СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 0025-567X

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 26
ВЫПУСК 3
•
СЕНТЯБРЬ
1979

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 3 (1979)

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СТАНДАРТНОЙ КОМПОНЕНТОЙ, ИЗОМОРФНОЙ M_{24}

В. М. Ситников

Подгруппа четного порядка K называется плотно вложенной в группе G, если $K \cap K^g$ имеет нечетный порядок для любого $g \in G \setminus N_G(K)$. Квазипростая подгруппа A называется стандартной в G, если она удовлетворяет следующим условиям: (1) $K = C_G(A)$ — плотно вложена в G, (2) $N_G(K) = N_G(A)$, (3) $[A, A^g] \neq 1$ для $g \in G$. Ашбахер показал [1], что при выполнении B-гипотезы Томпсона в группах компонентного типа всегда существует стандартная подгруппа за некоторым исключением, которое впоследствии было изучено в работе [2]. Более того, Ашбахер и Зейц [3] описали простые группы со стандартной компонентой, изоморфной одной из известных групп при условии, что ее централизатор в группе имеет 2-ранг не меньше двух. Если силовская 2-подгруппа в централизаторе стандартной подгруппы изоморфна группе кватернионов, то такие простые группы также изучены [3]. Таким образом, остается не изученным случай, когда силовская 2-подгруппа из централизатора стандартной подгруппы — циклическая. Особый интерес представляют группы со стандартной компонентой спорадического типа.

В работах [4] и [5] были изучены группы со стандартной компонентой, изоморфной M_{23} и M_{22}. В настоящей работе рассматриваются группы со стандартной группой, изоморфной M_{24}. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА А. *Пусть конечная группа G содержит стандартную подгруппу M, изоморфную M_{24}, и пусть силовская 2-подгруппа S из централизатора $C_G(M)$ — цикли-*

ческая. Тогда $S \cap G' = 1$, *и либо* $G = O(G \cdot (M \times C_G(M))$, *либо* $G = O^2(G) \leftthreetimes Z_2$, $\langle M^G \rangle \leqslant O^2(G)$, $|G|_2 = 2^{21}$.

Из [6] — [8] и теоремы A вытекает

С л е д с т в и е. *Пусть G — конечная простая группа с инволюцией t такой, что* $C_G(t) = \langle t \rangle \times M$, *где M изоморфна одной из групп Матье* M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}. *Тогда* $M \simeq M_{12}$ *и G изоморфна группе Конвея* Co_3.

Обозначения стандартны (см. [9], [10]). Укажем некоторые: $A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение групп A и B с инвариантной подгруппой A, V_{p^n} — элементарная абелева p-группа порядка p^n, $|X|$, $|x|$ —порядок множества X и элемента x соответственно; $\langle x \rangle_n$ — группа, порожденная элементом x порядка n; Z_n — циклическая группа порядка n; $Z_n^{(m)}$ — гомоциклическая группа ранга m экспоненты n; $A \lhd G$ — подгруппа A инвариантна в группе G, «—» или «$\sim$» сверху букв будут обозначать образы подгрупп или элементов при соответствующих гомоморфизмах; Σ_n, A_n — симметрическая и знакопеременная группа степени n соответственно; y^X — множество сопряженных с y элементов относительно X.

§ 1. Предварительные результаты. В этом параграфе приведем некоторые результаты, которые будут использованы в работе и докажем теорему Б.

П р е д л о ж е н и е 1 [11, теорема 3.1]. *Пусть T — 2-группа с инволюцией $t \in T$ такой, что* $C_T(t) \simeq V_{2^{n+1}}$, *и пусть* $C_{\mathrm{Aut}\, T}(t)$ *содержит элемент σ порядка* $2^n - 1$. *Тогда* $\langle t \rangle$ *имеет нормальное дополнение* $T_1 = [T, \sigma]$ *и T_1 изоморфна одной из следующих групп*: (1) $V_{2^{2n}}$; (2) $Z_{2^m}^{(n)}$; (3) *силовская 2-подгруппа из* PSL $(3, 2^n)$; (4) *силовская 2-подгруппа из* PSU $(3, 2^{2n})$.

Более того, если Aut T *содержит* GL $(3, 2)$, *то выполняется* (1) *или* (2).

З а м е ч а н и е. Если выполняется одно из условий (1), (3) или (4), то все инволюции из $T \setminus T_1$ сопряжены с t в T.

П р е д л о ж е н и е 2 [11, теорема 3.3]. *Пусть G — конечная группа с инволюцией t такой, что* $C_G(t) \simeq Z_2 \times \mathrm{PSL}(3,2)$. *Тогда* $G/O(G)$ *изоморфна одной из следующих групп*: (1) $Z_2 \times \mathrm{PSL}(3, 2)$; (2) $\mathrm{PSL}(3, 2) \wr Z_2$; (3) $\mathrm{PSL}(3, 4) \leftthreetimes Z_2$, $\mathrm{PGL}(3, 4) \leftthreetimes Z_2$, *где Z_2 индуцирует полевой автоморфизм.*

З а м е ч а н и е. $t \notin G'$ и в группах типа (2) и (3) все инволюции из $G \setminus G'$ сопряжены с инволюцией t.

П р е д л о ж е н и е 3 [7, предложение 2]. *Пусть* $G = L \leftthreetimes A$, $|L| = 2^y$, $A \simeq A_n$, $n = 5$—8 *и пусть t — инволюция из L такая, что* $C_G(t) = \langle t \rangle \times (Q \leftthreetimes A)$, $Q \simeq V_{2^4}$, *некоторый элемент порядка 3 из A действует регулярно на Q и* $Q \times \langle t \rangle \lhd G$. *Тогда* $L = E \leftthreetimes \langle t \rangle$, *где E — элементарная абелева 2-группа порядка 2^8 инвариантная в G.*

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* $F = F_0 \leftthreetimes \langle \nu \rangle$ — *2-группа в конечной группе X и пусть все инволюции из* $F \setminus F_0$ *сопряжены с инволюцией ν в F. Если инволюция ν не сопряжена ни с одной инволюцией из F_0 в X и если* $C_F(\nu) \in \mathrm{Syl}_2(C_X(\nu))$, *то выполняются следующие условия*: (1) *F — силовская 2-подгруппа в X*; (2) $X = X_0 \leftthreetimes \langle \nu \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть S — 2-подгруппа из X, содержащая F и $Q = N_S(F)$. Тогда по рассуждению Фраттини $Q = F \cdot C_Q(t)$. Так как по предположению $C_F(\nu) = C_Q(\nu)$, то $Q = F$ и пункт (1) выполнен. Пункт (2) следует из леммы Томпсона.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть простая группа A с* Out $A = 1$ *стандартна в группе X. Если силовская 2-подгруппа S из $C_X(A)$ — циклическая, то централизатор инволюции t из S имеет следующий вид*: $C_X(t) = (O \leftthreetimes S) \times A$, *где O — группа нечетного порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как A стандартна в X, то $C = C_X(t) \subseteq N_X(A)$. Следовательно, $A \lhd C_X(t)$. В силу Out $A = 1$ имеем $C_X(t) = A \cdot C_C(A)$. Так как $A \cap C_G(A) = 1$, то $C_X(t) = A \times C_C(A)$. В силу цикличности S по лемме Бернсайда $C_C(A) = O \leftthreetimes S$, где O — группа нечетного порядка. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 6 [12, 13]. *Группа Матье* $M_{24} = M$ *обладает следующими свойствами:*

I. *Число классов сопряженных инволюций равно 2: класс центральных инволюций C_1, и класс нецентральных инволюций C_2.*

II. *Силовская 2-подгруппа S_0 из M изоморфна группе матриц степени 5 над полем* $GF(2)$ *вида*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c}_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{b}_1 & \bar{v}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{\omega} & \bar{v}_2 & 1 & 0 \\ \bar{z} & \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

соответствует элемент x из Q. Из этого представления следует, что Q порождается инволюциями a_2, ω, v_1, b_2, v_2, c_2.

IV. *Для Q справедливы следующие условия:*

а) $|Q| = 2^6$;

б) *Q содержит точно 3 элементарные самоцентрализующие инвариантные подгруппы порядка 8: $Q_1 = \langle a_2, \omega, v_1\rangle$, $Q_2 = \langle a_2, b_2, c_2\rangle$, $Q_0 = \langle a_2, b_2\omega, v_1c_2\rangle$;*

в) *Q содержит точно одну элементарную абелеву подгруппу W порядка 2^4: $W = \langle a_2, \omega, b_2, c_2\rangle$. W является максимальной абелевой подгруппой в Q.*

V. *K содержит точно шесть классов максимальных подгрупп со следующими представителями:*

$$M_0 = N_K(W) = W \leftthreetimes Y, \text{ где } Y \simeq \Sigma_3 \times \Sigma_3,$$

$$M_1 = N_K(Q_1) = Q_1 \leftthreetimes B \simeq \mathrm{Hol}(V_8),$$

$$M_2 = N_K(Q_2) \simeq \mathrm{Hol}(V_8),$$

$$M_3 \simeq \Sigma_6, \quad M_4 \simeq A_7, \quad M_5 \simeq (Z_3 \times A_5) \leftthreetimes Z_2,$$

где

$$A_5 \leftthreetimes Z_2 \simeq \Sigma_5, \quad Z_3 \leftthreetimes Z_2 \simeq \Sigma_3.$$

VI. *$W \cap C_1 \neq \phi$, если $x \in W \cap C_1$, то*

$$|W \cap C_1| = |M_0 : C_{M_0}(x)| = 9.$$

$W \cap C_2 \neq \phi$, если $y \in W \cap C_2$, то

$$|W \cap C_2| = |M_0 : C_{M_0}(y)| = 6.$$

VII. *$Q_1 \cap C_2 \neq \phi$. Если $x \in Q_1 \cap C_1$, то $C_K(x) = C_{M_1}(x)$. Все инволюции из Q_1 сопряжены в M_1.*

VIII. *Инволюция $a_2 \in C_1$, инволюция $\omega b_2 \in C_2$.*

Доказательство. Пункт II доказан в [10], пункт V — в работе [15]. Остальные утверждения непосредственно проверяются.

В следующей теореме рассмотрен более частный случай, чем в работе [11], но без ограничений на нечетные ядра централизаторов инволюций.

ТЕОРЕМА Б. *Пусть H — конечная группа с инволюцией такой, что $C = C_H(\nu) = \langle\nu\rangle \times K$, где $K \simeq A_8$. Тогда группа H одного из следующих типов:*

1) $H = O(H) \cdot C_H(\nu)$;

2) *$H = O^2(H) \leftthreetimes \langle\nu\rangle$, все инволюции из $H \setminus O^2(H)$ сопряжены с ν и $|H| = 2^{13}$.*

Доказательство. Для подгруппы $K \simeq A_8$ сохраним все обозначения из предложения 9. Если ν — центральная инволюция, то $S = \langle\nu\rangle \times Q$ будет силовской 2-подгруппой в H. Так как из каждой инволюции из из Q извлекается корень, то ν не сопряжена ни с одной инволюцией из Q. По лемме Томпсона $\langle\nu\rangle \cap H' = 1$. Так как $K \leqslant H'$, то по результату [16] $H'/O(H') \simeq K$ и H — типа 1).

ЛЕММА.

$$2^{11} \mid |H|.$$

Доказательство. Положим $R = \langle\nu\rangle \times W$ и рассмотрим подгруппу $U = N_H(R)$. По предложению 9 (VI) инволюции из R относительно $N_C(R)$ разбиваются на пять сопряженных классов: $\{\nu\}$, $\{\nu a_2, \ldots\}$, $\{\nu\omega b_2, \ldots\}$, $\{a_2, \ldots\}$, $\{\omega b_2, \ldots\}$ мощности 1, 9, 6, 9, 6 соответственно. Имеем $|U| = |N_C(R)| \cdot |\nu^U|$. Так как S не является силовской 2-подгруппой в H и так как R — характеристическая в S подгруппа, то $|\nu^U| > 1$ и четен. Поэтому $|\nu^U| = 10$ или 16. Заметим, что W слабо замкнуто в R относительно U. Поэтому $U/C_U(W)$ изоморфно вкладывается в A_8. Из $C_C(W) = R$ следует, что $C_U(W)$ — 2-группа. Предположим, что $|\nu^U| = 10$. Тогда

$$5 \cdot 6^2 = 5\,|Y| \mid |U/C_U(W)|.$$

По предложению 9 (V) следует, что

$$U/C_U(W) \simeq (Z_3 \times A_5) \leftthreetimes Z_2.$$

Ясно, что элемент f порядка из $R(U/C_U(W))$ действует регулярно на W и централизует ν, ибо $Y \cap C_U(W) = 1$. Но тогда $\nu \in Z(U)$, что невозможно. Следовательно, $|\nu^U| = 16$ и $U = U_0 \leftthreetimes Y$, где $|U_0| = 2^9$. Лемма доказана.

Заметим, что $U = U_1 \leftthreetimes \langle\nu\rangle$, $U_1 = [U_1P]$, где P — силовская 3-подгруппа из Y и $W \leqslant Z(U_1)$. Следовательно, существует 2-элемент $x \in (U_1 \setminus S) \cap N_H(S)$, что $[W, x] = 1$.

Положим теперь $V = Q_1 \times \langle\nu\rangle$ и рассмотрим группу $N = N_H(V)$. По предложению 9 (VI) $N_C(V) = \langle\nu\rangle \times (Q_1 \leftthreetimes \mathrm{B})$. Ясно, что $O(N) = 1$ и $|N| = |N_C(V)| \cdot |\nu^N|$. Так как все инволюции из Q_1 сопряжены относительно B, то $|\nu^N| = 1$ или 2^4. Пусть x — 2-элемент, который удовлетворяет замечанию, приведенному выше. Тогда в силу предложения 9 (IV б) $V^x = V$. Так как $\nu^x = \nu a_2$, Условимся считать, что матрице вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

соответствует элемент x из S_0. Из этого соответствия вытекает, что S_0 порождается следующими инволюциями: $z, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \omega, v_1, v_2$.

III. *Для S_0 справедливы следующие условия*:

а) $|S_0| = 2^{10}$;

б) $S_0 = E \leftthreetimes D$, *где*

$$E = E_1 E_2, \quad E_1 = \langle z,\ a_1,\ b_1,\ c_1 \rangle,$$

$$E_2 = \langle z, a_2, b_2, c_2 \rangle, \quad D = \langle \omega, v_1, v_2 \rangle \simeq D_8;$$

E_1 и E_2 — самоцентрализующиеся инвариантные в S_0 подгруппы;

в) *E — характеристическая подгруппа в S_0. Имеется точно две пары элементарных подгрупп $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$, инвариантных в S_0 таких, что $\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2 = E$, $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 = \langle z \rangle$*: i) *$E_1$ и E_2*, ii) $\langle z, a_1, b_1 a_2, c_1, a_1, a_2, b_2 \rangle, E_2$;

г) *S_0 содержит точно две элементарные абелевы подгруппы порядка 2^6: $R_1 = \langle z, a_1, b_1, a_2, \omega, v_1 \rangle$ и $R_2 = \langle z, a_1, a_2, \omega, b_2, v_2 \rangle$; R_1 и R_2 являются максимальными абелевыми нормальными подгруппами в S_0.*

IV. $\mathrm{Out}\, M = 1$. *Мультипликатор Шура для M тривиален.*

V. *Следующие 2-локальные подгруппы являются максимальными подгруппами в M*:

а) $H = N_M(E_1) = E_1 \leftthreetimes K \simeq \mathrm{Hol}(V_8)$, *где* $E_1 \simeq V_{2^4}$, $K \simeq A_8$;

б) $H_1 = N_M(R_1) = R_1 \leftthreetimes X$, *где* $R_1 \simeq V_{2^6}$, $X = X_1 * X_2$, $X_1 \simeq \Sigma_3$, $X_2 \simeq L_3(2)$;

b) $H_2 = N_M(R_2) = R_2 \leftthreetimes Y$, *где* $R_2 = V_{2^6}$, $Y = Y_0 \leftthreetimes \langle v \rangle_2 \simeq \hat{3}\Sigma_6$, $Y_0' = Y_0$, $Z(Y_0) = \langle f \rangle_3$, $Y_0 / \langle f \rangle \simeq A_6$, *элемент f действует без неподвижных точек на $R_2^{\#}$.*

VI. $E_1 \cap C_2 = \phi$. *Если* $x \in E_1$, *то* $C_M(x) = C_H(x)$, *где* $C_H(x) = E \leftthreetimes B$, $E = E_1 \cdot E_2$, $B \simeq L_3(2)$. *Все инволюции из E_1 сопряжены в H.*

VII. $R_1 \cap C_1 \neq \phi$. *Если* $x \in R_1 \cap C_1$, *то* $|R_1 \cap C_1| = |H_1 : C_{H_1}(x)| = 21$, $R_2 \cap C_2 \neq \phi$. *Если* $y \in R_1 \cap C_2$, *то* $|R_1 \cap C_2| = |H_1 : C_{H_1}(y)| = 42$.

VIII. $R_2 \cap C_1 \neq \phi$; *если* $x \in R_2 \cap C_1$, *то*

$$|R_2 \cap C_1| = |H_2 : C_{H_2}(x)| = 45.$$

$R_2 \cap C_2 \neq \phi$; *если* $y \in R_2 \cap C_2$, то

$$C_M(y) = C_{H_2}(y) = R_2 \leftthreetimes C_Y(y) \simeq V_{2^6} \leftthreetimes \Sigma_5,$$

$$|R_2 \cap C_2| = |H_2 : C_{H_2}(y)| = 18.$$

Предложение 7 (Кондратьев А. С.). *Пусть G — конечная группа и T — ее силовская 2-подгруппа. Предположим, что $T = \langle a \rangle \times R$, где R не содержит прямых множителей и $R \leqslant G'$. Тогда $T \cap G' = R$.*

Доказательство. Применяя к $N_G(T)$ основной результат работы [14] и замечание в конце этой же работы получаем, что $N_G(T) = \langle a_1 \rangle \times (R_1 \leftthreetimes K)$, где $\langle a_1 \rangle \simeq \langle a \rangle$ и $R_1 \simeq R$. По лемме 5 из [14] $\langle a_1 \rangle \cap G' = 1$. Так как $R \leqslant G'$ и $\langle a_1 \rangle \simeq \langle a \rangle$, то по модулярному закону получаем $\langle a \rangle \cap G' = 1$ и $T \cap G' = R$.

Предложение 8. *Пусть $G = (A \times A^{\nu}) \leftthreetimes \langle \nu \rangle$, где $\nu^2 = 1$, $A^{\nu} = \nu^{-1} A \nu$. Тогда все инволюции из $G \setminus (A \times A^{\nu})$ сопряжены с инволюцией ν.*

Доказательство. Индекс централизатора инволюции ν в G равен $|A|$. С другой стороны, инволюции из $G \setminus (A \times A^{\nu})$ исчерпываются инволюциями вида $a \cdot (a^{\nu})^{-1} \nu$, $a \in A$, число которых, очевидно, равно $|A|$. Предложение доказано.

Предложение 9. *Группа $K \simeq A_8$ обладает следующими свойствами*:

I. *Число классов сопряженных инволюций равно 2: класс центральных инволюций C_1 и класс нецентральных инволюций C_2.*

II. $K \simeq \mathrm{GL}(4, 2)$.

III. *Силовская 2-подгруппа Q из K изоморфна группе матриц степени 4 над $GF(2)$ вида*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{v}_1 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{\omega} & \bar{v}_2 & 1 & 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Условимся считать, что матрице вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

то $|\nu^N| = 16$. Учитывая, что Q_1 слабо замкнута в V получаем, $N/C_N(Q_1) \simeq \mathrm{GL}(3, 2)$. Следовательно, $N = L_0 \leftthreetimes B$, где $|L_0| = 2^7$. По предложению 1 $L_0 = L \leftthreetimes \langle\nu\rangle$, где L изоморфна либо V_{2^6}, либо $Z_4^{(3)}$. В любом случае L — характеристическая подгруппа в L_0. Следовательно, $N = L \leftthreetimes (B \times \langle\nu\rangle)$. Обозначим через $S_1 = L \leftthreetimes \langle D \times \langle\nu\rangle)$ силовскую 2-подгруппу из N, где D — силовская 2-подгруппа из B, $D \simeq D_8$.

Предположим сначала, что L — гомоциклическая группа ранга 3. Из действия элемента порядка 3 из B на L следует, что $l^\nu = l^{-1}$ для любого $l \in L$. Заметим также, что $C_{S_1}(Q_1) = L_0$. Группа $L \leftthreetimes B$ однозначно определена в [17]. Теперь непосредственной проверкой убеждаемся, что L характеристическая подгруппа в S_1. Так как по лемме S_1 не является силовской 2-подгруппой в H, то вытекает по $C_{S_1}(\Omega_1(L)) = L_0, N_1 = N_H(L_0) > N$. В силу того, что $Q_1 = Z(L_0)$, следует

$$N_1/C_{N_1}(Q_1) \simeq \mathrm{GL}(3, 2).$$

Относительно N в L_0 три класса сопряженных инволюций. Так как $|\nu^{N_1}| = 2^6$, а $|\nu^N| = 2^3$, то $|N_1| = 2^3 |N|$ Следовательно, $N_1 = L_1 \leftthreetimes B$, $|L_1| = 2^{10}$.

По предложению 1 $L_1 = L^{(1)} \leftthreetimes \langle\nu\rangle$, где $L^{(1)} \simeq Z_8^{(3)}$. Более того, $L^{(1)} \lhd N_1$ и $N_1 = L^{(1)} \leftthreetimes (B \leftthreetimes \langle\nu\rangle)$. Если z — инволюция из B, то по лемме 1.2 $C_{L^{(1)}}(z) \simeq Z_8 \times Z_2$. Так как в группе $C_H(\nu)$ нет подгрупп типа $Z_2 \times Z_2 \times Z_8$, то инволюция ν не может быть сопряженной с инволюцией из $L^{(1)} \leftthreetimes B$. Обозначим через S_2 силовскую 2-подгруппу из N_1, содержащую S_1. Если S_2 является силовской 2-подгруппой в H, то по лемме Томпсона $\nu \notin O^2(H)$ и $O^2(H) \geqslant L^{(1)} \leftthreetimes B$. По результату из [17] Q_1 сильно замкнута в силовской 2-подгруппе из $O^2(H)$. В силу [18] и строения $C_H(\nu)$ получаем противоречие. Теперь заметим, что L_1 — характеристическая подгруппа в S_2. Следовательно, $N_2 = N_H(L_1) \neq N_1$. Повторяя все предыдущие утверждения мы придем к противоречию в случае, если силовская 2-подгруппа S_3 из N_2 будет силовской 2-подгруппой в H. Но как и выше $O_2(N_2) = L_2 = L^{(2)} \leftthreetimes \langle\nu\rangle$ — характеристическая подгруппа в S_3. Учитывая конечность группы H по индукции получаем, что для некоторого $k \geqslant 1$ силовская 2-подгруппа S_{k+1} из $N_k = N_H(L_{k-1})$ является силовской в H. Как и на первом шаге получаем противоречие.

Полученное противоречие показывает, что $L \simeq V_{2^6}$. Так как $L \leftthreetimes \langle\nu\rangle$ является сплетением и N содержит силовскую 2-подгруппу из C, то $C_H(L) = L \times O$, где $O = O(C_H(L))$. Рассмотрим теперь группу $J = N_H(L)$. В силу предложения 8, применяя рассуждения Фраттини получаем $C_{\bar J}(\bar\nu) \simeq Z_2 \times L_3(2)$, где $\bar J = J / C_H(L)$.

Группа L слабо замкнута в S_1 относительно $N_T(S_1)$, где T — силовская 2-подгруппа из H, содержащая S_1. Предположим противное. Тогда существует элемент $x \in N_T(S_1)$, для которого $L^x \neq L$. Так как $L_0 \cap L^{(x)} = L \cap L^x$ и $S_1 / L \simeq D_8$, то $|L \cap L^x| \geqslant 2^4$. С другой стороны, в $S_1 \setminus L$ нет инволюций, централизующих в L подгруппу порядка $\geqslant 2^5$. Следовательно, $|L \cap L^{(x)}| = 2^4$ и в группе $L \cdot L^x$ точно две элементарных подгрупп порядка 2^6, и каждая инволюция из $L \cdot L^x$ содержится или в L, или в L^x. Так как все инволюции из $(B \times \langle\nu\rangle \setminus B)$ сопряжены с ν (это следует из сопряженности в C инволюции $a_2\nu$ с инволюцией $b_2\nu$) и 2-ранг C равен 5, то $LL^x \subseteq L \leftthreetimes D \subseteq L \leftthreetimes B$. Поэтому в B существует элемент f порядка 3, который нормализует LL^x. Из строения группы N и $\mathrm{Hol}(V_8)$ вытекает, что f действует без неподвижных точек на L^x. С другой стороны, $N_H(L)^x = N_H(L^x)$ и $N_H(L)$ при нашем предположении не содержит таких 3-элементов, ибо в данном случае $O(\bar J) = 1$. Полученное противоречие показывает, что $|\bar J|_2 > 2^4$. По предложению 2 группа $\bar J$ типа (2) или (3). Так как по предложению 2 все инволюции из $F/L \setminus F_0/L$ сопряжены в F/L с $L\nu$ и все инволюции из $L\nu$ сопряжены в L с ν, то все инволюции из $F \setminus F_0$ сопряжены в F с инволюцией ν. Здесь $F \in \mathrm{Syl}_2(J)$, $F_0 \in \mathrm{Syl}_2(O^2(J))$. Осталось показать, что ν не сопряжена с инволюцией из F_0 в группе H. Прежде всего, заметим, что ν не сопряжена ни с одной инволюцией из $L \leftthreetimes D \leqslant L \leftthreetimes B$, так как 2-ранг централизатора каждой инволюции из $L \leftthreetimes B$ не меньше 6, либо из каждой инволюции из $(L \leftthreetimes B) \setminus L$ извлекается корень.

Предположим сначала, что $\bar J$ типа (3). Тогда все инволюции из $O^2(\bar J)$ сопряжены с инволюцией $\bar b_2$. С другой стороны, по замечанию, приведенному выше, инволюция ν не сопряжена с инволюцией из Lb_2. Следовательно, в этом случае ν не сопряжена с инволюцией из F_0.

Пусть теперь $\bar J$ типа (2). Тогда $O^2(\bar J)$ содержит два класса сопряженных инволюций относительно $\bar J$. Если инволюция $\bar x$ не лежит в компоненте из $\bar J$, то она сопряжена с инволюцией $\bar{b}_2 \in \bar{B} \subseteq C_{\bar{J}}(\bar{v})$. Выше было показано, что v не сопряжена с инволюциями из Lb_2.

Пусть инволюция $\bar{x}$ принадлежит одной из компонент группы $\bar{J}$. Тогда $|C_{\bar{J}}(\bar{x})| = 2^6$. Рассмотрим группу $L \cdot \langle x \rangle$. Если $|C_L(x)| \geqslant 2^5$, то v не может быть сопряженной с инволюцией из Lx. Если же $|C_L(x)| = 2^4$, то $C_{F_0}(x)| \geqslant L| \cdot |C_{\bar{F}_0}(\bar{x})|/2^4 = 2^8$. Следовательно, v в любом случае не может быть сопряженной с инволюцией из Lx, где x — некоторая инволюция из F_0. В силу предложения 4 теорема Б доказана.

§ 2. Доказательство теоремы А. Пусть конечная группа G содержит стандартную подгруппу $M \simeq M_{24}$ и пусть силовская 2-подгруппа из $C_G(M)$ — циклическая. Для подгрупп из M сохраним обозначения из предложения 6. Если t — инволюция из $C_G(M)$, то по предложению 5

$$C = C_G(t) = M \times (O \leftthreetimes \langle a \rangle),$$

где O — группа нечетного порядка, $\langle a \rangle$ — силовская 2-подгруппа из $C_G(M)$, содержащая инволюцию t. Тогда $S = S_0 \times \langle a \rangle$ будет силовской 2-подгруппой в C, где S_0 — силовская 2-подгруппа из M. Так как $Z(S_0) = \langle z \rangle$ имеет порядок 2, то в случае $|a| > 2$, следует, что $\Omega_1(Z(S)) = \langle t \rangle$ — характеристическая подгруппа в S. Но тогда S — силовская 2-подгруппа в G и по предложению 7 группа G удовлетворяет заключению теоремы.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\langle t \rangle$ — силовская 2-подгруппа в $C_G(M)$ и t — нецентральная инволюция в G. Таким образом, $C = C_G(t) = O \times M \times \langle t \rangle$.

ЛЕММА 1.

$$2^{17} \mid |G|.$$

Доказательство. Положим $Q = \langle t \rangle \times R_1$ и рассмотрим группу $H = N_G(Q)$. В силу предложения 6 (V б)

$$N_C(Q) = O \times \langle t \rangle \times (R_1 \leftthreetimes X),$$

где

$$X = X_1 \times X_2,\ X_1 \simeq \Sigma_3,\ X_2 \simeq L_3(2).$$

По пункту III предложения 6 группа Q относительно $N_C(Q)$ имеет пять классов сопряженных инволюций: $\{z, \ldots\}$, $\{z_2, \ldots\}$, $\{t\}$, $\{zt, \ldots\}$, $\{z_2t, \ldots\}$ мощности 21, 42, 1, 21, 42 соответственно. Ясно, что $|H| = |N_C(Q)| \cdot |t^H|$ и инволюция t не сопряжена ни с инволюцией z,

ни с инволюцией z_2, которые лежат в R_1. Следовательно, $|t^H|$ может быть одним из следующих чисел 1, 22, 43, 64. Если $|t^H| = 1$, то $N_G(Q) = N_G(Q)$. Но тогда для 2-элемента $x \in N_G(S) \setminus S_1$ имеем $Q^x = \langle t \rangle \times R_2$ в силу предложения 6 (III г). Так как

$$N_G(Q)^x = N_C(Q)^x = N_G(Q^x),$$

то это приводит к противоречию с пунктом V предложения 6. Следовательно, $|t^H| > 1$. Так как $N_G(Q) / C_G(Q)$ изоморфно вкладывается в GL (7,2), порядок которой не делится на 22 и 43, то $|t^H| = 2^6$. Лемма доказана.

Положим $V = \langle t \rangle \times E_1$, где $E_1 \subseteq S_0$, и $N_M(E_1) = E_1 \leftthreetimes K$. Ясно, что $C_G(V) = O \times V$. Рассмотрим группу $N = N_G(V)$.

ЛЕММА 2. *$N = O \leftthreetimes [L_0 \leftthreetimes (K \times \langle t \rangle)]$, где $L_0 \simeq V_{2^6}$, $L = L_0 \leftthreetimes \langle t \rangle$, все инволюции из $L \setminus L_0$ сопряжены с t в группе L.*

Доказательство. Справедлива формула $|N| = |N_C(V)| \cdot |t^N|$. Так как V содержит точно три класса сопряженных инволюций относительно $N_C(V)$, то $|t^N| = 1$ или 2^4. Докажем, что $|t^N| = 2^4$. Для этого рассмотрим группу $H = N_G(Q)$ из леммы 1. Заметим, что $|\bar{H}|$, где $\bar{H} = H/C_G(Q)$ делится точно на три различных числа. Поэтому по результату [19]

$$\bar{H}^{(\infty)}/R(\bar{H}^{(\infty)}) \simeq L_3(2),$$

где $R(\bar{H}^{(\infty)})$— разрешимый радикал. Пусть P — силовская 7-подгруппа из H. Тогда $Q \cap N_H(P) = \langle t \rangle$, что влечет

$$N_H(P) \leqslant C_H(t) = O \times (Q \leftthreetimes X).$$

Пусть H_0 — полный прообраз $\bar{H}^\infty$. Тогда по лемме Фраттини $H = H_0 \cdot N_H(P)$ и $H = H_0 \cdot X$. Так как 3-элемент из $X_1 \simeq \Sigma_3$ действует регулярно на R_1, то $R(\bar{H}^{(\infty)})$ обязана быть 2-группой. Следовательно, $\bar{H} = R(\bar{X}^{(\infty)}) \leftthreetimes \bar{X}$, где $|R(\bar{H}^\infty)| = 2^6$. Заметим, что в X существует элемент f порядка 21, который действует регулярно на R_1. Ясно, что $\bar{f}$ действует также регулярно на $R(\bar{H}^{(\infty)})$. Пусть $O \leftthreetimes R$ — полный прообраз группы $R(\bar{H}^\infty)$, где R — 2-группа порядка 2^9. Из действия элемента f на $(O \leftthreetimes R)$ следует, что $R_1 \leqslant Z(R_1)$. Следовательно, в $N_R(S) \setminus S$ существует элемент x, который централизует R_1. Но тогда $E_1^x \cap E_1 \supseteq \langle z, a_1, b_1 \rangle$. В силу предложения 6 (III в) $V^x =$

$= V$. Так как $t^x \neq t$, то $|t^N| = 2^4$ и $|N| = 2^4 |N_C(V)|$. Теперь заметим, что E_1 — слабо замкнута в V. Поэтому $N/C_N(E_1)$ изоморфно вкладывается в GL (4,2). Так как $K \cap C_N(E_1) = 1$, то $|C_N(E_1)| = 2^9 |O|$. Следовательно, $C_N(E_1) = O \leftthreetimes L$ и $N = (O \leftthreetimes L) \leftthreetimes K$. Группа $\bar{N} = N/O$ удовлетворяет условиям предложения 3. Поэтому $\bar{L} = \bar{L}_0 \leftthreetimes \langle \bar{t} \rangle \simeq V_{24} \wr Z_2$. По лемме Фраттини $N = O \cdot N_N(L)$. Так как все инволюции из $L \setminus L_0$ сопряжены с t в L, то $N_N(L) = N_0 = L \cdot C_{N_0}(t)$. Учитывая включение $C_{N_0}(t) \leqslant O \times \langle t \rangle \times (E_1 \leftthreetimes K)$ и равенство $N_C(V)^{(\infty)} = E_1 \leftthreetimes K$ получаем, что $E_1 \leftthreetimes K \leqslant C_{N_0}(t)$. Следовательно, $K \leqslant N_H(L)$. Лемма доказана.

Обозначим через S_1 силовскую 2-подгруппу из $N = N_G(V)$, содержащую $L_0 \cdot S$. Тогда $S_1 = L_0 \leftthreetimes (Q \times \langle t \rangle)$, где Q — силовская 2-подгруппа из K. Для подгрупп из Q сохраним обозначения из предложения 9.

ЛЕММА 3. *L_0 слабо замкнута в S_1 относительно $N_G(S_1)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такой элемент $x \in N_G(S_1)$, что $L_0^x \neq L_0$. Ясно, что $L \cap L_0^x = L_0 \cap L_0^x$. Поэтому $|L_0 \cap L_0^x| \geqslant 2^4$. С другой стороны, в $S_1 \setminus L_0$ нет инволюций, централизующих в L_0 подгруппу порядка 2^7. Следовательно, $|L_0 \cap L_0^x| \leqslant 2^6$. Заметим, что $t \notin L_0 \cdot L_0^x$, ибо в противном случае

$$L_0 \cap L_0^x \subseteq Z(L_0 \cap L_0^x) \subseteq C_{L_0}(t) = E_1.$$

Но это невозможно в силу $C_{S_1}(E_1) = L$. Предположим, что $|L_0 \cap L_0^x| \geqslant 2^5$. По модулярному закону $L_0 \cdot L_0^x = L_0 \leftthreetimes P$, где $P = (Q \times \langle t \rangle) \cap L_0 L_0^x$. Пусть $P_0 = P \cap Q$. Так как $|C_{L_0}(P_0)| \geqslant 2^5$, то из строения $E_1 \leftthreetimes K$ следует, что $P_0 \subseteq Q_1$. По предложению 9 (V) $N_K(Q_1) \simeq \mathrm{Hol}(V_8)$. Поэтому в $N_K(Q_1)$ существует элемент f порядка 7, который действует транзитивно, на $Q_1^{\#}$. Предположим, что $P \subseteq Q$. Тогда $|P \cap Q_1| \geqslant 2$ и в силу действия элемента f на Q_1 вытекает, что $L_0 \leftthreetimes Q_1$ содержит элементарную подгруппу $F = C_{L_0}(Q_1) \times Q_1$, порядка 2^9 и все инволюции из $L_0 \leftthreetimes Q_1$ содержатся в $L_0 \cup F$. Так как в этом случае $L_0^x \subseteq F$, то получаем противоречие с $C_{S_1}(L_0) = L_0$. Пусть теперь $P = P_0 \times \langle yt \rangle$. Из предыдущих рассуждений следует, что $y \in Q_1$. Но тогда $|C_L(t)| \geqslant 2^5$ — противоречие. Следовательно, $|L_0 \cap L_0^x| = 2^4$ и $P \subseteq W \times \langle t \rangle$, предложение 9 (IV в). Если $P = P_0 \times \langle yt \rangle$, то тогда

$P_0 \times \langle y \rangle = W$. Следовательно, P содержит инволюцию $a_2 t$, которая сопряжена с t. С другой стороны, P содержится в $Z(L_0 L_0^x) \times P = F_2$ ранга 8. Таким образом, $L_0 L_0^x \subseteq L_0 \leftthreetimes K$ и $L_0 L_0^x = L_0 \leftthreetimes W$. По предложению 9 (V) в K существует подгруппа $W \leftthreetimes Y$, где $Y \simeq \Sigma_3 \times \Sigma_3$. Пусть $P = \langle f \rangle \times \langle h \rangle$ — силовская 3-подгруппа из 4, элементы f и h можно выбрать так, чтобы они действовали без неподвижных точек на $W^{\#}$. Из строения $\mathrm{Hol}(V_{2^4})$ вытекает $|C_{L_0}(h)| = |C_{L_0}(f)| = 2^4$. Так как $\langle h \rangle$ и $\langle f \rangle$ сопряжены в $N_K(P) \subseteq N_G(L_0)$, то они сопряжены и в $N_G(L_0^x)$. С другой стороны, $C_{L_0^x}(h) = 1$, а $|C_{L_0^x}(f)| = 2^4$ — противоречие. Лемма доказана.

Теперь мы сможем завершить доказательство теоремы. Рассмотрим группу $H = N_G(L_0)$. Так как $C_{L_0}(t)$ является силовской 2-подгруппой в $C_{C(L_0)}(t)$, то $C_G(L_0) = O(C_G(L_0)) \times L_0$. Положим $\overline{H} = H/C_G(L_0)$. Тогда $C_{\overline{H}}(\bar{t}) = \langle \bar{t} \rangle \times \bar{K}$. Это следует из сопряженности инволюций из $L \setminus L_0$ с t и рассуждений Фраттини. В силу леммы 1 и леммы 3 инволюция $\bar{t}$ нецентральная в $\overline{H}$. Поэтому по теореме Б группа $\overline{H} = O^2(\overline{H}) \leftthreetimes \langle \bar{t} \rangle$, $|\overline{H}| = 2^{13}$ и все инволюции из $\overline{H} \setminus O^2(\overline{H})$ сопряжены с инволюцией $\bar{t}$. Следовательно, $H = O^2(H) \leftthreetimes \langle t \rangle$, ибо $L_0 \subseteq O^2(H)$. Так как $L_0 \leftthreetimes \langle t \rangle$ является сплетением, то все инволюции из $H \setminus O^2(H)$ сопряжены с инволюцией t в H. Обозначим через F силовскую 2-подгруппу из H, содержащую S_1. Тогда $F = F_0 \leftthreetimes \langle t \rangle$, где $F_0 = F \cap O^2(H)$ и все инволюции из $F \setminus F_0$ сопряжены с инволюцией t в F.

В силу предложения 4 нам достаточно теперь доказать, что t не сопряжена ни с одной инволюцией из F_0 в группе G. Предположим противное. Ясно, что сопряженная с t инволюция x не лежит в L_0. Более того, $|C_{\overline{H}}(\bar{x})|_2 < 2^{11}$, ибо в противном случае $[x, L_0] = 1$ и 2-ранг $C_G(x)$ был бы больше 7. Из доказательства теоремы Б вытекает, что в $\overline{H}$ существует элементарная абелева подгруппа $\bar{L}$ порядка 2^6, нормализатор которой $\bar{J} = N_{\overline{H}}(L)$ содержит подгруппу $\bar{J}_0$ такую, что $\bar{J}_0 / C_{\overline{H}}(L)$ изоморфна либо сплетению $L_3(2) \wr Z_2$, либо $L_3(4) \leftthreetimes Z_2$, где внешняя инволюция индуцирует полевой автоморфизм.

Предположим сначала, что $\bar{J}_0$ первого типа. Пусть $\tilde{P} = \langle \tilde{a} \rangle \times \langle \tilde{c} \rangle$ — силовская 7-подгруппа из $\tilde{J}_0 = \bar{J}_0 / C_{\bar{J}_0}(L)$, причем $\langle \tilde{a} \rangle$ и $\langle \tilde{c} \rangle$ лежат в различных компонентах $\tilde{J}_0$. Тогда $C_{\tilde{J}_0}(\tilde{a}) = \langle\tilde{a}\rangle \times \tilde{B}_2$, $C_{\tilde{J}_0}(\tilde{c}) = \langle\tilde{c}\rangle \times \tilde{B}_1$, где $\tilde{B}_1 \simeq \tilde{B}_2 \simeq L_3(2)$. Так как $\langle\widetilde{ac}\rangle \subseteq C_{\tilde{J}_0}(\tilde{t}) = \langle\tilde{t}\rangle \times \tilde{B}$, где $\tilde{B} \simeq L_3(2)$, то $\langle\widetilde{ac}\rangle$ действует без неподвижных точек на $\bar{L}$. Заметим, что $C_{\bar{Q}}(\widetilde{ac^{-1}})$ — собственная подгруппа из $\bar{Q}$, допустимая относительно $\langle\widetilde{ac}\rangle \times \langle\tilde{t}\rangle$. Поэтому $C_{\bar{Q}}(\widetilde{ac^{-1}}) = 1$, ибо в противном случае подгруппа $Q_0 = C_{\bar{Q}}(\widetilde{ac})^{-1} \cap C_{\bar{Q}}(\tilde{t})$ была бы допустима относительно $\langle\widetilde{ac}\rangle$, но это невозможно. Теперь из строения $N_{\tilde{J}_0}(\tilde{P})$ следует, что $\bar{Q} = C_{\bar{Q}}(\tilde{a}) \times C_{\bar{Q}}(\tilde{c})$. Так как в $\hat{J}_0 = \bar{J}_0/O(\bar{J}_0)$ — централизатор $C_{\hat{J}_0}(\hat{t}) \simeq Z_2 \times \mathrm{Hol}(V_8)$, то $\hat{J}_0 = (\hat{B}_1 \times \hat{B}_2) \leftthreetimes \langle\hat{t}\rangle$, где $\hat{B}_1^{\hat{t}} = \hat{B}_2$ и $\hat{B}_1 \simeq \hat{B}_2 \simeq \mathrm{Hol}(V_8)$. Непосредственно проверяется, что силовская 2-подгруппа из централизатора любой инволюции из $\hat{B}_1 \times \hat{B}_2$ в $\hat{J}_0$ имеет порядок $\geqslant 2^{11}$. Следовательно, в этом случае t не сопряжена с инволюциями из F_0.

Предположим, теперь, что $\bar{J}_0$ второго типа. Пусть $\bar{M} \subseteq \bar{J}_0$ и $\bar{M}/C_{\bar{H}}(\bar{L}) \simeq L_3(4)$. Так как силовская 7-подгруппа из $\bar{M}$ действует без неподвижных точек на $\bar{L}^{\#}$, то силовская 2-подгруппа централизатора каждой инволюции из $\bar{L}$ в $\bar{M}$ имеет порядок 2^{12}. Следовательно, $\bar{x} \notin \bar{L}$.

Учитывая сопряженность всех инволюций из $L_3(4)$ можно положить, что $\bar{x} \in \bar{L}\bar{z}$, где $\bar{L}\bar{z} \in Z(\bar{F}/\bar{L})$. В силу строения $C_{\bar{H}}(\bar{t})$ и результата Гольдшмидта [17] $\bar{L}$ не сильно замкнуто в $\bar{F}_0$. Следовательно, существует инволюция $\bar{y} \in \bar{F}_0 \setminus \bar{L}$ сопряженная с инволюцией из $\bar{L}$. Можно считать, что $\bar{y} \in \bar{L}\bar{z}$. Заметим, что $|C_{\bar{L}}(\bar{z})| = 2^4$. Следовательно, $\bar{L}\bar{z}$ содержит 2^4 инволюций. Имеет место $|C_{\bar{F}}(\bar{x})| = |\bar{F}| / |\bar{x}^{\bar{F}}|$. С другой стороны, $\{\bar{x}^{\bar{F}}\} \subseteq \bar{L}\bar{z}$. Так как $\bar{L}\bar{z}$ содержит инволюции не сопряженные с $\bar{x}$, то $|\bar{x}^{\bar{F}}| \leqslant 2^3$. Следовательно, $|C_{\bar{F}}(\bar{x})| = 2^{10}$. Пусть F_1 — прообраз $C_{\bar{F}}(\bar{x})$ в F, содержащий L_0. Так как $|C_{Z_0}(x)| \leqslant 2^6$ и $L_0 \leftthreetimes \langle x\rangle \lhd F_1$, то $|C_F(x)| \geqslant |F_1| / |C_{L_0}(x)| \geqslant 2^{18}/2^6 = 2^{12}$. Полученное противоречие показывает, что инволюция t не сопряжена с инволюцией из F_0. Теорема доказана.

Институт математики
и механики УНЦ АН СССР

Поступило
7.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Aschabacher M., On finite groups of component type, Illinois J. Math., 19, № 1, (1975), 87—115.
[2] Foote R., Finite groups with components of 2-rank 1, I, II, J. Algebra, 41, № 1 (1976), 16—57.
[3] Aschbacher M., A characterization of certain Chevalley groups and its application to component type group, In: Proc. Conf. on Finite groups. Univ. Utah. Park. City, Utah. 1975, N. Y.—London, Acad. Press, 1976, 3—11.
[4] Finkelstein L., Finite groups with a standard component of G isomorphic to M_{23}, J. Algebra, 40, № 2 (1976), 541—555.
[5] Finkelstein L., Finite groups with a standard component isomorphic to M_{22}, J. Algebra, 44, № 2 (1977), 558—572.
[6] Ситников В. М., Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8, Матем. заметки, 16, № 6 (1974), 899—906.
[7] Ситников В. М., Конечные группы с заданной 2-локальной подгруппой в централизаторе инволюции, М., ВИНИТИ, 1977, № 1643—77 Деп.
[8] Yoshida T., A characterization of Conway's group C_3, Hokkaido Math. J., 3, № 2 (1974), 232—242.
[9] Gorenstein D., Finite Groups, N. Y., Harper & Row, 1968.
[10] Huppert B., Endliche Gruppen, I, N. Y., Springer-Verlag, 1967.
[11] Solomon R., Standard components of alternating type, II, J. Algebra, 47, № 1 (1977), 162—179.
[12] Schoenwaelder U., Finite groups with a Sylow 2-subgroup of type M_{24}, I, II, J. Algebra, 28, № 1 (1974), 20—45; 46—56.
[13] Conway J., Theree lectures on exceptional group, In: Finite Simple Groups, N. Y., Acad. Press, 1971, 215—247.
[14] Glauberman G., Thompson J., Weakly closed direct factors of Sylow subgroups, Pacific J. Math., 26, № 1 (1968), 73—83.
[15] Mwene B., On the subgroups of the group PSL $(4,2^m)$, J. Algebra, 41 № 1, (1976), 79—107.
[16] Gorenstein D., Harada K., On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$, Math. Z., 117, № 1—4 (1970), 207—238.
[17] O' Nan M., Some evidence for the existence of a new simple group, Proc London Math. Soc., 32, № 3 (1976), 421—479.
[18] Goldschmidt D., 2-Fusion in finite groups, Ann. Math., 99, № 1 (1974), 70—117.
[19] Leon J. S., Walws D. B., Simple groups of order $2^a 3^b p^c$ with cyclic Sylow p-groups, J. Algebra, 29, № 2 (1974), 246—254.