 и 3x +a=33.
4) a=8, b=6. Тогда x=8,2 – не является целым числом.

Значит, наибольшее количество изделий равно 33. Ответ: 33

1. Самоходная баржа должна доставить сельскохозяйственную продукцию от речной пристани *А* к пристани В, расположенной от *А* ниже по течению реки на 49 км, а затем из *В* должна пройти вверх по течению к пристани *С* за новой партией груза. Расстояние между пристанями *В и С* равно 25 км. Собственная скорость баржи 18 км/ч. При какой скорости течения реки время движения баржи будет наименьшим?

2. Расстояние от песчаного карьера до кирпичного завода, расположенного на прямолинейной автомагистрали, равно 30 км. Песчаный карьер удален от магистрали на 24 км. Строительный кооператив взял подряд на строительство подъездной дороги от карьера до автомагистрали. На каком расстоянии от кирпичного завода должна находиться развилка дорог, чтобы время доставки грузов от карьера до завода было наименьшим, если известно, что автомашины могут развивать на магистрали скорость 52 км/ч, а на подъездной дороге 20 км/ч?

3. Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейной шоссейной дороги, должен доставить геологов в населенный пункт, расположённый на шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к вездеходу, до населенного пункта равно 45 км. По пересеченной местности вездеход двигается со скоростью 44 км/ч, а по шоссе — 55 км/ч. На каком

расстоянии от населенного пункта вездеход должен выехать на шоссе, чтобы время движения было наименьшим?

4. Для расфасовки растворимого кофе используются металлические банки цилиндрической формы объемом 126л $см^3$. При каких размерах банки на ее изготовление потребуется наименьшее количество металла? (Расходами металла на швы можно пренебречь.)

5. Для упаковки печенья используются картонные коробки, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. Объем коробки 900 $см^3$, ее высота 4 см. Какими должны быть размеры основания коробки, чтобы на ее изготовление потребовалось наименьшее количество картона? (Расходами картона на швы при склеивании можно пренебречь.)

6. Для перевозки овощей требуется изготовить ящики без крышек, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда. Объем каждого ящика 40,5 $дм^3$, высота равна 2 дм. Какими должны быть размеры основания ящика, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала?

7. При изготовлении консервной банки цилиндрической формы заданной вместимости V требуется металл двух видов: на боковую поверхность — I сорта, на основания — II сорта, стоимость которого в 2 раза меньше, чем стоимость I сорта. При каком отношении высоты банки к радиусу ее основания затраты на металл будут наименьшими?

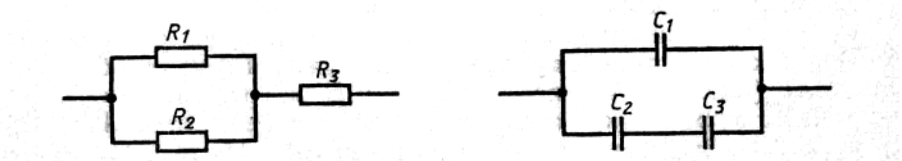
8. На изготовление бака заданного объема V требуется железо двух сортов: на боковые стенки и верхнее основание — железо II сорта, на дно— I сорта, стоимость которого в 3 раза больше, чем стоимость II сорта. Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каком отношении высоты бака к стороне его основания затраты на металл будут наименьшими?

9. Ученики отправляют выращенную ими на пришкольном участке клубнику в детский сад в коробках, имеющих форму правильной

четырехугольной призмы, периметр боковой грани которой равен 72 см. Какими должны быть размеры коробки, чтобы ее вместимость была наибольшей?

10. При проектировании цеха по переработке плодоовощной продукции планируется строительство нескольких одинаковых холодильных камер, каждая из которых имеет форму правильной четырехугольной призмы объемом 144 $м^3$. Для облицовки боковых стенок камеры используется материал, цена которого 15 тыс. р., для облицовки основания — 20 тыс. р. за 1 $м^2$. При каких размерах холодильной камеры стоимость ее облицовки будет наименьшей?

11. Из трех резисторов составлена цепь. Найдите сопротивления резисторов, при которых сопротивление цепи будет наибольшим, если известно, что $R_1 : R_2 = 3 : 5$ при последовательном соединении этих резисторов сопротивление цепи равно R.



12. Из бревна цилиндрической формы, диаметр которого D, надо изготовить балку с прямоугольным поперечным сечением наибольшей площади. Какие размеры должно иметь поперечное сечение?

13. Какой формы должен быть прямоугольный участок земли данной площади, чтобы длина ограничивающей его изгороди была наименьшей.

14. Заготовлен материал для устройства изгороди длиною l м. Этой изгородью должна быть обнесена прямоугольная площадка, примыкающая к стене здания. Какой должна быть эта площадка, чтобы она имела наибольшую площадь?

15. Сооружается палатка конусообразной формы. Для этого используются шесты длиной L м. Какой высоты должна быть палатка, чтобы она была наиболее вместительной.

16. Из трех прямоугольных кусков жести изготовляется закрытая цилиндрическая банка данной емкости. Каким должно быть отношение диаметра основания банки к ее высоте, чтобы используемые куски жести имели наименьшую площадь.

17. Чтобы уменьшить трение жидкости о стены и дно канала, нужно смачиваемую ею площадь сделать возможно малой. Требуется найти размеры открытого прямоугольного канала с заданной площадью сечения, при которых смачиваемая площадь будет наименьшей. Рассмотрим химическую реакцию окисления окиси азота

1) $2NO + O_2 = 2NO_2$. Скорость протекания этой реакции (при данной температуре) пропорциональна концентрации кислорода и квадрату концентрации окиси азота в газовой смеси, где эта реакция протекает. (Предполагается, что концентрации выражаются в объемных процентах.) При какой концентрации кислорода скорость реакции будет наибольшей?

18. Камень брошен с начальной скоростью v_oпод углом α к горизонту. При каком угле, а дальность полета камня будет наибольшей, если сопротивление воздуха не принимать в расчет?

19. На отрезке прямой линии, соединяющем два источника света, требуется найти наименее освещенную точку при условии, что оба источника имеют одну и ту же силу света. (А если сила источников света будет разной?)