МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа по направлению 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность программы магистратуры «Математическое образование в системе профильной подготовки»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
70,36 % авторского текста
Работа рекомендована к защите

«23» июня 2023г.

Зав. кафедрой МиМОМ
________ Звягин К.А.

Выполнил(а):
Студент(к)а группы ЗФ-313-131-2-1
Газизова Азалия Николаевна
Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент
Шульгина Т.А.

Челябинск

2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с обновленным ФГОС СОО установлены требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы.

Метапредметные результаты обучающихся включают в том числе:

– овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности.

Личностные результаты обучающихся включают в том числе:

– готовность к саморазвитию, самостоятельности и самоопределению.

Личностные результаты должны отражать:

– осознание ценности научной деятельности, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

Метапредметные результаты освоения основной образовательной программы должны отражать овладение базовыми исследовательскими действиями:

– владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем;

– способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– овладение видами деятельности по получению нового знания, его интерпретации, преобразованию и применению в различных учебных ситуациях, в том числе при создании учебных и социальных проектов;

– формирование научного типа мышления, владение научной терминологией, ключевыми понятиями и методами;

– ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

– выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения;

– анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях;

– давать оценку новым ситуациям, оценивать приобретенный опыт;

– разрабатывать план решения проблемы с учетом анализа имеющихся материальных и нематериальных ресурсов;

– осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду;

– уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности;

– уметь интегрировать знания из разных предметных областей;

– выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения.

Все эти исследовательские действия непосредственно связаны с исследовательскими умениями. Результаты, установленные в стандарте, достигаются планомерной работой по формированию исследовательских умений обучающихся, которую можно осуществлять, в том числе и в рамках внеурочной деятельности.

Основной вопрос данной работы заключается в осуществлении формирования исследовательских умений обучающихся в рамках внеурочной деятельности в процессе решения задач с параметрами. Задачи с параметрами есть в заданиях Государственной итоговой аттестации и Единого государственного экзамена по математике. Они вызывают у учащихся затруднения, из-за того, что в школьной программе им уделяется мало времени, а также в учебниках задачи данного класса присутствуют в небольшом объеме. Поэтому в рамках внеурочной деятельности есть возможность восполнить недостаток времени и учебного методического материала для освоения данного вида задач.

Формированию исследовательских умений посвящены работы известных педагогов, методистов.

Так, Шестаков С. А. в своей книге «ЕГЭ 2019. Задачи с параметром» рассматривает решение задач с параметром как средство формирования исследовательских умений: «Решение задач с параметрами предполагает, в сущности, определенную исследовательскую деятельность, требующую внимания и уверенного владения материалом школьной программы по математике во всей ее полноте, умения выдвигать и проверять гипотезы, проводить (в том числе и достаточно разветвленные) логические построения и делать выводы» [21].

Мирошин В. В. в своей книге «Задачи с параметром. Теория и практика» придает важное значение обучению решению задач с параметрами для формирования исследовательских умений: «Нам видится, что задачи с параметром представляют собой именно такой инструмент для реализации современных целей математического и не только математического образования учащихся. При этом решение задач будет осуществляться переходом на новый более высокий уровень системности. Следует отметить, что предлагаемая нами содержательно–методическая линия задач с параметрами прямо нацелена на формирование исследовательских способностей, элементов математического творчества учащихся» [10].

Дорофеев Г. В. рассматривает роль задач с параметрами в формировании исследовательских умений следующим образом: « ... решение задач, а точнее, уравнений и неравенств с параметрами, открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале» [3].

Актуальность работы обусловлена следующим:

– задачи с параметрами есть в заданиях ГИА и ЕГЭ, они нередко вызывают у учащихся затруднения;

– задачи с параметрами играют важную роль в формировании исследовательских умений обучающихся, что в настоящее время является одной из главных задач современного общего образования.

Объект исследования: процесс организации внеурочной деятельности по математике в старших классах.

Предмет исследования: формирование исследовательских умений при решении задач с параметром во внеурочной деятельности по математике.

Цель: разработка модели формирования исследовательских умений во внеурочной деятельности при обучении решению задач с параметрами.

Гипотеза:

Повышению уровня исследовательских умений у обучающихся будет способствовать реализация во внеурочной деятельности по математике модели формирования исследовательских умений, включающей методологически–целевой, содержательный, операционный, оценочный компоненты.

Задачи:

1. Изучить документы об образовании, научно–педагогическую литературу по проблеме формирования исследовательских умений учащихся, методическую литературу по обучению решению задач с параметром.

2. Выделить принципы, методы и средства формирования исследовательских умений учащихся во внеурочной деятельности.

3. Разработать раздел программы внеурочной деятельности «Задачи с параметром»

4. Апробировать модель формирования исследовательских умений в процессе реализации программы внеурочной деятельности «Задачи с параметром»

Методы исследования:

– теоретико–методологический анализ;

– педагогический эксперимент (констатирующий, формирующий, контрольный).

Экспериментальная база для проведения исследования: репетиторский центр «Клякса» ИП Моисеева Ирина Сергеевна, группа обучающихся 11 кл. (5 человек).

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

1.1 Понятие исследовательского умения в научно-методической литературе

В научно-методической литературе дается понятие умения, как владение способами (приемами, действиями) применения усваиваемых знаний на практике. Умения включают в себя знания и навыки. Знание определяется как понимание, сохранение в памяти и умение воспроизводить и применять основные факты науки и теоретические обобщения. Навыки состоят из простых приемов деятельности и совмещенных приемов, из приемов контроля и приемов регулирования, навык рассматривается как составной элемент умения, как автоматизированное действие, доведенное до высокой степени совершенства.

Общими исследовательскими умениями и навыками называют умение видеть проблемы, умение задавать вопросы, умение выдвигать гипотезы, умение давать определение понятиям, умение классифицировать, умения и навыки наблюдения, умения и навыки проведения экспериментов, умения делать выводы и умозаключения, умения и навыки структурирования материала, умения и навыки работы с текстом, умение доказывать и защищать свои идеи.

Исследователь-педагог Успенский В. В. определяет исследовательские умения как «способность самостоятельных наблюдений, опытов, приобретенных в процессе решения исследовательских задач. Навыки исследования предполагают умение вести сравнение, анализ, производить выделение существенных признаков, делать обобщения и выводы» [20].

Российский психолог и педагог А. И. Савенков определяет исследовательские умения как «умение видеть проблемы, вырабатывать гипотезы, наблюдать, проводить эксперименты, давать определение понятиям, добывать информацию, проводить самостоятельное исследование, делать сравнения, давать оценку, доказывать правильность точки зрения, составлять внутренний план умственных действий, формулировать суждения» [15].

Исследовательские умения формируются в результате учебно–исследовательской деятельности, которая в научно–методической литературе характеризуется как социально организованная, познавательно–творческая деятельность обучающихся [16].

Исследовательские умения можно условно разбить на четыре группы:

1. Операционные умения:

– применять методы научного познания;

– анализировать условия заданной ситуации;

– намечать цели и задачи исследования;

– выдвигать гипотезы;

– устанавливать причинно–следственные связи;

– делать выводы из полученных результатов;

– обобщать результаты.

2. Организаторские умения:

– планировать учебно-исследовательскую работу

– проводить самоанализ, самоконтроль, управлять своими действиями в процессе учебно-исследовательской работы.

3. Практические умения: решать практические задачи, используя при необходимости справочники и технические средства, работать с литературой.

4. Коммуникативные умения: умение работать в коллективе, проявлять взаимопомощь, проводить взаимоконтроль, распределять обязанности при проведении коллективного исследования.

В научно-методических исследованиях выделяется несколько групп методов формирования исследовательских умений.

Практические методы формирования исследовательских умений на начальном этапе – это универсальные учебные действия, совершаемые при выполнении упражнений, практических работ. Они способствует развитию умений сравнивать, наблюдать, выделять главное и второстепенное, делать выводы и др.

Частично-поисковый или эвристический метод формирования исследовательских умений состоит в том, что учитель конструирует задание, расчленяет его на вспомогательные, намечает шаги поиска, учащиеся при выполнении отдельных этапов поиска осуществляют его самостоятельно, актуализируя имеющиеся знания, мотивируя свои действия. При этом формируются умения планировать, формулировать цель, прибегать к приемам анализа и синтеза, выбирать оптимальный способ решения.

Исследовательский метод формирования исследовательских умений определяется как способ организации поисковой, творческой деятельности учащихся по решению новых для них проблем. Он заключается в том, что:

а) ставится проблемная задача;

б) все этапы исследования учащимися проводятся самостоятельно;

в) исследование включает изучение условия задачи, выдвижение гипотез, составление плана исследования и его осуществление, формулирование результатов исследования, контроль и проверку полученного результата.

Для формирования исследовательских умений потребуются такие средства, как подбор задачного материала к уроку по определенным критериям, при этом анализируются возможные затруднения и система мер по их разрешению.

Наличие исследовательских умений у обучающихся формирует познавательные мотивы и интерес к овладению новыми знаниями. У них вырабатываются внимание, наблюдательность в учебной деятельности, инициатива и настойчивость в поиске решения учебной задачи, воспитывается трудолюбие. У обучающихся формируется умение анализировать информацию, устанавливать причинно-следственные связи, улучшать качество учебной деятельности.

Имеет место принцип самостоятельной ценности общих исследовательских умений и навыков. В исследовательском обучении задача развития у учащихся общих исследовательских умений и навыков рассматривается не как частный способ познания, а как основной путь формирования особого стиля жизни. Такого жизненного стиля, при котором поисковая активность будет занимать ведущее место. Работа по развитию общих умений и навыков исследовательского поиска у учащихся является фундаментом развития поведения, в котором поисковая активность в различных жизненных ситуациях будет приоритетной.

1.2 Роль предмета математики в формировании исследовательских умений

Важную роль играет исследовательская деятельность учащихся, непосредственно связанная с усвоением математических знаний. Обучение математике обладает уникальными возможностями в плане интеллектуального развития учащихся в формировании компонентов и качеств мышления, необходимых не только для продолжения образования и освоения новых областей знаний, но и обеспечивающих успешность профессиональной деятельности и полноценность повседневной жизни в современном обществе. В первую очередь это развитие абстрактного и логического мышления, воспитание алгоритмической культуры, и одновременно приобретение опыта творческой деятельности. Овладение учащимися в процессе обучения математике математическими методами мышления, включающими в себя все способы научного познания – дедукцию и индукцию, обобщение, сравнение, аналогию и другие способы способствует выработке у них математического стиля мышления, характеризуемого прежде всего, доказательностью, критичностью, независимостью логической схемы рассуждения от его содержания, структурированностью рассуждений. Эти качества мышления необходимы каждому человеку, независимо от сферы его деятельности, но именно обучение математике способно внести наибольший вклад в их развитие. «Обучение математике в школе должно быть ориентировано не столько на собственно математическое образование в узком смысле слова, сколько на образование с помощью математики» сказано Дорофеевым Г. В.

Основой для моделирования исследовательских, поисковых умений являются научные методы познания – индукция, дедукция, аналогия, анализ, синтез и другие. Можно привести пример формирования исследовательских умений используя индукцию – такой метод рассуждения при котором общий вывод (гипотеза) основывается на изучении отдельных частных фактах. Причем, если рассматриваются все частные факты без исключения, то индукция называется полной, в противном случае – неполной. Индукция является одним из действенных методов поиска решения задач. Рассмотрим применение индукции на примере.

Задача. Найти все значения параметра b при котором для любого действительного a уравнение $\cos(a + ab + ax) + 4\cos(a^2x) = 5b^2$ имеет хотя бы одно решение.

Поиск решения в виде беседы с учениками:

Начнем с того, что обозначим $f(x) = \cos(a + ab + ax) + 4\cos(a^2x)$

Тогда исходная задача может быть записана в следующем виде:

Найти все значения b при которых при любых значениях параметра a уравнение $f(x)= 5b^2$ имеет хотя бы одно решение.

1. Что сказано в условии про параметр a? (то, что он может принимать любые значения)

2. Какое значение возьмем для a? (Допустим a=0, тогда получим $5b^2=5$, $b=\pm 1$)

3. Необходимое условие $b^2= 1$. А какое значение b=1 или b=–1, или оба, надо подставить и проверить.

Ученики подставляют и проверяют.

$b=1$, $\cos(a(2+x))+4\cos(a^2x)= 5$ (1)

$$\begin{cases} a(2 + x)= 2\pi n, \ n\in Z \\ a^2x= 2\pi m, \ m \in Z, \end{cases} \qquad \begin{cases} ax=2\pi n-2a \quad {}^{\pi n}/_{a} - 1={}^{\pi m}/_{a2} \\ a^2x= 2\pi m \end{cases}$$

если $x\neq 0$, то $a^2-\pi na+\pi m=0$ видим, что a не может быть любым, если x=0, то $a=\pi n$,

$b=-1$, $\cos(ax) + 4\cos(a^2x) = 5$ (2)

уравнение имеет решение при x=0 (это легко видеть),

$$\begin{cases} a\cdot 0 = 0 \\ a^2\cdot 0 = 0 \end{cases} \qquad \text{и } a \text{ – любое.}$$

4. Подытожим. Какой вид имеет уравнение? (Уравнение имеет вид: f(x)= 5 То есть $\cos(a(2 + x)) +4\cos(a^2x)= 5$, если b=1 или $\cos(ax) + 4\cos(a^2x)= 5$, если b=–1)

5. В первом уравнении существует ли такое решение, при котором a может быть любым? (Нет)

6. В втором уравнении существует ли такое решение, при котором a может быть любым? (При x=0)

7. Как в примере был применен метод индукции? (Рассматривая частный случай когда a=0, получили общий вывод решения уравнения)

Записывают ответ: b=–1.

<u>Задача</u>. При каких значениях параметра a неравенство

$\log_{0,4a-3}(0,2(\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5)) > 0$ выполняется для всех значениях x?

Поиск решения в виде беседы с учениками:

1. С чего начнем решение? (С определения ОДЗ: $0,4a-3>0$; $0,4a-3\neq1$; $a > 7,5$; $a\neq10$, $(\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5) > 0$)

2. Какое свойство логарифмической функции используем для решения неравенства? (Возрастание, убывание логарифмической функции в зависимости от значения основания логарифмической функции

$0 < 0,4a-3 < 1$; $7,5<a< 10$, $0<(\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5) < 5$)

3. Получили $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 10 - a$. В левой части неравенства, какую формулу для тригонометрических функций используем? (Формулу дополнительного угла: $0,5(\sin x + \sqrt{3}\cos x) < 0,5(10 - a)$; $\sin (x+{}^{\pi}/_{3}) < 0,5(10-a)$)

4. Какое частное значение можно выбрать для x? (возьмем такое значение, чтобы $\sin (x+{}^{\pi}/_{3})$ принимал наибольшее значение то есть 1, при $x= {}^{\pi}/_{6}$, тогда получим $1< 0,5(10 - a)$; $a < 8$; $\sin({}^{\pi}/_{6})+ \sqrt{3}\cos({}^{\pi}/_{6}) + a - 5>0$ и $a >3$, получим что $7,5<a< 8$)

5. Какой случай еще надо рассмотреть? (Рассмотрим случай, когда $a > 10$, тогда $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 10 - a$; $\sin (x+{}^{\pi}/_{3}) > 0,5(10- a)$)

6. Какое частное значение можно выбрать для x? (возьмем такое значение, чтобы $\sin (x+{}^{\pi}/_{3})$ принимал наименьшее значение то есть -1, при $x= -{}^{5\pi}/_{6}$, тогда получим $-1> 0,5(10 - a)$; $a > 12$)

7. Как в примере был применен метод индукции? (Рассматривая частный случай, когда $x= {}^{\pi}/_{6}$ и когда $x= -{}^{5\pi}/_{6}$, получили общий вывод решения уравнения. Запись ответа: $a\in(7,5; 8)\cup(12; +\infty)$)

Так же можно привести пример формирования исследовательских умений, используя дедукцию. Дедукция – форма мышления, при которой утверждение логически выводится из некоторых данных утверждений. Дедуктивный метод является основным в школе.

Задача. При всех значениях параметра a решить неравенство.

$3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0$

Поиск решения в виде беседы с учениками:

1.Решение начнем с определения области допустимых значений.

($2x-a \geq 0$)

2.Рассмотрим случай, когда $a=0$.

(Если $a=0$, то неравенство примет вид $6x > 0$, то есть $x > 0$)

3.Какую целесообразно сделать замену переменной?

($\sqrt{2x-a} = t$, $t \geq 0$)

4.Запишем неравенство с учетом замены переменной.

($3t^2+5at - 2a^2 > 0$)

5. Пусть $a \neq 0$. Найдем решения.

(Находим дискриминант: $D=25a^2+ 24a^2= 49a^2$

При $a \neq 0$ два корня $t={}^{(-5a\pm 7a)}/_{6}$

$t_1= {}^{a}/_{3}$

$t_2=-2a$)

6. Рассмотрим случай, когда $a>0$

(В этом случае ${}^{a}/_{3} > -2a$

$$\begin{array}{ccccc} & + & - & + & \\ \hline & -2a & & {}^{a}/_{3} & \rightarrow \end{array}$$

$\sqrt{2x-a} < -2a$ Решений нет $\sqrt{2x-a} > {}^{a}/_{3}$ $x > {}^{(a2+9a)}/_{18}$)

7. Рассмотрим случай, когда $a<0$

(В этом случае $-2a > {}^{a}/_{3}$

$$\begin{array}{ccccc} & + & - & + & \\ \hline & {}^{a}/_{3} & & -2a & \rightarrow \end{array}$$

$\sqrt{2x-a} < {}^{a}/_{3}$ Решений нет $\sqrt{2x-a} > -2a$ $x > {}^{(4a2+a)}/_{2}$)

8. Запишите ответ для всех значений параметра a

(Ответ: $a<0$, $x \in ({}^{(4a2+a)}/_{2}; +\infty)$; $a \geq 0$, $x \in ({}^{(a2+9a)}/_{18}; +\infty)$)

Можно привести пример исследовательского поиска:

Задача. Найти все значения параметра a при каждом из которых уравнение

$|x^2-4a^2| = |x-2a| \cdot \sqrt{x+14}$ имеет ровно два различных решения.

Поиск решения в виде беседы с учениками:

1. Что значит уравнение имеет ровно два различных решения? Отвлечемся от нашей задачи. Если некоторое уравнение $y = f(x)$ имеет следующие корни: $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=5$, $x_4=5$, то сколько различных решений оно имеет? (Два)
2. Говорят, что корень $x_1=2$ – корень кратности два, и корень $x_2=5$ также корень кратности два. Какой вывод? (В нашем примере также возможно наличие одинаковых корней)
3. С чего нужно начать уравнение? (С определения области допустимых значений переменной ОДЗ $x \geq -14$)
4. Выполняем равносильные преобразования: $|x-2a| \cdot (|x+2a| - \sqrt{(x+14)})=0$ полученное уравнение заменим совокупностью уравнений: $|x-2a|=0$ либо $|x+2a| - \sqrt{x+14}=0$. Первое уравнение имеет корень $x=2a$ и может являться корнем только при $a \geq -7$. Во втором уравнении $|x+2a| = \sqrt{x+14}$, левую и правую часть возведем в квадрат $x^2+ 4xa +4a^2 = x+14$, $x^2+(4a-1)x +4a^2 -14= 0$ и запишем выражение для дискриминанта D= 57 – 8a. Рассмотрим два случая: 1. D=0 a=7,125 , корни $x_1={}^{1-4a}/_2=-13{,}75$; $x_2=14{,}25$. Оба принадлежат ОДЗ. То есть при a=7,125 имеем два различных решения. 2. D>0 $a<7{,}125$ Рассмотрим случай $-7 \leq a < 7{,}125$, в этом случае $x=2a$ – корень. Сравним меньший из корней $x= (1-4a \pm \sqrt{57-8a})/2$ с числом –14, решим неравенство $(1-4a-\sqrt{(57-8a)})/2<-14$, оно сводится к неравенству $(a-7)^2<0$ которое не имеет решения, то есть при $-7 \leq a < 7{,}125$ три корня. То есть два различных корня возможны при $a<-7$
5. Как учесть тот факт, что корни могут повторяться? (Надо решить уравнение ${}^{(1-4a\pm\sqrt{(57-8a)})}/_2= 2a$, решив его получим что при a= 1, a= –0,875, образуются корни кратности два, и в общей сложности два решения)

6. Запишем ответ. (Ответ: $a \in (-\infty;-7) \cup \{1; -0,875; 7,125\}$)

Одним из элементов учебно-познавательной деятельности является умение доказывать теоремы. Доказательство теорем формирует исследовательские умения обучающихся, так как процесс доказательства теорем связан с распознаванием понятий, входящих в условие теоремы, необходимостью доказывать вспомогательные утверждения, анализом состава доказываемого утверждения, отысканием плана доказательства, применением конкретного метода доказательства, выводом следствий.

Важную роль в интеллектуальном развитии обучающихся играет решение учебно-исследовательских задач. Учебное исследование – это процесс поисковой познавательной деятельности, которое направлено на получение новых знаний и выполняется самостоятельно обучающимися. Формированию исследовательских умений способствует:

– личностно–ориентированный подход к обучению;

– применение технологии проблемного обучения, системно-деятельностного подхода, способствование овладению обучающимися рациональными приемами познавательной деятельности;

– создание психологической атмосферы, оптимальных условий для творческой деятельности.

1.3 Модель формирования исследовательских умений

Модель формирования исследовательских умений представляет собой совокупность методологически–целевого, содержательный, операционного, оценочного компонентов. Взаимосвязь компонентов представлена в схеме 1.

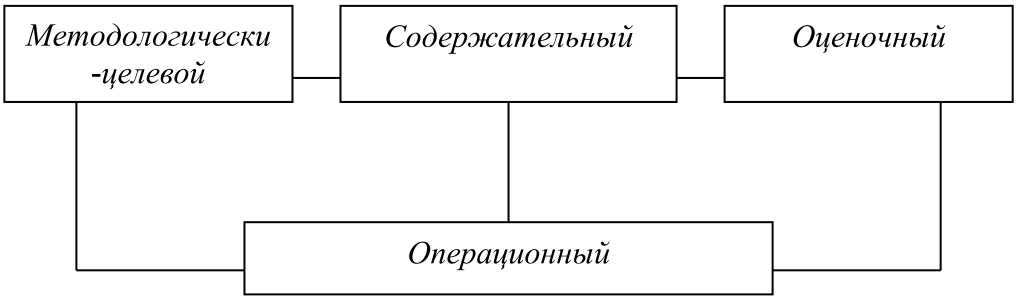


Схема 1 – Взаимосвязь компонентов модели формирования исследовательских умений

Содержание компонентов отражено в таблице:

Таблица 1 – Формируемые исследовательские умения в ходе решения задач с параметрами

Компонент	Содержание
Методологически–целевой	Возникновение общественного запроса на наличие специалистов, обладающих творческим, исследовательским мышлением, в различных областях экономики. Требования ФГОС СОО к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы. Принципы организации процесса формирования исследовательских умений. Методы организации процесса формирования исследовательских умений
Операционный	Организация учебно–исследовательской деятельности обучающихся на основе принципов и методов осуществления процесса формирования исследовательских умений
Содержательный	Разработка программы раздела внеурочной деятельности «Задачи с параметром» для учащихся 11 класса
Оценочный	Планируемый результат. Критерии и оценка сформированности исследовательских умений

Методологически–целевой компонент включает принципы и методы организации процесса формирования исследовательских умений.

Исследовательские умения формируются в процессе исследовательского обучения, которое строится на следующих принципах:

1. Принцип ориентации на познавательные интересы учащегося. Связано это с тем, что исследование – процесс творческий, который основывается на внутренней потребности в познании.

2. Принцип свободы выбора и ответственности за собственное обучение, то есть индивидуальные цели обучения учащегося должны быть первостепенными.

3. Принцип освоения знаний в единстве со способами их получения. Учащиеся должны осваивать в образовании не только конечный продукт в виде некоего позитивного знания, но и способами и путями его получения.

4. Принцип опоры на развитие умений самостоятельного поиска информации. Главная задача современного образования – не только сообщение знаний, а в первую очередь – развитие у ребенка потребности и способности эти знания добывать.

5. Принцип сочетания продуктивных и репродуктивных методов обучения. Исследовательские методы обучения должны сочетаться с применением методов репродуктивных.

6. Принцип формирования представлений о динамичности знания. Знания имеют свойство расширяться, углубляться.

7. Принцип формирования представления об исследовании как стиле жизни. В исследовательском обучении задача развития у учащихся общих исследовательских умений и навыков рассматриваются не как частный способ познания, а как основной путь формирования особого стиля жизни, в котором поисковая активность будет занимать ведущее место.

Метод обучения – это способ организации познавательной деятельности обучающихся. Для формировании исследовательских умений обучающихся целесообразно применять:

1. Метод проблемного изложения, который заключается в том, что педагог, используя различные источники и средства, ставит проблему, формулирует познавательную задачу, а затем, раскрывая систему доказательств, сравнивая точки зрения, различные подходы, показывает способ решения поставленной задачи. Обучающиеся как бы становятся свидетелями и соучастниками научного поиска.

2. Частично-поисковый, или эвристический метод. Заключается в организации активного поиска решения выдвинутых в обучении (или самостоятельно сформулированных) познавательных задач либо под руководством педагога, либо на основе эвристических программ и указаний. Процесс мышления приобретает продуктивный характер, но при этом поэтапно направляется и контролируется педагогом или самими учащимися на основе работы над программами (в том числе и компьютерными) и учебными пособиями. Такой метод, одна из разновидностей которого – эвристическая беседа – проверенный способ активизации мышления, возбуждения интереса к познанию.

3. Исследовательский метод. После анализа материала, постановки проблем и задач и краткого устного или письменного инструктажа обучаемые самостоятельно изучают литературу, источники, ведут наблюдения и измерения и выполняют другие действия поискового характера. Инициатива, самостоятельность, творческий поиск проявляются в исследовательской деятельности наиболее полно. Методы учебной работы непосредственно перерастают в методы научного исследования.

Исследовательский метод лежит в основе проблемного обучения которое представляется как решение нестандартных научно-учебных задач нестандартными же методами. Суть проблемной интерпретации учебного материала состоит в том, что преподаватель не сообщает знаний в готовом виде, но ставит перед учащимися проблемные задачи, побуждая искать пути и средства их решения. Главные условия успешности проблемного обучения заключаются в:

– обеспечении достаточной мотивации, способной вызвать интерес к содержанию проблемы;

– обеспечении посильности работы с возникающими на каждом этапе проблемами (рациональное соотношение известного и неизвестного);

– значимости информации, получаемой при решении проблемы, для обучаемого;

– необходимости осуществления диалогического доброжелательного общения педагога с учащимися, когда с вниманием и поощрением относятся ко всем мыслям, гипотезам, высказанным учащимися.

Главные психолого-педагогические цели проблемного обучения и поисковых методов заключаются в:

– развитии мышления и способностей учащихся, развитии творческих умений;

– усвоении учащимися знаний, умений, добытых в ходе активного поиска и самостоятельного решения проблем, в результате эти знания, умения более прочные, чем при традиционном обучении;

– воспитании активной творческой личности учащегося, умеющего видеть, ставить и разрешать нестандартные проблемы.

Операционный компонент представляет собой описание этапов процесса формирования исследовательских умений. Деятельность учителя по формированию исследовательских умений включает следующие этапы:

1. Постановку целей учебно-исследовательской работы.

2. Формирование потребностей обучающихся в освоении исследовательских умений.

3. Непосредственное формирования исследовательских умений осуществляется в процессе проведения курса внеурочной деятельности «Задачи с параметром».

4. Регулирование и контроль за учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

Содержательный компонент определяет содержание задачного материала относящегося к теме «Задачи с параметром», на котором будут отрабатываться исследовательские умения и навыки обучающихся.

Оценочный компонент выявляет уровень сформированности исследовательских умений согласно следующим критериям:

1. Наличием у обучающихся интереса, мотивации к решению исследовательских, нестандартных задач, проявление ими активности,

инициативности при их решении, стремление к экспериментированию, к самостоятельной творческой деятельности.

2. Способностью применять известные знания в нестандартных, неожиданных ситуациях, владением методами исследования – анализом, аналогией, обобщением и другими.

3. Количественными результатами, полученными в результате выполнения обучающимися контрольных заданий.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ НА

ВНЕУРОЧНЫХ ЗАНЯТИЯХ

2.1 Задачи с параметрами, как отдельный вид учебно-исследовательских задач, используемый при формировании исследовательских умений обучающихся

С понятием параметра школьники сталкиваются при изучении функции $y = kx + b$, затем при изучении квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, обратной пропорциональности $y={}^k/_x$, а также при изучении уравнения окружности $(x – a)^2 + (y – b)^2 = c^2$ В учебной литературе дается следующее определение параметра: если дано уравнение f(x; a) = 0, которое нужно решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то f(x; a) = 0 называют уравнением с параметром (Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа 10–11 класс).

В 8–11 классах в школьном курсе присутствуют в незначительном объеме задачи с параметрами, в большем объеме они могут быть во внеурочных занятиях, так как задачи с параметрами позволяют развить активную творческую деятельность учащихся, их системное мышление, подготовить их решению творческих задач в дальнейшей деятельности.

Известно высказывание Г. В. Дорофеева о том, что «решение уравнений и неравенств с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале»

В рамках внеурочной деятельности целесообразно рассмотреть некоторые методы решения задач с параметрами. Это:

1) графический метод

2) аналитический метод, он включает в себя:

– равносильные преобразования;

– замену переменных;

– метод решения задач с параметром с помощью использования свойств функций: нахождения области определения функции, четности нечетности функции, ограниченности функции, монотонности функции, периодичности функции;

– метод областей на координатной плоскости;

– метод изменения ролей переменных и другие методы.

Графический метод заключается в нахождении решения при помощи построения графиков. Метод изменения ролей переменных заключается в замене роли переменной и параметра, что в некоторых случаях может упростить задачу.

При решении уравнений или неравенств с параметром чаще всего встречаются два типа задач:

1. Для каждого значения параметра найти все решения заданного уравнения (или неравенства).

2. Найти все значения параметра, при каждом из которых решения уравнения (или неравенства) удовлетворяют заданным требованиям.

Далее приводятся примеры формирования исследовательских умений обучающихся с помощью решения задач с параметрами.

На внеурочных занятиях посвященных задачам с параметром из электронных образовательных ресурсов можно использовать презентацию «Разработка заданий и методических рекомендаций для решения задач с параметром при подготовке к ЕГЭ по математике» учителя математики МБОУ СОШ №14 г. Красногорска Беляевской С. В.

Занятие 1–2.

Прежде чем на уроке начать тему: «Уравнения и неравенства с параметром» нужно ознакомить учащихся с понятием параметр, для этого учащимся можно сообщить текстом из презентации, что с одной стороны, параметр следует считать величиной известной, а с другой — конкретное значение параметра не дано. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой — может принимать различные значения. Получается, что параметр в условии — это «неизвестная величина», «переменная постоянная». Главное, что должен усвоить школьник это то, что параметр – это число, хоть и неизвестное, но фиксированное, имеющее двойственную природу. После этих вступительных слов можно спросить у школьников встречались ли они с параметрами. Это линейная функция $y=kx+b$, где x и y – переменные, k и b – параметры; квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где x – переменная a, b, c, – параметры.

Затем, используя слайды 7–13, где приведены несложные примеры на параметры с решениями, разобрать, как они решены:

Пример №1. Сравнить $-a$ и $5a$

Пример №2. Решить уравнение $ax=2$

Пример №3. Решить уравнение $(a^2-9)x=a+3$

Далее можно обратиться к задачнику Мордковича А. Г. «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» №1857(а):

Решить уравнение (относительно x)

$a^2x - 4x + 2 = a$

Таблица 2 – Формируемые исследовательские умения в ходе решения задач с параметрами

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые исследовательские умения
1	2	3
Чтобы решить данную задачу необходимо провести ее исследование. Что значит решить уравнение с параметром?	Для каждого значения параметра найти все решения заданного уравнения	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации, намечать цели и задачи исследования
Какой вид данного уравнения?	Относительно x – линейное	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия
К какому виду необходимо привести данное	$(a^2-4)x = a-2$, затем $(a-2)(a+2)x = a-2$	

уравнение?		заданной ситуации устанавливать причинно–следственные связи, делать выводы из полученных результатов. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу
Какие случаи надо рассмотреть?	Надо рассмотреть случаи, когда $a=\pm2$ и $a\neq\pm2$	
Какой вид принимает уравнение, если $a=-2$?	Уравнение принимает вид: $0\cdot x=-4$	
Каковы его решения, обоснуйте?	Решений нет, так как при любых значениях x в левой части уравнения будет 0, а в правой –4	
Какой вид принимает уравнение, если $a=2$?	Уравнение принимает вид: $0\cdot x=0$	
Какие решения оно имеет, обоснуйте?	x принимает любые значения, так как при любых значениях x в левой части уравнения будет 0, и в правой тоже 0	
Какой вид принимает уравнение, если $a\neq\pm2$?	Так как в данном случае коэффициент при x отличен от нуля, то $x={}^{1}/_{(a+2)}$	
Записываем все рассмотренные случаи в ответе	Ответ: $x={}^{1}/_{(a+2)}$, если $a\neq\pm2$; x – любое число, если $a=2$; нет корней, если $a=-2$	Операционные: умение обобщать результаты. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу

Возвращаемся к презентации, рассматриваем, изучаем в ней полезный и наглядный пример:

Пример №4. Решить неравенство: $ax<7$

Затем можно обратиться к задачнику Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» №1859(а):

Решить неравенство (относительно x):

$b^2x - bx \geq b^2+b-2$

Таблица 3 – Формируемые исследовательские умения в ходе решения задач с параметрами

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые исследовательские умения
1	2	3
Чтобы решить данную задачу необходимо провести ее исследование. Что значит решить неравенство с параметром?	Для каждого значения параметра найти все решения заданного неравенства	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации, намечать цели и задачи исследования

Какой вид данного неравенства?	Относительно x – линейное	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации устанавливать причинно–следственные связи, делать выводы из полученных результатов. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу
К какому виду необходимо привести данное неравенство?	$(b^2 - b)x \geq b^2+b-2$, затем $b(b-1)\,x \geq b^2+b-2$, затем $b(b-1)\,x \geq (b+2)(b-1)$	
Какие случаи надо рассмотреть?	Надо рассмотреть случаи, когда коэффициент при x положительный, отрицательный и равен нулю	
Какой вид принимает неравенство, если коэффициент при x равен нулю?	Коэффициент равен нулю, если b=0 или b=1, $0\cdot x \geq -2$, если b=0, $0\cdot x \geq 0$, если b=1	
Каковы решения этих неравенств, ответ обоснуйте?	Для обоих неравенств x принимает любые значения, так как при любых значениях x в левой части неравенства будет 0, получим истинные неравенства	
При каких значениях b коэффициент при x положителен?	$b(b-1)>0$ при $b\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$	
Каковы решения неравенства в этом случае?	$x \geq {}^{((b+2)(b-1))}/_{(b(b-1))}$ $x \geq {}^{(b+2)}/_{b}$	
При каких значениях b коэффициент при x отрицателен?	$b(b-1) < 0$ при $b\in(0;1)$	
Каковы решения неравенства в этом случае?	$x \leq {}^{(b+2)}/_{b}$	
Записываем все рассмотренные случаи в ответе	Ответ: $x \geq {}^{(b+2)}/_{b}$, $b\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; $x \leq {}^{(b+2)}/_{b}$, при $b\in(0;1)$; x любое число, если b=0, b=1	Операционные: умение обобщать результаты. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу

Возвращаемся к презентации, разбираем в ней следующие примеры:

Пример №5. Решить уравнение: $\dfrac{x-a}{x+3}=0$

Пример №6. Решить уравнение $(a+1)x^2-2x+1-a=0$

Пример №7. Решить уравнение $\sqrt{x-b}\,(x+4)=0$

Затем можно обратиться к задачнику Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» №1860:

При каких значениях a уравнение $ax^2 + 4x - a + 5 = 0$:

а) имеет два корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет действительных корней?

Таблица 4 – Формируемые исследовательские умения в ходе решения задач с параметрами

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые исследовательские умения
1	2	3
Чтобы решить данную задачу необходимо провести исследование данного уравнения. Какой вид данного уравнения?	Уравнение квадратное	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации, намечать цели и задачи исследования, устанавливать причинно–следственные связи, делать выводы из полученных результатов, обобщать результаты. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу, проводить самоанализ, самоконтроль, управлять своими действиями в процессе учебно–исследовательской работы
В каком случае оно является квадратным?	Если $a \neq 0$	
При a=0 каким является данное уравнение?	При a=0 уравнение – линейное	
Вид уравнения при a=0 и его решение?	$4x+5= 0$ $x= -1,25$	
Делаем вывод, что при a=0 сколько корней имеет уравнение?	При a=0 уравнение имеет один корень	
Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. От чего зависит количество корней квадратного уравнения?	Количество корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта	
Запишем выражение для дискриминанта, исследуем его знак и учтем, что $a \neq 0$	$D=16-4a(5-a)=4a^2-20a+16$ $= =4(a^2-5a+4)=4(a-4)(a-1)$ $D=0$, если $a = 4$, $a = 1$ $D>0$, если $a \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (4;+\infty)$ $D<0$, если $a \in (1; 4)$	
Запишем при каких значениях параметра a один корень, два корня, нет корней	Если a=4, a=1, один корень. Если $a \in (-\infty;0) \cup (0;1) \cup (4;+\infty)$ два корня. Если $a \in (1; 4)$, то нет корней	
Объединим оба случая и	Ответ: а) при $a \in (-$	

запишем ответ	$\infty;0)\cup(0;1)\cup(4;+\infty)$ два корня б) $a = 4$, $a = 1$, $a = 0$ один корень в) $a \in (1;\ 4)$ нет корней	

Для самостоятельного решения можно их взять из задачника Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» №1855–1859:

№1855 При каких значениях параметра m уравнение $mx–x+1= m^2$

а) имеет один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

№1856 При каких значениях параметра b уравнение $b^2x – x +2= b^2+ b$

а) имеет один корень;

б) не имеет корней;

в) имеет более одного корня?

№1857 Решите уравнение

а) $a^2x – 4x +2= a$ б) $^x/_a + x – 1= a$

№1858 Решите неравенство а) $mx–x+1\geq m^2$ б) $b^2x–x +1\geq b$

№1859 Решите неравенство а) $b^2x– bx \geq b^2+b–2$ б) $^x/_a + x \leq a+ 1$

Занятие 3.

На третьем занятии задачи усложняются. Проверив домашнее задание, можно перейти к слайдам 14–22 и продолжить разбор задач, дать при этом ученикам больше самостоятельности.

Пример №8. Решить уравнение: $\left|x^2-1\right|+\left|a(x-1)\right|=0$

Пример №9. Решить неравенство: $(1-b^2)x^2+2bx+1\geq 0.$

Пример №10. При каких a уравнение $ax^2-x+3=0$ имеет единственное решение?

Пример №11. При каких a уравнение $(a-2)x^2+(4-2a)x+3=0$ имеет единственное решение?

Затем можно обратиться к задачнику Мордковича А.Г. «Алгебра и начала анализа 10–11 классы» №1876(а):

Сколько корней при различных значениях a имеет уравнение:

$\sqrt{x} = x - a$

Таблица 5 – Формируемые исследовательские умения в ходе решения задач с параметрами

Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые исследовательские умения
1	2	3
Чтобы решить данную задачу необходимо провести исследование данного уравнения. Какой вид данного уравнения?	Уравнение – иррациональное	Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу
С чего нужно начать решение?	Нужно найти область допустимых значений неизвестных величин в уравнении	
Находим ОДЗ	Уравнение имеет смысл, если $x \geq 0$, $x - a \geq 0$	Операционные: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации, намечать цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы, устанавливать причинно–следственные связи, делать выводы из полученных результатов, обобщать результаты. Организаторские: умение планировать учебно–исследовательскую работу, проводить самоанализ, самоконтроль, управлять своими действиями в процессе учебно–исследовательской работы
Как записать ОДЗ, учитывая, что $a>0$ или $a \leq 0$?	Если $a \leq 0$, то $x \geq 0$, если $a>0$, то $x \geq a$	
Каким способом решаем иррациональное уравнение?	Возведением в квадрат обеих частей уравнения. $x = x^2 - 2xa + a^2$ $x^2 - x(2a+1) + a^2 = 0$ $D = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 = 4a + 1$	
Запишем возможные случаи в зависимости от знака дискриминанта с учетом ОДЗ	1. $D=0$ при $a = -{}^{1}/_{4}$ $x = {}^{1}/_{4}$ единственный корень, 2. $D<0$ при $a < -{}^{1}/_{4}$, корней нет. 3. $D>0$ при $a > -{}^{1}/_{4}$, два корня $x_{12} = (2a+1 \pm \sqrt{(4a+1)})/2$	
Какие можно сделать выводы на данном этапе решения?	При $a = -{}^{1}/_{4}$ есть единственный корень $x = {}^{1}/_{4}$, который удовлетворяет ОДЗ. При $a > -{}^{1}/_{4}$ необходимо выяснить как найденные корни согласуются с ОДЗ	
Необходимо вспомнить – какая теорема помогает исследовать знаки корней	Теорема Виета. При $-{}^{1}/_{4} < a \leq 0$, $x_1 \cdot x_2 = a^2 \geq 0$, $x_1 + x_2 = 2a + 1 > 0$, при всех $-{}^{1}/_{4} < a \leq 0$ оба корня неотрицательные, то есть оба корня удовлетворяют ОДЗ	
Можно ввести функцию $f(x) = x^2 - x(2a+1) + a^2$, так	При $a>0$ $x \geq$a, абсцисса вершины параболы $x_0 = a + {}^{1}/_{2} > 0$	

как $x_0=a+{}^1/_2>0$ (абсцисса вершины параболы) при всех $-{}^1/_4<a<0$ и $f(0)>0$ то оба корня положительные	при $a>0$, $f(a)=a^2-a(2a+1)+a^2=-a<0$. То есть $f(a)<0$, а $f(x_1)=0$ значит $x_1<a$, что не удовлетворяет ОДЗ, следовательно при $a>0$ уравнение имеет единственный корень x_2	
Запишем ответ	Нет корней, если $a<-{}^1/_4$, один корень, если $a=-{}^1/_4$ или $a>0$, два корня, если $-{}^1/_4<a\le 0$	

Далее приведено содержание занятий, осуществленных в рамках внеурочной деятельности по теме «Задачи с параметром».

1. Фрагмент урока, тема которого «Задачи с параметром –17 задание ЕГЭ» Урок проводится с ученицей 11 класса.

<u>Задача 1</u>. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных корня.

$$\sqrt{x^4+(2a-3)x^2+4a^2}=x^2+3x-2a$$

Учитель: При каком условии уравнение имеет смысл?

Ученица: Если правая часть уравнения принимает неотрицательные значения, $x^2+3x-2a\ge 0$

Учитель: чтобы решить уравнение надо избавиться от корня. Как это сделать?

Ученица: Возвести в квадрат левую и правую части уравнения.

После возведения в квадрат получила:

$$x^4+(2a-3)x^2+4a^2=x^4+9x^2+4a^2+6x^3-4x^2a-12xa$$

Можно упростить:

$$12x^2+6x^3-6x^2a-12xa=0$$

$$6x^3+6x^2(2-a)-12xa=0$$

$$6x(x^2+x(2-a)-2a)=0$$

Можно найти корни: $x_1=0$ или $x^2+x(2-a)-2a=0$ D$=(2-a)^2+8a=4-4a+a^2+8a=4+4a+a^2=(a+2)^2$

$x_2=a$, $x_3=-2$

Учитель: каким условиям должны удовлетворять корни?

Ученица: Каждый из корней удовлетворяет первому условию $x^2+3x-2a\geq 0$. То есть при $x=0$; $-2a\geq 0$, $a\leq 0$, при $x = a$; $a^2+3a-2a\geq 0$; $a^2+a\geq 0$ $a(a+1)\geq 0$, $a\leq -1$ и $a\geq 0$, при $x=-2$ $4+6-2a\geq 0$., $a\leq -1$. В итоге $a\leq -1$.

Учитель: Для того, чтобы корни были различны что необходимо?

Ученица: Нужно, чтобы корни не совпадали, поэтому $a\neq 0$ и $a\neq -2$, окончательный ответ: $a\in(-\infty; -2)\cup(-2;-1]$

Задача 2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет четыре различных решения:

$$\begin{cases} y=(a-4)x^2-3ax-4+a \\ x^2=y^2 \end{cases}$$

Учитель: Что является графиком данных уравнений?

Ученица: При $a\neq 4$ первое уравнение – это парабола, а второе – это две прямые $y = x$ и $y = -x$, имеющие одну общую точку (0,0).

Учитель: В таком случае как можно переписать данную систему уравнений?

Ученица:

1) $\begin{cases} y=(a-4)x^2-3ax-4+a \\ y = x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=(a-4)x^2-3ax-4+a \\ y = -x \end{cases}$

1) $x=(a-4)x^2-3ax+a-4$ $(a-4)x^2-(3a+1)x+a-4=0$

а) если $a=4$, то $-13x=0$, $x=0$, $y=0$, одно решение

б) если $a\neq 4$, то для того, чтобы было два решения надо, чтобы дискриминант был больше нуля $D= (3a+1)^2-4(a-4)^2=(a+9)(5a-7)>0$

то есть при $a\in(-\infty; -9)\cup(1,4; +\infty)$

2) $-x=(a-4)x^2-3ax+a-4$ $(a-4)x^2-(3a-1)x+a-4=0$

а) если $a=4$, то $-11x=0$, $x=0$, $y=0$, одно решение

б) если $a\neq 4$, то для того, чтобы было два решения надо, чтобы дискриминант был больше нуля $D= (3a-1)^2-4(a-4)^2=(a+7)(5a-9)>0$

то есть при $a\in(-\infty; -7)\cup(1,8;4)\cup(4; +\infty)$

В итоге, чтобы было четыре решения $a \in (-\infty; -9) \cup (1,8;4) \cup (4; +\infty)$

2. Фрагмент урока тема которого «Задачи с параметром –17 задание ЕГЭ» Урок проводится с ученицей 11 класса.

Задача 1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{cases} a(x^4+4) = y + 2\cdot(1 - |x|) \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$$

Учитель: Давай еще раз вспомним свойство четности нечетности функции.

Ученица: Функция четная, если для любых x из области определения функции выполняется $f(x)=f(-x)$ и нечетной, если выполняется $f(-x) =- f(x)$.

Учитель: какое требование к области определения функции?

Ученица: Область определения симметрична относительно начала координат для четной или нечетной функции.

Учитель: Что можно сказать о данной системе с точки зрения четности нечетности?

Ученица: Система уравнений четная относительно переменной x.

Учитель: Почему?

Ученица: Потому что, если заменить x на $-x$, вид уравнений не изменится, так как

$x^4 = (-x)^4$, $|x| = |-x|$

Учитель: Что можно сказать про переменную y, с точки зрения четности нечетности?

Ученица: Система уравнений не обладает свойством четности нечетности относительно переменной y, так как если заменить y на $-y$ первое уравнение системы изменится.

Учитель: Тогда, сделаем из сказанного вывод – если при некотором значении x пара значений переменных (x,y) является решением данной системы, то – продолжи пожалуйста предложение.

Ученица: То пара значений переменных $(-x,y)$ так же является решением данной системы.

Учитель: То есть получается два решения системы. Тогда, при каком условии система может иметь единственное решение?

Ученица: Если x равен нулю.

Учитель: Значит, что надо сделать?

Ученица: Записать систему при x=0.

При x=0 получим: $\begin{cases} 4a=y+2 \\ |y| = 2 \end{cases}$

Учитель: Каковы решения второго уравнения системы?

Ученица: Уравнение $|y| = 2$ имеет корни $y = \pm 2$

Перепишем нашу систему:

$$\begin{cases} 4a=y+2 \\ y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a=y+2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$4a=4 \qquad 4a=0$$

$$a=1 \qquad a=0$$

Получили два значения a_1=1, a_2=0

Учитель: Тот вывод, который мы с тобой сделали, что система может иметь единственное решение, если его решением является пара значений $(0,y_0)$ – является лишь необходимым условием. Кроме решения $(0,y_0)$ могут оказаться еще и другие решения. Нужно проверить для каждого из значений a_1=1 и a_2=0 наличие других решений. Давай запишем нашу систему при найденных значениях параметра a.

Ученица:

1. при a=0 система имеет вид $\begin{cases} y + 2\cdot(1 - |x|) = 0 \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2|x| - 2 \\ |x| = 2 - |y| \end{cases}$

$y=2(2 - |y|) - 2$

$y= 4 - 2|y| - 2$

$y + 2|y| = 2$

Учитель: Какие два случая надо рассмотреть?

Ученица:

при $y \geq 0$ получаем $3y=2$, $y={}^2/_3$, $|x| = 2 - {}^2/_3 = {}^4/_3$, $x = \pm {}^4/_3$, то есть решения

($^4/_3$; $^2/_3$) и ($-^4/_3$; $^2/_3$)

при $y<0$ $-y=2$, $y=-2$, $|x| = 0$, $x=0$, то есть решение (0, –2) . Всего три решения, этот случай нам не подходит.

Учитель: Какие решения при втором значении параметра a?

Ученица:

2. при $a=1$ система имеет вид $\begin{cases} x^4+4 = y + 2 - 2|x| \\ |x| + |y| = 2 \end{cases}$

Учитель: Из второго уравнения вырази $|x|$

Ученица: $|x| = 2 - |y|$

Учитель: Какое требование к правой части уравнения – оно может быть отрицательным?

Ученица: Нет. $2 - |y| \geq 0$

Учитель: Нужно решить это неравенство.

Ученица:

$|y| \leq 2$

$-2 \leq y \leq 2$

Учитель: Как можно преобразовать первое уравнение?

Ученица:

$x^4 + 2|x| = y - 2$

Учитель: Далее действуй аналогично.

Ученица: Левая часть уравнения неотрицательная, следовательно $y - 2 \geq 0$, $y \geq 2$

Учитель: То есть одновременно должны выполняться оба условия:

$-2 \leq y \leq 2$ и $y \geq 2$. Какое значение y удовлетворяет обоим неравенствам?

Ученица: Только при $y=2$. И если подставить это значение в первое уравнение, то получим

$x^4 + 2|x| = 0$

$|x|^4 + 2|x| = 0$

$|x|\ (|x|^3+2)=0$

$|x|=0$, $x=0$, $|x|^3+2=0$ решений не имеет

То есть единственное решение (0, 2)

Учитель: Какой получаем ответ?

Ученица: $a=1$

Задача 2. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение имеет хотя б один корень: $5x+|2x-|x+a||=10|x+1|$

Учитель: Запиши формулу линейной функции и вспомним свойства линейной функции.

Ученица: Линейная функция $y = kx + b$, k и b числа, графиком является прямая. Если $k>0$ функция возрастающая, если $k<0$ функция убывающая, если $k = 0$, то это прямая $y= b$, параллельная оси абсцисс.

Учитель: Что из себя представляет функции $y=|x|$?

Ученица: Два луча имеющих общее начало в точке (0,0), которые являются биссектрисами первого и второго координатных углов.

Учитель: С точки зрения монотонности функции?

Ученица: При $x<0$ функция убывающая, при $x>0$ возрастающая

Учитель: Что из себя представляет функции $y=-|x|$?

Ученица: Два луча имеющих общее начало в точке (0,0), которые являются биссектрисами третьего и четвертого координатных углов.

Учитель: С точки зрения монотонности $y=-|x|$?

Ученица: При $x<0$ функция возрастающая, при $x>0$ убывающая

Учитель: Вернемся к уравнению.

Введем функцию $f(x)=5x+|2x-|x+a||-10|x+1|$

Предположим, что при некоторых значениях x и a

$x+a<0$,

$2x+x+a>0$ или $3x+a>0$

$5x+3x+a>0$ или $8x+a>0$

То есть для $5x + |2x - |x + a||$ наибольшее возможное значение коэффициента k=8

Поэтому если $x + 1 > 0$ то есть при $x > -1$, наибольшее возможное значение коэффициента k=–2, то есть какой функция будет какой с точки зрения монотонности при $x > -1$?

Ученица: Убывающей.

Учитель: Продолжай рассуждения.

Ученица: Если $x + 1 < 0$ то есть при $x < -1$, функция будет возрастающей.

Учитель: То есть, если функция изменяется в точке $x = -1$ с возрастающей на убывающую, следовательно в какой точке функция имеет наибольшее значение?

Ученица: наибольшее значение при $x = -1$, и тогда понятно, что должно быть $f(-1) \geq 0$, чтобы уравнение имело хоть один корень.

$f(-1) = -5 + |-2 - |a - 1|| = -5 + |2 + |a - 1|| \geq 0$

$|2 + |a - 1|| \geq 5$

$$\left[\begin{array}{l} 2 + |a - 1| \geq 5 \\ 2 + |a - 1| \leq -5 \end{array}\right.$$

Учитель: Оба неравенства имеют решение?

Ученица: Второе не имеет решений, так как положительное число не может быть меньше отрицательного. Первое неравенство примет вид:

$$|a - 1| \geq 3$$

$$\left[\begin{array}{l} a - 1 \geq 3 \\ a - 1 \leq -3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a \geq 4 \\ a \leq -2 \end{array}\right.$$

Учитель: Осталось написать ответ

Ученица: Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$

Фрагменты трех уроков, темы которых «Задачи с параметром –17 задание ЕГЭ» Уроки проводится с ученицей 11 класса.

<u>Задача 1</u>. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $8^{2x} + 5 \cdot 8^x = a \cdot 8^x + 6$ не имеет корней на промежутке $[^1/_3; ^2/_3)$.

Учитель: Что ты можешь сказать о виде данного уравнения?

Ученица: В уравнении перенесем все в правую часть:

$$8^{2x} + 5\cdot 8^x - a\cdot 8^x - 6 = 0$$

$$8^{2x} + (5 - a)\cdot 8^x - 6 = 0$$

Оно сводится к квадратному уравнению, если сделать замену переменной.

Учитель: Как тогда быть с промежутком $x \in [^1/_3; ^2/_3)$, данным в условии?

Ученица: Делая замену переменной, нужно заменить его соответствующим промежутком.

Введем переменную $t = 8^x$, $t > 0$, уравнение примет вид $t^2 + (5 - a)\cdot t - 6 = 0$, $8^{1/3} = 2$, $8^{2/3} = 4$

Учитель: Переформулируй условие задачи.

Ученица: Задача тогда переформулируется: найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $t^2 + (5 - a)\cdot t - 6 = 0$ не имеет корней на промежутке [2; 4).

Учитель: Введем функцию $f(t) = t^2 + (5 - a)\cdot t - 6$. Каковы свойства квадратичной функции?

Ученица: Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке $t_0 = -\,^b/_{2a}$, если первый коэффициент положительный, то функция убывает на промежутке $(-\infty; -\,^b/_{2a})$ и возрастает на промежутке $(-\,^b/_{2a}; +\infty)$, если $D < 0$ функция не имеет нулей, при $D = 0$ один нуль, при $D > 0$, то два нуля.

Учитель: Давай найдем дискриминант и выясним, как можно использовать перечисленные свойства для решения задачи.

Ученица: $t^2 + (5 - a)\cdot t - 6 = 0$,

$D = (5 - a)^2 + 24 > 0$ при любых значениях а уравнение имеет два корня, обозначим их t_1, t_2,

Учитель: Какие возможны случаи для того, чтобы корни не принадлежали промежутку [2; 4)?

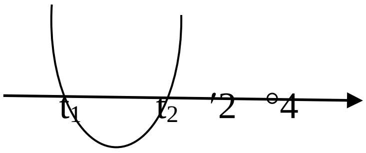
Ученица: Возможны следующие случаи для того, чтобы корни не принадлежали промежутку [2; 4):

1. $t_1 < t_2 < 2$

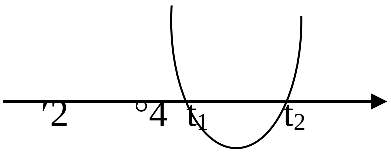
2. $t_2 > t_1 \geq 4$,

3. $t_2 \geq 4 > 2 > t_1$

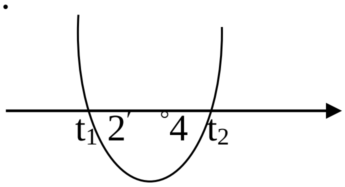
1.



2.



3.



Учитель:

Рассмотрим каждый случай, обозначим через t_0 абсциссу вершины параболы:

1. В первом случае, когда $t_1 < t_2 < 2$, абсцисса вершины параболы также будет меньше 2, первый коэффициент положительный (равен 1), следовательно функция возрастает на промежутке $(-\,{}^{b}/_{2a};\ +\infty)$, и при t =2 функция должна быть строго положительной;

$$\begin{cases} t_0 < 2, \\ f(2) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} {}^{(a-5)}/_{2} < 2 \\ 2^2 + (5-a)\cdot 2 - 6 = -2a + 8 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 9 \\ a < 4 \end{cases}$$

то есть $a < 4$

Второй и третий случай разбери по возможности самостоятельно.

Ученица:

2.

$$\begin{cases} t_0 > 4, \\ f(4) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} {}^{(a-5)}/_{2} > 4 \\ 4^2 + (5-a)\cdot 4 - 6 = -4a + 30 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 13 \\ a \leq 7{,}5 \end{cases}$$

Во втором случае решений нет

3.

$$\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(4) \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2a + 8 < 0 \\ -4a + 30 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 4 \\ a \geq 7{,}5 \end{cases}$$

то есть $a \geq 7{,}5$

То есть возможен первый и третий случаи, объединим их:

Ответ: $a \in (-\infty; 4) \cup [7{,}5; +\infty)$

Аналогичную задачу можно решить самостоятельно:

<u>Задача 2</u>. (домашнее задание) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4 + 4x^2 - 10 = (a+3)\cdot x^2$ не имеет корней на промежутке $[-\sqrt{5}; -2)$.

<u>Задача 3</u>. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень.

$(8x-x^2)^2 - 108\sqrt{(8x-x^2)} = a^2 + 48a$

Учитель: С чего нужно начать решение?

Ученица: Начать нужно с записи области допустимых значений для данного уравнения.

ОДЗ: $8x-x^2 \geq 0$ $\;x(8-x) \geq 0$ откуда следует, что $0 \leq x \leq 8$

Учитель: Необходимо далее сделать замену переменной.

Ученица: Замена переменной t = $\sqrt{(8x-x^2)}$.   Тогда $8x-x^2= t^4$

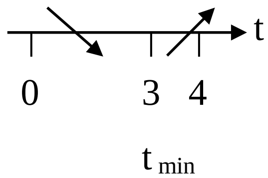
Учитель: Нужно определить в каких пределах может изменяться t.

Ученица: Так как при $x=0$ и $x=8$ выражение $8x-x^2$ обращается в ноль, а при $x={}^{-8}/_{-2}=4$ (вершина параболы) значение выражения равно 16, то $0 \le t \le 4$.

Учитель: Введем функцию $f(t)=t^4-108t-a^2-48a$, $0 \le t \le 4$. Необходимо исследовать поведение функции на отрезке с помощью производной.

Ученица: Исследуем поведение функции на отрезке $t \in [0; 4]$ с помощью производной:

$f'(t)=4t^3-108=0$, $t^3=27$, $t=3$



Видим, что функция имеет единственный экстремум в точке t =3 (точка минимума)

Учитель: Нужно составить условия, при которых уравнение может иметь хотя бы один корень.

Ученица: Чтобы уравнение имело хотя бы один корень необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} f(3) \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(0) \ge 0 \\ f(4) \ge 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Учитель: Квадратная скобка показывает, что совокупности решений достаточно для удовлетворения условия задачи – достаточно, чтобы хотя бы на одном из концов отрезка функция была неотрицательной.

Ученица: Запишем и найдем решения неравенств:

$f(3)=81-324-a^2-48a=-(a^2+48a+243) \le 0$

$a^2+48a+243 \ge 0$

$D=2304-972=1332$ $\qquad a_{1,2}={}^{(-48 \pm 6\sqrt{37})}/_{2}=-24 \pm 3\sqrt{37}$

$a \in (-\infty; -24-3\sqrt{37}\,] \cup [-24+3\sqrt{37}\,; +\infty)$

$f(0)= -a^2-48a \geq 0$, $a^2+48a \leq 0$, $a_1=-48$, $a_2=0$

$a\in[-48; 0]$

$f(4)=256-432-a^2-48a=-a^2-48a-176=-(a^2+48a+176) \geq 0$

$a^2+48a+176\leq 0$

$D=2304-704=1600$ $a_{1,2}=(-48 \pm 40)/2 = -4 ; -44$

$a\in[-44; -4]$

В итоге $a\in[-48; -24-3\sqrt{37}] \cup [-24+3\sqrt{37}; 0]$

Ответ: $a\in[-48; -24-3\sqrt{37}] \cup [-24+3\sqrt{37}; 0]$

Аналогичную задачу можно решить самостоятельно:

Задача 4. (домашнее задание) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень.

$9^x - 2\cdot 3^{x+2} - 32\sqrt{9-3^x}=a^2-18a-81$

Задача 5.

Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [–2; –1]

$$\begin{cases} 2ax+3\leq 0 \\ \sqrt{x+4} < a \\ 5x \geq 2a-10 \end{cases}$$

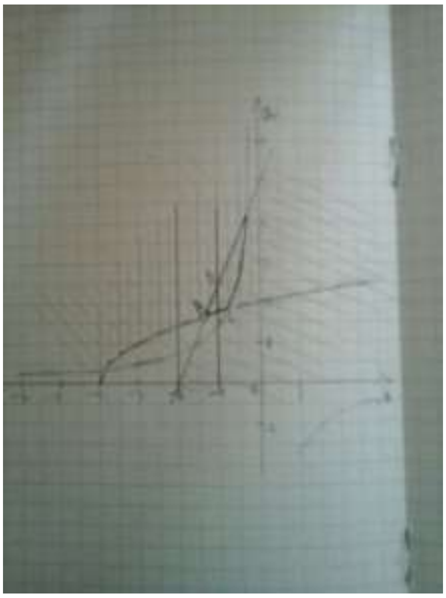


Рисунок 1 – Чертеж к задаче 5

Учитель: Из второго неравенства видим, что оно имеет смысл,

если $a \geq 0$ и $x \geq -4$

Выразим из каждого неравенства a, считая ее переменной:

Ученица:

$$\begin{cases} a \leq {}^{-3}/_{2x} \quad (ax \leq -1{,}5) \\ a > \sqrt{x+4} \\ a \leq {}^{(5x+10)}/_{2} \end{cases}$$

Учитель: Что необходимо сделать для того, чтобы была понятна задача?

Ученица: Нужно построить чертеж.

Учитель: Из чертежа видим, что при $x \in [-2; -1]$ решение системы является множество точек плоскости принадлежащие фигуре ABC, если мы отыщем координаты точек A и B мы сможем ответить на вопрос задачи.

Ученица:

Найдем координаты точки A, которая является пересечением прямой $a = {}^{(5x+10)}/_{2}$ и $a = \sqrt{(x+4)}$:

$\sqrt{x+4} = {}^{(5x+10)}/_{2}$

$4(x+4) = 25(x^2+4x+4)$

$25x^2+96x+84=0$

Корни: $x_{12} = {}^{(-48 \pm 2\sqrt{51})}/_{25}$

Учитель: Какой корень посторонний?

Ученица:

Корни $x_{12} = {}^{(-48 \pm 2\sqrt{51})}/_{25}$, корень $x = {}^{(-48 - 2\sqrt{51})}/_{25} < -2$ является посторонним

$x = {}^{(-48 + 2\sqrt{51})}/_{25}$ является абсциссой точки A, подставим ее в $a = {}^{(5x+10)}/_{2}$ и найдем ординату точки A

$a = 2{,}5 \cdot {}^{(-48 + 2\sqrt{51})}/_{25} + 5 = {}^{(1+\sqrt{51})}/_{5}$

Учитель: Как найти координаты точки B?

Ученица:

Координаты точки B: абсцисса $x=-1$, для нахождения ординаты в уравнение $a = {}^{(5x+10)}/_{2}$ подставим -1

$a = {}^{(5\cdot(-1)+10)}/_{2} = 2{,}5$

В итоге получим, что $a \in ({}^{(1+\sqrt{51})}/_{5};\ 2{,}5]$

Ответ: $a \in ({}^{(1+\sqrt{51})}/_{5};\ 2{,}5]$

Аналогичную задачу можно решить самостоятельно:

<u>Задача 6</u>. (домашнее задание)

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [3; 6]

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-2} \ > a \\ 2x \leq 3a + 6 \end{cases}$$

Далее приведено содержание уроков, на которых применяются современные технологии обучения: технология деятельностного подхода, технология консультирования, технология проблемного обучения. Применение этих технологий способствует развитию исследовательских умений.

<u>Обучение математике с применением технологии деятельностного подхода (10 класс).</u>

Тема урока: «Графический способ решения уравнений с параметром».

Предмет: алгебра, 10 класс.

Тип: урок освоения нового.

Форма: урок освоения специального приема учебной деятельности.

Личностные результаты: формирование у обучающихся готовности к саморазвитию и самообразованию.

Метапредметные результаты, в том числе исследовательские умения:

1. Уметь самостоятельно планировать и осуществлять текущий контроль своей деятельности.

2. Уметь оценивать продукт своей деятельности по заданным и (или) самостоятельно определенным в соответствии с целью деятельности критериям.

3. Уметь вносить коррективы в текущую деятельность на основе анализа изменений ситуации для получения запланированных характеристик продукта\результата.

4. Уметь называть трудности, с которыми столкнулся при решении задачи и предлагать пути их преодоления \ избегания в дальнейшей деятельности.

5. Уметь выбирать способ решения задачи из известных или выделять часть известного алгоритма для решения конкретной учебной задачи.

6. Уметь преобразовывать известные модели и схемы в соответствии с поставленной задачей.

7. Уметь делать выводы с использованием дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии.

8. Уметь строить схему, алгоритм действия, исправлять или восстанавливать неизвестный ранее алгоритм на основе имеющегося знания об объекте, к которому применяется алгоритм.

Предметные результаты:

1. Знание алгоритма графического способа решения уравнений.

2. Умение применения приема графического решения уравнений в новой ситуации.

Ход урока.

1. Мотивация.

Задача 1. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$|x^2 - 6x + a + 5| > 4$ не имеет решений на отрезке $[a; a+3]$

Диагностика готовности к освоению нового: умение решать неравенства с модулем.

1. $|x - 5| > 4$
2. $2|x - 1| < x$
3. $|4 - 3x| < 2x$
4. $|x - 3| > |x + 2|$

5. $|x-4|<|x-2|$

6. $|2x-1|+x<5$

Решения.

1. $|x-5|>4$ данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x-5>4 \\ x-5<-4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x>9 \\ x<1 \end{array}\right.$$ Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$

2. $2|x-1|<x$ данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x-1<0{,}5x \\ x-1>-0{,}5x \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}5x<1 \\ 1{,}5x>1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x<2 \\ x>{}^2/_3 \end{array}$$ Ответ: $x\in({}^2/_3;2)$

3. $|4-3x|<2x$ данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 4-3x<2x \\ 4-3x>-2x \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0{,}8 \\ x<4 \end{cases}$$ Ответ: $x\in(0{,}8;4)$

4. $|x-3|>|x+2|$ возведем левую и правую части в квадрат. После упрощения получим $10x<5$; $x<0{,}5$ Ответ: $x\in(-\infty;0{,}5)$

5. $|x-4|<|x-2|$ Аналогичный пример. Ответ: $x\in(3;+\infty)$

6. $|2x-1|+x<5$

$|2x-1|<5-x$ данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 5-x\geq 0 \\ 2x-1<5-x \\ 2x-1>x-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 5 \\ x<2 \\ x>-4 \end{cases}$$ Ответ: $x\in(-4;2)$

Диагностика готовности к освоению нового: умение решать квадратные неравенства.

1. $-x^2-10x-12>0$

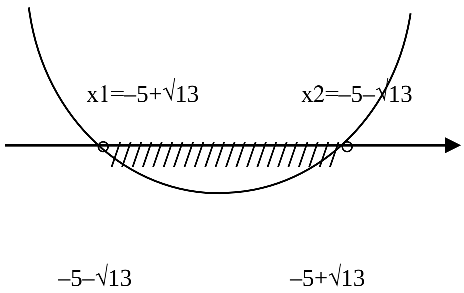
2. $3x^2-6x+1\geq 0$

3. $3x^2-2x+4<0$

Решения

1. $-x^2 - 10x - 12 > 0$

$x^2 + 10x + 12 < 0$ D=100–48= 52, $x_{12} = {}^{(-10\pm2\sqrt{13})}/_2$

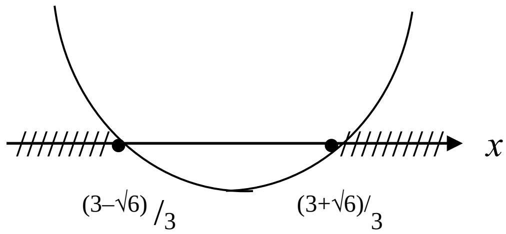


x

Ответ: $x \in (-5-\sqrt{13}; -5+\sqrt{13})$

2. $3x^2 - 6x + 1 \geq 0$

$3x^2 - 6x + 1 \geq 0$ D=36–12= 24, $x_{12} = {}^{(6\pm2\sqrt{6})}/_6$

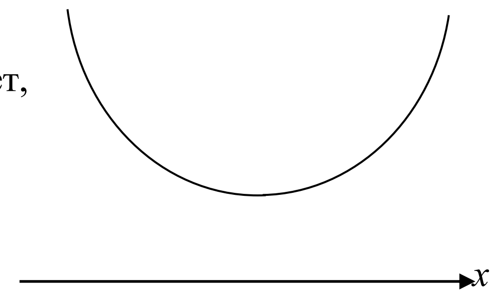


$x_1 = {}^{(3+\sqrt{6})}/_3$ $x_2 = {}^{(3-\sqrt{6})}/_3$

Ответ: $x \in (-\infty; {}^{(3-\sqrt{6})}/_3] \cup [{}^{(3+\sqrt{6})}/_3; +\infty)$

3. $3x^2 - 2x + 4 < 0$

$3x^2 - 2x + 4 < 0$, D=4–48= –44, корней нет,



При любых значениях x функция положительная, поэтому неравенство не имеет решений

Ответ: $\varnothing$

Диагностика готовности к освоению нового: умение схематически строить график квадратичной функции.

Квадратичная функция задана формулой

а) $y = x^2 - 4x + 7$

б) $y = -2x^2 - 5x - 2$

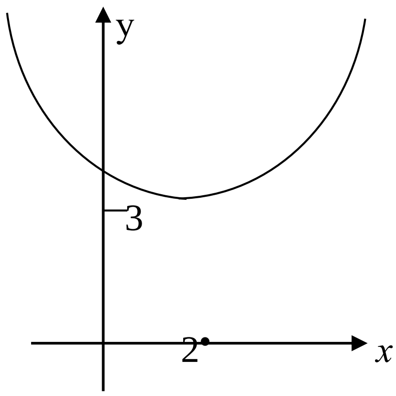
Найдите координату вершины параболы. Наметив на координатной плоскости вершину параболы и ее ось симметрии, изобразите схематически график.

Решение.

а) $y= x^2 - 4x + 7$

Координаты вершины параболы $x_0=-{}^{b}/_{2a}={}^{-(-4)}/_{2}=2$, $y_0(2)=4-8+7=3$, $(2;3)$

ветви параболы направлены вверх.



2. Разбор у доски диагностических заданий.

3. Решение задачи 1. Найдите все значения а, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 6x + a + 5| > 4$ не имеет решений на отрезке $[a; a+3]$.

$|x^2 - 6x + a + 5| > 4$ данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + a + 5 > 4 \\ x^2 - 6x + a + 5 < -4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + a + 1 > 0 \\ x^2 - 6x + a + 9 < 0 \end{array}\right.$$

Графиками обоих неравенств являются параболы, абсцисса вершин которых $x_0=3$, ветви обеих парабол направлены вверх.

Обозначим $f_1(x) = x^2 - 6x + a + 1$

$x^2 - 6x + a + 1 > 0$ дискриминант $D_1=36 - 4(a + 1) = 32 - 4a$

и $f_2(x) = x^2 - 6x + a + 9$ дискриминант $D_2=36 - 4(a + 1) = -4a$

Чтобы схематически построить графики, найдем $f_1(3)= 9 - 18 + a + 1 = a - 8$; $f_2(3)= 9 - 18 + a + 9 = a$, $f_1(0) = a + 1$; $f_2(0)= a + 9$

И видим, что $f_2(x) = f_1(x) + 8$

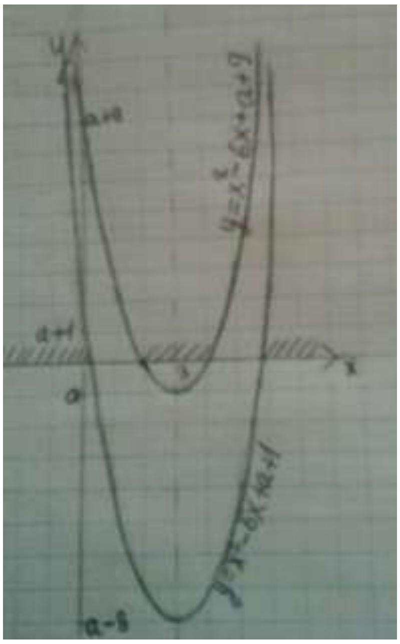


Рисунок 2 – Чертеж к задаче 1

Неравенство не имеет решений при $x \in [a;\ a+3]$, если данный отрезок попадает в незаштрихованный промежуток.

Нужно рассмотреть отдельные случаи, связанные со знаками дискриминантов.

Если для $f_1(x)=x^2 - 6x + a + 1$ $D_1= 32 - 4a< 0$, то корней нет и $f_1(x) > 0$ для любых значений x, то есть при $a > 8$ при любых значениях x решения есть.

Если для $f_1(x)=x^2 - 6x + a + 1$ $D_1=32 - 4a=0$, при $a=8$ имеется единственный корень

$x=3$, на отрезке [8;11] неравенство не должно иметь решений, но при всех $x \neq 3$, неравенство является верным, получаем что при $a \geq 8$,условия задачи не выполняются.

Если для $f_1(x)=x^2 - 6x + a + 1$ $D_1=32-4a> 0$, то при $a<8$ два корня $x_{12}= {}^{(6 \pm 2\sqrt{(8-a)})}/_{2}$

$x_{12}=3 \pm \sqrt{8-a}$. Решения неравенства $x \in (-\infty;\ 3 - \sqrt{(8-a)}) \cup (3+\sqrt{(8-a)};\ +\infty)$

Если при a<8, для $f_2(x) = x^2 - 6x + a + 9$ $D_2 = -4a<0$, то при $0<a<8$ графики располагаются следующим образом:

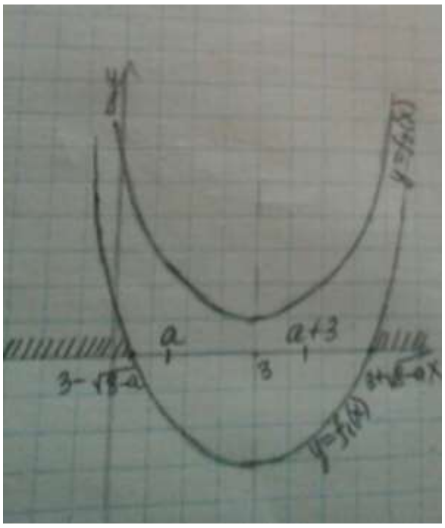


Рисунок 3 – Чертеж к задаче 1

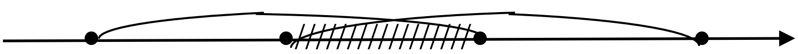
то есть на промежутке $(3 - \sqrt{(8-a)};\ 3+\sqrt{(8-a)})$ неравенство решений не имеет и для того, чтобы выполнилось условие задачи, нужно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} f_1(a)\le 0 \\ f_1(a+3)\le 0 \end{cases}$$

$f_1(a)=a^2 - 5a + 1\le 0$ D= 25 – 4=21 $a_{12}= {}^{(5\pm\sqrt{21})}/_{2}$ $a\in[{}^{(5-\sqrt{21})}/_{2}\,;\ {}^{(5+\sqrt{21})}/_{2}\,]$,

$f_1(a+3)=(a+3)^2 - 6(a+3) + a + 1= a^2 + a - 8 \le 0$ D= 1 + 32=33 $a_{12}= {}^{(-1\pm\sqrt{33})}/_{2}$

$a\in[{}^{(-1-\sqrt{33})}/_{2};\ {}^{(-1+\sqrt{33})}/_{2}]$, Найдем пересечение решений, приближенно посчитав корни. Корни первого трехчлена приблизительно равны 4,8 и 0,2; второго – 3,4 и 2,4.



${}^{(-1-\sqrt{33})}/_{2}$ ${}^{(5-\sqrt{21})}/_{2}$ ${}^{(-1+\sqrt{33})}/_{2}$ ${}^{(5+\sqrt{21})}/_{2}$

$a\in[{}^{(5-\sqrt{21})}/_{2};\ {}^{(-1+\sqrt{33})}/_{2}]$

Случай $a \le 0$ не имеет смысла рассматривать так как система неравенств выполняется только при $a\in[{}^{(5-\sqrt{21})}/_{2};\ {}^{(-1+\sqrt{33})}/_{2}]$

Ответ: $a\in[{}^{(5-\sqrt{21})}/_{2};\ {}^{(-1+\sqrt{33})}/_{2}]$

4. Решить самостоятельно: Задача 2. Найдите все значения а, при каждом из которых неравенство $|x^2 - 8x + a + 7| < 6$ не имеет решений на отрезке $[a-5; a]$.

5. Домашнее задание:

Постройте графики: а) $y=2x^2+8x$ б) $y=-x^2+6x-5$

Решите неравенства:

1. $5x^2 - 3x - 2 > 0$
2. $2x^2 - 6x + 5 < 0$

<u>Обучение математике с применением технологии проблемного обучения (10 класс).</u>

Тема: «Решение задач с параметром»

Цель: применить графический метод при решении задачи с параметром

<u>Задача</u>. Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax + |x^2 - 8x+12|$ больше 4

Проблемная ситуация связана с тем, что неизвестен способ деятельности – как и с чего начинать решать задачу, разрешить ее можно, используя эвристическую беседу с учеником.

Учитель: Выясним, как меняется функция в зависимости от параметра a. Для этого вспомним определение модуля и выскажем увиденные наблюдения.

Ученик: $|t| = \begin{cases} t, \text{ если } t \geq 0 \\ -t, \text{ если } t<0 \end{cases}$

Можно определить знаки квадратного трехчлена: + 2 – 6 +

Видим, что независимо от значения параметра a график проходит через точку (0;12)

Учитель: Перепиши функцию, используя определение модуля.

Ученик: После упрощения выражений получил:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 + x(8+4a) -12 \text{ при } 2\le x\le 6 \\ x^2 - x(8-4a) +12 \text{, при } x<2 \text{ и } x>6 \end{cases}$$

Учитель: Давай подробнее рассмотрим функцию на каждом из промежутков.

Ученик: На промежутке $2\le x\le 6$ часть параболы, ветви которой направлены вниз.

Учитель: Вид функции зависит от того, как расположена вершина параболы – к какому промежутку она принадлежит.

Ученик: На промежутке $2\le x\le 6$ часть параболы, вершина которой имеет абсциссу $x_0= 4+2a$, ординату $f(x_0)=f(4+2a)=-(4+2a)^2+2(4+2a)^2-12=(4+2a)^2-12$

На промежутках $x<2$ и $x>6$ часть параболы, ветви которой направлены вверх и вершина которой имеет абсциссу $x_0=4-2a$, ординату $f(x_0)=f(4-2a)=(4-2a)^2-2(4-2a)^2+12=12-(4-2a)^2$

Учитель: То есть мы видим, что абсциссы вершин симметричны относительно $x=4$

Попробуем построить графики функций, если абсциссы вершин парабол внутри отрезка $2\le x\le 6$

Ученик: Строит схематически графики обеих парабол, жирной линией обводит те участки парабол, которые должны быть на соответствующих промежутках. Замечает, что если

$2\le 4+2a \le 6$ и $2\le 4 - 2a \le 6$, то $-1 \le a \le 1$

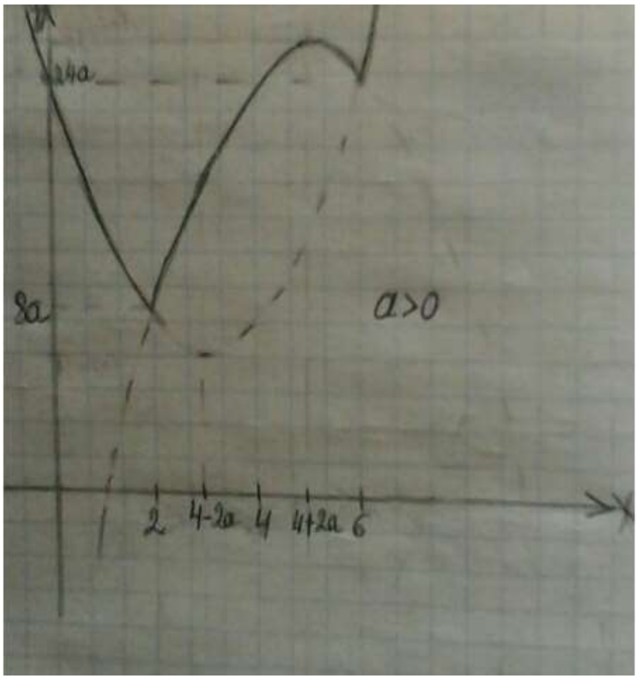


Рисунок 4 – График функции y=f(x) при a>0

Далее, видит, что при a>0 на графике (рис.1) наименьшее значение функция принимает при x=2 и f(2)=8a (f(6)=24a), по условию 8a>4, a>0,5 и учитывая, что еще $-1 \le a \le 1$, то $0{,}5<a \le 1$

Учитель: Что можно сказать про ординату вершины параболы при a<0 на промежутке 2≤x≤6? f(0)=4, следовательно f(x_0)<4

Ученик: Ордината вершины параболы f(x_0)=$(4+2a)^2$–12, при a=0 f(x_0)=4, при a<0 f(x_0)<4, то есть если наибольшее значение функции меньше 4, то наименьшее тем более меньше 4, следовательно случай a<0 не нужно рассматривать.

Учитель: Попробуем построить графики функций, если абсциссы вершин парабол вне отрезка 2≤x≤6, то есть при x<2 и x>6

Ученик: Продолжает построение:

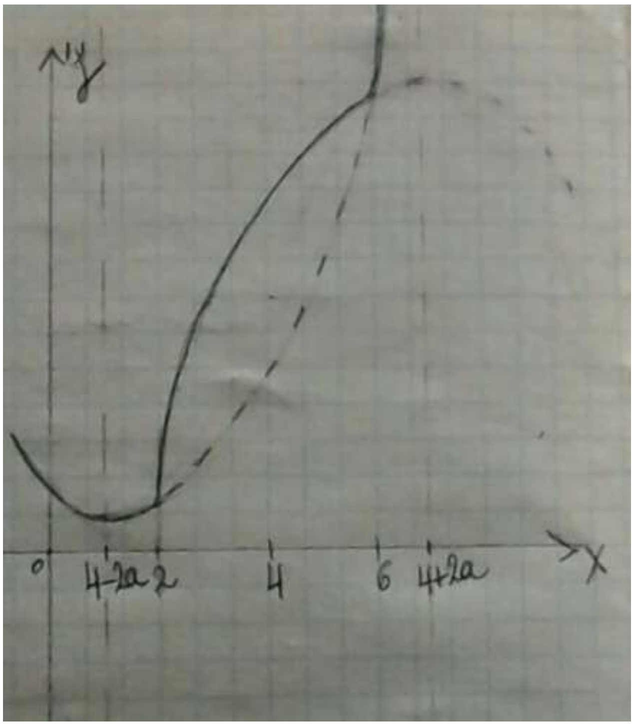


Рисунок 5 – График функции y=f(x) при a>1

Далее, видит, что при $a>1$ ($4+2a>6$ и $4–2a<2$), на графике (рис. 3) наименьшее значение функция принимает при $x=4–2a$ и должно выполняться условие f($4–2a$) >4

$(4–2a)^2–2(4–2a)^2+12=–(4–2a)^2+12>4$

Получает после упрощений $a^2–4a+2<0$, D=8, $2–\sqrt{2}<a<2+\sqrt{2}$, с учетом того, что $a>1$, то $1<a<2+\sqrt{2}$, и объединив оба случая, записывает ответ: $a\in(0{,}5;\ 2+\sqrt{2})$

Домашнее задание:

Задача. Найти все значения а, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=2ax–|x^2–10x+9|$ меньше 1.

Обучение математике с применением технологии консультирования (10 класс).

Тема: «Решение систем уравнений с параметрами»

Цель: преодолеть трудности при решении систем уравнений с параметрами

Теоретические вопросы:

1. Какие способы решения систем уравнений вы знаете? Как решаются системы уравнений графическим способом, способом подстановки, способом сложения?

2. Давайте вспомним свойство четности нечетности функции. Какая функция называется четной, или нечетной? (Функция четная, если для любых x из области определения функции выполняется f(x)= f(–x) и нечетной, если выполняется f(–x) =– f(x). Область определения симметрична относительно начала координат для четной или нечетной функции)

План консультации: Рассмотреть задачи, разобрать затруднения.

Задача. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 24 - 10a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет четыре различных решения.

Вопрос:

Только что мы вспомнили четность нечетность функции. Как в данной системе уравнений оно используется?

Ответ: Уравнения четные относительно переменных x и y, так как $x^4 = (–x)^4$,
$x^2 = (–x)^2$, $y^4 = (–y)^4$, $y^2 = (–y)^2$

Вопрос:

Что это дает с точки зрения иметь системе четыре различных решения?

Ответ: Если (x,y) – решение, то и (–x,y) решение. Если (x,y) – решение, то и (x,–y) решение

Вопрос:

В данном примере целесообразно сделать замену переменной, чтобы понизить степень уравнений. Какую замену?

Ответ: x^2 = u y^2 = v

Вопрос: Какими должны быть u и v? (Положительными, чтобы в итоге было 4 различных решения: (√u, √v), (√u, –√v), (–√u, √v), (–√u, –√v))

Ученикам предлагается записать систему уравнений в новых переменных:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 24 - 10a^2 \\ u + v = a^2 \qquad u>0,\ v>0, \end{cases}$$

Вопрос: Каким способом целесообразно решать систему уравнений?

Ответ: Способом подстановки

Ученики решают способом подстановки:

Из второго уравнения выражают $u = a^2 - v$ и подставляют в первое:

$(a^2-v)^2-v^2 = 24-10a^2$

$a^4-2a^2v+v^2-v^2 = 24-10a^2$

$v = (a^4+10a^2-24)/2a^2$

Вопрос: Помним, что $v>0$, и нужно решить неравенство $(a^4+10a^2-24)/2a^2>0$. Каким методом?

Ответ: Методом интервалов.

Ученики находят корни биквадратного трехчлена и переписывают неравенство

$(a^2+12)(a^2-2)/2a^2>0$ и видят, что оно равносильно неравенству

$a^2-2>0$

\+ – +

///////○$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$○/////// ► a

$a \in (-\infty;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};+\infty)$

Дальше ученики выражают переменную $u = a^2-v = a^2-(a^4+10a^2-24)/2a^2$

$u = (a^4-10a^2+24)/2a^2>0$

Ученики находят корни биквадратного трехчлена и переписывают неравенство

$(a^2-6)(a^2-4)/2a^2>0$ и видят, что оно равносильно неравенству

$(a^2-6)(a^2-4)>0$

\+ – + – +

//////○$-\sqrt{6}$ -2○///////////////○2 $\sqrt{6}$○/////// a

$a\in(-\infty;-\sqrt{6})\cup(-2;2)\cup(\sqrt{6};+\infty)$

Нужно взять пересечение решений:

//////°$-\sqrt{6}$ -2°////////°$-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$°////////°2 $\sqrt{6}$°////////////////

Ответ: $a\in(-\infty;-\sqrt{6})\cup(-2;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};2)\cup(\sqrt{6};+\infty)$

<u>Следующую задачу решить самостоятельно:</u>

Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4-y^4=15a-54 \\ x^2-y^2=a \end{cases}$$ имеет четыре различных решения

<u>Задача.</u> Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2+ay^2-(2a+6)x+2ay+3=0 \\ x^2+2y=xy+2x \end{cases}$$ имеет четыре различных решения.

Вопрос: Можно ли эту задачу считать аналогичной предыдущей? Почему?

Ответ: Нет, уравнения не являются четными, либо нечетными относительно переменных x и y.

Вопрос: Если внимательно посмотреть на второе уравнение, что можно заметить?

Ответ: Многочлен можно разложить на множители.

Ученики раскладывают на множители многочлен: $x^2+2y-xy-2x=0$

$x^2-xy+2y-2x=0$

$x(x-y)-2(x-y)=0$

$(x-2)(x-y)=0$

то есть $x=2$ или $x=y$

Вопрос: Как переписать систему?

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax^2+ay^2-(2a+6)x+2ay+3=0 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} ax^2+ay^2-(2a+6)x+2ay+3=0 \\ x=y \end{cases} \end{array}\right.$$

Ученики решают:

при x=2 первое уравнение имеет вид:

$4a+ay^2–4a–12+2ay+3=0$

$ay^2+2ay–9=0$

Вопрос: Рассмотрим два случая, когда a=0, и $a\neq 0$. В каком случае квадратное уравнение имеет два корня? (Когда D>0)

если $a = 0$, то решений нет,

если $a \neq 0$, то $D = 4a^2 + 36a > 0$

$4a(a+9) > 0$

–9 0

//////° °//////a

при $a\in(–\infty;–9)\cup(0; +\infty)$ два решения (2; y_1) и (2; y_2),

где $y_{12}= (–2a\pm\sqrt{(4a^2+36a)})/2a$

ученики переходят к рассмотрению второй подсистемы:

при $x=y$

$2ay^2–6y+3=0$

если $a = 0$, то $y= 0,5$ $x = 0,5$ двух решений нет, этот случай не походит

если $a \neq 0$, то $D = 36 – 24a > 0$

то есть при $a < 1,5$ имеется два решения подсистемы

Вопрос: Чтобы решения были различными, какое условие нужно выполнить?

Ответ: Если y_1=2 или y_2=2, то не получится четыре различных решения (решение (2; 2) может дублироваться)

$(–2a\pm\sqrt{(4a^2+36a)})/2a \neq 2$

$\pm\sqrt{4a^2+36a} \neq 6a$

$4a^2+36a\neq 36a^2$

$32a^2–36a\neq 0$

$4a(8a-9) \neq 0$

$a \neq 0 \quad a \neq {}^9/_8$

Берем пересечение промежутков:

Ответ: $a \in (-\infty;-9) \cup (0;\ {}^9/_8) \cup ({}^9/_8;1{,}5)$

Следующую задачу решить самостоятельно:

Найти все значения а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a-4)x^2-3ax-4+a \\ x^2=y^2 \end{cases}$$ имеет четыре различных решения.

Обе задачи для самостоятельного решения даются ученикам на дом, если оказывается, что времени недостаточно.

2.2 Осуществление практической деятельности по формированию исследовательских умений учащихся

Задачи с параметром имеют важное значение в формировании исследовательских умений школьников, и являются частью ЕГЭ, поэтому тема «Задачи с параметром» выбрана для раздела внеурочной деятельности. Материал содержит методические рекомендации, тематическое планирование.

Цели:

1. Формирование и развитие у обучающихся умений решать задачи с параметром.

2. Формирование навыков самостоятельной работы в учебно–исследовательской деятельности.

3. Формирование исследовательских умений, развитие творческих способностей у обучающихся.

Методы решения задач с параметрами – аналитический метод, функциональный подход, графический метод.

Пояснительная записка.

На основании требований федерального государственного образовательного стандарта в содержании курса внеурочной деятельности предполагается реализовать актуальные в настоящее время компетентностный, личностно ориентированный, деятельностный подходы. Поэтому методологической основой курса внеурочной деятельности, в соответствии с требованиями ФГОС, является системно-деятельностный подход, который позволяет внедрить в учебный процесс внеурочные виды обучения, способствующие углублению развития творческих способностей учащихся, мышления, что дает им возможность улучшить свой результат единого государственного экзамена по математике и расширить дальнейшие перспективы на профессиональном поприще.

Общая характеристика учебного предметного курса.

Курс внеурочной деятельности посвящен задачам с параметром, задачи систематизированы по различным методам их решения. В содержание внеурочного курса включены задачи на исследование квадратного трехчлена, использование при решении свойств функций – ограниченности, четности, монотонности. Используются аналитический, графический способы решения. Цель курса – научиться решать задачи №17 ЕГЭ. Курс рассчитан на 34 часа.

Методы решения задач с параметрами – аналитический метод, функциональный подход, графический метод.

На занятиях осуществляется формирование следующих УУД, необходимых для развития исследовательских умений.

Личностные УУД:

– желание приобретать новые знания, совершенствовать имеющиеся;

– осознание своих трудностей и стремление к их преодолению.

Познавательные УУД (логические):

– построение логической цепи рассуждений;

– синтез – составление целого из частей, в том числе самостоятельное достраивание с восполнением недостающих компонентов; выдвижение гипотез и их обоснование.

Познавательные УУД (общеучебные):

– осознанное и произвольное построение речевого высказывания в устной и письменной форме;

– постановка и формулирование проблемы, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера.

Коммуникативные УУД:

– умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации;

– владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка.

По окончании курса ученики должны уметь проводить исследование квадратного трехчлена, использовать при решении задач свойств функций – ограниченности, четности, монотонности, применять аналитический, графический способы решения.

Тематическое планирование.

Тема занятия	Часы
1. Квадратные уравнения и неравенства.	6
2. Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.	6
3. Логические задачи.	6
4. Ограниченность функции.	6
5. Использование различных свойств функций.	6
6. Решение различных задач №17 ЕГЭ.	4
Всего:	34

Задачи с параметром. Курс внеурочной деятельности. Класс 10–11. 34 часа. Содержание занятий.

Занятие 1

Тема: Квадратные уравнения и неравенства. (6 часов)

Цель: Рассмотреть задачи на квадратный трехчлен, зависящие от параметра. Разобрать решение уравнений и неравенств, задачи на теорему Виета, и простейшие логические задачи, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

1. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a+1 = 0$ больше 1?
2. При каких a сумма кубов корней уравнения $x^2- x + a = 0$ меньше или равна 1?
3. При каких a сумма четвертых степеней корней уравнения $x^2- x + a = 0$ больше или равна 1?
4. Дано уравнение $x^2+7x + 3 = 0$. Пусть x_1 , x_2 – его корни. Составить квадратное уравнение с корнями y_1 , y_2, где $y_1= x_1^2 + x_2^2$, $y_2= x_1^3 + x_2^3$
5. Дано уравнение $ax^2+bx + c = 0$, $a\neq 0$, с корнями x_1 , x_2. Составить квадратное уравнение с корнями $y_1= {}^1/_{x1}$, $y_2= {}^1/_{x2}$
6. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2- 4ax + 5a = 0$ равна 6?
7. Для всех a решить неравенство $ax^2 + x + 1 > 0$
8. Для всех a решить неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$
9. Для всех a решить неравенство $x^2 + x + a \geq 0$
10. Для всех a решить неравенство $ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$
11. При каких m уравнение $(m - 3)x^2- 6x + m + 5 = 0$ имеет корни? Исследовать их знаки при различных m.
12. При каких m уравнение $3mx^2- (7m+1)x +2 m + 1= 0$ имеет корни? Исследовать их знаки при различных m.
13. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2+ ax + a^2 - 3 = 0$ минимальна, максимальна?

14. Найти все a, при которых уравнения $x^2+ax+a=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют хотя бы один общий корень?

15. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях a оно выполнено при всех x и k?

16. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях a найдутся такие x и k, что оно выполняется?

17. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях a найдется такое x, что оно выполняется при всех k?

18. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях a найдется такое k, что оно выполняется при всех x?

19. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях k оно выполнено при всех x и a?

20. Дано неравенство $ax+k^2>0$. При каких значениях k найдется такое a, что оно выполнено при всех x?

Ответы. 1. $(-\infty;-1)$ $(2+2\sqrt{2};+\infty)$ 2. $[0;\frac{1}{4}]$ 3. $a\le 0$ 4. $y^2+237y-12040=0$ 5. $cy^2+by+a=0$ 6. $a=-\frac{3}{8}$ 7. если $a<0$, то $x\in((-1+\sqrt{(1-4a)})/2a,\ (-1-\sqrt{(1-4a)})/2a)$, если $a=0$, то $x\in(-1;+\infty)$, если $0<a\le\frac{1}{4}$, то $x\in(-\infty;(-1-\sqrt{(1-4a)})/2a)\cup((-1+\sqrt{(1-4a)})/2a;+\infty;)$, если $a>\frac{1}{4}$, то x – любое 8. если $|a|<2$, то x – любое, если $|a|\ge 2$, то $x\in(-\infty;(-a-\sqrt{(a^2-4)})/2)\cup((-a+\sqrt{(a^2-4)})/2;+\infty)$ 9. если $a>\frac{1}{4}$, то x– любое, если $a\le\frac{1}{4}$, то $x\in(-\infty;(-1-\sqrt{(1-4a)})/2)\cup((-1+\sqrt{(1-4a)})/2;+\infty)$ 10. если $a<0$, то $x\in(-1,-\frac{1}{a})$, если $a=0$, то $x\in(-1;+\infty)$, если $a\in(0;1]$, то $x\in(-\infty;-\frac{1}{a})\cup(-1;+\infty)$, если $a>1$, то $x\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{a};+\infty)$ 11. при $m\in[-6,-5)$ оба корня отрицательны; при $m=-5$ один из корней равен нулю, а второй отрицателен; при $m\in(-5,3)$ корни имеют разные знаки; при $m=3$ есть один положительный корень; при $m\in(3,4)$ оба корня положительны; при остальных m решений нет 12. при $m\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(0;+\infty)$ оба корня положительны; при $m=-\frac{1}{2}$ один из корней равен нулю, а второй отрицателен; при $m=0$ есть один положительный корень; при $m\in(-\frac{1}{2},0)$ корни имеют разные знаки 13. максимальна при $a=0$, минимальна при $a=\pm 2$ 14. $a=-2$ 15. ни при каких 16. при любых a 17. при $a\neq 0$ 18. при $a=0$ 19. ни при каких 20. при $k\neq 0$

Занятие 2

Тема: Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра . (6 часов)

Цель: научиться распознавать положение квадратной параболы на плоскости в зависимости от ее коэффициентов при решении задач, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

1. Найти все a, при которых квадратный трехчлен $p(x)=(a^2-1)x^2+2(a-1)x+1$ положителен при всех x?
2. При каких a оба корня уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $^1/_2$?
3. При каких a оба корня уравнения $(2+a)x^2-2ax+3a=0$ положительны?
4. При каких a оба корня уравнения $x^2+4ax+(1-2a+4a^2)=0$ меньше -1?
5. При каких a один из корней уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ больше 1, а другой меньше 1?
6. Существуют ли такие a, что корни уравнения $x^2+2x+a=0$ различны и лежат между -1 и $+1$?
7. При каких a оба корня уравнения $ax^2-(a+1)x+2=0$ по модулю меньше 1?
8. При каких a оба корня уравнения $x^2-ax+2=0$ лежат на интервале (0; 3)?
9. При каких m неравенство $x^2+mx+m^2+6m<0$ выполняется при всех $x\in(1;2)$?
10. При каких m неравенство $mx^2-4x+3m+1>0$ выполняется при всех $x>0$?

11. При каких a неравенство $(a–1)x^2+(2a–3)x+(a–3) >0$ выполнено хотя бы при одном $x<1$?

12. Найти все a, при которых оба корня уравнения $x^2+x +a= 0$ больше a?

13. При каких m из неравенства $x^2–(3m+1)x+m>0$ следует, что $x>1$?

14. При каких p уравнение $sin^2x + p\ sinx = p^2 – 1$ имеет решения?

15. При каких $m\in(–1; 1)$ уравнение $4^{sinx}+ m\cdot 2^{sinx}+ m^2–1=0$ имеет решения?

16. Существуют ли a такие, что неравенство $4^{|cosx|} + 2(2a+1)\cdot 2^{|cosx|} +4a^2–3<0$ выполнено при всех x?

17. При каких a из неравенства $ax^2– x+1–a<0$ следует неравенство $0< x <1$?

18. Найти все a такие, что если x удовлетворяет неравенству $ax^2+(1–a^2)x– a>0$, то $|x| \le 2$.

19. При каких a неравенство $sin^6x+ cos^6x + a\,sinx\,cosx\ge 0$ выполнено для всех x?

20. Для каждого a решить уравнение $x+\sqrt{x}= a$.

21. При каких y неравенство $2log_{½}\, y^2– 3+2x\,log_{½}\, y^2– x^2 > 0$ имеет решения?

22. Для каждого a решить уравнение $\sqrt{a(2^x – 2) + 1} =2^x$.

Ответы.1. $a\in[1; +\infty)$ 2. $a\in(^{16}/_{17}, 2)$ 3. $a\in(–3, –2)$ 4. $a\in(1; +\infty)$ 5. $a\in (–2 –\sqrt{11}; –2+\sqrt{11})$ 6. не существует 7. $a\in[3+2\sqrt{2}; +\infty)$ 8. $a\in(2\sqrt{2},^{11}/_{3})$ 9. $m\in((–7 –3\sqrt{5})/2; –4+2\sqrt{3})$ 10. $m\in(1; +\infty)$ 11. $a \in[¾; +\infty)$ 12. $a \in(–\infty;–2)$ 13. ни при каких 14. $p\in [–2; ^{–2}/_{\sqrt{5}}] \cup [^{2}/_{\sqrt{5}}; 2]$ 15. $m\in[–1; ^{(–1+\sqrt{13})}/_{4}]$ 16. не существует 17. $a\in(½; 1]$ 18. $a\in [–2; –½]$ 19. $a\in [–½; ½]$ 20. если $a<0$ нет решений, если $a \ge 0$ $x= a+½–\sqrt{(a+¼)}$

21. при $|y| >2\sqrt{2}$, $0 < |y| < ^{1}/_{\sqrt{2}}$ 22. при $0 < a\le 1$ $x= log_2 a$, при остальных a решений нет

Занятие 3

Тема: Логические задачи. (6 часов)

Цель: Рассмотреть уравнения и неравенства или системы, зависящие от параметра, в которых нужно выяснить будет ли решение единственным, или будет ли существовать решение, или будет ли данная система (уравнение, неравенство) эквивалентна какой–то другой или иные подобные задачи, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

1. Изобразить на плоскости все точки $(x; y)$ такие, что выражение $\sin^2(t+x)+\sin(t+y)+\sin(t+2x-y)+\frac{1}{4}$ положительно для любого t.
2. Изобразить на плоскости все точки $(x; y)$ такие, для которых существует хотя бы одно t, такое, что выражение $\cos(t+3x+y)-\cos(t+x-y)-\sin^2(t+2x)$ больше ¼
3. При каких a минимум функции $f(x)=x^2+2|x+a-1|+(a+1)^2$ меньше 3?
4. При каких a системы

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0 \\ x^2+y^2=a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$ равносильны?

5. При каких a система $\begin{cases} ax^2+a-1=y-|\sin x| \\ tg^2x+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?
6. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2 \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$ имеет решение для любого b?

7. Найти все a, при которых система $\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2 \\ a+bxy+x^2y=1 \end{cases}$ имеет решение

для любого b?

8. Найти все a и b такие, что система

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

9. При каких a система

$$\begin{cases} x^y=a \\ arctg\, x={}^{\pi}/_4+y \end{cases}$$ имеет единственное решение?

10. При каких a система $\begin{cases} {}^x/_y + sinx=a \\ {}^y/_x + siny=a \end{cases}$ имеет единственное решение, если

$0\le x\le 2\pi$, $0\le y\le 2\pi$

11. Дана система

$$\begin{cases} a^x+a^y=½ \\ x+y=b^2+1 \end{cases}$$

а) При каких a и b система имеет хотя бы одно решение?

б) При каких a и b система имеет единственное решение?

в) При каких a и b система имеет решение для любого b?

12. Найти все a, при которых уравнение

$((2x+a)\sqrt{(22a–4a^2–24)} –2(x^2+x)lga)\cdot lg(36a–9a^2/35)=0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых ≥ 0, а другой $\le –1$.

Ответы.1. искомое множество точек задается неравенством ${}^{\pi}/_3+\pi k+x<y<{}^{2\pi}/_3+\pi k+x$, $k\in Z$ 2. искомое множество точек задается неравенством ${}^{\pi}/_6+\pi k–x\le y\le {}^{5\pi}/_6+\pi k–x$, $k\in Z$ 3. $a\in(–1, 0]$ 4. $a\in[0, \pi^2/2)$ 5. $a=2$ 6. $a=–1$ 7. $a=1$ 8. $a=b=–2$ 9. $a=1$ 10 $a=2$. 11. а) при $a^{b2+1}\le{}^1/_{16}$ б) $a^{b2+1}={}^1/_{16}$ в) $0<a\le{}^1/_{16}$ 12. $a\in\{1,5\}\cup\{{}^5/_3\}\cup[2, 4)$

Занятие 4

Тема: Ограниченность функции. (6 часов)

Цель: Научиться применять свойство ограниченности функций при решении уравнений и неравенств или систем, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

Решить уравнения (неравенства):

1. $\sin x + \sin 9x = 2$
2. $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2$
3. $\cos x - \sin 3x = -2$
4. $\sin x \cdot \sin 7x = 1$
5. $\cos x \cdot \cos 6x = -1$
6. $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$
7. $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = 3/2$
8. $tg^4 x + tg^4 y + 2ctg^2 x\, ctg^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$
9. $2^{|x|} = \sin(x^2)$
10. $tg^2(\pi(x+y)) + ctg^2(\pi(x+y)) = \sqrt{2x/(x^2+1)} + 1$
11. $\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin 2x \sin^2 3x$
12. $\log_3(1/3 - |3\pi/2 - x|) = \sin x$
13. $3\arcsin(x^2 + x + 3/4) = \pi/(tg^2 \pi x/2 + ctg^2 \pi x/2)$
14. $\cos^2(x+1) \cdot \lg(9-2x-x^2) \geq 0$
15. $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$
16. $(x^2 - 2x + 3)(y^2+6y+12)=6$
17. $\cos x - y^2 - \sqrt{(y - x^2 - 1)} \geq 0$
18. $-|y| + x - \sqrt{x^2+y^2-1} \geq 1$
19. $\log_{1/2}(1+x) + \arccos(x+y^2) \leq -1$
20. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$
21. $(x^2-4x+3)\log_{1/\sqrt{2}}(\cos^2 \pi x + \cos x + 2\sin^2 x/2) \geq 2$
22. $\sqrt{(5+\sin^2 3x)} = \sin x + 2\cos x$

Решить системы:

1. $\begin{cases} tg^2 x + ctg^2 x = 2\sin^2 y \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+4y^2+5=4z \\ x-y\geq z \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2+20=z \\ 8x+4y\geq z \end{cases}$

5. $\begin{cases} z^2+7\leq 14xy \\ z-2x-2y=1 \end{cases}$

Ответы.1. ${}^{\pi}/_{2}+2\pi k$, $k\in Z$ 2.$-{}^{\pi}/_{6}+\pi k$, $k\in Z$ 3. $\varnothing$4. 5. $\pi+2\pi k$, $k\in Z$. 6. ${}^{\pi}/_{2}+\pi k$, $2\pi k$, $k\in Z$ 7. $x=\pm{}^{\pi}/_{3}+2\pi k$, $y=\pm{}^{\pi}/_{3}+2\pi n$, k, n $\in Z$ 8. $x=y={}^{\pi}/_{4}+{}^{\pi k}/_{2}$, $2\pi k$, $k\in Z$ 9. $\varnothing$10. $x=1$, $y=k-{}^{3}/_{4}$, $y=k-{}^{5}/_{4}$, $k\in Z$ 11. $(-1)^k\,{}^{\pi}/_{6}+\pi k$, πk; $k\in Z$ 12. ${}^{3\pi}/_{2}$ 13. $-½$ 14. $x=2p+1$; $x=2k-{}^{1}/_{2}$, k, $p\in Z$ 15. 16. $x=1$, $y=-3$ 17. $x=0$, $y=1$ 18. $x=1$, $y=0$ 19. $x=1$, $y=0$ 20. $2\pi k<x<{}^{\pi}/_{2}+2\pi k$, $k\in Z$ 21. $x=2$ 22. $\varnothing$

1. $x=\pm{}^{\pi}/_{4}+\pi k$, $y={}^{\pi}/_{2}+\pi k$ $z={}^{\pi}/_{2}+\pi k$, $k\in Z$ 2. (2; 2; –2) 3. (2; –0,5; 2,5) 4. (4; 2; 40) 5. (–2; –2; –7)

Занятие 5

Тема: Использование различных свойств функций. (6 часов)

Цель: Научиться применять свойство монотонности, четности функций при решении уравнений и неравенств или систем, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

1. Решить неравенство: $(x^x-7x-6)\cdot\sin x>0$
2. Решить уравнение: $\sqrt{2x^2-3x-5}+x\sqrt{x+1}+5=4\sqrt{x+1}+2\sqrt{2x-5}+2x$
3. При каких a уравнение $2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)-9a^3=0$ имеет единственное решение?
4. При каких a система $\begin{cases} a(x^4+1)=y+2-|x| \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$ имеет единственное решение
5. Решить неравенство: $\sqrt{4-x}-2\leq x|x-3|+4x$
6. При каких a система $\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0 \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

7. При каких a система $\begin{cases} y \geq x^2+2a \\ x \geq y^2+2a \end{cases}$ имеет единственное решение?

8. При каких a система $\begin{cases} x^4+(a-1)\sqrt{a+3}\cdot y+a^4+2a^3-9a^2-2a+8=0 \\ y=\sqrt{a+3}\cdot x^2 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответы.1. $3+2\pi k<x<\pi+2\pi k$, $k\in Z$ 2. $x=6$ 3. $a=0$, $a=-2/3$ 4. $a=4$ 5. $x\in[0;4]$ 6. $\pm 1/2\sqrt{3}$ 7. $a=1/8$ 8. $a=2$

Занятие 6

Тема: Решение различных задач №17 ЕГЭ. (4 часа)

Цель: Ознакомиться с задачами с параметрами из сборников подготовки к ЕГЭ, осуществлять формирование исследовательских умений.

Задачи.

1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\ln(7x-1)\cdot\sqrt{x^2+(9+a)x-2a^2+18a}=0$ имеет ровно один корень на отрезке [0;10].

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|9x+25a^3/x-7/2|+|9x+25a^3/x+9/2|=8$ имеет хотя бы один корень.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x+16a^4/x+7/2|+|x+16a^4/x-11/2|=9$ имеет хотя бы один корень.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|2a^2-100-28\sin x|+|3\sin x+9a+57|\leq 40+|2a^2+9a-18|+40\sin x$ имеет хотя бы один корень.

5. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $|3a^2-160-32\cos x|+|15\cos x+7a+41|\leq 72\cos x-72+|3a^2+7a-136|$ выполнено хотя бы при одном значении x.

Ответы.1. $a\in[-5; -{}^{1}/_{7}]\cup[-{}^{1}/_{14}; 9{}^{1}/_{7}]\cup[9{}^{2}/_{7}; 19]$ 2. $a\in(-\infty; ({}^{9}/_{400})^{1/3})$ 3. $\{-8\}\cup[8, +\infty)$ 4. $\{-6\}\cup[6, +\infty)$

Решение задачи 1.

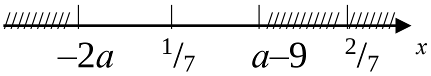
1. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\ln(7x-1)\cdot\sqrt{x^2+(9+a)x-2a^2+18a}=0$ имеет ровно один корень на отрезке [0;10].

Решение.

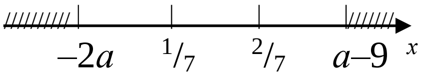
Корни уравнения: $7x-1=1$ $x_1={}^{2}/_{7}$, ${}^{2}/_{7}\in[0;10]$, $x^2+(9+a)x-2a^2+18a=0$, $D=(9+a)^2-4(-2a^2+18a)=9(a-3)^2$, $x_2=a-9$, $x_3=-2a$

Возможны следующие случаи:

1. если $a-9>-2a$, $a>3$,

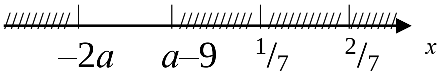


$x_1={}^{2}/_{7}\in[0;10]$, $-2a<{}^{1}/_{7}$, $a>-{}^{1}/_{14}$, $x_1={}^{2}/_{7}>a-9$, $a-9>{}^{1}/_{7}$ то есть при $9{}^{1}/_{7}<a<9{}^{2}/_{7}$ уравнение имеет два корня, что не удовлетворяет условию задачи, если $a-9={}^{2}/_{7}$, то есть $a=9{}^{2}/_{7}$ то уравнение имеет один корень



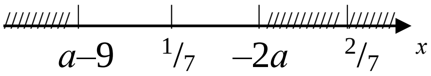
Если $a-9>{}^{2}/_{7}$, то $x_1={}^{2}/_{7}$ не входит в область допустимых значений, поэтому если

$\begin{cases} a-9\ge{}^{2}/_{7} \\ a-9\le 10, \end{cases}$ то есть $9{}^{2}/_{7}\le a\le 19$, то уравнение имеет один корень

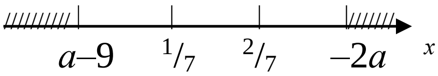


Если $a-9\le{}^{1}/_{7}$, $a\le 9{}^{1}/_{7}$ то корни $x_2=a-9$, $x_3=-2a$ не входят в область допустимых значений, поэтому если $3<a\le 9{}^{1}/_{7}$, то уравнение имеет один корень, также уравнение имеет один корень, если $a-9=-2a$, то есть при $a=3$, поэтому при $3\le a\le 9{}^{1}/_{7}$ уравнение имеет один корень.

2. если $-2a>a-9$, $a<3$, то

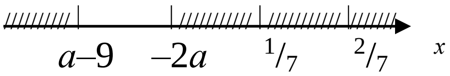


$x_1 = {}^2/_7 \in [0;10]$, $a–9 < {}^1/_7$, $a < 9^1/_7$, при ${}^1/_7 < –2a < {}^2/_7$, $–{}^1/_7 < a < –{}^1/_{14}$, уравнение имеет два корня, что не удовлетворяет условию задачи, если $–2a = {}^2/_7$, то есть $a = –{}^1/_7$ то уравнение имеет один корень



Если $–2a > {}^2/_7$, то $x_1 = {}^2/_7$ не входит в область допустимых значений, поэтому если

$\begin{cases} –2a \geq {}^2/_7 \\ –2a \leq 10, \end{cases}$ то есть $–5 \leq a \leq –{}^1/_7$, то уравнение имеет один корень



Если $–2a \leq {}^1/_7$, $a \geq –{}^1/_{14}$ то корни $x_2 = a–9$, $x_3 = –2a$ не входят в область допустимых значений, поэтому если $–{}^1/_{14} \leq a \leq 3$, то уравнение имеет один корень.

Условию задачи удовлетворяют значения $a \in [–5; –{}^1/_7] \cup [–{}^1/_{14}; 9^1/_7] \cup [9^2/_7; 19]$

Ответ: $a \in [–5; –{}^1/_7] \cup [–{}^1/_{14}; 9^1/_7] \cup [9^2/_7; 19]$

Решение задачи 2.

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|9x + 25a^3/x – {}^7/_2| + |9x + 25a^3/x + {}^9/_2| = 8$ имеет хотя бы один корень.

ОДЗ: $x \neq 0$

сделаем замену переменной: $t = 9x + 25a^3/x + 0{,}5$, тогда уравнение можно переписать в виде $|t – 4| + |t + 4| = 8$

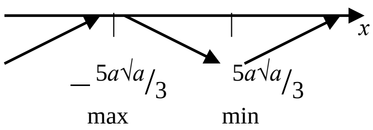
1. при $t \geq 4$ уравнение принимает вид $2t = 8$, $t = 4$
2. при $–4 \leq t < 4$ уравнение принимает вид $8 = 8$, то есть решение $–4 \leq t < 4$
3. при $t < –4$ уравнение принимает вид $–2t = 8$, $t = –4$

Решением уравнения $|t-4|+|t+4|=8$ является $-4\le t\le 4$, $-4\le 9x+25a^3/x+0{,}5\le 4$.
$-4{,}5\le 9x+25a^3/x\le 3{,}5$

Рассмотрим функцию: $y=9x+25a^3/x$, непрерывную при допустимых значениях x, ее производная $y'=9-25a^3/x^2$, при $a<0$ $y'>0$ для любых x из области допустимых значений , то есть при $a<0$ неравенство $-4{,}5\le 9x+25a^3/x\le 3{,}5$ имеет решения.

При $a>0$ $y'=9-25a^3/x^2=0$,

Критические точки $x=\pm{}^{5a\sqrt{a}}/_{3}$,



Функция $y=9x+25a^3/x$ нечетная, поэтому для того, чтобы неравенство $-4{,}5\le 9x+25a^3/x\le 3{,}5$ имело решения при $a>0$ достаточно, чтобы максимум функции удовлетворял условию $-{}^{5a\sqrt{a}}/_{3}\ge -4{,}5$, что выполняется при $a\le(^{9}/_{400})^{1/3}$

Ответ: $a\in(-\infty;\ (^{9}/_{400})^{1/3})$

2.3 Задачи, содержание и результаты экспериментальной работы

В экспериментальной работе участвовали пять обучающихся 11 класса.

Задача экспериментальной работы:

Реализовать модель формирования исследовательских умений и проверить ее эффективность в процессе проведения занятий внеурочной деятельности «Задачи с параметром».

Содержание.

1. Констатирующий этап.

В ходе констатирующего этапа эксперимента обучающимся было предложено решить одну задачу с параметром:

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $cos2x–2(a+1)cosx–4a–11=0$ имеет корни, и укажите корни для каждого из найденных значений a.
(ее решение: исходное уравнение преобразуется к решению квадратного уравнения $2cos^2x–2(a+1)cosx–4a–12=0$; замена переменной $cosx= t$;
$–1\leq t\leq 1$; $t^2–(a+1)t –2a–6=0$; $D=(a+5)^2$; $t_1=–2$(не является корнем), $t_2=a+3$; $cosx=a+3$; $–1\leq a+3\leq 1$; $–4\leq a\leq –2$ $x=\pm arccos(a+3) +2\pi k$, $k\in Z$; Ответ: если $a\in [–4; –2]$, то $x=\pm arccos(a+3) +2\pi k$, $k\in Z$, при прочих a корней нет).

Задача вызвала затруднения у всех пятерых обучающихся. Обучающиеся не составили план, не сумели сделать замену переменной, решить квадратное уравнение, сделать обратную замену, проанализировать решение относительно параметра a, выявить, сколько решений имеет задача. То есть проявили отсутствие следующих исследовательских умений: умение применять методы научного познания, анализировать условия заданной ситуации, намечать цели и задачи исследования, выдвигать гипотезы, устанавливать причинно-следственные связи, делать выводы из полученных результатов, обобщать результаты, планировать учебно-исследовательскую работу, проводить самоанализ, самоконтроль, управлять своими действиями в процессе учебно-исследовательской работы.

Констатирующий этап показал, что трудности возникают в поиске решения, при составлении плана решения, из-за незнаний методов решения, неумения оценить результат, нетвердых математических знаний, что продемонстрировало невысокий уровень сформированности исследовательских умений.

2. Формирующий этап.

В первом полугодии 2023–2024 учебного года на базе Центра «Клякса» (ИП Моисеева Ирина Сергеевна) был проведен эксперимент, целью которого было формирование исследовательских умений учащихся в процессе решения задач с параметром. С учащимися старших классов (5 человек) по заранее составленному сборнику был пройден курс «Задачи с параметром» в конце которого учащимся была дана зачетная работа.

На формирующем этапе эксперимента была реализована программа «Задачи с параметром», в ходе которой выделяли, формировали исследовательские умения при решении задач с параметрами. Программа представлена в п. 2.2 настоящей работы.

3. Контрольный этап.

В ходе контрольного этапа эксперимента обучающимся была предложена домашняя контрольная работа, включающая 10 зачетных задач.

Зачетные задания.

Зачетные задания являются заключительным домашним заданием для учащихся, прошедшим полностью курс. Зачет выставляется при правильно решенных пяти и более задач.

1. Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная тройка (x,y,z) действительных чисел x,y,z, удовлетворяющая системе уравнений: $\begin{cases} 2^x+2^{4/x}=(a^2-4)^2+y^2+8 \\ |y|\,z^4+2z^2-a^2z+a+4=0. \end{cases}$
2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $ax^2+(1-a^2)x-a>0$ имеет решение и любое его решение принадлежит отрезку $[-2; 2]$.
3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $log_2x^2 \leq log_2(x+2)$ является и решением неравенства $49x^2 \leq 4a^4$
4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x-a}=x-2a$ имеет корни, и нужно указать корни уравнения для каждого из найденных значений a.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $1+ sin^2ax = cos\, x$ имеет единственное решение.
6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(a^2–1)x^2+ 2(a–1)x+1 > 0$ выполнено при любом значении x.
7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений $\begin{cases} (x+a–6)^2+(y–a)^2=18 \\ \sqrt{x^2+(y–6)^2}+\sqrt{(x–6)^2+y^2}=6\sqrt{2} \end{cases}$
8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2–2a\, sin(cos\, x)+ a^2 = 0$ имеет единственное решение.
9. Найти все значения x, для каждого из которых равенство $2log_2(4–\sqrt{7+2x})= log_{2+a2x2}(4–3x)$ выполняется при любом значении параметра a.
10. Найти все значения параметра b, для каждого из которых при любом значении параметра a имеет ровно два различных решения система уравнений $\begin{cases} x^2+ y^2–5x + 6y+4=0 \\ y+ ax+ab=0 \end{cases}$

Ответы. 1. $a=–2$ 2. $a\in [–2; –0,5]$ 3. $a\in (–\infty; – \sqrt{7})\cup(\sqrt{7}; +\infty)$ 4. если $a>0$, то $x=2a+1+\sqrt{3a+1}$; если $a\in [–{}^1/_3; 0]$, то $x= 2a+1\pm\sqrt{3a+1}$; при прочих a корней нет 5. a – любое иррациональное число 6. $a\in [1;+\infty)$ 7. $a=3$ 8. $a=0$, $a=2sin1$ 9. $x=1$ 10. $b\in (–4; – 1)$

Анализ результатов эксперимента.

Всем учащимся выставлен зачет. 5 заданий из 10 выполнил один учащийся, 6 заданий из 10 выполнили двое учащихся, 7 заданий из 10 выполнил один учащийся, 8 заданий из 10 выполнил один учащийся.

Количество заданий из 10	Количество учащихся, справившихся с данным количеством заданий
5	1
6	2
7	1
8	1

На констатирующем этапе эксперимента все обучающиеся задачу в целом не решили. На контрольном этапе анализ зачетной работы, выполненной учащимися, прошедшими курс «Задачи с параметрами» выявил, что у учащихся в целом сформированы исследовательские умения: учащиеся неплохо оперируют с изученными определениями, свойствами, теоремами, применяют их в различных ситуациях, анализируют условие и находят возможные пути решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итогом проделанной работы является разработанная, теоретически обоснованная и экспериментально проверенная модель формирования исследовательских умений у учащихся в процессе решения задач с параметрами. Эксперимент показал, что гипотеза подтвердилась – повышению уровня исследовательских умений у обучающихся способствует реализация во внеурочной деятельности по математике модели формирования исследовательских умений.

Обучающиеся достигли хорошего уровня сформированности исследовательских умений, так как у них развился интерес, мотивация к решению исследовательских, нестандартных задач. Обучающиеся стали проявлять активность, инициативность при их решении, проявлять стремление к экспериментированию, к самостоятельной творческой деятельности. У обучающихся развилась способность применять известные знания в нестандартных, неожиданных ситуациях. Обучающиеся неплохо овладели методами исследования – анализом, аналогией, обобщением и другими. А также уровень сформированности исследовательских умений показывают количественные результаты, полученные в результате выполнения обучающимися контрольных заданий, которые кардинально отличаются от результата, полученного на констатирующем этапе эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. – Москва : Просвещение, 2007.

2. Горбачев, В. И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени / В. И. Горбачев // Математика в школе. – 2000. – № 2. – С. 61– 68.

3. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва : – Харьков: Илекса, Гимназия, 2002.

4. Ермаков, Д. С. Элективные курсы: требования к разработке и оценка результатов обучения / Д. С. Ермаков, Т. И. Рыбкина // Профильная школа. – 2004. – № 3. – С. 6 – 11.

5. Звавич, Л. И. Элективные курсы образовательной области «Математика» / Л. И. Звавич // Профильная школа. – 2004. – № 5. – С. 14– 18.

6. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т. П. Григорьева. – Нижний Новгород : НГПУ, 2009.

7. Лысенко, Ф. Ф. Математика. Подготовка к ЕГЭ–2022. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2022 года: учебно-методическое пособие / Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухов. – Ростов–на Дону : Легион, 2021.

8. Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – Москва : МЦНМО, 2007.

9. Крамор, В. С. Задачи с параметрами и методы их решения: учеб. пособие / В. С. Крамор. – Москва : Оникс; Мир и Образование, 2007.

10. Мирошин, В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин. – Москва : Экзамен, 2009.

11. Моденов, П. С. Математика: пособие для поступающих в вузы / П. С. Моденов, С. И. Новоселов. – Москва : МГУ, 1966.

12. Алгебра и начала анализа: учебник для 11 класса / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва : Просвещение, 2001.
13. Прокофьев, А. А. Задачи с параметрами: пособие по математике для учащихся старших классов / А. А. Прокофьев. – Москва : МИЭТ, 2004.
14. Савенков, А. И. Развитие исследовательских умений школьников / А. И. Савенков // Школьный психолог. – 2008. –№ 8. – С. 92–106.
15. Савенков А. И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению / А.И. Савенков. − Москва : Ось–89, 2006.
16. Ситаров, В. А. Дидактика : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Ситаров. – Москва : Академия, 2004.
17. Современные средства оценивания результатов обучения: учеб. пособие / Е. Н. Перевощикова, А. В. Поршнев, А. В. Юхова, Е. Ю. Клюева. – Нижний Новгород : НГПУ, 2007.
18. Севрюков, П. Ф. Школа решения задач с параметрами : учебно-методическое пособие / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. – Ставрополь : Сервисшкола, 2009.
19. Толковый словарь математических терминов.– Москва: Просвещение, 1967.
20. Успенский, В. В. Школьные исследовательские задачи и их место в учебном процессе / В. В. Успенский // Автореф. дис... канд. пед. наук. − Москва, 1997.
21. Шестаков, С. А. Задачи с параметром/ С. А. Шестаков. – Москва : МЦНМО, 2019.
22. Элективные курсы: вопросы и ответы // Математика. – 2007. – №2.
23. Элективные курсы для профильной подготовки и профильного обучения // Математика. – 2007. – №2.
24. Ястребинецкий, Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: пособие для учителей / Г. А. Ястребинецкий. – Москва : Просвещение, 1972.