МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«Методика обучения решению линейных и квадратных уравнений с параметром в основной школе»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
51,8 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
« 22 » мая 2018 г.
зав. кафедрой МиМОМ
________ Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Султанова Ирина Александровна

Научный руководитель:
Эрентраут Елена Николаева
Кандидат пед. наук, доцент

Челябинск

2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Программа по математике в школе в явном виде не упоминает о содержательно-методической линии «Задачи с параметрами», однако упомянутая линия присутствует в школьном курсе математики, а также является неотъемлемым компонентом ОГЭ (задание части 2). По результатам анализа сдачи ОГЭ, относительно содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» можно сделать следующие выводы:

- учащиеся неспособны математически грамотно и ясно записать решение соответствующих задач, проводить необходимые пояснения и обоснования;
- учащиеся с трудом справляются с заданиями, в которых необходимо применить хорошо известный им алгоритм в чуть изменившейся ситуации (именно это и является характерным показателем задач с параметрами);
- учащиеся не умеют проводить доказательные рассуждения при решении задач, аргументировать при доказательстве известные факты.

Поэтому, тема требует дальнейшей разработки. Значит, выбранная проблема актуальна.

Объект исследования: процесс обучения математике в школе.

Предмет исследования: методика обучения решению линейных и квадратных уравнений с параметром в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: изучить теорию и методику решения линейных, квадратных уравнений с параметром и разработать факультативный курс.

Гипотеза: применение разработанного факультативного курса на основе общих методов решения уравнений, содержащих параметры, позволит учащимся решать уравнения с параметром на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный способ решения, применять разные методы решения.

В соответствии с целью, объектом, предметом и гипотезой исследования были определены следующие задачи:

1. проанализировать учебно-методическую литературу по данной проблеме;
2. раскрыть основные понятия и определения по исследуемой теме;
3. рассмотреть оптимальное использование формул решения уравнений;
4. рассмотреть различные методы и приемы решения линейных и квадратных уравнений с параметром;
5. разработать факультативный курс по алгебре «Линейные и квадратные уравнения с параметром».

Уравнения с параметром дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Линейные и сводящиеся к ним уравнения

Данный класс уравнений — первый в курсе алгебры, а значит от характера его изучения в существенной мере зависят особенности организации всего последующего изучения линии уравнений.

Обучение решению уравнений начинается с простейших линейных уравнений. Вводится понятие линейного уравнения и рассматриваются случаи, когда оно имеет одно решение; имеет бесконечно много решений и не имеет решений.

Линейным уравнением с одной переменной x называют уравнение вида $kx+b = 0$, где k и b – действительные числа; k – коэффициент при переменной, b – свободный член.[21]

В уравнении: $5x - 4 = 0$; 5 – коэффициент при переменной, а (-4) - свободный член, в уравнении $3x = 0$; 3 – коэффициент при неизвестном, а свободный член равен нулю.

Корнем (или решением) уравнения называют такое число, при подстановке которого в уравнении вместо x получается верное равенство.

Решить уравнение – значит найти все его корни или установить, что их нет.

Для линейного уравнения $kx+b = 0$ могут представиться три случая:

- $k \neq 0$, в этом случае корень уравнения равен $\frac{b}{k}$;
- $k = 0; b = 0$; в данном случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x;
- $k = 0; b \neq 0$; в этом случае уравнение принимает вид $0 \cdot x = b$, оно не имеет корней.[21]

Многие уравнения в результате преобразований сводятся к линейным.

К примеру в 7 классе можно рассмотреть следующие уравнения:

1) $\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}=\frac{5x}{12}-1$

Это уравнение сводиться к линейному.

Умножим обе части на 12 (наименьшее общее кратное знаменателей 3, 4, 6, 12), получим:

$$12\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}+\frac{1-x}{6}\right)=12\left(\frac{5x}{12}-1\right)$$

$8 + 3x + 2 – 2x = 5x –12$,

$8 + 2 + 12 = 5x – 3x + 2x$,

$4x = 22$,

$x = 5{,}5$.

Ответ: 5,5.

2) Покажем, что уравнение $2(x+1)-1=3-(1-2x)$ не имеет корней.

Упростим обе части уравнения:

$2x + 2 – 1 = 3 – 1 + 2x$,

$2x + 1 = 2 + 2x$,

$0 \cdot x = 1$

Это уравнение не имеет корней, так как левая часть $0 \cdot x$ равна нулю при любом x, а значит не может быть равна 1.

2. Квадратные и сводящиеся к ним уравнения

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c называются коэффициентами квадратного уравнения. Число a – первый коэффициент, число b — второй коэффициент, число c — свободный член.[11]

Решим квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

Разделим обе части уравнения (1) на a, получим равносильное ему уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Выделим из квадратного трехчлена $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ квадрат суммы:

$$x^2 + 2x * \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Отсюда

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

Числитель дроби $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, т. е. выражение $b^2 - 4ac$, называется дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (от лат. discriminare, что означает различать). Обозначается буквой *D*.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Используя обозначение дискриминанта, уравнение (2) можно записать в виде

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \qquad (3)$$

Так как по определению квадратного уравнения $a \neq 0$, то знаменатель дроби $\frac{D}{4a^2}$ положителен. Поэтому только от дискриминанта зависит, какие значения (положительные, отрицательные или нуль) принимает эта дробь. Рассмотрим каждый случай.

1) Если D > 0, то $\frac{D}{4a^2} > 0$. В данном случае при решении квадратного уравнения (3) относительно $x + \frac{b}{2a}$ получаем:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

или

$$x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

Отсюда

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ или } x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Следовательно, уравнение (1) имеет два корня:

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Равенство $x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ называется основной формулой корней квадратного уравнения.

2) Если D = 0, то $\frac{D}{4a^2}=0$. В этом случае при решении квадратного уравнения (3) относительно $x+\frac{b}{2a}$ получаем:

$$x+\frac{b}{2a}=0.$$

Отсюда

$$x=-\frac{b}{2a}$$

Следовательно, уравнение (1) в этом случае имеет один корень: $-\frac{b}{2a}$. Этот корень можно получить по основной формуле корней квадратного уравнения.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

3) Если D < 0, то $\frac{D}{4a^2} < 0$. В этом случае как уравнение (3), так и уравнение (1) не имеют корней.

По дискриминанту квадратного уравнения можно определить, сколько оно имеет корней:

- если D > 0, то уравнение имеет 2 корня;
- если D = 0, то уравнение имеет 2 равных корня;
- если D < 0, то уравнение не имеет корней.

Таким образом, чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулем;

2) если дискриминант больше или равен нулю, то вычислить корни по формуле и написать ответ;

3) если дискриминант меньше нуля, то записать ответ.

2.1. Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ называют неполным, если $b = 0$ или $c = 0$, или одновременно $b=0$ и $c=0$.

Рассмотрим три случая:

1. $c=0$, то есть уравнение имеет вид $ax^2+bx=0$.

Такие уравнения решаются разложением левой части уравнения на множители.

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Второе уравнение — линейное. Решаем его:

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Получаем, что неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ имеет 2 корня, один из которых равен нулю, а второй – $\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Примеры.

$$1)\ x^2 + 15x = 0$$

$$x(x + 15) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x + 15 = 0$$

$$x = -15$$

Ответ: 0; -15.

$$2)\ 15x - 3x^2 = 0$$

$$3x(5 - x) = 0$$

$$3x = 0 \text{ или } 5 - x = 0$$

$$x = 0;\ x = 5$$

Ответ: 0; 5.

2. $b=0$, то есть уравнение имеет вид $ax^2+c=0$ (или $ax^2-c=0$).

Неполное квадратное уравнение такого вида или имеет 2 корня, которые отличаются только знаками, или не имеет корней.

1. Если знаки a и c — разные, то уравнение имеет 2 корня.

В курсе алгебры 7 класса такие уравнения решают разложением левой части на множители по формуле разности квадратов (поскольку квадратные корни начинают учить только в курсе 8 класса, коэффициенты a и c в 7 классе обычно являются квадратами некоторых рациональных чисел):

$$ax^2 - c = 0$$

$$(\sqrt{a}x - \sqrt{c}) \cdot (\sqrt{a}x + \sqrt{c}) = 0$$

$$\sqrt{a}x - \sqrt{c} = 0 \text{ или } \sqrt{a}x + \sqrt{c} = 0$$

$$\sqrt{a}x = \sqrt{c};\ \sqrt{a}x = -\sqrt{c}$$

$$x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}};\ x = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

Пример,

$$1)\ x^2 - 49 = 0$$

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

$$x - 7 = 0 \text{ или } x + 7 = 0$$

$$x = 7; x = -7$$

Ответ: $7;\ -7.$

2. Если знаки а и с — одинаковые, то уравнение не имеет корней.

$$2)\ 16x^2 + 2 = 0$$

Корней нет, т.к. сумма положительных чисел не равна нулю.

Ответ: нет корней.

В курсе алгебры 8 класса, после изучения квадратных корней, эти уравнения обычно решают приводя к виду $x^2=d$:

$$ax^2 - c = 0$$

$$ax^2 = c$$

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Примеры,

$$1) 4x^2 - 36 = 0$$

$$4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: ± 3.

$$2)\ 13x^2 - 5 = 0$$

$$13x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{5}{13}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{13}}$$

Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{13}$, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе

$$x = \pm\frac{\sqrt{65}}{13}$$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{65}}{13}$.

$$3)\ 2x^2 + 8 = 0$$

$$2x^2 = -8$$

Решений нет, т.к. квадратный корень не может равняться отрицательному числу.

Ответ: корней нет.

3. $b=0$ и $c=0$, то есть уравнение имеет вид $ax^2=0$.

Уравнение такого вида имеет единственный корень $x=0$

В некоторых учебниках говорится, что уравнение имеет два одинаковых корня, каждый из которых равен нулю:

$$x_1 = x_2 = 0$$

Примеры,

$$1)\ 9x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0.

$$2) - 2{,}3x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0.

2.2.Приведенные квадратные уравнения

Квадратное уравнение с коэффициентом 1 при x^2 называется приведенным квадратным уравнением.

Приведенное квадратное уравнение в общем виде обычно записывают так:

$$x^2 + px + q = 0, (1)$$

где p и q – данные числа. Число p — второй коэффициент, а q — свободный член.

Таким образом, уравнение (1) является частным случаем квадратного уравнения общего вида

$ax^2 + bx + c = 0$, (2)

где $a = 1$, $b = p$, $c = q$.

Дискриминант уравнения (1) равен:

$D = b^2 — 4ac = p^2 — 4q$ (3),

значит,

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Пусть D>0, тогда уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{q} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (4)$$

Пусть теперь D = O, тогда уравнение (1) имеет единственный корень:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}. \ (5)$$

Если же D < 0, то уравнение (1) не имеет действительных корней.

Мы показали, что:

1) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, то уравнение (1) имеет два корня, вычисляемые по формуле (6);

2) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, то уравнение (1) имеет два совпадающих корня, вычисляемые по формуле (5);

3) если $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

2.3.Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Рассмотрим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если дискриминант этого уравнения больше нуля, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}.$$

Найдем сумму корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} + \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p.$$

Сумма корней равна $-p$, т. е. второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Найдем произведение корней:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

Произведение корней равно q, т. е. свободному члену:

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Если дискриминант квадратного уравнения равен нулю, то уравнение имеет один корень. Его можно найти по формуле корней

$$x = \frac{-p \pm 0}{2}$$

Для приведенного квадратного уравнения справедлива теорема, обратная теореме Виета: если два числа таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть $x^2 + px + q = 0$ — приведенное квадратное уравнение, а числа m и n такие, что $m + n = -p$ и $mn = q$. Подставив в это уравнение вместо p равное ему число $-(m+n)$ вместо q, равное ему число, $(m \cdot n)$, получим равносильное ему уравнение

$x^2 - (m+n)x + mn = 0$.

Преобразуем левую часть получившегося уравнения:

$x^2 - mx - nx + mn = 0$,

$x(x-m) - n(x - m)n = 0$,

$(x-m)(x-n) = 0$.

Отсюда получаем:

$x - m = 0$ или $x - n = 0$,

$x_1 = m$, $x_2 = n$.

Значит, числа m и n являются корнями уравнения

$x^2 + px + q = 0$.

Для не приведенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ теорема, обратная теореме Виета, формулируется так: если числа m и n таковы, что $m+n = -\frac{b}{a}$ и $mn = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 1. Найдем сумму и произведение корней уравнения

$$\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4) > 0.$$

Равносильное ему приведенное квадратное уравнение $x^2 - 14x - 8 = 0$, полученное при умножении обеих частей уравнения $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 4 = 0$ на 2, имеет те же корни.

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = 14,\ x_1 \cdot x_2 = -8$.

3. Уравнения с параметром

В математике параметр – это постоянная величина, выраженная буквой, сохраняющая свое постоянное значение лишь в условиях данной задачи (“параметр” с греческого “parametron” – отмеривающий). [5]

Если в задаче говорится, что для каждого значения параметра a из некоторого числового множества А решить уравнение $F(x;a)= 0$ относительно x, то это уравнение называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество А – областью изменения параметра.

Под областью определения уравнения $F(x;a)=0$ с параметром a понимаются такие системы значений x и a, при которых уравнение $F(x;a)$ имеет смысл. Все значения параметра a, при которых $F(x;a)$ не имеет смысла, включать в число значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

Решить уравнение $F(x;a)=0$ (с переменной x и параметром a) – значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получающихся из данного уравнения при всех действительных значениях параметра или установить, что решений нет.

В связи с тем, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но каждое уравнение семейства должно быть решено, необходимо по некоторому целесообразному признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества и решить затем заданное уравнение на каждом из этих подмножеств. Для разбиения множества значений параметра на подмножества, удобно пользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходят качественные изменения уравнения. Такие значения параметра называются контрольными.

3.1. История возникновения уравнений с параметром

Уравнения с параметром встречались уже в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», написанном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, a>0$$

В уравнении коэффициенты, кроме параметра a, могут быть и отрицательными.

Квадратные уравнения у ал-Хорезми.

В трактате ал-Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений с параметром a. Автор выделяет 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Корни равны числу», т. е. $ax = c$.
2) «Квадраты равны числу», т. е. $ax^2 = c$.
3) «Квадраты равны корням», т. е. $ax^2 = bx$.
4) «Квадраты и корни равны числу», т. е. $ax^2 + bx = c$.
5) «Корни и числа равны квадратам», т. е. $bx + c = ax^2$.
6) «Квадраты и числа равны корням», т. е. $ax^2 + c = bx$.

Формулы решения квадратных уравнений по ал-Хорезми в Европе впервые были представлены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Теорема Виета

Теорема, выражающая связь между параметрами, коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, которая носит имя Виета, была им сформулирована в 1591 г. следующим образом: «Если $b + d$, умноженное на a минус a^2, равно bc, то a равно b и равно d».

Чтобы понять Виета, следует вспомнить, что a, как и всякая гласная буква, означала у него неизвестное (наше x), гласные же b, d – коэффициенты при неизвестном. На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

если имеет место

$(a + b)x – x^2 = ab$,

т. е. $x^2 - (a – b)x + ab = 0$,

то $x_1 = a, x_2 = b$.

Выражая зависимость между корнями и коэффициентами уравнений общими формулами, записанными с помощью символов, Виета установил единообразие в приемах решения уравнений. Однако символика Виета еще далека от современного вида. Он не признавал отрицательных чисел и поэтому при решении уравнений рассматривал лишь случаи, когда все корни положительны.

Итальянские математики Кардано, Тарталья, Бомбелли одни из первых в XII в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни. И только в XVII в. благодаря трудам Жирара, Декарта, Ньютона и других ученых способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

4. Анализ изложения тем, связанных с изучением уравнений с параметром, в школьных учебниках по алгебре

Проанализируем учебники алгебры, чтобы узнать, насколько в них представлены задания с параметрами.

Рассмотрим учебник Макарычева Ю.Н. и др. «Алгебра 7 класс».

При изучении линейных уравнений с одной переменной представлено два задания с параметром, в которых рассматриваются простейшие линейные уравнения, но коэффициент при x является параметром и необходимо исследовать на количество корней или принадлежность корня к целым числам.

1. При каких значениях коэффициента m уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m, при котором это уравнение не имеет корней? Имеет бесконечно много корней?[12, №238]
2. Найти все целые значения a, при которых корень уравнения $ax = 6$ является целым числом.[12, №245]

Следующие задания с параметром предлагаются уже только в дополнительных заданиях к главе «Системы линейных уравнений», в которых необходимо найти значение параметра, если известна точка пересечения графиков или нужно найти при каких значениях параметра система уравнений имеет или не имеет решение.

Например,

3. При каком значении a прямые $5x - 2y = 3$ и $x + y = a$ пересекаются в точке, принадлежащей оси y? [12, №1159]
4. Укажите какое-либо значение k, при котором система $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ y - kx = 3 \end{cases}$ имеет единственное решение. [12, №1165]

Рассмотрим теперь учебник Макарычева Ю.Н. и др. «Алгебра 8 класс».

При изучении темы «Квадратные уравнения» в разделе дополнительных упражнений для более углубленного повторения материала предлагаются уравнения, содержащие параметр, где необходимо найти значение переменной, если известен корень уравнения, а также представлены номера, где нужно найти значение параметра, если известны знаки корней уравнения.

Например,

5. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.[13, №659]
6. Докажите, что уравнение $7x^2 + bx - 23 = 0$ при любых значениях b имеет один положительный и один отрицательный корень. [13, №673]

При изучении остальных тем учебника параметр не использовался.

Рассмотрим учебник Макарычева Ю.Н. и др. «Алгебра 9 класс».

Использование параметра ведется в главе «Квадратичная функция». При формулировании свойств функции в зависимости от коэффициента, и предлагается для решения задач на нахождение нулей функции, которая зависит от параметра. В разделе дополнительные задачи приводятся задания с параметром на исследование:

- области значений;
- нулей функции;
- вершины параболы;
- расположения графика относительно прямой;
- принадлежность данных точек функции, содержащей два параметра.

В системе упражнений для повторения курса 7-9 классов заданий, содержащих параметр, не представлено.

Рассмотрим учебник Мордковича. А. Г. и др. «Алгебра 7 класс». Данное учебное пособие состоит из двух частей: из учебника и задачника.

При изучении линейной функции рассматривается линейное уравнение с двумя переменными и его график, где учащихся знакомят с параметром в неявном виде, то есть при рассмотрении нахождения корня линейного уравнения с одной неизвестной ставится ограничение на переменную *a* *(*a_0*)*. При изучении параметра, такие значения переменной и будем называть особыми, для которых будут соответствовать частные решения.

Номера 7.26 – 7.29 задачника содержат задания, в которых требуется найти коэффициент уравнения если известно решение уравнения. В номерах 8.58 – 8.59 необходимо найти значения переменной, если известно, что график функции проходит через данную точку.

Например,

1. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 5y - 40 = 0$, если известно, что решением уравнения является пара чисел:

   а) (3;2); б) (9; -1); в) $(\frac{1}{3}; 0)$; г) (-2; 2,4). [18, №7.26]

2. Найдите значение m, если известно, что график линейной функции $y = -5x + m$ проходит через точку:

   а) N(1;2); б) K(0,5; 4); в) N(-7; 8); г) P(1,2; -3).[18, №8.58]

Рассмотрим учебник 8 класса по алгебре Мордковича. А. Г. и др.

В главе «Квадратичная функция» при изучении функции, ее свойств и графика предлагаются задачи, которые подготавливают ученика к решению уравнений с параметром, где требуется применение производной.

3. Найдите значение коэффициента c и постройте график функции:

   а) $y = x^2 - 6x + c$, если известно, что наименьшее значение функции равно 1;

   б) $y = -x^2 + 4x + c$, если известно, что наибольшее значение функции равно 2. [20, №20.8]

А также номера 20.29 – 20.31, в которых известны точки пересечения с осями координат. Особенно нужно выделить следующие номера: № 20.45 – 20.50, где от ученика требуется творческий подход к их решению.

4. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y = -x^2 + 4x + a$ находится на равных расстояниях от осей координат.[20, №20.46]

В параграфе «Графическое решение квадратных уравнений» предлагаются задания, где представлены уравнения, содержащие параметр.

Например,

5. При каких значения p уравнение $x^2 - 2x + 1 = p$ имеет один корень? [20, №21.17]
6. При каких значениях параметра a корни двух квадратных уравнений $x^2 = a$ и $x^2 - 4x = 0$ перемножаются? [20, №21.22]

Предлагая эти уравнения для решения, учителю необходимо показать некоторые методы решения квадратных уравнений с параметром. В частности два основных метода: аналитический и графический, но так как времени на рассмотрение этих методов школьной программой в 8 классе не предусмотрено, то учителю приходится чаще всего рассматривать эти методы на факультативах.

В главе 4 «Квадратные уравнения» приводятся аналитический и графический методы решения уравнений. В задачнике представлены уравнения с параметром, где необходимо: выяснить вид квадратного уравнения и решить его при найденных значениях параметра; найти значения параметра, если известен корень квадратного уравнения.

В параграфе «Основные понятия» приводятся упражнения, в которых нужно найти значение параметра, при котором уравнение является неполным квадратным, приведенным или линейным (№№24.33 – 24.34).

При нахождении корней квадратного уравнения снова рассматриваются уравнения, содержащие параметр, где необходимо найти значение параметра при данном количестве корней квадратного уравнения.

При изучении теоремы Виета предлагаются задания на нахождение значения параметра, при котором сумма или произведение корней квадратного уравнения равна нулю, имеются задачи на нахождение параметра, если известны сумма или произведение корней уравнения.

7. При каких значениях параметра p сумма корней квадратного уравнения $x^2 + (p^2 + 4p - 5)x - p = 0$ равна нулю?[20, №26.23]

Начало курса алгебры 9 класса учебника по алгебре Мордковича. А. Г. и др. начинается с повторения, где предлагаются задачи с параметром на нахождение значения параметра при данных количествах корней.

Начнем анализ группы учебников алгебры Алимова Ш.А. и др.

Алгебра 7 класс.

Уже при изучении темы «Уравнения с одним неизвестным» предлагаются задания, которые содержат задачи с параметром, где нужно решить простейшие линейные уравнения на нахождение значения параметра, при которых уравнение имеет или не имеет корни. Особенно можно выделить № 125, который предлагается в задачах повышенного уровня.

1. Решить уравнение, принимая за неизвестное x, выяснить, при каких значениях a уравнение $2x - 3(x - a) = 3 + a$ имеет корни.[1, №125]

После рассмотрения различных способов решения систем уравнений с двумя неизвестными предлагаются задачи, одна из которых содержит систему с двумя параметрами.

2. Подобрать такие значения a и c, чтобы система уравнений $\begin{cases} x + y = 5, \\ ax + 3y = c \end{cases}$ имела: 1) единственное решение; 2) бесконечно много решений; 3) не имела решений. [1, №676]

Алгебра 8 класс.

Уравнения, содержащие параметр, встречаются впервые при изучении квадратных уравнений. Из них можно выделить номера 442, 443, 448, в которых предлагаются задания на исследование количества корней уравнения в зависимости от значения параметра.

3. Найдите все значения q, при которых уравнение $x^2 - 2x + q = 0$:
   1) имеет два различных корня;
   2) имеет один корень. [2, №443]
4. Доказать, что уравнение $x^2 + px - 1 = 0$ при любом p имеет два различных корня.[2]

При изучении квадратичной функции рассматриваются всего два номера с заданиями, содержащими параметр (№№602, 603). В этих заданиях необходимо найти значение параметра, если известно пересечение двух функций в заданной точке и параметр, содержится в коэффициенте одной из функций.

На этом использование параметра при изучении тем учебника авторы прекращают, но большое внимание уделяют параметру при повторении. Предлагаются задания, содержащие параметр, для повторения квадратных уравнений. Все номера одного характера – исследовать корни квадратного уравнения, то есть найти количество корней или сами корни в зависимости от значений параметра. Аналогичные уравнения авторы предлагают для внеклассной работы.

При изучении курса алгебры 9 класса уравнения, содержащие параметр приводятся только в задачах для внеклассной работы. Предлагаются квадратные уравнения, где необходимо:

а) найти значения параметра, при которых уравнение имеет или не имеет корни;

б) определить принадлежность корней уравнения тому или иному числовому множеству.

Чтобы выяснить, уделяется ли урочное время на решение уравнений с параметрами в 9 классе также рассмотрим учебники алгебры С.М. Никольского и А. Г. Мерзляка.

В содержании алгебры С.М. Никольского, предназначенной для 9 классов, нет параграфа, подразумевающего изучение уравнений с параметрами. Однако, в п. 5 §1 под названием «Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки» предлагается для решения несколько уравнений с параметром, помеченных * (задачи, предназначенные для кружков и факультативов). В следующем пункте под названием «Системы линейных неравенств с одной переменной» также в заданиях повышенной сложности представлено несколько систем уравнений с параметром. Эти упражнения в данном учебнике даются без теоретического сопровождения и разобранных примеров решения.

Учебник А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского и М. С. Якира, который рассчитан на учащихся 9 класса не содержит параграфа, в котором бы описывалось решение уравнений с параметрами. Но в пунктах 5 и 6 параграфа §1, в пунктах 12 и 13 параграфа §2 содержатся упражнения на решение линейных и квадратных неравенств с параметрами, а также их систем. Такие задания помечены точками и звездочками, что говорит об их, соответственно, среднем и высоком уровне сложности. Теоретических основ и подробно разобранных примеров решения таких задач в учебнике не было найдено.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

- в каждом проанализированном учебнике задания, содержащие параметр, используется для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы;
- предлагаются задания творческого характера, требующие от учащихся применения полученных знаний и умений в нестандартных условиях;
- ни в одном из рассмотренных учебников не даётся чёткого определения параметра.

Вывод по главе

На основании рассмотренного теоретического материала было установлено следующее: нельзя научиться решать любые задачи с параметрами, используя какой-то алгоритм или формулы. При решении задач с параметрами надо всегда активно использовать соображения, исходящие из здравого смысла, рассматривать их как задачи исследовательские. Таким заданиям в школьной программе уделяется мало внимания, так как решение уравнений с параметрами является одним из самых трудных, в особенности и для понимания учениками, разделом курса элементарной математики.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1. Методика решения уравнений с параметром

1.1. Линейные уравнения с параметром

Пусть дано уравнение $kx=b$.

При решении таких уравнений могут быть случаи:

1. Пусть k – любое действительное число не равное нулю и b – любое число из R, тогда $x = \frac{b}{k}$.

2. Пусть $k = 0$ и $b \neq 0$, исходное уравнение примет вид $0 \cdot x = b$, в этом случае уравнение решений не имеет.

3. Пусть $k = 0$ и $b = 0$, тогда имеем равенство $0 \cdot x = 0$, в этом случае корнем уравнения является любое действительное число.

Алгоритм решения такого типа уравнений:

1. Определить «контрольные» значения параметра.

2. Решить исходное уравнение относительно x при тех значениях параметра, которые были определены в первом пункте.

3. Решить исходное уравнение относительно x при значениях параметра, отличающихся от выбранных в первом пункте.

4. Записать ответ можно в следующем виде:

Ответ:

1) при … (значения параметра), уравнение имеет корни …;

2) при … (значения параметра), в уравнении корней нет.[5]

Пример 1.

Решить уравнение с параметром $|6 - x| = a$.

Решение.

$a \geq 0$

По правилу модуля $6 - x = \pm a$,

выразим x:

$x = 6 \pm a$.

Ответ: $x = 6 \pm a$, где $a \geq 0$.

Пример 2.

Решить уравнение $a(x - 1) + 2(x - 1) = 0$ относительно переменной x.

Решение.

Раскроем скобки: $ax - a + 2x - 2 = 0$

Запишем уравнение в стандартном виде: $x(a + 2) = a + 2$.

1. $a + 2 \neq 0$,

   т. е. если $a \neq -2$, имеем решение

   $$x = \frac{a+2}{a+2} = 1$$

   $x = 1$.

2. $a + 2 = 0$

   т.е. $a = -2$, то имеем верное равенство $0 \cdot x = 0$,

   поэтому x – любое действительное число.

Ответ: $x = 1$ при $a \neq -2$ и $x \in R$ при $a = -2$.

1.2. Квадратные уравнения с параметром

Задачи с параметрами можно разделить на два больших класса:

- задачи, в которых необходимо при всех значениях параметра из некоторого множества решить уравнение;
- задачи, в которых требуется найти все значения параметра, при каждом из которых решение уравнения удовлетворяют некоторым условиям.

В зависимости от типа задачи изменяется и вид ответа. В первом случае в решении и ответе должны быть рассмотрены все возможные значения параметров. Если хотя бы одно значение какого-либо параметра не исследовано, решение задачи не может быть признано полным.

Во втором случае в ответе перечисляются только те значения параметра, при которых выполнены условия задачи, а при решении подобных задач обычно решать заданное уравнение нет необходимости.

Уравнение вида $Ax^2 + Bx + C= 0$, где A, B, C - выражения, зависимые от параметра, x – переменная – называется квадратным уравнением с параметром.

№ 1. Определите все значения параметра a при которых уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + a + 3 = 0$ имеет два неравных корня.

Решение.

Если $a=0$, то имеем

$0\cdot x^2+2(0+1)x+0+3=0,$

$2x+3=0$

$x=-1,5$ – единственный корень.

Итак, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a\neq 0$, то уравнение имеет два различных корня, когда дискриминант $\frac{D}{4}>0$.

Найдем $\frac{D}{4}=(a+1)^2-a(a+3)=-a+1,$

$-a+1>0,$

$a<1.$

С учетом $a\neq 0$ ответ: $a\in(-\infty;0)\cup(0;1)$.

№ 2. Определите все значения параметра a, при котором уравнение $2ax^2-4(a+1)x4a+1=0$ имеет один корень.

Решение.

Если $a=0$, то имеем

$2\cdot 0\cdot x^2-4(0+1)x+4\cdot 0+1=0,$

$-4x+1=0$

$x=0{,}25$ – единственный корень.

Итак, $a=0$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a\neq 0$, то исходное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при $\frac{D}{4}=0$.

Найдем

$\frac{D}{4}=(2(a+1))^2-2a(4a+1)=-4a^2+6a+4,4a^2+6a+4=0,\quad a_1=2,\ a_2=-0{,}5.$

Ответ: $a=-0{,}5,\ a=0,\ a=2$.

№ 3. При каких значениях параметра a квадратное уравнение $(5a-1)x^2-(5a+2)x+3a-2=0$ не имеет корней?

Решение.

Если $5a-1=0$, $a=0,2$, то имеем

$(5\cdot 0,2-1)x^2-(5\cdot 0,2+2)x+3\cdot 0,2-2=0,$

$-3x-1,4=0$

$x = -\frac{7}{15}$ – единственный корень.

Итак, $a=0,2$ не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 0,2$, то квадратное уравнение не имеет корней, если дискриминант квадратного уравнения D<0.

Найдем

$D=(5a+2)^2-4(5a-1)(3a-2)=-35a^2+72a-4, -35a^2+72a-4<0,$

$35a^2-72a+4>0$, $a_1=2$, $a_2=\frac{2}{35}$, $(a-2)(a-\frac{2}{35})>0.$

С учетом а ≠ 0,2 ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{2}{35}\right) \cup (2; +\infty)$.

№ 4. Определите все значения параметра *a* при которых уравнение $(2a-1)x^2+ax+2a-3=0$ имеет не более одного решения.

Решение.

Если $2a-1=0, a=0,5$, то имеем

$(2\cdot 0,5-1)x^2+0,5\cdot x+2\cdot 0,5-3=0,$

$0,5x-2=0$ – данное уравнение является линейным, $x=4$ – единственный корень.

Итак, $a=0,5$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 0,5$, то квадратное уравнение имеет не более одного решения, если дискриминант квадратного уравнения D≤0.

Найдем

$D=a^2-4(2a-1)(2a-3)=-15a^2+32a-12,$

$-15a^2+32a-12 \leq 0,$

$15a^2-32a+12 \geq 0,$

$a_1=\frac{16+2\sqrt{19}}{15}$, $a_2=\frac{16-2\sqrt{19}}{15}$,

$(a-\frac{16-2\sqrt{19}}{15})(a-\frac{16+2\sqrt{19}}{15}) \geq 0.$

$a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right).$

Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{16-2\sqrt{19}}{15}\right] \cup \{0,5\} \cup \left[\frac{16+2\sqrt{19}}{15}; +\infty\right).$

Неполные квадратные уравнения с параметром

Общая схема решения неполных квадратных уравнений с параметрами.

$ax^2=0$, где $a \neq 0$, в=0, с=0.

Если $a \neq 0$,то уравнение примет вид: $x^2=0$, $x=0$.

Следовательно, уравнение имеет два совпадающих корня, равных нулю.

Если $a=0$, то x - любое действительное число.

$ax^2+c=0$, где $a\neq0$, в=0, $c\neq0$.

Если $a\neq0$,то уравнение примет вид:

$x^2 = -\frac{c}{a}$, если $-\frac{c}{a} > 0$

$$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

следовательно, уравнение имеет корни, то они равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку; если $-\frac{c}{a} < 0$, то $a \in \emptyset$, следовательно, уравнение корней не имеет.

Если $a=0$ и $c\neq0$, то уравнение действительных корней не имеет.

$ax^2+вx=0$, где $a\neq0$, $в\neq0$, $c=0$.

Если $a\neq0$,то уравнение примет вид: $x(a+в)=0$, $x_1 = 0$ или $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Если $a=0$, то $вx=0$, $x=0$.

№ 1. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $2x^2+(3a^2-|a|)x-a^2-3a=0$ равны нулю?

Решение.

Оба корня квадратного уравнения равны нулю, когда

$$\begin{cases} 3x^2 - |a| = 0, \\ -a^2 - 3a = 0; \end{cases} \begin{cases} |a|(3|a| - 1) = 0, \\ a(a+3) = 0, \end{cases} \begin{cases} a = 0, a = -\frac{1}{3}, a = \frac{1}{3}, \\ a = 0, a = -3, \end{cases} a = 0.$$

Ответ: $a = 0$.

№ 2. При каких значениях параметра a, корни уравнения $2x^2-(5a-3)x+1=0$ равны по модулю, но противоположны по знаку?

Решение.

Корни квадратного уравнения равны по модулю, но противоположны по знаку, когда

$5a-3=0, a=0,6,$

но с учетом того, что имеем уравнение

$2x^2+1=0,\ x^2=-0,5,$

которое корней не имеет.

Ответ: $a \in \emptyset$.

№ 3. При каких значениях параметра a один из двух различных корней уравнения $3x^2+x+2a-3=0$ равен нулю?

Решение.

Параметр должен удовлетворять условию:

$2a-3=0,\ a=1,5.$

Ответ: $a=1,5$.

Если в квадратном уравнении коэффициент при x^2 равен 1, то уравнение принимает вид x^2+px+q, где p и q - некоторые числа называется приведенным квадратным уравнением.

Решение уравнений с параметром с применением теоремы Виета

№ 1. При каком значении параметра a сумма обратных величин действительных корней уравнения $2x^2-2ax+a^2-2=0$ равна $\frac{2}{3}$?

Решение

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, по условию $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{3}, \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}$.

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=a, \\ x_1x_2=\frac{a^2-2}{2} \end{cases}$

Используя соотношения между корнями и условие задачи, имеем:

$\frac{2a}{a^2-2} = \frac{2}{3}, a^2 - 3a - 2 = 0, a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$$D = a^2 - 2(a^2 - 2) = 4 - a^2.$$

$$D \geq 0$$

$$a \in [-2; 2].$$

Имеем:

$$\begin{cases} a \in [-2; 2] \\ \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ a = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases}, \ a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: при $a = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

№ 2. В уравнении $(a^2\text{-}5a+3)x^2 + (3a\text{-}1)x+2=0$ определите a так, чтобы один из корней был вдвое больше другого.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, по условию $x_1 = 2x_2$. Заметим, что кратное сравнение выполняется только для положительных чисел.

По теореме Виета и условию задачи имеем систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3a-1}{a^2-5a+3,} \\ x_1 x_2 = \dfrac{2}{a^2-5a+3}; \end{cases} \begin{cases} 2x_2 + x_2 = \dfrac{1-3a}{a^2-5a+3}, \\ 2x_2 x_2 = \dfrac{2}{a^2-5a+3}; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \dfrac{1-3a}{3(a^2-5a+3)}, \\ x_2^2 = \dfrac{2}{2(a^2-5a+3)}. \end{cases}$$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{(1-3a)^2}{9(a^2-5a+3)^2} = \frac{1}{a^2-5a+3}; 39a = 26; a = \frac{2}{3}.$$

Можно вычислить дискриминант данного уравнения, а затем проверить, удовлетворяет ли данное значение параметра a условию, что дискриминант неотрицателен, а так же, что корни положительны. Однако в данной задаче значительно проще сделать проверку, подставив это значение а в исходное уравнение.

При $a=\frac{2}{3}$ имеем $\left(\frac{4}{9}-\frac{10}{3}+3\right)x^2+x+2=0;\ x^2+9x+18=0;\ x_1=-6;\ x_2=-3.$

Корни отрицательны и кратно не сравниваются, поэтому задача решений не имеет.

Ответ: решений нет.

№ 3. Найти все значения параметра a, при которых квадратное уравнение $(a+2)x^2-ax-a=0$ имеет два корня, расположенных на числовой прямой симметрично относительно точки $x=1$.

Решение.

При $a+2=0$, $a=-2$, *то* $2x+2=0$, $x=-1$ – единственное решение, следовательно данное значение а не удовлетворяет условию задачи.

При $a\neq-2$. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения, по условию $x_1=1-y$, $x_2=1+y$, где y – некоторое действительное число.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{a}{a+2}, \\ x_1x_2=-\dfrac{a}{a+2}; \end{cases} \begin{cases} (1-y)(1+y)=\dfrac{a}{a+2} \\ (1-y)(1+y)=-\dfrac{a}{a+2} \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы: $2(a+2)=a$, $a=-4$.

Найдем дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D=a^2-4(a+2)(-a)=5a^2+8a;$$

$$D\geq 0, a\neq -2;$$

$$5a(a+16)\geq 0$$

$$a\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1{,}6]\cup[0;+\infty).$$

Данное значение $a=-4$ удовлетворяет полученным значениям.

Ответ: $a=-4$.

1.3. Графический способ решения уравнений с параметром

При решении широкого класса задач с параметром довольно часто используется графический метод.

Напомним суть этого метода. Рассмотрим уравнение с одной переменной $f(x)$ =0. В системе координат (*xOy*) строят график функции $y = f(x)$ и находят абсциссы точек пересечения графика с осью *(Ox)*. Эти абсциссы и являются корнями данного уравнения. Часто для решения уравнения $f(x)$ =0 его заменяют равносильным $g(x) = h(x)$, затем строят графики функций $y = g(x)$ и $y = h(x)$, находят абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Решение задач с параметром графическим методом имеет ряд особенностей. Оно основано на нахождении всех точек данной плоскости, координаты которых удовлетворяют заданному в условии задачи соотношению. При этом используются различные системы координат: (*xOy), (xOa), (aOx)* (для уравнений, неравенств с переменной x и параметром a, а также их систем и совокупностей). Их выбор обусловлен особенностями задачи, простотой построения графиков и т.д.

Например, уравнение $f(x, a) = 0$ при его решении графическим методом удобно рассматривать как уравнение с двумя переменными x и a.

Определение. Пусть дано уравнение с двумя переменными $f(x, y) = 0$. Если все его решения изобразить точками на координатной плоскости, то получится некоторое множество точек плоскости, которое называется графиком уравнения $f(x, y) = 0$.

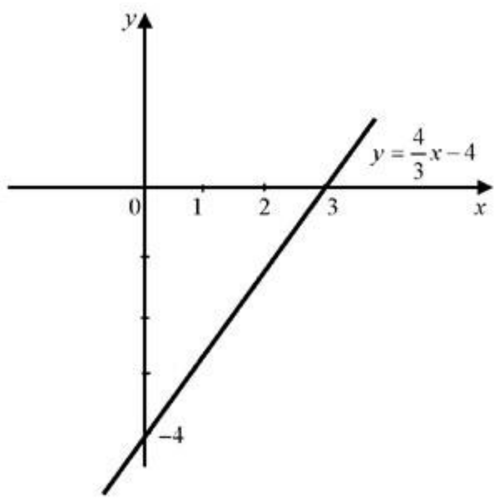
При аналитическом решении такого уравнения с двумя переменными, пользуясь свойствами уравнений, одну переменную выражают через другую. Общее решение этого уравнения имеет вид $(x; y = f(x))$ или $(x = g(y); y)$.

Рассмотрим линейное уравнение $4x - 3y = 12$. Выразим y через x:

$$3y = 4x - 12, \qquad y = \frac{4}{3}x - 4.$$

$(x; \frac{4}{3}x - 4)$ - общее решение уравнения.

В системе координат (хОу) графиком уравнения является прямая. (Рис. 1).



Координаты всех точек этой прямой являются решениями уравнения $4x - 3y = 12$.

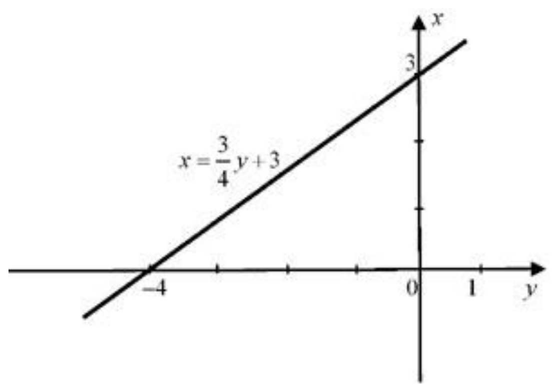
Например, при $x = 3$ $y = 0$; при $x = 0$ $y = -4$.

(3; 0), (0; - 4) - решения данного уравнения. А теперь в уравнении $4x - 3y = 12$ выразим *х* через *у*.

$4x = 3y + 12, x = \frac{3}{4}y + 3.$

$(\frac{3}{4}y + 3; y)$ - общее решение уравнения.

В системе координат (*yOx*) графиком уравнения также является прямая. (Рис. 2).



При $y = -4$ $x = 0$; при $y = 0$ $x = 3$.

Используя формулы $y = \frac{4}{3}x - 4$ (1) и $x = \frac{3}{4}y + 3$ (2), мы получим одни и те же пары значений *x* и *y*, т.е. одни и те же решения уравнения $4x - 3y = 12$:

Рассмотрим теперь уравнение $4x - 3a = 12$ с переменной x и параметром a. Это уравнение также является уравнением с двумя переменными.

Выразим x через a: $x = \frac{3}{4}a + 3$. В системе координат *(aOx)* графиком уравнения является прямая (рис. 3). Здесь переменная x является линейной функцией параметра a.

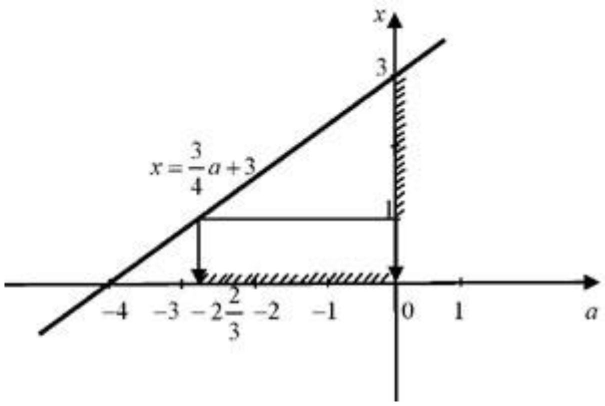
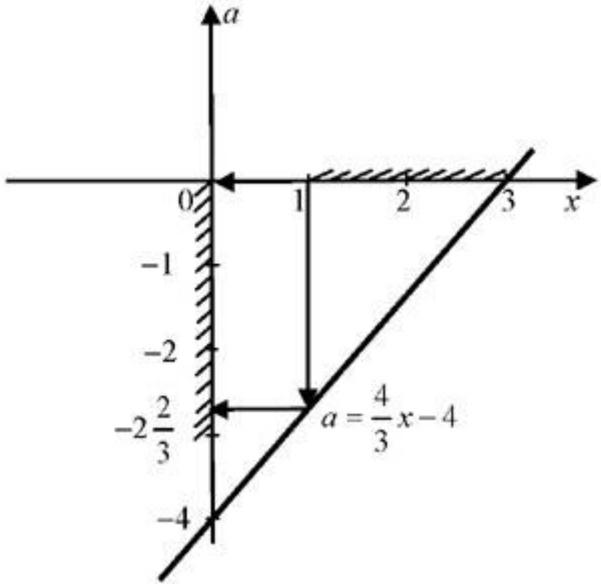


График функции $x = \frac{3}{4}a + 3$ является графической иллюстрацией ответа: для любого значения параметра a $x = \frac{3}{4}a + 3$.

При решении целого ряда задач с параметром бывает полезным выразить параметр через переменную. Из уравнения $4x - 3a = 12$ получим: $a = \frac{4}{3}x - 4$. Построим график этого уравнения в системе координат *(xOa)* (рис. 4). В данном случае параметр a является линейной функцией переменной x.

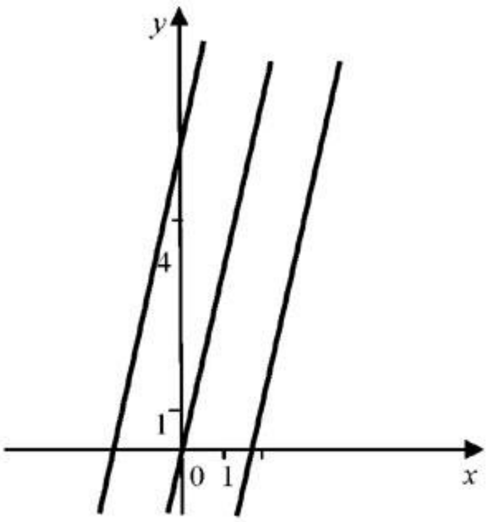


Ответим на вопрос: “При каких значениях параметра *a* корни уравнения $4x-3a=12$ принадлежат отрезку [1; 3]”?

Используем графики функций $x=\frac{3}{4}a+3$ или $a=\frac{4}{3}x-4$. (Рис. 3, 4).

$a\in[-2\frac{2}{3};0]$ (если $x=1$, то $a=-2\frac{2}{3}$; если $x=3$, то $a=0$).

А теперь построим семейство графиков функции $y=4x-3a-12$ в системе координат *(xOy)* (они параллельны прямой $y=4x$, где $a=-4$). (Рис. 5).



Решениями уравнения $4x-3a=12$ являются абсциссы точек пересечения с осью *Ox* графиков функции $y=4x-3a-12$ при заданных значениях параметра a. Если $a=-2$, то $x=\frac{3}{2}$; если $a=-4$, то $x=0$.

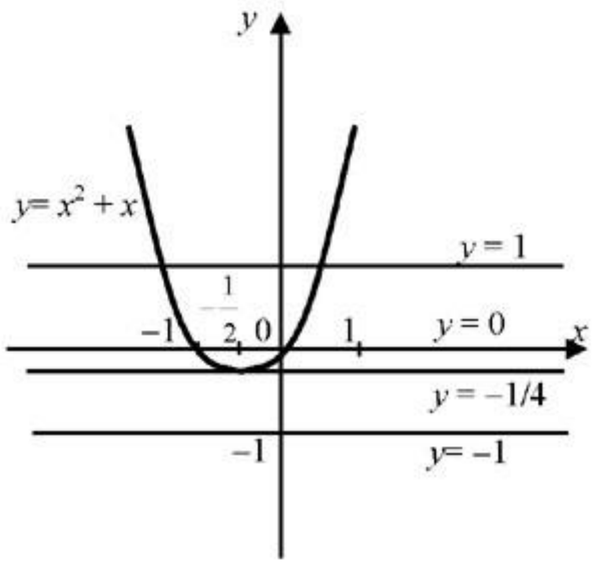
Общее решение уравнения $4x = 3a + 12 : x = \frac{3}{4}a + 3$.

Рассмотрим примеры решения задач с параметром графическим методом.

№ 1. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $x^2 + x - a = 0$?

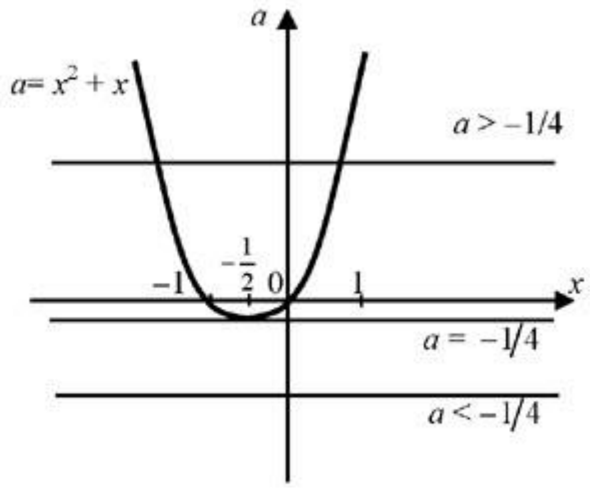
1 способ решения.

Перепишем уравнение в виде $x^2 + x - a$. Решим его в системе координат (*xOy*). Для этого построим графики функций $y = x^2 + x$ и $y = a$ (семейство прямых, параллельных оси *x*). (Рис. 6).



Ответ: Если $a > -\frac{1}{4}$, то уравнение имеет два корня; если $a = -\frac{1}{4}$, то уравнение имеет один корень; если $a < -\frac{1}{4}$, то корней нет.

2 способ. Аналогично данное уравнение решается в системе координат *(xOa*). Для этого выразим параметр a через переменную *x*: $a = x^2 + x$. (Рис. 7).



Записывая ответ, поставим в соответствие каждому фиксированному значению параметра a значение искомой величины x. Для этого график функции $a = f(x)$ “рассекается” горизонтальными прямыми.[24]

2. Факультативный курс «Линейные и квадратные уравнения с параметрами»

Пояснительная записка

Данный факультативный курс представляет собой подборку задач, позволяющих сделать изучение теоретического материала более осознанным.

Предлагаемый курс «Линейные и квадратные уравнения с параметрами» предназначен для реализации в 9 классах общеобразовательной школы для расширения теоретических и практических знаний учащихся.

Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов заданий с параметрами, для обобщения теоретических знаний.

Предлагаемый курс освещает намеченные, но совершенно не проработанные в общем курсе школьной математики вопросы.

Цель курса: расширить знания учащихся в решении уравнений с параметрами.

Основными задачами программы стали:

- повышение математической культуры учащихся в рамках школьной программы по математике;
- формирование и развитие у учащихся логического мышления, интеллектуальных и практических умений в области решения уравнений, содержащих параметр;
- формирование умений самостоятельно приобретать и применять знания в различных ситуациях;
- развитие творческих способностей; коммуникативных навыков, которые способствуют развитию умений работать в группе;
- формирование навыков исследовательской деятельности учащихся;
- подготовка к итоговой аттестации обучающихся.

В результате курса учащиеся должны научиться применять теоретические знания при решении уравнений с параметрами, знать некоторые методы решения заданий с параметрами (по определению, по свойствам функции). Данный курс представляется особенно актуальным и современным, так как расширяет и систематизирует знание учащихся, готовит их к более осмысленному пониманию теоретических сведений.

Первоочередной задачей занятий являются углубление и расширение знаний по основному курсу математики, подготовка учащихся 9 класса к итоговой аттестации.

Тематическое планирование

№ урока	Тема урока	Количество часов
1	Что такое параметр. Основные понятия уравнений с параметрами	1
2	Простейшие линейные уравнения с параметром	1

3-4	Решение линейных уравнений, содержащих параметр	2
5-6	Уравнения, сводящиеся к линейным	2
7-8	Квадратные уравнения с параметром	2
9	Применение теоремы Виета	1
10	Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена $\mathrm{A}x^2+Bx+C=0$	1
11	Графический способ решения уравнений с параметром	1
12-13	Решение задач ОГЭ	2
Контрольная работа		1
	Итого	14

Программа курса

Занятие 1. Что такое параметр. Основные понятия уравнений с параметрами

Упражнение 1. Решите уравнения

1) 7x – 1 = *a*; 2) *a*x + *a* = 1 + x;

а) при *a* = –1; 0; 1;

б) при х = –1; 0; 1.

Решение.

а)

- $a = -1$

1) $7x - 1 = -1$ 2) $-1x - 1 = 1 + x$

$x = 0$ $x = -1$

- $a = 0$

1) $7x - 1 = 0$ 2) $0x + 0 = 1 + x$

$x = \frac{1}{7}$ $x = -1$

- $a = 1$

1) $7x - 1 = 1$ 2) $1x + 1 = 1 + x$

$x = \frac{2}{x}$ $x -$ любое

б)

- $x = -1$

1) $7(-1) - 1 = a$ 2) $a(-1) + a = 1 - 1$

$a = -8$ $a -$ любое

- $x = 0$

1) $7 \cdot 0 - 1 = a$ 2) $a \cdot 0 + a = 1 + 0$

$a = -1$ $a = 1$

- $x = 1$

1) $7 - 1 = a$ 2) $a + a = 1 + 1$

$a = 6$ $a = 1$

Данное упражнение позволяет понять, что все входящие в уравнение переменные равноправны и каждая из них может быть объявлена неизвестной (аргументом). Все оставшиеся переменные объявляются параметрами, которым присваиваются по умолчанию некоторые числовые значения, входящие в область определения данного аналитического выражения.

Упражнение 2. Решите относительно *x* уравнение:

а) $6x-3y=1$;

б) $-x+3a+y=0$;

в)$-x+2y=5$.

Решение.

а) $6x-3y=1$

$x=\frac{3y+1}{6}$

б) $-x+3a+y=0$

$x=y+3a$

в) $-x+2y=5$

$x=2y-5$

Упражнение 3. Решите относительно *y* уравнения из упражнения 3.

Решение.

а) $6x-3y=1$

$y=\frac{6x-1}{3}$

б) $-x+3a+y=0$

$y=x-3a$

в) $-x+2y=5$

$$y=\frac{5+x}{2}$$

Эти упражнения позволяют показать, что приоритетная переменная может быть указана, тогда как другие переменные будут являться параметрами.

Упражнение 4. Сравнить: $-a$ и $3a$.

Решение.

Рассмотрим три случая:

1. если $a<0,\text{то}-a>3a$;
2. если $a=0,\text{то}-a=3a$;
3. если $a>0,\text{то}-a<3a$.

Упражнение 5. Решить уравнение $ax = 1$.

Решение.

На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ:

$$x = \frac{1}{a}.$$

Однако, при $a = 0$ данное уравнение решений не имеет.

Ответ: если $a = 0$, то нет решений; если $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$.

Решить уравнение с параметром – значит для всех допустимых значений параметра найти множество всех решений уравнении

Занятие 2. Простейшие линейные уравнения с параметром

Уравнения вида, $f(a)x = g(a)$ где x - переменная, $f(a)$ и $g(a)$ - некоторые функции, зависящие от a, называется линейным с параметром a.

1. Если $f(a) = g(a) = 0$, тогда уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, которое имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.
2. Если $f(a) = 0$, но $g(a) \neq 0$, тогда уравнение примет вид $0 \cdot x = g(a)$, которое не имеет решений.
3. Если $f(a) \neq 0$, тогда уравнение имеет единственное решение $x = \frac{g(a)}{f(a)}$

Упражнение 1. Решить уравнение $ax = 5$.

Решение.

1. при $a = 0$ корней нет,
2. при $a \neq 0$ $x = \frac{5}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ корней нет; при $a \neq 0$ $x = \frac{5}{a}$.

Упражнение 2. Решить уравнение $ax = -2$.

Решение.

1. при $a = 0$ корней нет,
2. при $a \neq 0$ $x = -\frac{2}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ корней нет; при $a \neq 0$ $x = -\frac{2}{a}$.

Упражнение 3. Решить уравнение $(a-3)x = -1$**.**

Решение.

1. $a = 3$

   $0 \cdot x = -1$

   $x \in \emptyset$

2. $a \neq 3$

   $$x = \frac{1}{3-a}$$

   Ответ: при $a = 3$ корней нет; при $a \neq 3$ $x = \frac{1}{3-a}$.

Упражнение 4. Решить уравнение $(a+1)x = a+1$.

Решение.

1. $a = -1$

   $0 \cdot x = 0$

   x – любое число

2. $a \neq -1,$

   $$x = \frac{a+1}{a+1} = 1$$

   Ответ: при $a = -1$ x – любое число; при $a \neq -1$ $x = \frac{a+1}{a+1} = 1$.

Упражнение 5. Решить уравнение $(a-2)x = (a-2)a$.

Решение.

1. $a = 2$

   $0 \cdot x = 0$

   x – любое число

2. $a \neq 2,$ $x = \frac{(a-2)a}{a-2} = a$

Ответ: при $a = 2$ x – любое число; при $a \neq 2$ $x = a$.

Упражнение 6. Решить уравнение $2a(a-2)x = a-2$.

Решение.

$a = 0, a = 2$ –контрольные значения параметра

1. $a = 0$

   $0 \cdot (-2) \cdot x = -2$

   $x \in \emptyset$,

2. $a = 2$

   $2 \cdot 2 \cdot 0 \cdot x = 2 - 2$

   0 = 0

   x – любое число,

3. $a \neq 0, a \neq 2$

   $$x = \frac{a-2}{2a(a-2)} = \frac{1}{2a}$$

Ответ: если $a = 0$, то корней нет; если $a = 2$, то x – любое число; если $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{cases}$, то $x = \frac{1}{2a}$.

Упражнение 7. При каких целых значениях параметра a уравнение $ax = 5 + 2x$ имеет целые корни? Найдите эти корни.

Решение.

Приведем уравнение к виду $(a-2)x = 5$.

Если $a \neq 2$, то чтобы x был целым числом, необходимо, чтобы значение выражения a – 2 было делителем числа 5, то есть a – 2 может быть равно 1; –1; 5; –5.

Отсюда a = 3; 1; 7; –3.

Ответ: при a = –3; 1; 3; 7.

Занятие 3. Решение линейных уравнений, содержащих параметр.

Упражнение 1. Найдите все значения параметра x, при которых уравнение $(a^2 + 1)\,x + a + 1 = 0$ является линейным.

Решение.

Выбрав переменную x в качестве параметра, мы тем самым сделали неизвестной переменную a. Уравнение $(a^2 + 1)$x + a + 1 = 0 будет линейным относительно переменной a, если старшая степень этой переменной, входящей в уравнение, будет равна 1. Это возможно тогда, когда коэффициент при второй степени переменной a будет равен 0, то есть если значение параметра x будет равно 0.

Ответ: при $x = 0$.

Простейшими линейными уравнениями являются уравнения с одной переменной. Полезно вспомнить, что такие уравнения могут не иметь корней, иметь единственный корень, иметь бесконечное множество корней.

Упражнение 2. При каких значениях параметра n уравнение $(n^2 - 4)x = n^3 - 2n^2 - n + 2$:

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечное множество корней;

в) не имеет корней.

Решение.

1. Выражения $n^2 - 4$ и $n^3 - 2n^2 - n + 2$ имеют смысл при любых значениях n.

2. Если $n^2 - 4 = 0$, то $n = \pm 2$.

а) при $n = 2$, получаем

$0 \cdot x = 0$, то есть x — любое число.

б) $n = –2$, получаем уравнение

$0 \cdot x = –12$, не имеющее корней.

3.Если $n^2 - 4 \neq 0$, то $n \neq \pm 2$.

При $n \neq 2$ и $n \neq –2$ уравнение имеет единственный корень.

Ответ: а) при $n \neq 2$ и $n \neq –2$; б) $n = 2$; в) $n = –2$.

Упражнение 3. Решить уравнение на множестве действительных чисел

$(2a - 1)x = 3a + (a + 2)x$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$(2a - 1)x - (a + 2)x = 3a$,

$(2a - 1 - a - 2)x = 3a$,

$(a - 3)x = 3a$

В данном случае $f(a) = a - 3, g(a) = 3a$.

1. Если $f(a)=0, a-3=0, a=3,$ тогда уравнение примет вид: $0\cdot x=9.$ Оно не имеет решений.
2. Если $f(a)\neq 0, a\neq 3,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{3a}{a-3}.$

Ответ:

1. Если $a=3,$ тогда уравнение не имеет решений.
2. Если $a\neq 3,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{3a}{a-3}.$

Упражнение 4. Решить уравнение $m(mx-1)=3(mx-1).$

Решение.

Преобразуем уравнение:

$m^2x-m=3mx-3,$

$m^2x-3mx=m-3,$

$(m^2-3m)x=m-3,$

$m(m-3)x=m-3.$

Здесь $f(m)=m(m-3)$ и $g(m)=m-3.$

1. Если $f(m)=0, m(m-3)=0, m=0, m=3;$

   а) при m = 3, уравнение примет вид: $0\cdot x=0,$ которое имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число;

   б) при m = 0, уравнение примет вид: $0\cdot x=-3,$ которое не имеет решений.
2. Если $m(m-3)\neq 0, m\neq 0, m\neq 3,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x=\frac{m-3}{m(m-3)}=\frac{1}{m}.$

Ответ:

1. Если m = 3, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.
2. Если m = 0, тогда уравнение не имеет решений.

3. Если $m \neq 0, m \neq 3$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{1}{m}$.

Упражнение 5. Решить уравнение $ax - 5a = 7x - 3$ при всех возможных a.

Решение.

Перенесем все одночлены с x влево, а оставшиеся члены – вправо. И вынесем x за скобку, как общий множитель: $x(a - 7) = 5a - 3$.

1. $(a - 7) \neq 0$, тогда мы можем поделить все уравнение на $a - 7$ и выразить $x = \frac{5a-3}{a-7}$.
2. $(a - 7) = 0$, получим уравнение $x \cdot 0 = 32$, которое не имеет решений.

Ответ: При a = 7, $x \in \varnothing$; при $a \neq 7$, $x = \frac{5a-3}{a-7}$.

Упражнение 6. Решите уравнение $a(1 - ax) = 4b - 2ax$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$a - a^2x = 4b - 2ax,$

$2ax - a^2x = 4b - a,$

$(2a - a^2)x = 4b - a,$

$a(2 - a)x = 4b - a$

1. Если $a(2 - a) \neq 0, a \neq 0, a \neq 2,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \frac{4b-a}{a(2-a)}$.
2. Если a = 0, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 4b,$

   1) если $b \neq 0$, тогда уравнение не имеет решений;

   2) если b = 0, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.
3. Если a = 2, тогда уравнение примет вид: $0 \cdot x = 4b - 2,$

   1) если $4b - 2 \neq 0, 4b \neq 2, b \neq \frac{1}{2}$, тогда уравнение не имеет решений;

   2) если $b = \frac{1}{2}$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений,

x - любое действительное число.

Ответ:

1. Если $a \neq 0$ и $a \neq 2,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = \frac{4b-a}{a(2-a)}$.
2. Если a = 0, но $b \neq 0$ и если a = 0, но $b \neq \frac{1}{2}$, тогда уравнение не имеет корней.
3. Если a = 0, b = 0 и если a = 2, $b = \frac{1}{2}$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

Занятие 4. Решение линейных уравнений, содержащих параметр.

Упражнение 1. Решить уравнение $(ab+2)x + a = 2b + (b+2a)x$

Решение:

Перенесем члены, содержащие x влево, а не содержащие вправо

$(ab+2)x - (b+2a)x = 2b - a$

$(ab+2-b-2a)x = 2b - a$

Разложим на множители выражение в правой части уравнения

$(ab-b+2-2a)x = 2b - a$

$\big(-b(1-a) + 2(1-a)\big)x = 2b - a$

$(1-a)(2-b)x = 2b - a$

$(a-1)(b-2)x = 2b - a$

1. при a≠1 и b≠2 – единственное решение $x = \frac{2b-a}{(a-1)(b-2)}$
2. при a=1

   $0 \cdot x = 2b - 1,$ если при этом

   а) $2b - 1 = 0,$ т.е. $b = \frac{1}{2}$, получим

   $0 \cdot x = 0$

   x – любое число

   б) при $b \neq \frac{1}{2}$, получим

   $0 \cdot x = 2b - 1$

нет корней

3. при b=2 получим

   $0 \cdot x = 4 - a$

   а) $4 - a = 0$, $a = 4$, получим

   $0 \cdot x = 0$,

   x – любое число

   б) $a \neq 4$, получим

   $0 \cdot x = 4 - a$,

   нет решений

4. a=1, b=2, получим

   $0 \cdot x = 3$

   нет решений

Ответ:

1) при $a \neq 1$ и $b \neq 2$ – единственное решение $x = \frac{2b-a}{(a-1)(b-2)}$

2) при $\left.\begin{matrix} a = 1, b \neq \frac{1}{2} \\ a = 4, b = 2 \end{matrix}\right\}$ x – любое число

3) при $\left.\begin{matrix} a = 1, b \neq \frac{1}{2} \\ a \neq 4, b = 2 \\ a = 1, b = 2 \end{matrix}\right\}$ нет решений

Упражнение 2. Найдите все a, при которых корнем уравнения $ax + 5a - 2(3x + 2) = -5x + a^2$ будет любое число.

Решение.

Раскроем скобки и перенесем все члены, содержащие x, влево, а остальные – вправо.

$ax - 6x + 5x = -5a + 4 + a^2$

$ax - x = a^2 - 5a + 4$

Вынесем за скобку x и разложим квадратный многочлен на множители:

$x(a - 1) = a^2 - 5a + 4$

$x(a-1)=(a-1)(a-4)$

1. $(a-1)=0, \text{т. е. } a=1$

   $0\cdot x=(a-1)(a-4)$

   $0\cdot x=0$

   x – любое число.

2. $(a-1)\neq 0, \text{т. е. } a\neq 1$

   $$x=\frac{(a-1)(a-4)}{a-1}=a-4$$

Ответ: $a=1$.

Упражнение 3. Решить уравнение $ax+b-\frac{3x+2ab}{3}=\frac{1}{2}$.

Решение.

Умножим уравнение на 6, получим

$6ax+6b-2(3x+2ab)=3$

$6ax+6b-6x-4ab=3$

$6ax-6x=3-6b=4ab$

$6(a-1)x=3-6b+4ab$

1) при $a-1\neq 0, \text{т. е. } a\neq 1$

   $$x=\frac{3-6b+4ab}{6(a-1)}$$

2) при $a=1$, получим

   $0\cdot x=3-6b+4b$

   $0\cdot x=3-2b$

   а) при $3-2b\neq 0$

   $b\neq\frac{3}{2}$

   нет решений

   б) при $3-2b=0$

   $b=\frac{3}{2}$

   x – любое число

Ответ: 1) при $a\neq 1$ единственное решение $x=\frac{3-6b+4ab}{6(a-1)}$,

2) при $a = 1$ и $b \neq \frac{3}{2}$ нет решений,

3) при $a = 1$ и $b = \frac{3}{2}$, x – любое число.

Упражнение 4.Решить уравнение $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$

Решение

Перенесем все в левую часть уравнения и приведем к общему знаменателю

$$\frac{2(a+1)x}{a} - 3(x+1) - \frac{7}{a} = 0$$

$$\frac{2(a+1)x - 3(x+1)a - 7}{a} = 0$$

1. при $a = 0$ уравнение не имеет корней
2. при $a \neq 0$

$2(a+1)x - 3(x+1)a - 7 = 0$

$2ax + 2x - 3ax - 3a - 7 = 0$

$2x - ax = 7 + 3a$

$(2 - a)x = 7 + 3a$

а) при $a \neq 2$, $x = \frac{7+3a}{2-a}$

б) при $a = 2$ получаем

$0 \cdot x = 13$

нет корней

Ответ: при $a = 0$ или $a = 2$ – нет корней;

при $a \neq 0$ и $a \neq 2$, $x = \frac{7+3a}{2-a}$.

Упражнение 5. Решить уравнение $mx - \frac{3x}{m} - m = 7 - \frac{8}{m} - 2x$.

Решение.

Перенесем все в левую часть уравнения и приведем к общему знаменателю

$$\frac{m^2x - 3x - m^2 - 7m + 8 + 2mx}{m} = 0$$

1. при $m = 0$ нет корней
2. при $m \neq 0$ получим

   $m^2x - 3x - m^2 - 7m + 8 + 2mx = 0$

   $m^2x - 3x + 2mx = m^2 + 7m - 8$

   $(m^2 + 2m - 3)x = m^2 + 7m - 8$

   $(m-1)(m+3)x = (m-1)(m+8)$

   а) при $m \neq 1, m \neq -3$

   $x = \frac{(m-1)(m+8)}{(m-1)(m+3)}$

   $x = \frac{m+8}{m+3}$ – единственное решение;

   б) при $m = 1$ получим

   $0 \cdot x = 0$

   x – любое число,

   в) при $m = -3$

   $0 \cdot x = -4{,}5$

   нет решений

Ответ: 1) при $m \neq 0$, $m \neq 1$, $m \neq -3$, единственное решение $x = \frac{m+8}{m+3}$;

2) при $m = 0$ или $m = -3$, нет корней;

3) при $m = 1$ x – любое число.

Занятие 5. Уравнения, сводящиеся к линейным

Упражнение 1. Решить уравнение $\frac{x-a}{x+2} = 0$.

Решение.

Уравнение имеет смысл при $x \neq -2$.

С учетом ОДЗ приводим уравнение к равносильному линейному

$x - a = 0$

$x = a$.

Условие $x \neq -2$ влечет за собой требование $a \neq -2$.

Ответ: $x = a$ при $a \neq -2$; $\emptyset$ при $a = -2$.

Упражнение 2. Решить уравнение $\frac{x+a}{x^2-5x-6} = 0$.

Решение.

При $x \neq -1$ и $x \neq 6$ уравнение имеет решение $x = -a$.

Из условия $x \neq -1$ и $x \neq 6$ следует, что $a \neq -1$ и $a \neq 6$.

Ответ: $x = -a$ при $a \neq -1$ и $a \neq 6$; $\emptyset$ при $a = -1$ и $a = 6$.

Упражнение 3. Решить уравнение $\frac{a+3}{x} = \frac{a}{x-3}$.

Решение.

При $x \neq 0$ и $x \neq 3$ уравнение сводится к линейному

$(a+3)(x-3) = ax$

$x = a + 3.$

Из условия $x \neq 0$ и $x \neq 3$ следует, что $a \neq 0$ и $a \neq -3$.

Ответ: $x = a + 3$ при $a \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$; $\emptyset$ при $a = 0$.

Упражнение 4. Решить уравнение $\frac{x}{5a+x} - \frac{5a+x}{x-5a} = \frac{100a^2}{25a^2-x^2}$.

Из ОДЗ видно, что $5a + x \neq 0$ и $x - 5a \neq 0,$ таким образом, $x \neq \pm 5a$.

Приведем уравнение к общему знаменателю $x^2 - 25a^2$и умножим на него все уравнение:

$x^2 - 5ax - x^2 - 10ax - 25a^2 = -100a^2$

$-15ax = -5a^2$

$ax = 5a^2.$

После преобразований получили линейное уравнение.

1. $a = 0$

   $0 \cdot x = 0$

   x – любое
2. $a \neq 0$

   $$x = \frac{5a^2}{a} = 5a.$$

   Этот корень не удовлетворяет ОДЗ.

   Ответ: При $a = 0$, x – любое; при $a \neq 0$, решений нет.

Упражнение 5. Решить уравнение $\frac{ax-1}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$.

Решение.

Уравнение имеет смысл при всех $x \neq 1$ и $x \neq -1$.

С учетом ОДЗ приведем уравнение к равносильному:

$(ax-1)(x+1)+b(x-1)=a(x^2+1)$

$x(a+b-1)=a+b+1.$

Если $a+b=1,$ то уравнение решений не имеет.

При $a+b \neq 1$ $x=(a+b+1)(a+b-1).$

Из условия $x \neq -1$ следует $a+b+1 \neq -(a+b-1),$ т.е. $a+b \neq 0.$

Равенство $x=1, \text{т. е.} a+b+1=a+b-1$ не выполняется ни при каких значениях a и b.

Ответ: $x=\frac{a+b+1}{a+b-1}$ при $a+b \neq 0, a+b \neq 1;$ $\emptyset$ при $a+b=0, a+b=1.$

Занятие 6. Уравнения, сводящиеся к линейным.

Упражнение 1. Решить уравнение $\frac{3x-2}{a^2-2a}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0$

Решение.

$$\frac{3x-2}{a(a-2)}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0$$

ОДЗ: $a \neq 0, a \neq 2.$

Умножим уравнение на $a(a-2)$:

$3x-2+(x-1)a+2(a-2)=0$

$3x-2+ax-a+2a-4=0$

$(3+a)x=6-a$

1. $a=-3$

   $0 \cdot x=9$

   нет корней

2. $a \neq -3$

   $$x=\frac{6-a}{3+a}$$

3. Ответ: при $\begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$ уравнение теряет смысл; при $a = -3$ $x \in \emptyset$; при $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -3 \end{cases}$ $x = \frac{6-a}{3+a}$.

Упражнение 2. Решить уравнение $\frac{x}{a} + \frac{a}{3} + \frac{x+3}{a+3} = 1$.

Решение.

ОДЗ: $a \neq 0, a \neq -3$

Умножим уравнение на $3a(a+3)$:

$3x(a+3) + a^2(a+3) + (x+3)3a - 3a(a+3) = 0$

$3xa + 9x + a^3 + 3a^2 + 3ax + 9a - 3a^2 - 9a = 0$

$(6a+9)x = -a^3$

$3(2a+3)x = -a^3$

1. $2a + 3 = 0$

   $a = -1{,}5$

   $0 \cdot x = -(-1{,}5)^3$

   корней нет

2. $a \neq -1{,}5$

   $$x = \frac{-a^3}{3(2a+3)}$$

   Ответ: при $\begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$ уравнение теряет смысл; при $a = -1{,}5$ $x \in \emptyset$; при $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1{,}5 \\ a \neq -3 \end{cases}$ $x = -\frac{a^3}{3(2a+3)}$.

Упражнение 3. Решить уравнение $\frac{a+3}{a+2} = \frac{2}{x} - \frac{5}{(a+2)x}$.

ОДЗ: $x \neq 0, a \neq -2$.

Умножим уравнение на $x(a+2)$:

$(a+3)x = 2(a+2) - 5$

$(a+3)x = 2a + 4 - 5$

$(a+3)x = 2a - 1$

1) $a = -3$

$0 \cdot x = -7$

корней нет

2) $a \neq -3$

$$x = \frac{2a-1}{a+3}$$

Исключим те a, при которых $x = 0$:

$$\frac{2a-1}{a+3} = 0$$

$2a - 1 = 0$

$2a = 1$

$a = 0{,}5$

Ответ: при $\begin{cases} a = 0{,}5 \\ a = -2 \end{cases}$ уравнение теряет смысл; при $a = -3$ корней нет; при $\begin{cases} a \neq -3 \\ a \neq -2 \\ a \neq 0{,}5 \end{cases}$ $x = \frac{2a-1}{a+3}$.

Упражнение 4. При каком значении *a* уравнение $\frac{x+a}{x+1} + \frac{a-3x}{x-3} = -2$ имеет единственное решение.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Упростим уравнение:

$(x + a)(x - 3) + (a - 3x)(x + 1) = -2(x + 1)(x - 3),$

$x^2 - 3a + ax - 3a + ax + a - 3x^2 - 3x = -2x^2 - 2x + 6x + 6,$

$2ax - 10x = 2a + 6,$

$x(a - 5) = a - 3.$

Последнее уравнение является линейным относительно x, и оно равносильно исходному в ОДЗ заданного уравнения.

При $a \neq 5$ уравнение имеет единственное решение $x = \frac{a+3}{a-5}$.

Полученное решение входит в ОДЗ, если $\begin{cases} \frac{a+3}{a-5} \neq -1, \\ \frac{a+3}{a-5} \neq 3. \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq 1, \\ a \neq 9. \end{cases}$

Ответ: при $a \neq 5$, $a \neq 1,\ a \neq 9$.

Занятие 7. Квадратные уравнения с параметром.

$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (A \neq 0)$

A,*B*,*C* – выражения, зависящие от параметров.

Схема исследования уравнения:

1)Если $A = 0$, то $Bx + C = 0, x = -\frac{C}{B}$.

2)Если $A \neq 0$, то находим дискриминант $D = b^2 - 4ac$;

а) $D > 0\ \ x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$;

б) $D < 0$, то уравнение не имеет решений;

в) $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{B}{2A}$.

Упражнение 1. При каких значениях параметра *a* уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$ имеет один корень (совпадающие корни)?

Решение.

Найдем все значения параметра *a*, при которых уравнение имеет 1 корень *D* = 0.

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) = 0$

$a_1 = 0, a_2 = 20$

Ответ: $a_1 = 0, a_2 = 20$.

Упражнение 2. При каких значениях параметра *a* уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ не имеет решений?

Решение.

1) $a^2 - a - 2 = 0$

$a = 2, a = -1$

При $a = 2,\ \ 3x + 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{3}$;

при $a = -1$, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$, не имеет решений.

2) $a^2 - a - 2 \neq 0$

$a \neq 2, a \neq -1$

В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля

$D = (a+1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a-3)(a+1)$

$D < 0$

$-3(a-3)(a+1) < 0,$

$(a-3)(a+1) > 0$

$a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

Теперь с учетом первого случая получаем

Ответ: $a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Упражнение 3. При каких значениях параметра a уравнение $(a+6)x^2 + 2ax + 1 = 0$ имеет единственное решение?

Решение.

По условию задачи уравнение необязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая:

1) $a + 6 = 0,$

$a = -6,$

$-12x + 1 = 0,$

$x = \frac{1}{12}.$

2) $a + 6 \neq 0,$

$a \neq -6,$

в данном случае квадратное уравнение имеет единственное решение, если $D = 0$

$D = 4a^2 - 4(a+6) = 4(a^2 - a - 6),$

$a^2 - a - 6 = 0,$

$a_1 = 3, a_2 = -2.$

Ответ: при $a = -6, a = -2, a = 3$.

Упражнение 4. Для всех значений параметра a решить уравнение $(a-1)x^2-2ax+a+2=0$.

Решение.

1) $a-1=0$,

$a=1$,

$-2x+3=0$,

$x=\frac{3}{2}$.

2) $a-1\neq 0$

$a\neq 1$.

Найдем дискриминант уравнения

$D=4a^2-4(a-1)(a+2)=-4a+8$,

а) $\begin{cases} D<0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} -4a+8<0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a>2, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $a>2$, уравнение не имеет корней

б) $\begin{cases} D=0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} -4a+8=0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $a=2$, тогда $x=\frac{a}{a-1}=2$.

в) $\begin{cases} D>0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} -4a+8>0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} a<0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ $x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{-4a+8}}{2(a-1)}=\frac{a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$.

Ответ: если $a=1$, то $x=\frac{3}{2}$; если $a=2$, то $x=2$; если $a>2$, то уравнение не имеет корней; если $\begin{cases} a<0, \\ a\neq 1, \end{cases}$ то $x_{1,2}=\frac{2a\pm\sqrt{-4a+8}}{2(a-1)}=\frac{a\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$.

Упражнение 5. При каких значениях параметра a уравнение $a(a+3)x^2+(2a+6)x-3a-9=0$ имеет более одного корня?

Решение.

1. Если $a(a+3)=0$, то уравнение будет линейным.

   При $a=0$ получаем уравнение $6x-9=0$, корень которого $x=\frac{3}{2}$.

   Таким образом, при $a=0$ уравнение имеет один корень. При $a=-3$ получаем $0\cdot x^2+0\cdot x-0=0$, корнями этого уравнения являются любые рациональные числа. Уравнение имеет бесконечное количество корней.

2. Если $a \neq 0; a \neq -3$, то получим квадратное уравнение.

   При положительном дискриминанте уравнение будет иметь более одного корня:

   $D > 0,$

   $\frac{D}{4} = (a+3)^2 + 3a(a+3)^2 > 0$

   $(a+3)^2(3a+1) > 0$

   $a > -\frac{1}{3}.$

   С учетом $a \neq 0; a \neq -3$, получим, что уравнение имеет два корня при $a \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty).$

Ответ: $a \in \{-3\} \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty).$

Занятие 8. Квадратные уравнения с параметром.

Упражнение 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + x + \frac{2a-1}{a+5} = 0$ не имеет решений?

Решение.

При $a = -5$ уравнение не имеет смысла.

1. *D= b*^{2}*-4ac=1-4*$\frac{2a-1}{a+5}$=$\frac{a+5-8a+4}{a+5}$=$\frac{-7a+9}{a+5}$.

Квадратное уравнение не имеет корней при $D < 0$.

$\frac{-7a+9}{a+5} < 0,$

$a \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{9}{7}; +\infty\right).$

Ответ: $a \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{9}{7}; +\infty\right).$

Упражнение 2. При каких значениях параметра a уравнение $(3a-1)x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ имеет два действительных различных корня?

Решение.

1. Если $3a - 1 = 0$, т. е. $3a = 1$; $a = \frac{1}{3}$, то уравнение линейное

   $\frac{2}{3}x - 1 = 0$ имеет единственный корень.

2. При $a \neq \frac{1}{3}$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (3a-1)(3a-2) = a^2 - 9a^2 + 3a + 6a - 2$$
$$= -8a^2 + 9a - 2,$$

квадратное уравнение имеет два различных корня, если $\frac{D}{4} > 0$,

$-8a^2 + 9a - 2 > 0$,

$8a^2 + 9a + 2 < 0$,

$a_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-64}}{16} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{16}$.

Ответ: $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$.

Упражнение 3. Решите уравнение $a^2x = a(x+2) - 2$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$(a^2 - a)x = 2(a-1)$.

1. Если $(a^2 - a) = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{2(a-1)}{a^2-a} = \frac{2}{a}$.
2. Если $(a^2 - a) \neq 0$, то $a = 0$ или $a = 1$.

   а) $a = 0$, тогда уравнение принимает вид $0 \cdot x = -2$ и не имеет решений.

   б) $a = 1$, тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и ему удовлетворяет любое действительное решение.

Ответ: При $a \neq 0$ и $a \neq 1$ $x = \frac{2}{a}$ – единственный корень уравнения; при $a = 1$ любое число является корнем уравнения; при $a = 0$ уравнение не имеет корней.

Упражнение 4. Докажите, что при любом значении параметра a уравнение $3x^2 - 5ax - a^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня.

1. $a = 0$,

   $3x^2 - 1 = 0$,

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $a \neq 0$,

$D = (-5a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-a^2 - 1) = 25a^2 + 12a^2 + 12 = 37a^2 + 12 > 0$.

Уравнение имеет два различных корня при всех значениях параметра a.

Упражнение 5. Один из корней уравнения $x^2 + 2ax + 2 - 3a = 0$ равен 1. Найдите значение параметра a и второй корень уравнения.

Подставим $x_1 = 1$ в уравнение и получим верное равенство:

$1^2 + 2a + 1 + 2 - 3a = 0$,

$3 - a = 0$,

$a = 3$.

Подставим это значение параметра a в данное уравнение:

$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 2 - 3 \cdot 3 = 0$,

$x^2 + 6x - 7 = 0$,

$x_1 = 1, \qquad x_2 = -7$.

Ответ: $a = 3$, $x_2 = -7$.

Занятие 9. Применение теоремы Виета.

Теорема. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то для них справедливы соотношения $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Упражнение 1. При каких значениях k произведение корней квадратного уравнения $x^2 + 3x + (k^2 - 7k + 12) = 0$ равно нулю?

Решение.

По теореме Виета имеем

$x_1 \cdot x_2 = k^2 - 7k + 12$ и по условию $x_1 \cdot x_2 = 0$.

Корнями уравнения $k^2 - 7k + 12 = 0$ являются числа 3 и 4.

При k = 3 и k = 4 получим уравнение $x^2 + 3x = 0$, произведение корней которого равно 0.

Ответ:3;4.

Упражнение 2. При каких значениях k сумма корней квадратного уравнения $x^2 + (k^2 + 4k - 5)x - k = 0$ равна нулю?

Решение.

По условию $x_1 + x_2 = 0$, по теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -(k^2 + 4k - 5)$.

Корнями уравнения $k^2 + 4k - 5 = 0$ являются числа 1 , -5.

При k = 1 получим уравнение $x^2 - 1 = 0$, сумма корней которого равна 0.

При k = -5 получим уравнение $x^2 + 5 = 0$, которое не имеет корней.

Ответ:1.

Упражнение 3. В уравнении $x^2 - 4x + a = 0$ сумма квадратов корней равна 16. Найдите a.

Решение.

По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = 4,\ x_1 \cdot x_2 = a$.

По условию $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = 16,$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16,$

$4^2 - 2a = 16,\ a = 0.$

При $a = 0$ уравнение $x^2 - 4x = 0$ имеет корни, сумма квадратов которых равна 16.

Ответ: 0.

Упражнение 4. При каких значениях a, сумма корней уравнения

$x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней?

Решение.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2a,\ x_1x_2 = 2a - 1.$

По условию $x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2.$

$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$2a = (2a)^2 2(2a - 1),$

$a = 1, \qquad a = \frac{1}{2}.$

При $a = 1$ уравнение $x^2 - 2(x-1) - 1 = 0$ имеет корень 1, при $a = \frac{1}{2}$ уравнение $x^2 - x = 0$ имеет корни 1 и 0.

Ответ: 1 , $\frac{1}{2}$.

Упражнение 5. В уравнении $x^2 - 2x + a = 0$ квадрат разности корней равен 16. Найдите a.

Решение.

По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = 2, x_1x_2 = a.$

Чтобы корни существовали, дискриминант нашего уравнения должен быть неотрицательным,

$D = 4 - 4a \geq 0$, т.е. $a \leq 1.$

По условию $(x_1 - x_2)^2 = 16,$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16,$

$4 - 4a = 16,$

$a = -3, -3 \leq 1.$

Ответ: $a = -3.$

Занятие 10. Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена А$\boldsymbol{x^2 + Bx + C = 0}$.

- Уравнение имеет корни одного знака, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$
- Уравнение имеет положительные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$
- Уравнение имеет отрицательные корни, если $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} < 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$
- Уравнение имеет корни разных знаков, если $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} < 0.$

Упражнение 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$ имеет корни разных знаков?

Решение.

1) Найдем все значения параметра a, при которых уравнение имеет действительные решения.

   $D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20),\ \ D > 0$

   $a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty)$.

2) Уравнение имеет корни разных знаков, если $\begin{cases} D > 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$

   $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty), \\ a < 0, \end{cases}$ $a \in (-\infty; 0)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$.

Упражнение 2. При каком значении параметра b уравнение $\boldsymbol{x^2 - 2bx + b + 6 = 0}$ имеет отрицательные корни?

Решение.

$\boldsymbol{x_1 + x_2 = 2b < 0}$ (т. к. корни отрицательные), а $\boldsymbol{x_1 x_2 = (b + 6) > 0}$.

Имеем два неравенства:

$\begin{cases} \boldsymbol{2b < 0}, \\ \boldsymbol{b + 6 > 0}, \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{b < 0}, \\ \boldsymbol{b > -6}, \end{cases}$ $\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{-6}; \boldsymbol{0})$.

Ответ:$\boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{-6}; \boldsymbol{0})$.

Упражнение 3. При каких значениях параметра a уравнение $\boldsymbol{(3 - a)x^2 + 2(a + 1)x + 2a = 0}$ имеет корни одинаковых знаков?

Решение.

Найдем все значения параметра a, при которых уравнение имеет действительные решения.

$D > 0$,

$D = 4(a + 1)^2 - 8a(3 - a) = 4a^2 + 8a + 4 - 24a + 8a^2 = 12a^2 - 16a + 4$

$12a^2 - 16a + 4 > 0$,

$3a^2 - 4a + 1 > 0$,

$a_1 = 1;\ \ a_2 = \dfrac{1}{3}$.

$3(a - 1)\left(a - \dfrac{1}{3}\right) > 0$

$a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

1) $\boldsymbol{3 - a = 0}$,

   $\boldsymbol{a = 3}$, получаем линейное уравнение, у которого только один корень.

2) $\boldsymbol{3 - a \neq 0}$,

   $\boldsymbol{a \neq 3}$,

   Поделим все уравнение на $(\boldsymbol{3 - a})$:

   $$\boldsymbol{x^2 + \frac{2(a+1)}{3-a}x + \frac{2a}{3-a} = 0}.$$

   Квадратное уравнение имеет корни одного знака, если:

   $$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{\frac{2a}{3-a} > 0}, \\ \boldsymbol{\frac{2a}{3-a} < 0}, \end{array}\right. \quad \boldsymbol{a \in (0; 3)}.$$

Пересекаем полученные решения, получаем: $\boldsymbol{a \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; 3)}$.

Ответ: $\boldsymbol{a \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (1; 3)}$.

Упражнение 4. При каких значениях параметра a уравнение $\boldsymbol{ax^2 + 3(a-4)x + a = 0}$ будет иметь два положительных различных корня?

Решение.

Так как уравнение должно иметь два неравных корня, то $\begin{cases} \boldsymbol{D > 0}, \\ \boldsymbol{a \neq 0}. \end{cases}$

$$\boldsymbol{D = 9(a-4)^2 - 4a^2 = (3(a-4) - 2a)(3(a-4) + 2a)}$$
$$\boldsymbol{= (a-12)(5a-12) > 0}$$

Так как $\boldsymbol{a \neq 0}$, разделим обе части на a.

$$\boldsymbol{x^2 + \frac{3(a-4)}{a}x + 1 = 0}$$

По теореме Виета должны выполнятся следующие условия:

$$\begin{cases} \boldsymbol{C > 0}, \\ \boldsymbol{-B > 0}, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{-\frac{3(a-4)}{a} > 0},$$

$$\frac{a-4}{a}<0.$$

Уравнение имеет положительные корни, если:

$$\begin{cases}(a-12)(5a-12)>0,\\ \dfrac{a-4}{a}<0,\end{cases} \quad \begin{cases}(a-12)\left(a-\dfrac{12}{5}\right)>0,\\ \dfrac{a-4}{a}<0.\end{cases}$$

Ответ: $a\in\left(0;\frac{12}{5}\right)$.

Упражнение 5. При каких значениях параметра *a* уравнение $(a-1)x^2-2(a-2)x+a+3=0$ имеет

а) корни разных знаков;

б) корни одного знака;

в) положительные корни?

Решение.

По формулам Виета: $x_1+x_2=2b<0$ (т. к. корни отрицательные), а $x_1x_2=(b+6)>0$.

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2(a-2)}{a-1},\\ x_1x_2=\dfrac{a+3}{a-1}.\end{cases}$$

а) исходное уравнение имеет разные корни, если выполняются условие

$$\begin{cases}D>0,\\ \dfrac{C}{A}<0,\end{cases} \quad \frac{a+3}{a-1}<0, a\in(-3;1).$$

б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие

$$\begin{cases}D\geq 0,\\ \dfrac{C}{A}>0,\end{cases} \quad \begin{cases}4(7-6a)\geq 0,\\ \dfrac{a+3}{a-1}>0,\end{cases} \quad a\in(-\infty;-3)\cup\left(1;\frac{7}{6}\right].$$

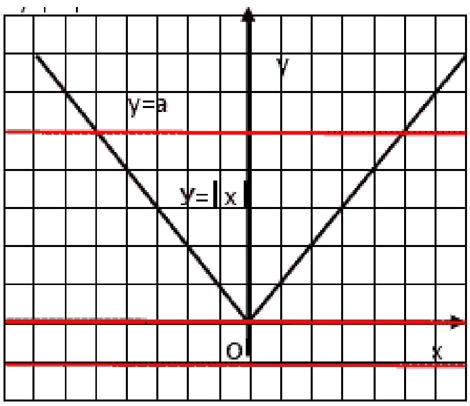
в) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2(a-2)}{(a-1)} > 0, \\ \frac{a+3}{a-1} > 0, \end{cases} \quad a \in (-\infty; -3).$$

Ответ: если $a \in (-3; 1)$, то уравнение имеет корни разных знаков; если $a \in (-\infty; -3) \cup \left(1; \frac{7}{6}\right]$, то корни – одного знака; если $a \in (-\infty; -3)$, то положительные корни.

Занятие 11. Графический способ решения уравнений с параметром.

Упражнение 1. Решить уравнение $|x| = a$,



Ответ: если $a < 0$, то нет корней, $a > 0$, то $x = a$, $x = -a$, если $a = 0$, то $x = 0$.

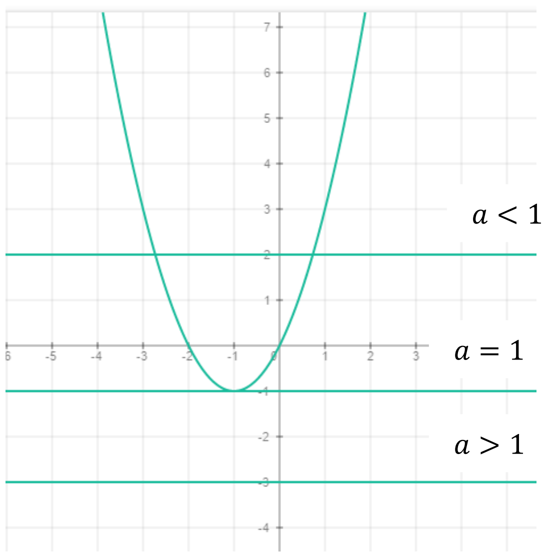
Упражнение 2. Определить число решений уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ в зависимости от значения параметра a.

Решение.

Преобразуем данное уравнение к виду $x^2 + 2x = -a$ и построим график функции $y = x^2 + 2x$.

Двигаем прямую $y = -a$ и считаем количество решений.

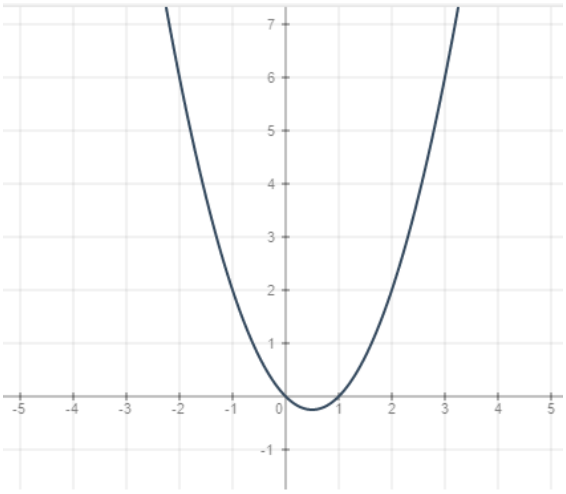
Ответ: при $a = 1$ одно решение, при $a < 1$ два решения, при $a > 1$ нет решений.



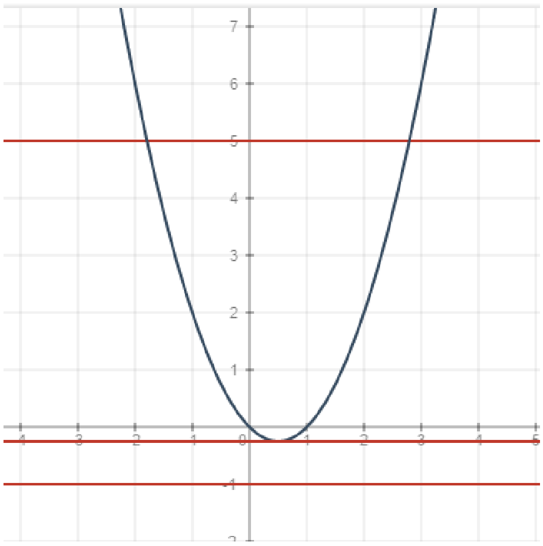
Упражнение 3. Найти число корней уравнения в зависимости от параметра a: $x(x-1)=a$.

Первым действием необходимо построить график функции стоящей в левой части: $y=x(x-1)$.

График данной функции нам известен – это парабола, ветви направлены вверх, корни ее легко найти: $x_1=0, x_2=1,$ отсюда можно найти координаты вершины: $x_в=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$; $y_в=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{4}$.



Далее необходимо рассечь график семейством прямых $y=a$, найти точки пересечения и выписать ответ.

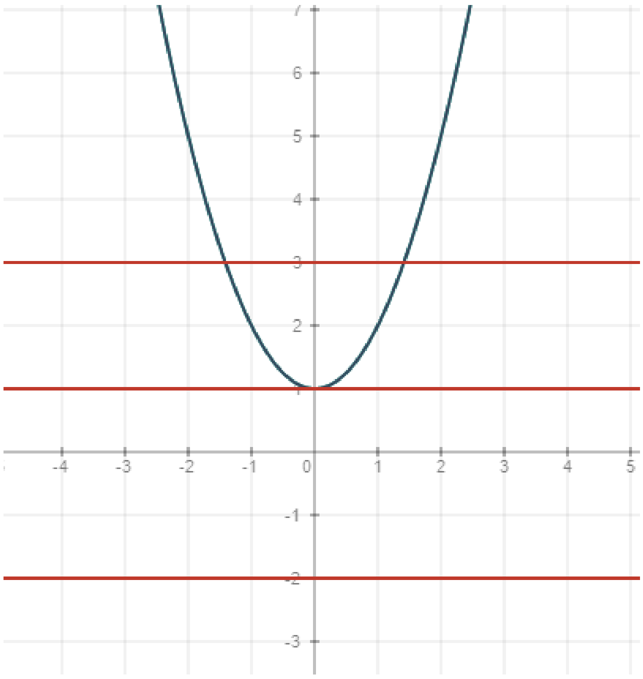


Глядя на график, выписываем ответ: при $a < -\frac{1}{4}$ решений нет; при $a = -\frac{1}{4}$ уравнение имеет единственное решение; при $a > -\frac{1}{4}$ уравнение имеет два решения.

Упражнение 4. Решить уравнение $x^2 + 1 = a$.

Графиком функции $y = x^2 + 1$ является парабола $y = x^2$, смещенная вверх на одну единицу.

Графиком функции $y = a$ является прямая параллельная оси Ox.



Если $a < 0$, прямая $y = a$ не пересекает график $y = x^2 + 1$; если $0 \le a < 1$ прямая $y = a$ не пересекает параболу.

Если $a = 1$ парабола и прямая имеют единственную точку пересечения, т.е. исходное уравнение имеет единственное решение; при $a > 1$ таких точек п ересечения две.

Ответ: при $a < 1$ – корней нет, при $a = 1$ – единственный корень, при $a > 1$ – два корня.

Занятие 12. Решение задач ОГЭ.

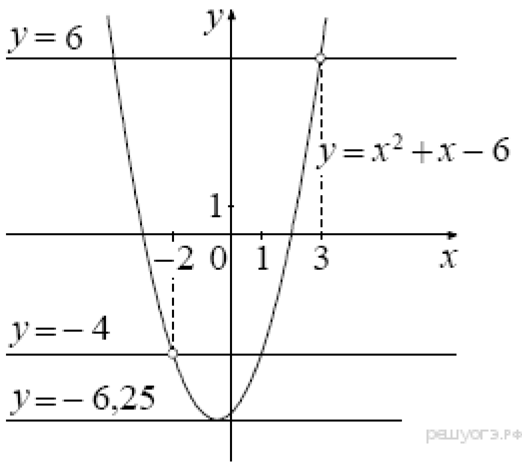
Упражнение 1. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

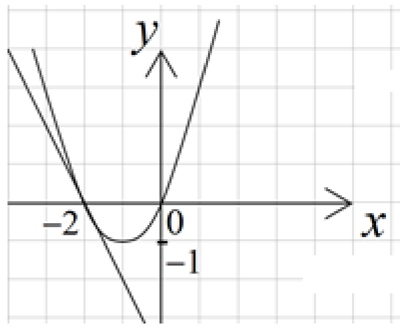
При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид: $y = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6$, её график — парабола с выколотыми точками $(-2; -4)$ и (3;6).



Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая. Вершина параболы имеет координаты $(-0{,}5; -6{,}25)$.

Поэтому $c = -6{,}25$; $c = -4$ или $c = 6$.

Упражнение 2. При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.



Решение.

Запишем условие общей точки:

$-2x + p = x^2 + 2x,$

$x^2 + 4x - p = 0.$

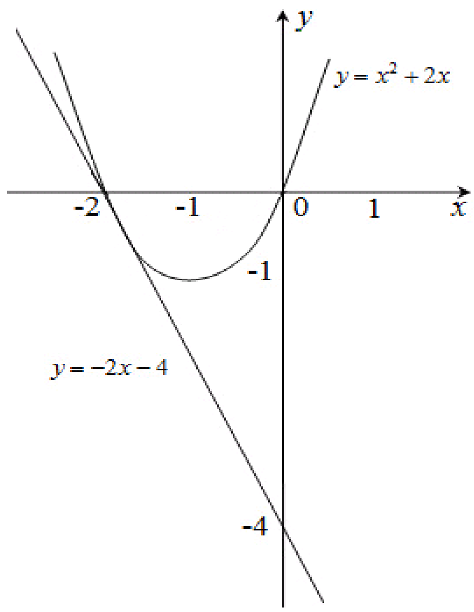
Прямая $y = -2x + p$ будет иметь с параболой единственную общую точку при условии, что дискриминант полученного квадратного уравнения равен нулю: $16 + 4p = 0$, откуда $p = -4$. Подставив значение параметра в уравнение, находим $x = -2, y = 0$.

Ответ: $p = -4$, координата точки: $(-2;0)$.

Упражнение 3. При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Решение.

Для того, чтобы прямая и парабола имели одну общую точку необходимо, чтобы дискриминант равнялся нулю. Дискриминант равен: $(2 - k)^2 - 16$. Он обращается в ноль при $k = -2$ или $k = 6$ По условию необходимо отрицательное k, таким образом, $k = -2$. Построим графики функций:



Найдем точку пересечения параболы с прямой:

$-2x - 4 = x^2 + 2x, x = -2$, таким образом $y = 0$.

Ответ: При $k = -2$; Парабола пересекает прямую в точке $(-2; 0)$.

Упражнение 4. При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 - 4mx + m$ и $y = -x^2 + 8mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x ?

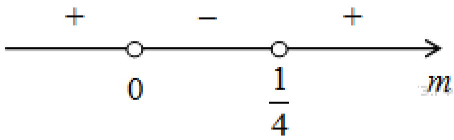
Решение.

Координата x вершины параболы определяется по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$. Координата $y_в$ вершины находится подстановкой $x_в$ в уравнение параболы. Вершины парабол будут находится по одну сторону от оси x, если координаты их вершин имеют одинаковые знаки. Вспомнив, что два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно, составим и решим неравенство:

$$(4m^2 - 8m^2 + m)(-16m^2 + 32m^2 + 4) > 0,$$

$(-4m^2 + m)(16m^2 + 4) > 0.$

Заметим, что второй множитель всегда больше нуля, поэтому на него можно разделить.



$-4m\left(m - \frac{1}{4}\right) > 0,$

$m\left(m - \frac{1}{4}\right) < 0.$

Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак. Таким образом, получаем ответ:

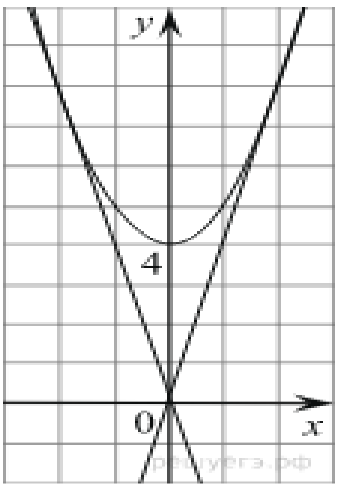
$0 < m < \frac{1}{4}.$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Упражнение 5. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Построим график функции $y = x^2 + 4$.



Прямая $y = kx$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку, если уравнение $x^2 + 4 = kx$ имеет один корень. Дискриминант этого уравнения равен $k^2 - 16$, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k = -4$ или $k = 4$.

Ответ: −4; 4.

Занятие 13. Решение задач ОГЭ.

Упражнение 1. Один из корней данного уравнения равен 4, найдите второй корень и число a: $x^2 + x - a = 0$.

Уравнение приведенное, его коэффициенты можно определить по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = -a. \end{cases}$$

Подставляем известный корень:

$$\begin{cases} 4 + x_2 = -1, \\ 4 \cdot x_2 = -a. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x_2 = -5$, тогда $a = 20$.

Ответ: $x_2 = -5$, $a = 20$.

Упражнение 2. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны -5 и 8.

Приведенное квадратное уравнение записывается: $x^2 + px + q = 0$

Снова обратимся к теореме Виета.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} (-5) + 8 = -p, \\ (-5) \cdot 8 = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -3, \\ q = -40. \end{cases}$$

Ответ: $x^2 - 3x - 40 = 0$.

Упражнение 3. Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 3x + c = 0$ больше другого на 1. Найдите корни уравнения и коэффициент c.

Запишем уравнения для корней по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

Запишем уравнение по условию задачи:

$x_1 + 1 = x_2$

Сделаем теперь замену и определим корни и искомый коэффициент:

$x_1 + x_1 + 1 = -3$

$x_1 = -2$

$x_2 = -1$

$c = x_1 \cdot x_2 = 2$

Уравнение будет записано так:

$x^2 + 3x + 2 = 0$

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = -1, c = 2$.

Упражнение 4. Отношение корней квадратного уравнения $x^2 + bx + 12 = 0$ равно 3. Найдите корни уравнения и коэффициент b.

Запишем уравнения для корней по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 \cdot x_2 = 12. \end{cases}$$

Запишем уравнение по условию задачи:

$\frac{x_1}{x_2} = 3.$

Тогда $x_1 = 3x_2$.

Делаем замену и определяем корни и искомый коэффициент:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_2 = -b, \\ 3x_2 \cdot x_2 = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_2 = -b, \\ (x_2)^2 - 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \pm 8, \\ x_2 = \pm 2. \end{cases}$$

Значит, $x_1 = \pm 6$.

Так как произведение корней положительно, то имеем два набора подходящих нам корней и коэффициента b:

Ответ: 1. $x_1 = 6, x_2 = 2, b = -8$;

2. $x_1 = -6, x_2 = -2, b = 8$.

Упражнение 5. Один из корней уравнения $3x^2 + 5x + 2m = 0$ равен -1. Найдите второй корень.

Решение.

Подставим известный корень в уравнение: $3 - 5 + 2m = 0$. Получим уравнение относительно m.

Решим его: $2m = 2,\ m = 1$.

Подставим m в уравнение: $3x^2 + 5x + 2m = 0$, откуда

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6}, x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-\frac{2}{3}$.

Занятие 14. Контрольная работа

Задание 1. Решить уравнение $x - a = 2x + 3a - 1$

Решение.

Решая данное уравнение, члены, содержащие x, переносим в одну часть уравнения, а не содержащие x – в другую.

$2x - x = -a - 3a + 1$,

$x = 1 - 4a$.

Ответ: если $a \epsilon R$, то $x = 1 – 4a$

Задание 2. При каких значениях параметра a уравнение $a(a-2)x^2 + (2a-4)x + 3a - 6 = 0$ имеет более одного решения?

Решение.

Рассмотрим случаи:

1. При $a = 0$ получаем уравнение $-4x - 6 = 0$. Оно имеет единственное решение.

2. При $a = 2$ получаем уравнение $0 \cdot x = 0$, x – любое число.
3. При $a \neq 2$ и $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение.

$$D = (a-2)^2 - 3a(a-2)(a-2) = (a-2)^2(1-3a).$$

Уравнение имеет более одного решения, если D>0.

$(a-2)^2(1-3a) > 0$

$a < \frac{1}{3}$

Ответ: при $a \epsilon (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \{2\}$ уравнение имеет более одного решения.

Задание 3. Найти все значения параметра b при которых уравнение $x^2 - 2bx + b + 6 = 0$ имеет положительные корни?

Решение.

Пусть x_1 и x_2–корни уравнения, тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1 \cdot x_2 = b + 6$.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = b + 6 > 0, \\ D > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b > 0, \\ b > 6, \\ 4b^2 - 4(b+6) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b > 0, \\ b > 6, \\ b^2 - b + 6 > 0. \end{cases}$$

Решением системы неравенств будет промежуток $[3;+\infty)$

Ответ: При $b \in [3;+\infty)$уравнение имеет положительные корни.

Задание 4. Квадратное уравнение $x^2 + bx + 3 = 0$ имеет один корень, равный 1. Найдите коэффициент b и другой корень.

Решение.

Пользуясь теоремой Виета для приведенного квадратного уравнения, получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + x_2 = -b, \\ 1 \cdot x_2 = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_2 = 3, b = -4$.

Задание 5. Постройте график функции $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку

Решение.

Разложим числитель дроби на множители:

$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^4 - 4)\ (x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

При $x \neq -2$ и $x \neq 3$ функция принимает вид:

$y = (x-2)(x+3) = x^2 + x - 6.$

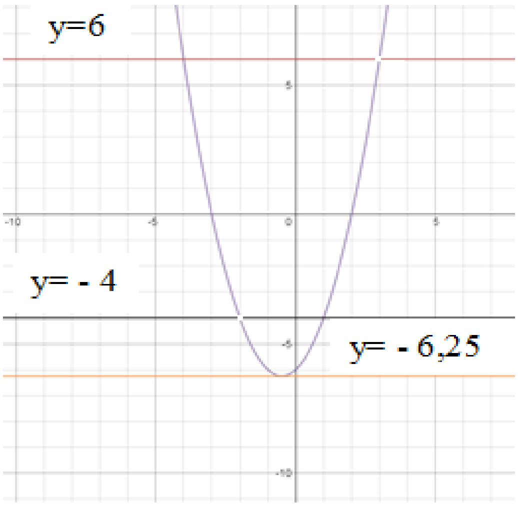


График этой функции – парабола, ветви которой направлены вверх. Из параболы выколоты точки (- 2;4) и (3;6).

Прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых – выколотая. Вершина параболы имеет координаты *(- 0,5;6,25)*.

Ответ: при *c=-6,25*, при *c= -4* и при *c=6* прямая $y = c$ имеет ровно одну общую точку.

Вывод по главе

Во второй главе работы были рассмотрены методы решения линейных и квадратных уравнений с параметрами, а также разработан факультативный курс, который позволил обобщить и систематизировать задачи с параметрами, встречавшиеся ранее в курсе алгебры 7–9 классов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задач с параметрами вызывает большие трудности, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики. Трудности при изучении данного вида заданий связаны со следующими их особенностями: обилие формул и методов, используемых при решении уравнений данного вида; возможность решения одного и того же уравнения, содержащего параметр различными методами.

Проработав соответствующую учебно-методическую литературу по данному вопросу, очевидно, сделать вывод о том, что умение и навыки решать уравнения с параметром в школьном курсе алгебры являются очень важными, развитие которых требует значительных усилий со стороны учителя математики.

Анализ школьных учебников позволяет сделать следующие выводы: в основном все задания, связанные с решением уравнений с параметрами, носят повышенный уровень сложности; ни в одном из учебников не дается четкого определения параметра.

В связи с этим в работе представлен факультативный курс «Линейные и квадратные уравнения с параметром», который позволил обобщить и систематизировать задачи с параметрами, встречавшиеся ранее в курсе алгебры 7–9 классов. Учащиеся получат представление о разнообразии задач такого рода и разнообразии методов их решения, научаться использовать при решении графические представления. Знакомясь с условием задачи, научаться применять теоретические разделы математики, необходимые для решения данной задачи.

При решении задач с параметрами происходит повторение и, как следствие, более глубокое прочное усвоение программных вопросов. Ученики расширяют свой математический кругозор, при этом происходит развитие математического, логического мышления, умения анализировать, сравнивать и обобщать. Решение задач с параметрами на факультативных занятиях позволяет решать уравнения на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный способ решения и применять разные методы, а также способствует успешной сдаче экзаменов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидоров, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова, М.И.Шабунин. – М.: Просвещение, 2011. – 226 с.
2. Алимов Ш.А. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин.– М.: Просвещение, 2011. – 261 с.
3. Алимов Ш.А. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин. – М.: Просвещение, 2011. – 289 с.
4. Аналитический отчет предметной комиссии о результатах государственной (итоговой) аттестации выпускников 9 классов по математике [Электронный ресурс]/ Н. А. Зорина, Л. А. Жигулев. – Режим доступа: https://docplayer.ru
5. Валеева В.Ф. Решение линейных и квадратных уравнений с параметром [Электронный ресурс] /В.Ф. Валеева – Режим доступа: http://открытыйурок.рф
6. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе. [Текст] / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2009. – 61с.
7. Галанова В.Д. Уравнения и неравенства, содержащие параметр. [Электронный ресурс] / В.Д. Галанова – Режим доступа: https://refdb.ru/look/2990477.html
8. Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре 7кл.» М.: Академия, 2011. – 107 с.
9. Ильенко М.В. Методика решения задачи с параметрами [Электронный ресурс] / М.В. Ильенко. – Режим доступа: https://down.ctege.info
10. Ляпин С.Е. Методика преподавания математики. [Текст] /С.Е. Ляпин. – М.: Просвещение, 2010. – 49с.

11. Лысенко Т.П. Обобщающий урок по теме «Квадратные уравнения» [Электронный ресурс] / Т.П.Лысенко – Режим доступа: http://открытыйурок.рф
12. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений /Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.
13. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений /Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.
14. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений /Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 21 – е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.
15. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 класс. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / А.Г. Мерзляк, В.Г. Полонский, М.С. Якир. — М.: Вентана – Граф, 2014. – 304 с.
16. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе. [Текст] / В.И. Мишин – М.: Просвещение, 2010. – 21с.
17. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 17 – е изд., доп. – М.: Мнемозина, 2013. – 175 с.
18. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 17 – е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.
19. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 12 – е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 215 с.

20. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. [Текст]: задачник для учащихся общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович. – 12– е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 271 с.
21. Мухаметзянова Г.Р. Методика введения решения линейных уравнений и уравнений, сводящихся к линейным [Электронный ресурс] / Г.Р. Мухаметзянова. – Режим доступа: http://festival.1september.ru
22. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций /С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.– М.: Просвещение, 2014. – 335 с.
23. Программы. Математика. 5–6 классы. Алгебра. 7–9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. — М.: Мнемозина, 2009. — 63 с.
24. Потапов А.С. Учимся решать задачи с параметром. II. Графический метод решения задач с параметром [Электронный ресурс] / А.С.Потапов, С.А.Титоренко. – Режим доступа: http://открытыйурок.рф
25. Шинковкина Р.Ф. Самостоятельная работа как средство обучения решению уравнений в 5 - 9 классах [Электронный ресурс] / Р.Ф Шинковкина – Режим доступа: http://uchebana5.ru
26. Яковлева Т.Х. Математика: задание №3 для 8-хклассов [Текст] – М.: МФТИ, 2010, 20с.