1 руб. 70 коп.


Министерство образования РСФСР

Российский государственный педагогический университет
имени А.И.Герцена


# МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО ТЕМЕ "Элементы математической логики"

(Для студентов I-У курсов)


Ленинград 1991

Министерство образования РСФСР

Российский государственный педагогический университет имени А.И.Герцена

# МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО ТЕМЕ "Элементы математической логики"

(Для студентов I-У курсов)

Ленинград 1991

Печатается по решению кафедры алгебры и РИСа РГПУ им. А.И. Герцена

Материал, представленный в методической разработке, дает математическое обоснование некоторых понятий, встречающихся в ряде математических дисциплин, а также в курсе информатики.

Составители: Е.Ю.Яшина, С.А.Севостьянова, Т.А.Бороненко

Научный редактор: канд. физ-мат наук, проф. М.М.Лесохин

Рецензент: д-р физ-мат наук, проф. Н.М.Матвеев

© Российский государственный педагогический университет (РГПУ) им. А.И.Герцена, 1991

"Одной из основных задач математической логики является анализ оснований математики. Но в настоящее время она уже вышла из рамок этой задачи и оказала существенное влияние на развитие самой математики. Из ее идей возникло точное определение понятия алгоритма, что позволило решать многие вопросы, которые без этого остались бы в принципе неразрешенными. Возникший в математической логике аппарат нашел приложение в вопросах конструкций вычислительных машин и автоматических устройств".

(П.С.Новиков)

Аппарат математической логики в значительной степени сложился под влиянием прикладных проблем, в рамках которых развились его специфические особенности. Пробным камнем среди технических приложений была задача анализа и синтеза контактных схем. Успехи в этой области послужили стимулом для использования аппарата математической логики и в других областях.

Наиболее удачным результатом сотрудничества математики и техники явилось создание вычислительных машин. К тому времени,когда электроника, магнитная техника и электромеханика смогли предложить эффективные методы построения логических элементов и устройств преобразования информации, математическая логика уже располагала в общих чертах аппаратом для проектирования схем, реализующих сложные логические функции. Дальнейшее обобщение привело к развитию теории автоматов, основной задачей которой является математическое моделирование физических или абстрактных процессов, технических устройств и некоторых сторон поведения живых организмов. Автоматы используются в качестве универсальной модели в самых разнообразных областях, в том числе и при проектировании вычислительных машин.

В настоящей работе значительное внимание уделяется логике высказываний и логике предикатов. Символический язык этих разделов математической логики широко используется не только в самой математике, но и в технической литературе. Этому в значительной мере способствует развитие автоматизации проектирования с применением вычислительной техники.

Разработка содержит 4 раздела:

I.Занимательные задачи, решаемые с применением логических рассуждений, основанных на здравом смысле, могут быть использованы на занятиях кружков по математике в 5-6 классах средней школы.

2. Алгебра высказываний - материал, необходимый во всех разделах математики и в курсе ИВТ, прививает культуру математических рассуждений, может быть использован на факультативных курсах по математике в 9-I0 классах средней школы.

3 и 4 разделы посвящены систематическому рассмотрению двух формальных теорий: исчисление высказываний (более подробно) и исчисление предикатов. На примере исчисления высказываний показано построение формальной аксиоматической теории, доказана теорема о полноте. Большинство математических теорий являются теориями I порядка, которые представлены в данной разработке исчислением предикатов (более схематично, чем исчисление высказываний из-за громоздкости и трудности доказательства утверждений). Материал 3 и 4 разделов может быть использован на спецкурсах по математической логике для студентов 2-4 курсов педагогических институтов.

## I.ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

С чего начать изучение такой непростой науки, как математическая логика? Конечно, с занимательных задач, решение которых не требует знания специальных математических теорий.

I. Двенадцать человек несут I2 пирогов: каждый мужчина несет по два пирога, женщина-по половине пирога, а ребенок-по четверти пирога.

Сколько было мужчин, женщин и детей?

Решение. Приведем логическое решение этой задачи. Ограничим множество мужчин. Их может быть не больше 5 (если мужчин было бы 6 человек, то они унесли бы все пироги и помощь женщин и детей не понадобилась бы). С другой стороны, мужчин не может быть 3 и меньше, так как,если бы их было даже 3, то на долю женщин и детей осталось бы 6 пирогов,на это нужно было бы даже без детей I2 женщин, что противоречит условию (всего I2 человек). Итак, мужчин было либо 4, либо 5. Если предположить,что мужчин было четверо, то они унесли бы 8 пирогов, тогда на долю



женщин и детей (всего 8 человек) осталось бы 4 пирога. Эти 4 пирога смогли бы унести 8 женщин, а в условии среди помощников были и дети. Следовательно, мужчин было 5. Значит женщин и детей было 7 человек. Распределим два пирога между женщинами и детьми следующим образом: каждому дадим по четверти пирога, а оставшуюся четверть, конечно же,"вручим" женщине.

Ответ: 5 мужчин, I женщина и 6 детей.

2. Два друга встретились после долгой разлуки. "Как дела?", "Как жизнь?", "Как дети?". "У меня трое сыновей, - сказал один из друзей. - Лет им в произведении 36, а в сумме столько,сколько окон в соседнем доме. Старший сын - рыжий". Сколько лет каждому сыну?

Решение. Так как детей трое и произведение их полных лет равно 36, то начнем с разложения 36 на три множителя, каждый раз считая сумму:

I) $36 = I \cdot 3 \cdot I2$ сумма I6 4) $36 = I \cdot 4 \cdot 9$ сумма I4
2) $36 = I \cdot 6 \cdot 6$ сумма I3 5) $36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$ сумма I0
3) $36 = I \cdot 2 \cdot I8$ сумма 2I 6) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$ сумма I3

Если бы сумма делителей 36-ти не повторялась, то информация о старшем сыне была бы излишней, значит сумма повторялась. Это варианты 2) и 6). Информация "Старший сын-рыжий" отклоняет вариант 2). Остался вариант 6): старшему сыну - 9 лет, а младшие - близнецы-братья.

Ответ: 9 лет, 2 года и 2 года.

3. Из I00 коллекционеров 70 собирают старинные монеты, 75 - значки, 80 - этикетки со спичечных коробков и 85-марки. Сколько из них как минимум увлекаются всеми четырьмя видами коллекционирования сразу?

Решение. Из I00 коллекционеров 30 не собирают старинные монеты, 25 не интересуются значками, 20 равнодушны к этикеткам от спичечных коробков и I5 не собирают марок, т.е. $90=(30 + 25 + +20 + I5)$ любителей не занимаются по крайней мере одним из четырех видов коллекционирования. Следовательно, I0 коллекционеров как минимум собирают и монеты,и значки, и этикетки, и марки.

4. На столе стоят три одинаковых ящика. В одном из них лежат два черных шарика, в другом - черный и белый, в третьем - два белых. На ящиках сделаны надписи: "Два белых", "Два черных",

"Черный и белый", причем известно, что ни одна из них не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение надписей?

Решение. Возьмем шарик из ящика с надписью "Черный и белый". В нем могут либо 2 белых, либо 2 черных шарика. Если вынут белый шарик, то значит в этом ящике 2 белых; тогда 2 черных могут оказаться только в ящике с надписью "2 белых". Значит шарики разного цвета будут в ящике с надписью "Два черных".

5. Два лесоруба, Никита и Павел, сели завтракать. У Никиты было 4 лепешки, у Павла - 7. Тут к ним подошел охотник и попросил поделиться хлебом-солью. II лепешек разделили поровну на троих. Охотник поблагодарил лесорубов за завтрак и дал им II копеек.

Какой расчет должны сделать лесорубы?

Решение. II лепешек разделили на троих. Значит каждый съел $\frac{II}{3}$ лепешки. У Павла было 7 лепешек, он съел $\frac{II}{3}$ лепешки, следовательно, охотнику отдал $\frac{IO}{3}$ лепешки.

Никита из 4 своих лепешек тоже съел $\frac{II}{3}$ лепешки, следовательно, охотнику отдал $\frac{I}{3}$ лепешки.

Охотник съел $\frac{II}{3}$ лепешки и заплатил за них II копеек, значит, за каждую треть лепешки он отдал I копейку. У Павла он взял IO третей, у Никиты - одну треть. Следовательно, Павел должен взять IO копеек, в Никита - I копейку.

6. В конгрессе заседают IOO политических деятелей. Каждый из них либо продажен, либо честен. Известны следующие факты:

I) по крайней мере один из конгрессменов является честным,

2) из каждой произвольно выбранной пары конгрессменов по крайней мере один продажный.

Можно ли с помощью этих двух утверждений определить, сколько конгрессменов честны, а сколько продажны?

Решение. Любые два конгрессмена не могут быть одновременно честными. Следовательно, сразу двух честных конгрессменов не найти. Значит, в этом конгрессе самое большее один конгрессмен честен. Но согласно первому условию, уж один-то честный конгрессмен есть. Ответ: I честен, 99 продажны.

7. Король хотел сместить своего премьер-министра, но при этом не хотел его слишком обидеть. Он позвал его к себе, по-



ложил при нем два листка бумаги в портфель и сказал: "На одном листке я написал "Уходите", а на втором - "Останьтесь". Листок, который вы вытащите, решит вашу судьбу".

Премьер-министр догадался, что на обоих листках было написано "Уходите".

Как же, однако, умудрился он в этих условиях сохранить свое место?

Решение. Премьер-министр вытащил листок бумаги, не глядя на него скатал из него шарик и проглотил его. Поскольку на втором листке было написано "Уходите", то королю пришлось признать, что на проглоченном листке значилось "Останьтесь".

8. Однажды путешественник попал в плен к жестоким туземцам и был поставлен перед дилеммой: умереть от яда или сгореть заживо. Чтобы сделать этот "выбор", бедняга должен был произнести всего одну фразу - если при этом он скажет правду, его отравят, а если солжет - сожгут.

Как осужденный сумел избежать трагического исхода?

Решение. Осужденный сказал: "Меня сожгут заживо". Если это правда, то его следует отравить. Но в таком случае это - ложь. Если же это ложь, то его должны сжечь, но тогда это- правда.

Осужденного помиловали.

9. Два пешехода движутся навстречу друг другу по прямой дороге - каждый со скоростью 5 км/ч. Первоначальное расстояние между ними IO км. Муха, которая летает со скоростью I4 км/ч, взлетает с первого пешехода, летит по прямой ко второму, садится на него и, не теряя ни секунды, летит обратно к первому пешеходу и т.д.

Какое расстояние пролетает муха к тому моменту, когда оба пешехода встретятся?

Ответ: I4 км.

IO. Три человека - $A$, $B$ и $C$ - обладают абсолютными логическими способностями. Этой троице показали 7 марок: 2 красных, 2 желтых и 3 зеленых. Затем всем троим завязали глаза и каждому наклеили на лоб по марке, а оставшиеся 4 марки спрятали в коробку.

Когда у них сняли с глаз повязки, у $A$ спросили: "Можете ли вы назвать хотя бы один цвет, которого на вас определенно нет?" На что $A$ ответил: "Нет". Когда тот же самый вопрос задали $B$, он также ответил: "Нет".

Можно ли с помощью имеющейся информации установить, какого цвета марка у $C$ ?

Решение. Если бы марка $C$ была красной, то $B$ сразу сообразил бы, что его марка не может быть красной, рассуждая так: "Если бы моя марка тоже оказалась красной, тогда $A$ увидев перед собой две красные марки, сразу понял бы, что его марка не красная. Но $A$ не знает, что его марка не красная, следовательно, моя также не может быть красной".

Это рассуждение доказывает, что если бы марка $C$ была красной, то $B$ знал бы, что его марка - не красная. Но $B$ не знает, что его марка не красная, и , следовательно, марка $C$ не может быть красной. То же самое рассуждение, в котором слово "красная" заменим на "желтая", показывает, что марка $C$ не может быть также и желтой. Таким образом, на лбу у $C$ марка зеленого цвета.

II. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. В лодку можно взять только или волка, или козу, или капусту. Как осуществить перевоз, чтобы волк не съел козу, а коза - капусту?

Решение. Первый рейс: крестьянин перевозит козу; второй рейс - крестьянин может перевезти либо волка, либо капусту. Но после этого он должен козу увезти на противоположный берег. Третьим рейсом крестьянин перевозит соответственно капусту или волка и уж четвертым рейсом снова перевозит козу.

## II. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывание относится к числу неопределяемых понятий, например, таких, как множество, точка, плоскость, прямая, расстояние. Сформулируем это понятие интуитивно, через примеры. Пусть даны несколько утверждений:

1. Ремарк - автор романа "Три товарища".
2. Число 5 - делитель числа 23.
3. Число $x$ не превосходит I.
4. Число $I+2^{2^5}=4294967297$ - простое.
5. Существует наименьшее натуральное число.
6. Шел снег.

Среди этих утверждений есть истинные (I,5), ложные (2,4). Утверждения (3), (6) нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным, так как для того, чтобы имело смысл говорить об их истинности



или ложности, нужны дополнительные сведения: какое число $x$ , когда и где шел снег).

Всякое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, будем называть высказыванием.

Всякое высказывание либо истинно, либо ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Не о всяком высказывании можно сразу сказать истинно оно или ложно. Так, например, утверждение (4). Только в 1732 г. Эйлер доказал, что оно ложно.

К числу высказываний можно отнести и следующее утверждение: "I января 2000 года в Ленинграде будет 10 градусов ниже нуля, небольшой снег", хотя установить его истинность или ложность в настоящее время невозможно.

Различают высказывания простые и сложные. Высказывание считается простым, если никакая его часть не является высказыванием. Сложные высказывания характеризуются тем, что образованы из нескольких высказываний с помощью определенных способов соединения высказываний (логических связок). Запись высказывания при помощи символов называют логической формулой или формулой алгебры высказываний.

Будем обозначать логическую формулу большой буквой латинского алфавита: А, В, С,...

Рассмотрим примеры логических связок (операций).

I. Логическая связка, соответствующая союзу "и", называется конъюнкцией и обозначается знаком $\wedge$ (часто конъюнкцию называют логическим умножением).

Высказывание $A \wedge B$, называемое конъюнкцией А и В, истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания А и В. Это обстоятельство можно выразить с помощью истинностной таблицы для конъюнкции, где И и Л - это сокращения слов "истина" и "ложь".

| А | В | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | Л |

2. Отрицание $\rceil A$ высказывания А задается таблицей:

| А | $\rceil A$ |
|---|---|
| И | Л |
| Л | И |

Из этого определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

3. Логическая операция, соответствующая союзу "или", называется дизъюнкцией (логическим сложением) и обозначается знаком $\vee$

он также ответил: "Нет".

Можно ли с помощью имеющейся информации установить, какого цвета марка у $C$ ?

Решение. Если бы марка $C$ была красной, то $B$ сразу сообразил бы, что его марка не может быть красной, рассуждая так: "Если бы моя марка тоже оказалась красной, тогда $A$ увидев перед собой две красные марки, сразу понял бы, что его марка не красная. Но $A$ не знает, что его марка не красная, следовательно, моя также не может быть красной".

Это рассуждение доказывает, что если бы марка $C$ была красной, то $B$ знал бы, что его марка - не красная. Но $B$ не знает, что его марка не красная, и , следовательно, марка $C$ не может быть красной. То же самое рассуждение, в котором слово "красная" заменим на "желтая", показывает, что марка $C$ не может быть также и желтой. Таким образом, на лбу у $C$ марка зеленого цвета.

II. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. В лодку можно взять только или волка, или козу, или капусту. Как осуществить перевоз, чтобы волк не съел козу, а коза - капусту?

Решение. Первый рейс: крестьянин перевозит козу; второй рейс - крестьянин может перевезти либо волка, либо капусту. Но после этого он должен козу увезти на противоположный берег. Третьим рейсом крестьянин перевозит соответственно капусту или волка и уж четвертым рейсом снова перевозит козу.

## II. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывание относится к числу неопределяемых понятий, например, таких, как множество, точка, плоскость, прямая, расстояние. Сформулируем это понятие интуитивно, через примеры. Пусть даны несколько утверждений:

1. Ремарк - автор романа "Три товарища".
2. Число 5 - делитель числа 23.
3. Число $x$ не превосходит 1.
4. Число $1+2^{2^5}=4294967297$ - простое.
5. Существует наименьшее натуральное число.
6. Шел снег.

Среди этих утверждений есть истинные (1,5), ложные (2,4). Утверждения (3), (6) нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным, так как для того, чтобы имело смысл говорить об их истинности



или ложности, нужны дополнительные сведения: какое число $x$ , когда и где шел снег).

Всякое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, будем называть высказыванием.

Всякое высказывание либо истинно, либо ложно. Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

Не о всяком высказывании можно сразу сказать истинно оно или ложно. Так, например, утверждение (4). Только в 1732 г. Эйлер доказал, что оно ложно.

К числу высказываний можно отмести и следующее утверждение: "1 января 2000 года в Ленинграде будет 10 градусов ниже нуля, небольшой снег", хотя установить его истинность или ложность в настоящее время невозможно.

Различают высказывания простые и сложные. Высказывание считается простым, если никакая его часть не является высказыванием. Сложные высказывания характеризуются тем, что образованы из нескольких высказываний с помощью определенных способов соединения высказываний (логических связок). Запись высказывания при помощи символов называют логической формулой или формулой алгебры высказываний.

Будем обозначать логическую формулу большой буквой латинского алфавита: A, B, C,...

Рассмотрим примеры логических связок (операций).

1. Логическая связка, соответствующая союзу "и", называется конъюнкцией и обозначается знаком $\wedge$ (часто конъюнкцию называют логическим умножением).

Высказывание $A \wedge B$, называемое конъюнкцией A и B, истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B. Это обстоятельство можно выразить с помощью истинностной таблицы для

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | Л |

конъюнкции, где И и Л - это сокращения слов "истина" и "ложь".

2. Отрицание $\rceil A$ высказывания A задается таблицей:

| A | $\rceil A$ |
|---|---|
| И | Л |
| Л | И |

Из этого определения следует, что предложение и его отрицание не могут быть ни одновременно истинны, ни одновременно ложны.

3. Логическая операция, соответствующая союзу "или", называется дизъюнкцией (логическим сложением) и обозначается знаком $\vee$

Дизъюнкция задается следующей истинностной таблицей:

| А | В | А ∨ В |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | И |
| Л | И | И |
| Л | Л | Л |

4. Логическая операция, соответствующая союзу "если..., то", называется импликацией. Будем обозначать эту операцию символом $\rightarrow$. Истинностная таблица для импликации выглядит следующим образом:

| А | В | А → В |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | И |
| Л | Л | И |

5. Логическая операция, соответствующая оборотам типа "тогда и только тогда, когда", "необходимо и достаточно" называется эквиваленцией (~~эквивалентностью~~) и обозначается знаком $\longleftrightarrow$. Приведем истинностную таблицу для эквивалентности:

| А | В | А ⟷ В |
|---|---|---|
| И | И | И |
| И | Л | Л |
| Л | И | Л |
| Л | Л | И |

## Упражнения

1. Определить значения истинности следующих высказываний:
а) „I - простое число и 2 - простое число,"
б) „I - простое число или 2 - простое число,"
в) „число 2 - четное или это число простое."

2. Определить значения истинности высказываний А, В, если:
а) $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ - истинное высказывание,
б) $B \vee (2 \cdot 2 = 5)$ - ложное высказывание.

3. Изобразить на координатной плоскости множества точек, координаты которых обращают следующие предложения в истинные высказывания:
а) $(x>0) \wedge (y>0)$,
б) $(x>0) \wedge (y<0)$,
в) $(x<0) \vee (y=0)$,
г) $(x>0) \vee (y>0)$.

4. Каждое из следующих предложений заменить конъюнкцией либо дизъюнкцией, имеющей тот же смысл:
а) "Все однозначные простые числа, большие двух, - нечетны".



б) "По крайней мере одно из натуральных чисел $n, n-1, n+1$ - четно."
в) "Число $a$ принадлежит хотя бы одному из множеств А и В".

5. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения:
$(a, b \in R)$
а) $ab \neq 0$;
б) $a \cdot b = 0$;
в) $a^2 + b^2 = 0$;
г) $\frac{a}{b} = 0$;
д) $|a| = 2$;
е) $|a| < 2$;
ж) $|a| > 2$.

6. Составить таблицы истинности для следующих формул:
I) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ , 2) $\neg A \wedge \neg(A \vee B)$

7. Установить, какие из предложений в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет:
а) $a<0$, $a>0$;
б) $a<0$, $a \geq 0$;
в) "Треугольник АВС - прямоугольный",
г) "Все простые числа нечетны", "Все простые числа четны".

8. Следующие предложения запишите без знака отрицания:
а) $\neg(a<b)$ б) $\neg(a \leq b)$

9. Определить значения истинности следующих высказываний:
а) „если II делится на 6, то II делится на 3,"
б) „если I5 делится на 6, то I5 делится на 3,"
в) „если I5 делится на 3, то I5 делится на 6,"
г) „если Париж расположен на Темзе, то белые медведи обитают в Африке,"
д) „I2 делится на 6 тогда и только тогда, когда I2 делится на 3,"
е) „II делится на 6 тогда и только тогда, когда II делится на 3,"
ж) „I5 делится на 5 тогда и только тогда, когда I5 делится на 4."

I0. Определить значения истинности высказываний А, В, С, Д в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два - ложны:
а) „если 4 - четное число, то А", и

б) „если В, то 4 – нечетное число“,

в) „если 4 – четное число, то С,“

г) „если Д, то 4 – нечетное число.“

II. Определить значения истинности высказываний А, В, С, Д в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два – ложны:

а) $A \leftrightarrow (2 < 3)$,

б) $B \leftrightarrow (2 > 3)$,

в) $C \leftrightarrow (2 < 3)$,

г) $Д \leftrightarrow (2 > 3)$.

I2. Найдется ли такой день недели, когда:

а) утверждение "Если сегодня понедельник, то завтра – пятница" истинно,

б) утверждение "Если сегодня понедельник, то завтра вторник" ложно.

I3. Сформулируйте в виде импликаций следующие предложения:

а) Во всяком треугольнике сумма величин внутренних углов равна I80°.

б) Всякий элемент множества А принадлежит множеству В.

<u>Равносильные формулы</u>

Определим понятие формулы алгебры высказываний. Пусть А,В,С... – буквы, обозначающие простые высказывания.

I. Всякая буква А,В,С... является формулой алгебры высказываний.

2. Если А,В – формулы алгебры высказываний, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ также являются формулами алгебры высказываний.

3. Формулами алгебры высказываний являются только те выражения, которые удовлетворяют пунктам I и 2.

Пусть А и В – две формулы, составленные из некоторых простых высказываний. Если эти формулы при всех возможных значениях истинности простых высказываний принимают одинаковые истинностные значения, то они называются равносильными формулами (обозначение: $A \equiv B$).

Две формулы А и В равносильны тогда и только тогда, когда они логически эквивалентны, т.е. формула $A \leftrightarrow B$ принимает значение истинности I (И).



Пример: Показать равносильность формул $A \rightarrow B$ и $\neg(A \wedge (\neg B))$

| A | B | $\neg B$ | $A \rightarrow B$ | $A \wedge (\neg B)$ | $\neg(A \wedge (\neg B))$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | I | 0 | I | 0 | I |
| I | 0 | I | 0 | I | 0 |
| 0 | I | 0 | I | 0 | I |
| 0 | 0 | I | I | 0 | I |

<u>Упражнение</u>. Составлением таблиц показать равносильность следующих формул:

а) $(\neg B) \rightarrow (\neg A)$ и $A \rightarrow B$

б) $\neg(A \rightarrow B)$ и $A \wedge (\neg B)$

<u>Тавтологии и противоречия</u>

Формула, являющаяся истинной независимо от значений истинности входящих в нее простых высказываний, называется тавтологией.

Примеры тавтологий: $A \vee (\neg A)$, $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$

Эффективным средством выяснения, будет ли данная формула тавтологией является составление таблиц истинности.

Формула, являющаяся ложной при всех значениях истинности входящих в нее простых высказываний, называется противоречием. Примеры противоречий: $A \wedge (\neg A)$, $\neg(A \vee (\neg A))$, $A \leftrightarrow \neg A$

Между тавтологиями и противоречиями существует связь: отрицание противоречия является тавтологией и, наоборот.

<u>Упражнения</u>

I. Являются ли следующие формулы тавтологиями:

а) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$;

б) $((\neg A) \vee B) \leftrightarrow ((\neg B) \vee A)$.

2. Являются ли следующие формулы противоречиями:

а) $\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;

б) $(((A \rightarrow B) \wedge B) \rightarrow A)$

<u>Важнейшие равносильные формулы (законы логики)</u>

Рассмотрим основные равносильные формулы, наиболее часто используемые при решении логических задач. Их называют также законами логики.

I. $(A \rightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee B)$

2. Распределительное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции: $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

3. Распределительное свойство дизъюнкции относительно

конъюнкции : $(A\vee(B\wedge C))\equiv((A\vee B)\wedge(A\vee C))$

4. Законы де Моргана :
   4а. $(\neg(A\vee B))\equiv((\neg A)\wedge(\neg B))$
   Следствие: $(A\vee B)\equiv(\neg((\neg A)\wedge(\neg B)))$
   4б. $(\neg(A\wedge B))\equiv((\neg A)\vee(\neg B))$
   Следствие: $(A\wedge B)\equiv(\neg((\neg A)\vee(\neg B)))$
5. Замена связки эквивалентности :
   $(A\leftrightarrow B)\equiv((A\wedge B)\vee((\neg A)\wedge(\neg B)))$
6. Законы поглощения:
   6а. $(A\wedge(A\vee B))\equiv A$
   6б. $(A\vee(A\wedge B))\equiv A$
   6в. $((A\wedge B)\vee(\neg B))\equiv(A\vee(\neg B))$
   6г. $((A\vee B)\wedge(\neg B))\equiv(A\wedge(\neg B))$
7. Коммутативность конъюнкции :
   $(A\wedge B)\equiv(B\wedge A)$
8. Коммутативность дизъюнкции:
   $(A\vee B)\equiv(B\vee A)$
9. Ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции:
   $((A\wedge B)\wedge C)\equiv(A\wedge(B\wedge C))$
   $((A\vee B)\vee C)\equiv(A\vee(B\vee C))$

10. $(A\wedge A)\equiv A$ – идемпотентность конъюнкции.
11. $(A\vee A)\equiv A$ – идемпотентность дизъюнкции.
12. $(A\wedge(\neg A))\equiv 0$ (здесь 0 означает противоречие).
13. $(A\vee(\neg A))\equiv I$ (здесь I означает тавтологию).
14. $(A\wedge 0)\equiv 0$
15. $(A\vee 0)\equiv A$
16. $(A\wedge I)\equiv A$
17. $(A\vee I)\equiv I$
18. $(\neg(\neg A))\equiv A$

Овладев этими основными свойствами высказываний, можно будет упрощать формулы алгебры высказываний.

Пример. Показать равносильность формул:

$$(\neg(A\vee B\vee C))\equiv((\neg A)\wedge(\neg B)\wedge(\neg C))$$

Применим ассоциативный закон для дизъюнкции и правило де Моргана: $(\neg(A\vee B\vee C))\equiv(\neg((A\vee B)\vee C))\equiv((\neg(A\vee B))\wedge(\neg C))\equiv((\neg A)\wedge(\neg B)\wedge(\neg C))$



Упражнение: Упростить формулу: $\neg(A\vee P)\vee(A\rightarrow\neg P)$

Ответ: $\neg A\vee\neg P$

## Решение задач с применением равносильных формул алгебры высказываний

Задача I. Один из 5-ти братьев разбил окно.

– Это мог сделать только или Витя или Толя, – сказал Андрей.

– Я окно не разбивал, – возразил Витя, – и Коля тоже.

– Вы оба говорите неправду, – заявил Толя.

– Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду, – возразил Дима.

– Ты, Дима, неправ, – вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

Решение. Обозначим через $w$ утверждение, что Витя разбил окно. Через $t, k$ утверждение, что окно разбил Толя, Коля соответственно. Высказывания братьев запишем формулами:

$A=w\vee t$

$B=\neg w\wedge\neg k$

$T=\neg(w\vee t)\wedge\neg(\neg w\wedge\neg k)\equiv\neg w\wedge\neg t\wedge(w\vee k)\equiv\neg w\wedge\neg t\wedge k$

$D=(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)=((w\vee t)\wedge\neg(\neg w\wedge\neg k))\vee(\neg(w\vee t)\wedge$
$\wedge(\neg w\wedge\neg k))\equiv((w\vee t)\wedge(w\vee k))\vee(\neg w\wedge\neg t\wedge\neg w\wedge\neg k)\equiv$
$\equiv(w\vee(t\wedge k))\vee(\neg w\wedge\neg t\wedge\neg k)\equiv w\vee(\neg w\wedge\neg t\wedge\neg k)\equiv$
$\equiv(w\vee\neg w)\wedge(w\vee\neg t)\wedge(w\vee\neg k)\equiv w\vee(\neg t\wedge\neg k)$

При упрощении использовались законы логики 4, 8, 10, 13, а также ложность высказывания $t\wedge k$, так как по условию задачи окно разбил один из братьев.

$K=\neg D=\neg(w\vee(\neg t\wedge\neg k))\equiv\neg w\wedge(t\vee k)$

По условию задачи трое братьев сказали правду. Образуем из формул $A, B, T, D$ и $K$ конъюнкции, беря в каждую конъюнкцию по три формулы. Среди этих конъюнкций будет только одна истинная.

Всех возможных конъюнкций будет 10 ( $C_5^3=\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}=10$ ):

$ABT, ABD, ABK, ATD, ATK, ADK, BTD, BTK, BDK, TDK$

$A \wedge T, B \wedge T, \mathcal{D} \wedge K, \mathcal{D} \wedge T$ дают противоречия. Проверим это.

$A \wedge T = (w \vee t) \wedge (\neg w \wedge \neg t \wedge k) \equiv ((\underline{\neg w} \wedge \neg t \wedge k) \wedge \underline{w}) \vee (\neg w \wedge \underline{\neg t} \wedge k \wedge \underline{t}) \equiv 0$

$B \wedge T = (\neg w \wedge \neg k) \wedge (\neg w \wedge \neg t \wedge k) \equiv (\neg w \wedge \neg t \wedge \underline{k} \wedge \underline{\neg k}) \equiv 0$

$D \wedge K = (w \vee (\neg t \wedge \neg k)) \wedge (\neg w \wedge (t \vee k)) \equiv ((\neg w \wedge (t \vee k)) \wedge w) \vee ((\neg w \wedge (t \vee k)) \wedge (\neg t \wedge \neg k)) \equiv ((w \wedge \neg w) \wedge (t \vee k)) \vee (\neg w \wedge (t \vee k) \wedge \neg (t \vee k))) \equiv 0$

$\mathcal{D} \wedge T = (w \vee (\neg t \wedge \neg k)) \wedge (\neg w \wedge \neg t \wedge k) \equiv 0$

Полученные противоречия помогают для дальнейшего решения выбрать лишь 2 конъюнкции: $AB\mathcal{D}$, $ABK$

$A \wedge B \wedge \mathcal{D} = (w \vee t) \wedge (\neg w \wedge \neg k) \wedge (w \vee (\neg t \wedge \neg k)) \equiv w \vee (t \wedge (\neg t \wedge \neg k)) \wedge (\neg w \wedge \neg k) \equiv w \wedge (\neg w \wedge \neg k) \equiv 0 \quad (1)$

В силу (I) единственной истинной конъюнкцией будет конъюнкция из формул $A, B, K$:

$$A \wedge B \wedge K = (w \vee t) \wedge (\neg w \wedge \neg k) \wedge (\neg w \wedge (t \vee k)) \equiv (w \vee t) \wedge (\neg w \wedge (\neg k \wedge (t \vee k)) \equiv (w \vee t) \wedge (\neg w \wedge (\neg k \wedge t)) \equiv t \wedge \neg w \wedge \neg k$$

Следовательно, окно разбил Толя.

Задача 2. Для четырех дружинников, фамилии которых начинались буквами А, Е, Р, С составить график дежурств на 4 вечера подряд, учитывая, что:

I) С и Р в первый вечер дежурить не могут в связи с командировкой;

2) если выйдет С во второй вечер или Р – в третий, то Е сможет подежурить в четвертый вечер;

3) если А не будет дежурить в третий вечер, то Е согласен дежурить во второй вечер;

4) если А или Р будут дежурить во второй вечер, то С сможет пойти в четвертый вечер;

5) если Р в четвертый вечер уедет на конференцию, то А придется дежурить в первый, а С – в третий вечер.

Решение. Обозначим $a_i, e_i, p_i, c_i$ ( $i$ = I,2,3,4) высказывания: "дружинник $i$ дежурит в $i$-й вечер".



$B = \neg c_1 \wedge \neg p_1$

$\mathcal{D} = ((c_2 \vee p_3) \to e_4) \equiv (\neg c_2 \wedge \neg p_3) \vee e_4$

$H = (\neg a_3 \to e_2) \equiv a_3 \vee e_2$

$K = ((a_2 \vee p_2) \to c_4) \equiv (\neg a_2 \wedge \neg p_2) \vee c_4$

$M = (\neg p_4 \to (a_1 \wedge c_3)) \equiv p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)$

Каждая из формул есть истинное высказывание, поэтому будет истинной и конъюнкция этих формул.

$B \wedge \mathcal{D} = (\neg c_1 \wedge \neg p_1) \wedge ((\neg c_2 \wedge \neg p_3) \vee e_4) \equiv (\neg c_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge e_4)$

$B \wedge \mathcal{D} \wedge K = ((\neg c_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge e_4)) \wedge ((\neg a_2 \wedge \neg p_2) \vee c_4) \equiv (\neg c_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge c_4) \vee (\neg c_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2) \vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \underline{e_4} \wedge \underline{c_4})}_{\equiv 0} \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge e_4 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2)$

$B \wedge \mathcal{D} \wedge K \wedge M = ((\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge c_4) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge e_4 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2)) \wedge (p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)) \equiv \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \underline{c_4} \wedge \underline{p_4})}_{\equiv 0} \vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \underline{c_4} \wedge a_1 \wedge \underline{c_3})}_{\equiv 0} \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3) \vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge \underline{e_4} \wedge \underline{p_4})}_{\equiv 0} \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4 \wedge a_1 \wedge c_3)$

$B \wedge \mathcal{D} \wedge K \wedge M \wedge H = ((\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4 \wedge a_1 \wedge c_3)) \wedge (a_3 \vee e_2) \equiv (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4 \wedge a_3) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4 \wedge e_2) \vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge a_3)}_{\equiv 0} \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge e_2) \vee$

$$\vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge a_3)}_{\equiv 0} \vee \underbrace{(\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge e_2)}_{\equiv 0} = (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4 \wedge a_3) \vee$$

$$\vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4 \wedge e_2) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge e_2)$$

Первый член дизъюнкции ложен, так как если бы А дежурил в третий вечер, а Р-в четвертый, то С смог бы дежурить либо в первый, либо во второй вечер, но это противоречит наличию в формуле $\neg c_1 \wedge \neg c_2$.

$$B \wedge D \wedge K \wedge M \wedge H = (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge p_4 \wedge e_2) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge a_1 \wedge c_3 \wedge e_2) \equiv (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_2) \wedge (p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)) \equiv 1$$

Так как последняя формула истинна, то $e_2 \equiv 1$ и $p_4 \vee (a_1 \wedge c_3) \equiv 1$
К тому же истинны и отрицания $\neg c_1, \neg p_1, \neg c_2, \neg p_2, \neg a_2$
Поэтому остается единственная возможность: истинными будут $p_4, a_1, c_3$.

Ответ: А должен дежурить в I-й вечер, Е - во второй, С - в 3-й, Р - в 4-й вечер.

Задача 3. Следователь допросил 3 лиц А,В и С, подозреваемых в совершении преступления. На допросе А сказал, что показания В неверны. В сказал, что показания С неверны. Наконец, С сказал, что и А, и В говорят неправду.

Может ли следователь на основании этих показаний установить, кто из допрошенных говорит правду?

Решение. Обозначим через $a, b, c$ высказывания:

а) А (В,С) говорит правду;

б) допрошенний А мог сказать правду, а мог сказать и неправду.

$$A = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \equiv 1$$

$$B = (b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c) \equiv 1$$

$$C = (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (a \vee b)) \equiv 1$$

Составим конъюнкцию, которая будет заведомо истинной.



$$A \wedge B \wedge C = ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)) \wedge ((c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (a \vee b)) \equiv ((a \wedge \neg b \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg b \wedge c)) \wedge ((c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (a \vee b)) \equiv$$

$$\equiv (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg a) \vee ((\neg a \wedge b \wedge \neg c) \wedge (a \vee b)) \vee (\neg b \wedge a \wedge c \wedge \neg c \wedge (a \vee b)) \equiv \neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge (a \vee b) \equiv$$

$$\equiv \neg a \wedge b \wedge \neg c$$

Ответ: правду сказал В.

## Упражнения

I. На марафонском беге было высказано два прогноза о местах. которые займут спортсмены Иванов, Петров и Сидоров, реально претендующие на призовне места:

I) Сидоров будет первым, Иванов - вторым, Петров - третьим,

2) Победит Иванов, Петров придет вторым, а Сидоров будет третьим.

После окончания состязания оказалось, что три фаворита действительно заняли три первых места, но оба предсказания оказались ложными. Ни в одном из предсказаний ни одно из мест не было названо правильно. Какое место занял каждый из спортсменов?

Ответ: Петров - первое, Сидоров - второе, Иванов - третье.

2. Четыре молодых рабочих - Антонов, Петров, Степанов, Демьянов - работают на одном предприятии и учатся заочно. Как составить для них график свободных от работы дней в первые четыре дня недели, исходя из таких условий производства:

I) если во вторник выходными будут Демьянов или Антонов, то Степанову нужно дать выходной в понедельник;

2) если Демьянова освободить от работы в четверг, то Антонова нужно освободить в понедельник, а Степанова - в среду;

3) если Степанова освободить от работы во вторник или Демьянова - в среду, то Петрову нужно давать выходной день в четверг;

4) если Антонов будет освобожден в среду, то у Петрова выходной день будет во вторник, а если Петрову поставить выходной в среду, то Антонов может не приходить на работу во вторник;

5) если Демьянову высвободить понедельник, то у Степанова выходной придется на среду, а если Демьянов получит выходной в среду, тогда Антонов может не приходить на работу во вторник.

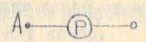
Ответ: Две возможности: Степанов - понедельник, Демьянов - вторник, Петров - среда, Антонов - четверг; Степанов - понедельник, Антонов - вторник, Демьянов - среда, Петров - четверг.

## Контактные схемы

Важное значение имеет приложение алгебры логики к синтезу контактных схем.

Контактная схема - это устройство из переключателей (контактов) и проводов, связывающих два полюса - вход и выход. Для конкретности будем говорить о переключательных схемах, представляющих собой участок электрической цепи, по которому проходит ток от источника А к потребителю В. Между источником и потребителем может быть замыкающий и размыкающий цепь контакт, либо несколько контактов, соединенных последовательно или параллельно.

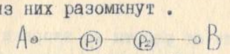
Рассмотрим схему с одним контактом.



Цепь замкнута в том и только в том случае, если контакт замкнут.

Сопоставим контакту $P$ переменную $x$, а два состояния контакта "замкнут", "разомкнут" - соответственно со значениями I и 0 переменной $x$. Условимся обозначать утверждение "цепь замкнута" через I, а утверждение "цепь разомкнута" - через 0.

Если между источником и потребителем поместить два контакта $P_1$ и $P_2$, соединенные последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты, и разомкнута, когда хотя бы один из них разомкнут.

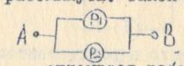
 (I)

Конъюнкция переменных $x_1$ и $x_2$, поставленных в соответствие контактам $P_1$ и $P_2$ истинна, когда обе переменные принимают значение I, и ложна, когда хотя бы одна из них принимает значение 0. Таким образом, формула $x_1 \wedge x_2$ соответствует схеме (I).



Формула $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ описывает схему с $n$ последовательно соединенными контактами.

Если контакты $P_1$ и $P_2$ соединены параллельно (2), то цепь замкнута, когда хотя бы один из контактов замкнут, и разомкнута, когда оба они разомкнуты. Такой схеме соответствует формула $x_1 \vee x_2$

 (2)

Формула $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ описывает работу цепи с $n$ параллельно соединенными контактами.

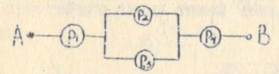
Контакты не всегда независимы друг от друга. Можно устроить их так, чтобы они замыкались и размыкались одновременно, либо так, чтобы один из них размыкался, когда другой замыкается, и наоборот. В первом случае контакты называются идентичными, во втором - инверсными.

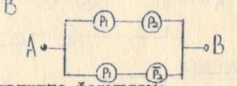
Идентичные контакты обозначаются одинаково; контакт, инверсный контакту $P$, будет обозначаться через $\overline{P}$ : когда переменная $x$, соответствующая контакту $P$, принимает значение I (контакт $P$ замкнут), формула $\overline{x}$ принимает значение 0 (контакт $\overline{P}$ разомкнут), и наоборот.

Установленные соответствия дают возможность описать любую цепь с последовательно или параллельно соединенными контактами формулой логики высказываний. С другой стороны, любую формулу логики высказываний можно смоделировать в виде переключательной схемы (в разделе II данной брошюры доказывается, что любая формула может быть приведена к форме, не содержащей символов $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$).

### Упражнения

I. Для каждой из схем составить соответствующую ей формулу: √

а) 

б) 

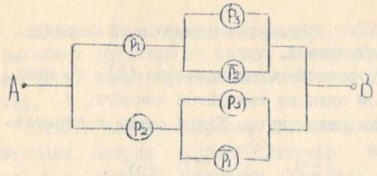
2. Начертить схемы, соответствующие формулам:

а) $(X \rightarrow Y) \vee X$

б) $(X \leftrightarrow Y) \wedge Z$

Указание: воспользоваться законами логики I и 5.

3. Составить формулу, соответствующую схеме; упростить схему:



Решение. Формула, соответствующая данной схеме, имеет вид $(X_1 \wedge (X_3 \vee \overline{X_2})) \vee (X_2 \wedge (X_3 \vee \overline{X_1}))$ . Составим для этой формулы таблицу истинности:

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| I | I | I | I |
| I | I | 0 | 0 |
| I | 0 | I | I |
| 0 | I | I | I |
| I | 0 | 0 | I |
| 0 | 0 | I | 0 |
| 0 | I | 0 | I |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

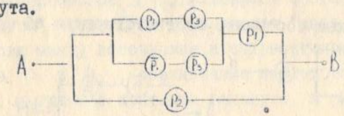
усл. раб. не завис от $X_3$

$$(X_1 \wedge (X_3 \vee \overline{X_2})) \vee (X_2 \wedge (X_3 \vee \overline{X_1})) \equiv$$
$$\equiv (X_1 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \overline{X_2}) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee$$
$$\vee (X_2 \wedge \overline{X_1}) \equiv X_3 \wedge (X_1 \vee X_2) \vee$$
$$\vee (X_1 \wedge \overline{X_2}) \vee (X_2 \wedge \overline{X_1})$$

Из последней формулы делаем вывод, что переключатель $P_3$ лишний.

Таким образом, проведен анализ данной схемы, который выявил условия замкнутости цепи и в результате этого анализа найдена возможность упрощения системы.

4. Составить формулу, соответствующую схеме. С помощью таблицы истинности сформулировать условия, при которых цепь замкнута.



Решение.

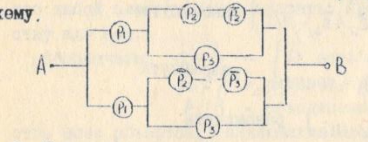
| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| I | I | I | I |
| I | I | 0 | I |
| I | 0 | I | I |
| 0 | I | I | I |
| I | 0 | 0 | 0 |
| 0 | I | 0 | I |
| 0 | 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

$$X_2 \vee (((X_1 \wedge X_3) \vee (\overline{X_1} \wedge \overline{X_3})) \wedge X_1) \equiv$$
$$\equiv X_2 \vee (X_1 \wedge X_3)$$



Цепь замкнута, когда:
I) замкнуты контакты $P_1, P_2, P_3$;
2) только $P_1$ и $P_2$
3) только $P_1$ и $P_3$
4) только $P_2$ и $P_3$
5) только $P_2$

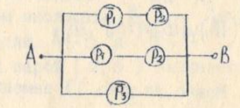
5. Составить формулу, соответствующую схеме. Упростить схему.



6. Построить простейшую схему, условия работы которой заданы следующей таблицей:

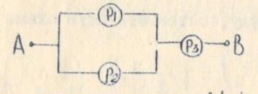
| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| I | I | I | I |
| I | I | 0 | I |
| I | 0 | I | 0 |
| I | 0 | 0 | I |
| 0 | I | I | 0 |
| 0 | I | 0 | I |
| 0 | 0 | I | I |
| 0 | 0 | 0 | I |

Ответ:

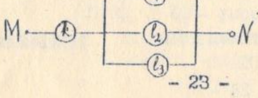


7. Комитет, состоящий из трех человек, включая председателя, выносит решение большинством голосов, однако решение не может быть принято, если за него не проголосовал председатель. Голосование "за" производится поворотом ручки, замыкающей контакт, и в случае принятия решения зажигается лампочка. Построить простейшую схему такой цепи.

Ответ:



8. Электрическая цепь между $M$ и $N$ составлена по схеме:



Рассмотрим следующие 4 высказывания:

$A$ : „элемент цепи $k$ вышел из строя"

$B_i$ : „элемент цепи $l_i$ вышел из строя" ($i$=I,2,3)

Замкнута ли цепь, если

а) высказывание $A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3)$ истинное,

б) высказывание $(\neg A) \wedge ((\neg B_1) \vee (\neg B_2) \vee (\neg B_3))$ истинное?

Решение. а) I) $\left.\begin{array}{l} A - \text{ист} \\ (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) - \text{ист} \end{array}\right\}$ разомкнута

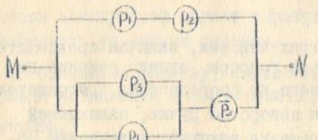
2) $\left.\begin{array}{l} A - \text{ист} \\ B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 - \text{лож} \end{array}\right\}$ разомкнута

3) $\left.\begin{array}{l} A - \text{лож} \\ B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 - \text{ист} \end{array}\right\}$ разомкнута

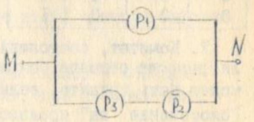
Ответ: Цепь разорвана, так как или элемент $k$ вышел из строя или вышли из строя одновременно все три элемента $l_i$, или произошло и то и другое.

б) $\left.\begin{array}{l} \neg A - \text{ист}, \quad \text{следовательно, } A - \text{лож} \\ (\neg B_1) \vee (\neg B_2) \vee (\neg B_3) - \text{ист} \quad - \text{хотя бы одно } B_i - \text{л} \end{array}\right\}$ цепь замкнута

9. Можно ли цепь I) заменить на цепь 2)?



I)



2)

Решение: Составим формулу, соответствующую схеме и упростим ее:

$$(X_1 \wedge X_2) \vee ((X_1 \vee X_3) \wedge \overline{X}_2) \equiv (X_1 \wedge X_2) \vee ((X_1 \wedge \overline{X}_2) \vee (X_3 \wedge \overline{X}_2)) \equiv$$

$$\equiv ((X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \overline{X}_2)) \vee X_3 \wedge \overline{X}_2 \equiv (X_1 \wedge (X_2 \vee \overline{X}_2)) \vee (X_3 \wedge \overline{X}_2) \equiv$$

$$\equiv X_1 \vee (X_3 \wedge \overline{X}_2)$$

Ответ: да.



## Ш. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Прежде чем формализовать логику высказываний, кратко изложим основные понятия, которые будем использовать в этом параграфе.

Множество – неопределяемое понятие. Будем говорить, что множество есть совокупность, набор каких-либо объектов, называемых его элементами. Множество считается заданным, если про любой элемент можно сказать: принадлежит он этому множеству или нет.

Обозначаем: $a \in A$ – „$a$ есть элемент $A$",

$a \notin A$ – „неверно, что $a$ есть элемент $A$"

$A \cup B$ – объединение множеств $A$ и $B$ – множество всех объектов, являющихся элементами хотя бы одного из множеств $A$ и $B$.

$A \cap B$ – пересечение множеств – множество элементов, принадлежащих и $A$ и $B$.

$A \subset B$ – $A$ включено в $B$ – каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$. $A = B$ в том и только в том случае, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение. Упорядоченной парой $(a, b)$ называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Упражнение. Доказать теорему: $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Определение. Множество всех упорядоченных пар $(x, y)$, таких, что $x \in X$, $y \in Y$ называется декартовым произведением множеств $X$ и $Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

$$X \times X = X^2 = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X\} \text{ – декартов квадрат.}$$

$X^n = X \times X \times \dots \times X = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in X\}$ – $n$-кратное декартовое произведение $X$ на себя или $n$-я декартовая степень множества $X$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – упорядоченная $n$-ка.

Определение. $n$-местным отношением $\rho$ на множествах

$A_1, A_2, \dots, A_n$ называется любое подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. $\rho \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

Определение. Бинарным отношением $\rho$ на множестве $X$ называется всякое подмножество множества $X^2$:

$$\rho \subset X \times X = X^2$$

Определение. Бинарное отношение $f$ называется функцией, если из $(x,y) \in f$ и $(x,z) \in f$ следует $y = z$.

Определение. Функцией от $n$ переменных на множестве $X$ называют функцию из множества $X^n$ в множество $Y$, такую, что из $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1) \in F^{n+1}$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_2) \in F^{n+1}$ следует $y_1 = y_2$.

Область определения $f$ обозначают $\mathcal{D}(f)$, область значений $f$ обозначают $E(f)$.

Определение. Пусть $f$ – функция из множества $X$ в множество $Y$ и $X = \mathcal{D}(f)$, то $f$ называют отображением множества $X$ в $Y$.

Пример. $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$

$f: Q^3 \to Q$

$f$ (I,?,3) = 3

(I,2,3,3) $\in f^4$

(5,4,3,2) $\notin f^4$

Определение. Отображение $f$ множества $X$ в множество $Y$ называется инъективным, если из того, что $(x_1, y) \in f, (x_2, y) \in f$ следует, что $x_1 = x_2$

Определение. Пусть $f$ отображение множества $X$ в множество $Y$. Если $E(f) = Y$, то $f$ называется отображением множества $X$ на $Y$, или сюръекцией.

Определение. Отображение $f$ множества $X$ в множество $Y$ называется биективным, если оно инъективно и сюръективно.

Определение. Множество $X$ – конечно, если существует такое $n \in \mathbb{N}$ и такая функция $f$, что

$f$ – биекция: $X \to \{I, 2, \dots n\}$

Определение. Множество $X$ – бесконечно, если не существует биекции ни на какой отрезок натурального ряда.

Определение. Множество $Y$ – счетно, если существует биекция $\varphi$ на все множество $\mathbb{N}$.

Теперь непосредственно перейдем к формализации алгебры высказываний – первому примеру формальной аксиоматической те-



~~ории.~~

Формальная теория $\mathcal{L}$ считается заданной, если выполнены следующие условия:

I) задано некоторое множество символов, называемое алфавитом теории $\mathcal{L}$, язык $\mathcal{L}$, слово $\mathcal{L}$;

2) выделено некоторое множество слов, называемое формулами теории $\mathcal{L}$;

3) выделено некоторое множество формул, называемое аксиомами теории $\mathcal{L}$;

4) выделено некоторое множество отношений между формулами (правила вывода).

Зададим формальную аксиоматическую теорию $\mathcal{L}$ – исчисление высказываний.

Алфавит $\mathfrak{N}$ – это множество, состоящее из символов трех категорий:

I. Латинские буквы $A, B, \dots, Y$ и те же буквы с индексами $A_1, Z_2,$

2. $\wedge \vee \neg \to \leftrightarrow$

3. ( ),

Иных символов, кроме указанных, алфавит исчисления высказываний не имеет.

В дальнейшем будем использовать сокращенную запись выражения "исчисление высказываний": ИВ.

Язык ИВ – это множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n$ $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^2 \cup \dots$

Под словом будем понимать элемент языка ($\Psi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}^n$, $\Psi$ – слово).

Примеры слов: $\{((\neg A_1) \leftrightarrow (B_2 \vee B_1)), \wedge), \neg A_5$

Пример не слова: $\{B \vee A\}$.

Формулой ИВ являются:

I) каждая буква из алфавита ($A, B, C_1, \dots$ )

2) если $\Phi_1$ и $\Phi_2$ – формулы, то формулами являются следующие слова:

а) $(\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$

б) $(\Phi_1) \vee (\Phi_2)$

в) $(\Phi_1) \to (\Phi_2)$

г) $(\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$

д) $\neg (\Phi_1)$

5) других формул нет.

Функцией истинности для формулы $\Phi$ называется функция $f_\Phi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, где $n$ – количество различных букв, входящих в $\Phi$, значение которой вычисляется следующим образом:

I) если $\Phi = A$, то $f_\Phi : \{0,1\}^1 \to \{0,1\}$

$x \in \{0,1\}$ $f_\Phi(x) = x$

2) а) $\Phi = (\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$

$\Phi_1 \{A_1, \ldots, A_k\}$ – формула $\Phi_1$ содержат буквы $A_1, \ldots, A_k$

$\Phi_2 \{A_{k+1}, \ldots, A_m\}$ – формула $\Phi_2$ содержит буквы $A_{k+1}, \ldots, A_m$

если $A_i = A_j$, то $x_i = x_j$; $f_\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \min(f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k), f_{\Phi_2}(x_{k+1}, \ldots, x_m))$

б) $\Phi = (\Phi_1) \vee (\Phi_2)$

$f_\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \max(f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k), f_{\Phi_2}(x_{k+1}, \ldots, x_m))$

если $A_i = A_j$, то $x_i = x_j$

в) $\Phi = (\Phi_1) \to (\Phi_2)$

$f_\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = 1 - f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k) + f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k) \cdot f_{\Phi_2}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$

г) $\Phi = (\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$

$f_\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k) \cdot f_{\Phi_2}(x_{k+1}, \ldots, x_m) + (1 - f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k)) \times$
$\times (1 - f_{\Phi_2}(x_{k+1}, \ldots, x_m))$

д) $\Phi = (\urcorner(\Phi_1))$

$f_\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 1 - f_{\Phi_1}(x_1, \ldots, x_k)$

<u>Пример</u>. $(\urcorner(\overset{\Phi_1}{(A) \to (C)})) \wedge ((A) \overset{\Phi_2}{\leftrightarrow} (B)) = \Phi$ $f_\Phi : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$

$f_\Phi(0,1,0,0) = \min(f_{\Phi_1}(0,1), f_{\Phi_2}(0,0)) = \min(0,1) = 0$

В данном примере мы рассмотрели лишь один набор значений для букв $A, B, C$. Но если формула зависит от $n$ букв, то количество различных наборов этих букв будет равно $2^n$. Только получив значение функции истинности при каждом наборе мы можем говорить о функции истинности данной формулы.

Воспользовавшись определением функции истинности, для формулы $\Phi$ составим таблицу истинности



а) $\Phi = (\Phi_1) \wedge (\Phi_2)$

| $f_{\Phi_1}$ | $f_{\Phi_2}$ | $f_\Phi$ |
|---|---|---|
| I | I | I |
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

б) $\Phi = (\Phi_1) \vee (\Phi_2)$

| $f_{\Phi_1}$ | $f_{\Phi_2}$ | $f_\Phi$ |
|---|---|---|
| I | I | I |
| I | 0 | I |
| 0 | I | I |
| 0 | 0 | 0 |

в) $\Phi = (\Phi_1) \to (\Phi_2)$

| $f_{\Phi_1}$ | $f_{\Phi_2}$ | $f_\Phi$ |
|---|---|---|
| I | I | I |
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | I |
| 0 | 0 | I |

г) $\Phi = (\Phi_1) \leftrightarrow (\Phi_2)$

| $f_{\Phi_1}$ | $f_{\Phi_2}$ | $f_\Phi$ |
|---|---|---|
| I | I | I |
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | 0 |
| 0 | 0 | I |

д) $\Phi = \urcorner(\Phi_1)$

| $f_{\Phi_1}$ | $f_\Phi$ |
|---|---|
| I | 0 |
| 0 | I |

Видим, что таблицы истинности совпадают с теми, которые мы составляли при определении логического значения сложных формул в алгебре высказываний.

Формула $\Psi$ называется <u>тавтологией</u>, если ее функция истинности принимает значение I при любом наборе истинностных значений, входящих в нее букв: $f_\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1$

Пример. $(A) \vee (\urcorner(A))$ – тавтология. Формула $\Psi$ <u>-противоречие</u>, если ее функция истинности принимает значение 0 при любом наборе истинностных значений входящих в нее букв: $f_\Psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$

$(A) \wedge (\urcorner(A))$ – противоречие.

Если формула $(\Psi_1) \leftrightarrow (\Psi_2)$ является тавтологией, то формулы $\Psi_1$ и $\Psi_2$ называются логически эквивалентными. Если $(\Phi_1) \to (\Phi_2)$ является тавтологией, то $\Phi_2$ – логическое следствие $\Phi_1$

Замечание: $\Psi_1$ и $\Psi_2$ являются логически эквивалентными тогда и только тогда, когда им соответствует одна и та же функция истинности.

<u>Предложение I</u>. Если $\Phi_1$ – тавтология и $(\Phi_1) \to (\Phi_2)$ – тавтология, то $\Phi_2$ – тавтология.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $\Phi_2$ не является тавтологией. Значит существует набор значений букв, входящих в $\Phi_2$ $(x_1, \ldots, x_n)$, при котором $f_{\Phi_2}(x_1, \ldots, x_n) = 0$

$(\Phi_1)\to(\Phi_2)$ – тавтология, $f_{(\Phi_1)\to(\Phi_2)} = 1 - f_{\Phi_1}(x_1,\dots,x_n) + f_{\Phi_2}(x_1,\dots,x_n)\cdot f_{\Phi_1}(x_1,\dots,x_n)$-I, но используя предположение получаем $1 = 1 - f_{\Phi_1}(x_1,\dots,x_n) + 0\cdot f_{\Phi_1}(x_1,\dots,x_n)$ Из равенства следует, что $f_{\Phi_1}(x_1,\dots,x_n)=0$ что противоречит условию предложения (так как $\Phi_1$ – тавтология).

Предложение 2. Если $\Phi_1\{A_1,\dots,A_n\}$ – тавтология и $\Phi_2$ получена из $\Phi_1$ подстановкой вместо $A_1, A_2,\dots,A_n$ формул $\Phi_1',\dots,\Phi_n'$, то $\Phi_2$ – тавтология.

Замечание: если подставляем вместо буквы формулу, то это нужно сделать во всей данной формуле: нельзя где-то произвести замену, а где-то оставить прежнюю букву.

Доказательство. Пусть $\Phi_1$ – тавтология и пусть задано произвольное распределение истинностных значений для букв, входящих в $\Phi_2 : (x_1,\dots,x_k)$. При этом наборе формулы $\Phi_1', \Phi_2',\dots,\Phi_n'$ приняли значение $x_1', x_2',\dots,x_n'$. Если мы эти значения придадим буквам $A_1, A_2,\dots,A_n$, то $\Phi_1$ примет значение I. А потому и $\Phi_2$ примет значение I на этом наборе. Так как набор значений $(x_1, x_2,\dots,x_k)$ был произвольный, то, следовательно, при любом наборе $\Phi_2$ принимает значение I. Значит $\Phi_2$ – тавтология.

Предложение 3. Если $\Phi_2$ получается из $\Phi_1$ подстановкой $\Phi_2'$ вместо одного или большего числа вхождений $\Phi_1'$, то

$$\big((\Phi_1')\leftrightarrow(\Phi_2')\big)\to\big((\Phi_1)\leftrightarrow(\Phi_2)\big) \quad (I)$$

есть тавтология; и, следовательно, если формулы $\Phi_1'$ и $\Phi_2'$ логически эквивалентны, то $\Phi_1$ и $\Phi_2$ тоже логически эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим произвольное распределение истинностных значений для букв: $(x_1,\dots,x_n)$ I). Пусть при этом распределении $\Phi_1'$ и $\Phi_2'$ имеют противоположные значения, т.е.

$f_{\Phi_1'}(x_1,\dots,x_n) \neq f_{\Phi_2'}(x_1,\dots,x_n)$

Тогда $(\Phi_1')\leftrightarrow(\Phi_2')$ примет значение 0 на этом наборе (см. таблицу г) ), а значит формула (I) примет значение I (см. таблицу в) ).

2) Пусть при этом распределении $\Phi_1'$ и $\Phi_2'$ принимают одно и то же истинностное значение, т.е. $f_{\Phi_1'}(x_1,\dots,x_n) = f_{\Phi_2'}(x_1,\dots,x_n)$ Но тогда $f_{\Phi_1}$ и $f_{\Phi_2}$ примут одинаковые значения на этом наборе (по построению). Таким образом, в этом случае $(\Phi_1)\leftrightarrow(\Phi_2')$



принимает значение I, $(\Phi_1)\leftrightarrow(\Phi_2)$ также принимает значение I, а потому и формула (I) принимает значение I.

Предложение 4. Для любой формулы $\Phi$ исчисления высказываний существует формула $\Psi$, логически эквивалентная $\Phi$, и содержащая связки $\vee, \wedge, \neg$ (по замечанию $f_\Phi = f_\Psi$).

Доказательство. Дано: $\Phi\{A_1,\dots,A_n\}$

План: I. Построить $\Psi$

2. Доказать : $f_\Phi = f_\Psi$

Построим $\Psi$. Представим $\Phi$ некоторой истинностной таблицей с $2^n$ строками.

| N | $A_1$ | $A_2$ | ... | $A_n$ | $f_\Phi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| I | I | I | ... | 0 | I или 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | ⋮ |
| $2^n$ | I | 0 | ... | 0 | I или 0 |

7A буквы 1

7(7A)

Для каждой строки таблицы истинности составим формулу:

$C_i = u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_n$, где $u_j = A_j$, если $f_{A_j}=1$;

$u_j = \neg A_j$, если $f_{A_j}=0$.

Обозначим через $\Psi$ дизъюнкцию всех $C_i$ для которых значение функции истинности от $i$-го набора равно I. $\Psi$ содержит связки $\neg, \wedge, \vee$ (по построению).

Докажем, что $\Psi$ логически эквивалентна $\Phi$, т.е. $f_\Phi = f_\Psi$. Рассмотрим произвольный набор истинностных значений $(x_1,\dots,x_n)$ для букв $A_1, A_2,\dots,A_n$, и предположим, что в истинностной таблице для $\Phi$ этот набор соответствует $k$-строке.

$C_k$ имеет при этом наборе значение I, тогда как все $C_i$ при этом же распределении будут иметь значение 0, т.е.

$f_{C_i}(x_1,\dots,x_n)=0, \quad i\neq k$. Каждая $C_i$ при своем наборе даст I, но 2-х одинаковых наборов в таблице нет. Поэтому, если мы рассмотрим "чужой" набор для $C_j$ (набор $k$-строки), то хотя бы один из конъюнктивных членов будет равен 0. Следовательно, $f_{C_j}(x_1,\dots,x_n)=0$. Докажем, что если $f_\Phi(x_1,\dots,x_n)=1$, то и $f_\Psi(x_1,\dots,x_n)=1$

Действительно, если $f_\Phi(x_1,\dots,x_n)=1$, то $C_k$ попадает в $\Psi$ и, следовательно, при этом распределении $\Psi$ принимает значение I.

Если $f_\Phi(x_1,\dots,x_n)=0$, то $C_k$ по построению не входит в $\Psi$. Тогда для рассматриваемого распределения все дизъюнктивные члены, входящие в $\psi$ принимают значение 0, а, следовательно, $f_\psi = max\{0,0,\dots,0\} = 0$

Пример, $\varphi = A \to B$

Найти формулу, логически эквивалентную формуле $\varphi$, содержащую связки $\wedge, \vee, \neg$.

| A | B | $f_\varphi$ |
|---|---|---|
| I | 0 | 0 |
| 0 | I | I |
| 0 | 0 | I |
| I | I | I |

Решение:

$C_1 = A \wedge \neg B$

$C_2 = \neg A \wedge B$

$C_3 = \neg A \wedge \neg B$, $C_4 = A \wedge B$ $\qquad \psi = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Следствие. Для любой формулы $\varphi$ исчисления высказываний существует ей логически эквивалентная формула $\psi$, содержащая связки из одной заранее заданной пары:

I) $\neg, \wedge$ 2) $\neg, \vee$ 3) $\neg, \to$

Доказательство. Есть формула $\Phi$; по доказанному выше предложению существует $\Phi'$, содержащая связки $\neg, \vee, \wedge$.

I) получим формулу, содержащую связки $\neg, \wedge$

Воспользуемся тавтологией: $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \wedge \neg B))$

Заменим в формуле $\Phi'$ все выражения $A \vee B$ на $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

2) и 3) следуют из тавтологий:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \vee \neg B))$$
$$(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg A) \to B)$$
$$(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg(A \to \neg B))$$

Зададим некоторое множество формул, которые назовем аксиомами исчисления высказываний: каковы бы ни были формулы $\psi_1, \psi_2$ и $\psi_3$, следующие формулы являются аксиомами ИВ:

$$(A1) \quad \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_1)$$
$$(A2) \quad (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))$$
$$(A3) \quad (\neg\psi_2 \to \neg\psi_1) \to ((\neg\psi_2 \to \psi_1) \to \psi_2)$$

Это 3 схемы аксиом. Самих же аксиом существует бесконечно много.

Введем отношения между формулами, которые называются правилами вывода. В ИВ единственное правило вывода: *modus ponens* (сокращенно МР).

Пусть $\Phi$ - множество всех формул ИВ, тогда $MP \subset \Phi^3$ $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in MP \Leftrightarrow \Phi_2 = \Phi_1 \to \Phi_3$. В этом случае $\Phi_3$



называется следствием $\Phi_1$ и $\Phi_2$ по МР.

Определение. Пусть $\Gamma$ - некоторое множество формул. Говорят, что формула $\Theta$ выводима из множества формул $\Gamma$ (будем использовать запись $\Gamma \vdash \Theta$), если существует конечная последовательность $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$, в которой $\Theta_n = \Theta$, а $\Theta_i$ может быть:

I) аксиома

или

2) $\Theta_i \in \Gamma$ (элемент $\Gamma$)

или

3) $\Theta_i$ следствие предыдущих формул по МР.

Замечание. $\Theta_1$ и $\Theta_2$ могут быть либо аксиомами, либо $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma$. Тогда $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ называется выводом формулы $\Theta$, элементы множества формул $\Gamma$ называются посылками или гипотезами. Если множество $\Gamma$ конечно: $\Gamma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$, то вместо $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\} \vdash A$ будем писать $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \vdash A$. Если $\Gamma = \varnothing$, то $A$ - теорема, т.е. существует конечная последовательность $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$, в которой $\Theta_n = A$, а $\Theta_i$ будет:

I) аксиома,

2) следствие предыдущих формул по МР.

Вместо $\varnothing \vdash A$ будем писать $\vdash A$. Таким образом $\vdash A$ означает, что $A$ есть теорема.

Свойства выводимости

I. Если $\Phi \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash \Phi$.

2. $\Gamma \subset \Delta$, $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Delta \vdash \Phi$.

3. $\Gamma \vdash \Phi$ и для любого элемента $\psi$ из $\Gamma$ имеем $\Delta \vdash \psi$, то $\Delta \vdash \Phi$

4. $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \psi$, $\Gamma \vdash \Phi$, то $\Gamma \vdash \psi$

5. $\Gamma \vdash \Phi \to \psi$, то $\Gamma \cup \{\Phi\} \vdash \psi$

Следствие:

$\Gamma \vdash \Phi$, $\Gamma \vdash \Phi \to \psi$, то $\Gamma \vdash \psi$ (при доказательстве сначала использовать свойство 5, затем свойство 4).

Лемма I. $\vdash \Omega \to \Omega$ (для любой формулы $\Omega$)

Доказательство. Для доказательства необходимо построить вывод формулы $\Omega \to \Omega$. Так как $\Gamma = \varnothing$, то I-я формула может быть только аксиомой.

I) Подставим в схему аксиом ( $A2$ ) $\Omega$ вместо $\psi_1$ и $\psi_3$, $\Omega \to \Omega$ вместо $\psi_2$: $(\Omega \to ((\Omega \to \Omega) \to \Omega)) \to$

$\rightarrow ((\Omega \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega)) \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega))$

2) В схеме аксиом ( A1 ) $\Psi_1$ заменим на $\Omega$, $\Psi_2$ заменим на $\Omega \rightarrow \Omega$ : $\Omega \rightarrow ((\Omega \rightarrow \Omega) \rightarrow \Omega)$

3) Из I) и 2) по МР получаем: $(\Omega \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega)) \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega)$

4) В схеме аксиом ( A1 ) заменим $\Psi_1$ и $\Psi_2$ на $\Omega$: $\Omega \rightarrow (\Omega \rightarrow \Omega)$

5) Из 3) и 4) по МР получаем: $\Omega \rightarrow \Omega$

Лемма 2.(Теорема дедукции). Если $\Gamma$ -множество формул, $\varphi$ и $\psi$ - формулы и $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ , то $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Доказательство. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ - вывод $\psi$ из $\Gamma \cup \{\varphi\}$, где $\psi_n = \psi$.

Индукцией по $i$ докажем, что $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i \ (1 \leq i \leq n)$

I шаг. $i = 1$ Докажем, что $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_1$.

Существует 3 возможности для $\psi_1$ :

I) $\psi_1$ - аксиома,

2) $\psi_1 \in \Gamma$

3) $\psi_1 = \varphi$

(I) Если $\psi_1$ аксиома, используя $(A1)$, получим $\psi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1)$ Из $\psi_1$ и $\psi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1)$ по МР : $\varphi \rightarrow \psi_1$ , а следовательно, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_1$ в силу того, что теорема выводима из любого множества, а в частности, из $\Gamma$.

(2) $\psi_1 \in \Gamma$. $(A1): \psi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1)$ (I),
$\Gamma \vdash \psi_1$ (II). Из (I) и (II) $\underset{\text{МР}}{:}$ $\varphi \rightarrow \psi_1$, а значит $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_1$

(3) $\psi_1 = \varphi$ . Докажем, что $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ . По лемме I : $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$ , а следовательно, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_1$ .

2 шаг. Предположим, что для $i < n$ $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$

3 шаг. Докажем для $i = n$ : $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_n = \psi$

I) $\psi_i$ - аксиома,

2) $\psi_i \in \Gamma$,

3) $\psi_i = \psi$

4) из предыдущих формул по МР. I,2,3 случаи доказываются так же, как для $i = 1$ . Докажем 4-й случай. Пусть $\psi_i$ следует по МР из $\psi_j$ и $\psi_m$ , где $j < n$, $m < n$, $\psi_m = \psi_j \rightarrow \psi_i$

Используя индуктивное предположение, получаем:

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_j$

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)$ $\Big|$ $(A2)$ $(\varphi \rightarrow (\psi_j \rightarrow \psi_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i))$ - аксиома, в частности выводима из $\Gamma$.

По следствию из свойств 4) и 5), применив его 2 раза получаем: $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$



Следствия из теоремы дедукции

а) $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$

б) $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B\} \vdash A \rightarrow C$

Доказательство (а):

I) $A \rightarrow B$ - гипотеза,

2) $B \rightarrow C$ - гипотеза,

3) $A$ - гипотеза,

4) из (I) и (3) по МР: $B$

5) из (2) и (4) по МР: $C$

таким образом, $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, A\} \vdash C$ . По теореме дедукции: $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$

Доказательство (б) провести самостоятельно.

Лемма 3. Для любых формул $A, B$ следующие формулы являются теоремами:

(а) $\neg\neg B \rightarrow B$

(б) $B \rightarrow \neg\neg B$

(в) $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

(г) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(д) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

(е) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B))$

(ж) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$

С подробным доказательством можно познакомиться в книге Мендельсона "Математическая логика" (гл. I, § 4).

Лемма 4. Пусть $\Phi$ -формула, зависящая от букв $\{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ Пусть задано некоторое распределение истинностных значений для букв : $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ , $x_i \in \{0, 1\}$

Пусть $B_i' = \begin{cases} B_i, & \text{если } x_i = 1 \\ \neg B_i, & \text{если } x_i = 0 \end{cases}$

Пусть $\Phi' = \begin{cases} \Phi, & \text{если } f_\Phi(x_1, \ldots, x_k) = 1 \\ \neg\Phi & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Тогда из $B_1', B_2', \ldots, B_k' \vdash \Phi'$

Доказательство. Ведется индукцией по числу $n$ вхождений в $\Phi$ примитивных связок.

Если $n = 0$, то $\Phi$ представляет собой одну букву $B_1$ и утверждение леммы сводится к $B_1 \vdash B_1$ и к $\neg B_1 \vdash \neg B_1$

Индуктивное предположение: для всех $i < n$ утверждение леммы верно.

Докажем утверждение леммы только для двух случаев: 1) $\Phi = \neg\Psi$ 2) $\Phi = \beta \to \mu$

Случай I. $\Phi = \neg\Psi$. Число вхождений примитивных связок в $\Phi$ больше, чем в $\Psi$. Для $\Psi$ верно индуктивное предположение. I.а. Пусть при заданном распределении истинностных значений $\Psi$ принимает значение I.

Тогда $\Phi$ принимает значение 0. Таким образом, $\Psi'$ есть $\Psi$, а $\Phi'$ есть $\neg\Phi$. По индуктивному предположению, примененному к $\Psi$: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \Psi$

$\vdash \Psi \to \neg\neg\Psi$ (лемма 3 (б)) | по МР: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\neg\Psi = \neg\Phi = \Phi'$

I.б. При заданном распределении истинностных значений $\Psi$ принимает значение 0.

Тогда $\Phi$ принимает значение I. Таким образом, $\Psi'$ есть $\neg\Psi$, а $\Phi' = \Phi$. По индуктивному предположению, примененному к $\Psi$: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \Psi' = \neg\Psi = \Phi = \Phi'$

Случай 2. $\Phi = \beta \to \mu$. Тогда число вхождений примитивных связок в $\beta$ и $\mu$ меньше, чем в $\Phi$. Поэтому к ним можно применить индуктивное предположение:

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \beta'$

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mu'$

2.а. При заданном распределении истинностных значений $\beta$ принимает значение 0.

$\beta' = \neg\beta$

$\Phi = \Phi'$ (см. таблицу для $\to$)

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \beta' = \neg\beta$ (из условия)

$\vdash \neg\beta \to (\beta \to \mu)$ (лемма 3(в)) | по МР: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \beta \to \mu = \Phi = \Phi'$

2.б. $\mu$ принимает значение I. Тогда $\mu' = \mu$, $\Phi' = \Phi$

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mu' = \mu$ (из условия)

$\vdash \mu \to (\beta \to \mu)$ (A1) | по МР: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \beta \to \mu = \Phi = \Phi'$

2.с. $\beta$ принимает значение I, а $\mu$ – 0.

$\Phi' = \neg\Phi$, $\beta' = \beta$, $\mu' = \neg\mu$

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \beta' = \beta$ (a)

$B_1', \ldots, B_k' \vdash \mu' = \neg\mu$ (б), (c) $\vdash \beta \to (\neg\mu \to \neg(\beta \to \mu))$ (л.3, е)

Из (a) и (c) по МР: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg\mu \to \neg(\beta \to \mu)$ (d)

Из (d) и (б) по МР: $B_1', \ldots, B_k' \vdash \neg(\beta \to \mu) = \neg\Phi = \Phi'$.

Теорема (о полноте). Формула $\Phi$ исчисления высказываний является теоремой тогда и только тогда, когда $\Phi$ – тавтология.



Доказательство.

I) Пусть $\Phi$ – теорема. Докажем, что $\Phi$ – тавтология. $\Phi$ – теорема, следовательно, существует вывод: $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n = \Phi$

$\Theta_1$ может быть только аксиомой.

$\Theta_2$ – только аксиомой.

$\Theta_3$ – может быть либо аксиомой, либо полученной по правилу МР.

Аксиомы являются тавтологиями (доказать самостоятельно).

Сохраняет ли МР тавтологию? По предложению I, если $\Phi_1$ – тавтология и $\Phi_1 \to \Phi_2$ – тавтология, то $\Phi_2$ – тавтология. Таким образом, получили, что $\Phi_1$, являясь теоремой, тавтология.

2) Пусть $\Phi$ – тавтология. Докажем, что $\Phi$ – теорема. Пусть $\Phi$ зависит от букв $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Применяя лемму 4:

$B_1', B_2', \ldots, B_k' \vdash \Phi' = \Phi$ (так как $\Phi$ –тавтология).

Пусть $B_k$ принимает значение I, а следовательно, $B_k' = B_k$

Применив лемму 2, получим: $B_1', B_2', \ldots, B_{k-1}' \vdash B_k \vdash \Phi$ (1)

Если же $B_k$ принимает значение 0, то $B_k' = \neg B_k$ и тогда

$B_1', B_2', \ldots, B_{k-1}' \vdash \neg B_k \to \Phi$ (2)

По лемме 3 (ж): $\vdash (B_k \to \Phi) \to ((\neg B_k \to \Phi) \to \Phi)$ (3)

Из (I) и (3): $B_1', B_2', \ldots, B_{k-1}' \vdash (\neg B_k \to \Phi) \to \Phi$ (4)

(по следствию из свойств выводимости)

Из (2) и (4) по следствию из свойств выводимости: $B_1', B_2', \ldots, B_{k-1}' \vdash \Phi$. Последовательно исключая формулы из цепочки $B_i'$ получим, что $\vdash \Phi$, т.е. $\Phi$ – теорема.

Определение. Система аксиом называется полной, если прибавление к ней еще одной аксиомы не расширяет круга доказываемых теорем.

Следствие I.(из теоремы о полноте). Аксиоматика I–III исчисления высказываний полна.

Определение. Система аксиом называется непротиворечивой, если $\Phi$ и $\neg\Phi$ не являются одновременно теоремами в этой теории.

Следствие 2. Аксиоматика I–III непротиворечива.

## IУ. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Средствами логики высказываний удается описывать и анализировать далеко не всякие рассуждения. Добавив три дополнительных логических понятия, называемых термами, предикатами и кванторами, можно символизировать очень многое в обычном и математическом языках.

Расширением логики высказываний является логика предикатов.

Определение. Функция, заданная на некотором множестве $M$, все значения которой принадлежат множеству $\{И, Л\}$, называется предикатом.

Пример. Рассмотрим уравнение $\cos x = 1$. Каждому значению переменной $x$ на множестве действительных чисел ставится в соответствие высказывание и тем самым одно из значений истинности. Таким образом, уравнение задает отображение множества $\mathbb{R}$ действительных чисел на множество $\{И, Л\}$, иначе говоря, задает функцию с областью определения $\mathbb{R}$ и множеством значений $\{И, Л\}$. Следовательно, является предикатом.

Множество, на котором определен предикат, называется областью определения предиката. Множество, на котором предикат принимает только истинные значения, называется областью истинности предиката.

Выражение "для всякого $x$" называется квантором общности по переменной $x$. Это выражение кратко записывается так: $\forall x$

Выражение "существует $x$ такое, что..." называется квантором существования по переменной $x$ и обозначается так: $\exists x$.

Вместо слова "всякий" употребляют слова "каждый", "любой"; вместо "существует" - слова "есть", "найдется", "некоторые", "хотя бы один".

Замечание. В обычном языке, говоря "некоторые", чаще всего имеют в виду "по меньшей мере один, но не все"; в логике же слово "некоторые" означает "по меньшей мере один, но, может быть, и все".

В выражении $(\forall y A)$ "A" называется областью действия квантора $\forall y$.

Кванторы $\forall y$ и $\exists y$ располагаются по силе между связками $\leftrightarrow$, $\to$ и связками $\vee, \wedge, \neg$.

Порядок восстановления скобок : $\neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, \to, \leftrightarrow$

Универсальный способ построения предложений, являющихся отрицаниями предложений с кванторами - добавление словосочетания "неверно, что" в начале предложения.

Пример. Любое уравнение имеет действительный корень. Неверно, что любое уравнение имеет действительный корень. Но это предложение имеет тот же смысл, что и предложение: "Существует уравнение, не имеющее действительного корня".



Итак, предложение $\neg(\forall x \Phi(x))$ равносильно предложению $\exists x(\neg\Phi(x))$ а предложение $\neg(\exists x \Phi(x))$ равносильно предложению $\forall x(\neg\Phi(x))$. Поэтому, для того, чтобы построить отрицание предложения, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и взять отрицание предложения, стоящего за квантором.

## Исчисление предикатов

I. Алфавит:

I категория:

$x_1, x_2, \ldots$ - переменные (счетное множество),

$P_i^n$ - предикатные буквы (конечное или счетное множество),

$F_j^n$ - функциональные буквы (конечное или счетное множество),

$C_i$ - константы (конечное или счетное множество).

Верхний индекс предикатной или функциональной буквы указывает число аргументов, а нижний служит для различения букв с одним и тем же числом аргументов.

2 категория: $\neg, \to, \wedge, \vee, \exists, \forall$

3 категория: $( , )$

Функциональные буквы, примененные к переменным и константам, порождают термы.

Определение.

(I) всякая переменная или константа есть терм,

(2) если $F_i^n$ - функциональная буква и $t_1, \ldots, t_n$ - термы, то $F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ - терм.

(3) выражение является термом только в том случае, если это следует из правил (I) и (2).

Определение. Формулы исчисления предикатов определяются следующим образом:

(а) $P_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, где $P_i^n$ - предикатная буква, $t_1, \ldots, t_n$ - термы, есть формула (будем называть ее элементарной формулой),

(б) если $A$ и $B$ - формулы и $y$ - переменная, то $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(\neg A)$, $(A \to B)$, $(\forall y A)$, $(\exists y A)$ есть формулы,

(в) выражение является формулой только в том случае, если это следует из (а) и (б).

Определение. Вхождение переменной $x$ в данную формулу называется связанным, если $x$ является переменной входящего в эту формулу квантора $\forall x\ (\exists x)$ или находится в области действия входящего в эту формулу квантора $\forall x\ (\exists x)$. В противном случае вхождение переменной $x$ в данную формулу называется свободным.

Определение. Формулы исчисления предикатов, все вхождения переменных в которые связаны, называются замкнутыми.

Пример. Указать свободные и связанные вхождения переменной в следующие формулы:

I) $\forall x_3 (\forall x_1\, P_1^2(x_1, x_2) \to P_1^2(x_3, x_1))$

Первое и второе вхождения переменной $x_3$ являются связанными; первое вхождение $x_1$ -связанное, второе вхождение $x_1$ - связанное, третье вхождение переменной $x_1$ - свободное.

Вхождение $x_2$ в формулу свободное.

2) $(\forall x_2 \exists x_1 P_1^3(x_1, x_2, F_1^2(x_1, x_2))) \vee \neg \forall x\, P_1^2(x_2, F_1^1(x_1))$

3) $\exists x_2 \forall x_1 P_1^2(x_2, x_1)$

Являются ли формулы I)-3) замкнутыми?

Определение. Терм $t$ называется свободным для $x_i$ в формуле $A$, если никакое свободное вхождение $x_i$ в $A$ не лежит в области действия $\forall x_j$, где $x_j$ - переменная, входящая в $t$.

Пример. Свободен ли терм $F_1^2(x_1, x_2)$ для $x_1$ в формуле:

I) $P_1^2(x_1, x_2) \to \forall x_2\, P_1^1(x_2)$

Найдем свободные вхождения переменной $x_1$ в данную формулу. Единственное вхождение $x_1$ - свободно и оно не лежит в области действия $\forall x_2$.

Ответ: терм $F_1^2(x_1, x_2)$ для $x_1$ в формуле свободен.

2) $(\forall x_2\, P_1^2(x_2, c_1)) \vee \exists x_2\, P_1^2(x_1, x_2)$

Единственное вхождение $x_1$ в данную формулу свободно, но оно попадает в область действия квантора $\exists x_2$.

Ответ:

терм $F_1^2(x_1, x_2)$ для $x_1$ не является свободным.

Интерпретация.

Формула имеет смысл только тогда, когда имеется какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Интерпретация - отображение элементов языка теории в некоторое множество $\mathcal{D}$ (называемое областью интерпретации), удовлетворяющее следующим условиям:

а) каждой константе $c_i$ сопоставляется некоторый элемент из $\mathcal{D}$,

б) каждой функциональной букве $F_j^n$ ставится в соответствие некоторая $n$-местная операция в $\mathcal{D}$ (функция отображающая $\mathcal{D}^n$ в $\mathcal{D}$),



в) каждой предикатной букве $P_j^n$ ставится в соответствие некоторое $n$-местное отношение в $\mathcal{D}$.

Обозначим $Hom(X,\mathcal{D})$ - множество отображений $X$ в $\mathcal{D}$, где $X$ - множество переменных, $\mathcal{D}$ - область интепретации, т.е. $Hom(X,\mathcal{D}) = \{\xi : X \to \mathcal{D}\}$. Будем называть $Hom(X,\mathcal{D})$ интерпретационным классом.

I. Интерпретация термов.

Пусть $T$ - множество термов.

Интерпретация термов - сопоставление каждому терму $t$ функции $\varphi(t)$, заданной на интерпретационном классе со значениями в $\mathcal{D}$, т.е. $\varphi : T \to Hom(Hom(X,\mathcal{D}),\mathcal{D})$

I.(а) Интерпретация констант. $C$ - множество констант. Рассмотрим $\overline{\mathcal{D}}$ -класс постоянных функций, таких что $\overline{\mathcal{D}} \subset Hom(Hom(X,\mathcal{D}),\mathcal{D})$, т.е.

$\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{d} : Hom(X,\mathcal{D}) \to \mathcal{D},\ \overline{d}(\xi) = d,\ d \in \mathcal{D}\}$

Тогда $\varphi : C \to \overline{\mathcal{D}}$

$\varphi(c_i)(\xi) = \overline{d}(\xi) = d_i \in \mathcal{D}$

I.(б) Интерпретация переменных -отображение множества переменных, которое каждой переменной ставит в соответствие функцию, заданную на интерпретационном классе со значениями в $\mathcal{D}$, т.е. $\varphi(x_i)(\xi) = \xi(x_i) \in \mathcal{D}$

I.(в) $\varphi(F_i^n(t_1,\dots,t_n))(\xi) = \varphi(F_i^n)(\varphi(t_1)(\xi), \varphi(t_2)(\xi), \dots, \varphi(t_n)(\xi))$

Пример. Интерпретировать ~~формулу~~ терм $F_1^2(x_1, F_2^2(c_1, x_2))$.

В качестве области интерпретации берем множество натуральных чисел, т.е. $\mathcal{D} = N$; $F_1^2, F_2^2, c_1$ интерпретируются соответственно как "+", ".", 5.

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ 4 & 7 & 5 & \end{pmatrix}$$

$$\varphi(F_1^2(x_1, F_2^2(c_1, x_2)))(\xi) = \varphi(F_1^2)(\varphi(x_1)(\xi),\ \varphi(F_2^2(c_1, x_2))(\xi)) =$$

$$= \varphi(F_1^2)(\varphi(x_1)(\xi),\ \varphi(F_2^2)(\varphi(c_1)(\xi), \varphi(x_2)(\xi))) =$$

$= \varphi(x_1)(\xi) + \varphi(c_1)(\xi)\cdot\varphi(x_2)(\xi) = \xi(x_1) + 5\,\xi(x_2) = 4+5\cdot 7 = 39$

II. Интерпретация формул – это сопоставление каждой формуле ее функции истинности, заданной на интерпретационном классе со значениями 0, I, т.е.

$$\varphi : \Phi \to Hom\,(Hom\,(X,\mathcal{D}),\ \{0,1\})$$
$$Hom\,(X,\mathcal{D}) = \{\xi : X \to \mathcal{D}\}$$

II.(а) Интерпретация элементарных формул.

$$P_i^n(t_1,\dots,t_n)\ ;\quad \varphi(P^n) \subset \mathcal{D}^n$$

$$\varphi(P_i^n(t_1,\dots,t_n))(\xi) = \begin{cases} 1, & (\varphi(t_1)(\xi),\dots,\varphi(t_n)(\xi)) \in \varphi(P^n) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Интерпретируем формулу $P_1^2\,(x_1, c_1)$. В качестве области интерпретации берем множество натуральных чисел $\mathcal{D} = N$. $P_1^2$, $c_1$ интерпретируются соответственно как „$\leq$", 10.

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ 3 & 5 & 10 & \dots \end{pmatrix}$$

$\varphi(P_1^2(x_1,c_1))(\xi) = 1$, т.к. $\varphi(x_1)(\xi) = \xi(x_1) = 3$,
$\varphi(c_1)(\xi) = 10$, $(3,10) \in \varphi(P_1^2)$

$(3,10) \in \varphi(P_1^2)$, так как $3 \leq 10$

По введенному правилу получаем, что $\varphi(P_1^2(x_1,c_1))(\xi) = 1$

II.(б)

$$\varphi(\Phi_1 \wedge \Phi_2)(\xi) = \min\,(\varphi(\Phi_1)(\xi),\ \varphi(\Phi_2)(\xi))$$
$$\varphi(\Phi_1 \vee \Phi_2)(\xi) = \max\,(\varphi(\Phi_1)(\xi),\ \varphi(\Phi_2)(\xi))$$
$$\varphi(\neg\Phi_1)(\xi) = 1 - \varphi(\Phi_1)(\xi)$$
$$\varphi(\Phi_1 \to \Phi_2)(\xi) = 1 - \varphi(\Phi_1)(\xi) + \varphi(\Phi_1)(\xi)\cdot\varphi(\Phi_2)(\xi)$$
$$\varphi(\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)(\xi) = \varphi(\Phi_1)(\xi)\cdot\varphi(\Phi_2)(\xi) + (1-\varphi(\Phi_1)(\xi))(1-\varphi(\Phi_2)(\xi))$$



Определение. Изменением $\xi$ по $x_n$ называется $\xi' \in Hom(X,\mathcal{D})$ такое, что $\forall x_i \in X \quad \xi'(x_i) = \xi(x_i) \quad (x_i \neq x_n)$

$$\varphi(\forall x_i\,\Phi)(\xi) = \min_{\xi'} \varphi(\Phi)(\xi')$$
$$\varphi(\exists x_i\,\Phi)(\xi) = \max_{\xi'} \varphi(\Phi)(\xi')$$

Примеры.

I. Интерпретировать формулу: $\exists x \forall y\, P^2(x,y)$. $\mathcal{D} = N$, $P^2$: „$\leq$"

$$\xi = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \varphi(\exists x \forall y\, P^2(x,y))(\xi) = \max_{x\in\mathcal{D}}(\min_{\xi'} \varphi(P^2(x,y))(\xi'))$$

$x=1 \quad \xi'_{11} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \xi'_{21} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \dots, \xi'_{n1} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & n \end{pmatrix} \dots$

$\varphi(P^2(x,y))(\xi'_{11}) = 1,\ \varphi(P^2(x,y))(\xi'_{21}) = 1, \dots, \quad \underline{\min(1,1,\dots) = 1}$

$\vdots$

$x=m \quad \xi'_{1m} = \begin{pmatrix} x & y \\ m & 1 \end{pmatrix}, \xi'_{2m} = \begin{pmatrix} x & y \\ m & 2 \end{pmatrix}, \dots, \xi'_{nm} = \begin{pmatrix} x & y \\ m & n \end{pmatrix}$

$\varphi(P^2(x,y))(\xi'_{1m}) = 0, \dots, \varphi(P^2(x,y))(\xi'_{nm}) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \leq n \\ 0, & \text{если } m > n \end{cases}$

$\underline{\min(0,\dots) = 0} \qquad \underline{\max(1,0,\dots) = 1} \qquad$ Ответ: 1

2. Интерпретировать формулу:

$$\exists y \forall x\, P_1^2(x,y) \to (P_2^1(x) \wedge P_3^0) \qquad \mathcal{D} = \{1,2\}$$

$P_1$ зададим таблицей

| (1,1) | (1,2) | (2,1) | (2,2) |
|---|---|---|---|
| I | 0 | I | 0 |

$(1,1) \in \varphi(P_1^2)$, $(2,1) \in \varphi(P_1^2)$, $\quad \xi = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$P_2$:

| I | 2 |
|---|---|
| I | 0 |

Предикатному символу $P_3$ припишем значение I.

1) $\varphi(\exists y \forall x\, P_1^2(x,y))(\xi) = \max_{y\in\mathcal{D}}(\min_{\xi'} \varphi(P_1^2(x,y))(\xi'))$

$y=1 \quad \xi'_{11} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \xi'_{21} = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(P_1^2(x,y))(\xi'_{11}) = 1,\ \varphi(P_1^2(x,y))(\xi'_{21}) = 1, \quad \underline{\min(1,1) =}$

$y=2 \quad \xi'_{12} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \xi'_{22} = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\varphi(P_1^2(x,y))(\xi_{12}^1)=0, \quad \varphi(P_1^2(x,y))(\xi_{22}^1)=0 \quad \underline{\min(0,0)=0}$

$\underline{\max(1,0)=1}$

2) $\varphi(P_2^1(x)\wedge P_3^0)(\xi)=\min(\varphi(P_2^1(x))(\xi), \varphi(P_3^0)(\xi))=\min(1,1)=1$

3) $\varphi(\exists y\forall x P_1^2(x,y)\to(P_2^1(x)\wedge P_3^0))(\xi)=1-1+1\cdot 1=1$

Аксиомы исчисления предикатов:

(I) $\Psi_1\to(\Psi_2\to\Psi_1)$

(2) $(\Psi_1\to(\Psi_2\to\Psi_3))\to((\Psi_1\to\Psi_2)\to(\Psi_1\to\Psi_3))$ аксиомы ИВ

(3) $(\neg\Psi_2\to\neg\Psi_1)\to((\neg\Psi_2\to\Psi_1)\to\Psi_2)$

(4) $\forall x_i\Psi(x_i)\to\Psi(t)$, где $\Psi(x_i)$ есть формула ИП и $t$ терм, свободный для $x_i$ в $\Psi(x_i)$

(5) $\forall x_i(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\forall x_i\psi)$, если формула $\varphi$ не содержит свободных вхождений $x_i$.

<u>Правила вывода</u>

1. *Modus ponens*

2. <u>Правило обобщения</u>: Из формулы $\varphi\to\psi(x)$ при условии, что $\varphi$ не содержит свободных вхождений $x$, непосредственно следует $\varphi\to\forall x\psi(x)$

3. <u>Правило конкретизации</u>: Из формулы $\varphi(x)\to\psi$ при условии, что $\psi$ не содержит свободных вхождений $x$, непосредственно следует $(\exists x)\varphi(x)\to\psi$

Определение выводимости в исчислении предикатов является расширением соответствующего определения для исчисления высказываний. Формула $\Phi$ выводима из (принятых в качестве посылок) формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если существует такая конечная последовательность формул $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$, что $\Theta_k=\Phi$ и для каждой $\Theta_i$:

I) $\Theta_i$ есть посылка, или

2) $\Theta_i$ есть аксиома, или

3) существуют такие $j$ и $m$, что $j<i$ и $m<i$ и $\Theta_m=\Theta_j\to\Theta_i$ или

4) $\Theta_i$ есть $\Phi\to(\forall x)F(x)$ и существует такое $j<i$, что $\Theta_j$ есть $\Phi\to F(x)$, причем $\Phi$ не содержит свободных вхождений $x$, а $x$ есть переменная, не входящая свободно ни в одну из формул-посылок, или

5) $\Theta_i$ есть $(\exists x)F(x)\to\Phi$ и существует такое $j<i$, что $\Theta_j$ есть $F(x)\to\Phi$ с теми же ограничениями на $\Phi$ и $x$



что и в 4).

Вывод формулы $F$ из пустого множества посылок есть доказательство этой формулы, а сама формула $F$ есть <u>теорема.</u>

Ввиду того, что в числе правил вывода есть *modus ponens* среди теорем исчисления предикатов содержатся все теоремы исчисления высказываний.

<u>Определение</u>. Формула $\varphi$ называется логически общезначимой в исчислении предикатов, если она истинна в каждой интерпретации. Теория исчисления предикатов строится аналогично теории ИВ, но это построение является более технически сложным. Поэтому дальнейшие результаты будут приведены без доказательства.

<u>Теорема дедукции</u>. Пусть $\Gamma, \varphi\vdash\psi$, и при этом пусть существует вывод $\psi$ из $\{\Gamma, \varphi\}$, в котором ни при каком применении правила обобщения к формулам, зависящим в этом выводе от $\varphi$, не связывается квантором никакая свободная переменная формулы $\varphi$. Тогда $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$.

<u>Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов</u>. Во всяком исчислении предикатов первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.

Р е к о м е н д у е м а я л и т е р а т у р а


Кутасов А.Д. Элементы математической логики. М.: Просвещение, 1977.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

Никольская И.Л. Математическая логика. М.: Высшая школа, 1981,

Столл Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.

Шевченко В.Е. Некоторые способы решения логических задач. Киев: Высшая школа, 1979.

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА ПО ТЕМЕ

"Элементы математической логики"

(Для студентов I-У курсов)

Технический редактор К.П.Орлова

Подписано к печати 23.09.91. Формат 60 х $84^{I}/I6$.
Объем: 3,0 уч.-изд. л.; 3,0 усл. печ. л. Тираж 300 экз.
Бумага писчая. Печать офсетная. Заказ № 174 . Цена Iр.70к.
Российский государственный педагогический университет имени А.И.Герцена. I9II86, Ленинград, наб. р. Мойки, 48

РТП РГПУ им. А.И.Герцена. I9II86, Ленинград, наб. р. Мойки, 48