Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет»

Факультет естественного и математического образования
Кафедра математики и информатики

Е.Н. Эрентраут

Технология обучения решению задач на оптимизацию с использованием адаптивной методической системы

Учебно-методическое пособие

Челябинск, 2025

УДК51(07)
ББК 74.262.21
Э 76

Рецензенты:
Гельруд Я.Д., д.т.н., профессор кафедры «Экономической безопасности» ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)»
Лебедева Т.Н., к.п.н., доцент кафедры «Математики и информатики» ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет»

Эрентраут, Е.Н. Технология обучения решению задач на оптимизациюс использованием адаптивной методической системы: учебно-методическое пособие. – Челябинск: Абрис, 2025 – 116 с.
ISBN 978-5-91744-184-9

В учебно-методическом пособии описана технология и программный продукт обучения учащихся решению задач на оптимизацию для физико-математического профиляна примерах конкретных заданий с использованием адаптивной методической системы, позволяющей индивидуальносформировать умение решать и формулировать эти задачи у учащихся. В пособии представлены методические рекомендации и подробно описано сопровождение для учителей, осуществляющих подготовку учащихся при изучении этой темысадаптивной методической системой.

Пособие адресовано студентам, обучающимся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки), профиль «Физика. Математика» и профиль «Математика. Информатика». Издание предназначено для самостоятельной работы при подготовке к лекционным и семинарским занятиям по курсу «Методика обучения математике», а также на курсах переподготовки и повышения квалификации учителей математики и учителей физики.

Разработанная адаптивная система обучения может быть использована в школе при изучении темы «Применение производной» и высших образовательных учреждениях, работодателями для оценки уровня профессиональной компетентности будущих учителей математики.

ISBN 978-5-91744-184-9

Содержание

1. *Введение*

Консерватизм системы образования не позволяет что-либо всерьез менять в ее организации и в сложившихся подходах к обучению. С одной стороны, консерватизм делает систему образования устойчивой, однако, благодаря ему данная система остается наименее технологизированной. Выход из сложившейся ситуации очевиден - это технологизация. С нашей точки зрения - выход в создании адаптивных методических систем.

Для того, чтобы пояснить введенное понятие, построим следующую модель. Предположим, что есть возможность разработать учебную единицу (урок), которая обеспечивает полное и качественное обучение человека. Единица представляет собой целостный комплекс, обеспечивающий предоставление информации (учебники) и управление деятельностью обучаемого, включая контроль. Системообразующей частью данной единицы являются средства информационных и коммуникационных технологий. Важно, что данная единица обеспечивает качественное и самостоятельное обучение ученика вне зависимости от его интеллектуального уровня. Подобная деятельность может осуществляться как с преподавателем, так и самостоятельно.

Наше исследование посвящено представлению программного продукта для одной адаптивной методической системы, позволяющего индивидуально обучить ученика решать математические задачи с практическим содержанием. Для реализации программного продукта выбрана среда программирования Delphi. Данный программный продукт написан достаточно понятно, что позволяет использовать его на уроках математики в школе учителями, не имеющими специальной подготовки для работы на компьютере. В пособии подробно описаны методические рекомендации по использованию этой адаптивной методической системы.

В этой системе ученику предлагается выбрать уровень самостоятельно. Задается определенная ситуация, которая может возникнуть в практике и в зависимости от уровня сложности предлагаются адаптивный тест. Эта система создана в виде компьютерного банка заданий, упорядоченных в соответствии с интересующими характеристиками заданий.

2.*Сущность прикладной направленности школьного курса математики в современной системе профильного обучения*

Достижение целей профилизации образования, поддерживаемых прикладным аспектом школьного курса математики, определяет необходимость разработки не только предметного содержания, но и содержания прикладной образовательной деятельности школьников, понимаемой как деятельность по усвоению «социального опыта и формирование на этой основе индивидуального опыта … по решению познавательных и личностных проблем» [2, С.77-78].

Согласно теории учебной деятельности знания и способы деятельности формируются только в процессе осуществления учеником полного цикла учебно-познавательной деятельности: восприятия, осмысления, запоминания, применения, обобщения и систематизации информации. При этом в процессе реализации личностно-ориентированного подхода при переводе учащегося из объекта обучения в самообразующийся субъект для выстраивания индивидуального маршрута (тактики) образовательной деятельности прикладного характера следует учитывать разные уровни сформированности компонент этой деятельности. Качество и состав каждой компоненты – познавательной, учебной, предметной, мыслительной и рефлексивной, а также профессиональная направленность ученика, определяют индивидуальный профиль учащегося в современной образовательной парадигме.

Таким образом прикладная направленность школьного курса математики в условиях реализации профильной подготовки старшеклассников определяется нами как ориентация содержания и образовательной деятельности на подготовку учащихся к использованию математических знаний и умений, специфических мыслительных действий и индивидуальных качеств личности в дальнейшей профессиональной деятельности, при продолжении образования и самообразования, в жизни.

Определение «прикладной направленности школьного курса математики» задает и конкретизирует целевую ориентировку методов обучения в условиях реализации профильной подготовки старшеклассников, определяет основание дифференциации обучения, задает деятельностный характер образования и основу для выделения дидактических единиц реализации прикладной направленности на основе следующих целевых категорий:

- формирование умений применения математических знаний и умений для решения прикладных задач, задач из смежных наук и жизни,

- формирование мыслительных действий (анализа, синтеза, обобщения, систематизации, классификации, конкретизации, сравнения, абстрагирования).

- формирование познавательных умений (углубление знаний, расширение знаний, развитие знаний),

- формирование учебных умений (формулировка целей и организация деятельности по достижению поставленных целей, работа с предметной литературой, установление межпредметных связей и согласований, выделение требований к изложению и оформлению результатов),

- формирование способности к самоорганизации и самоконтролю, как профессионально значимых качеств личности.

3. *Использование практико-ориентированных задач при реализации прикладной направленности школьного курса математики*

Выделяют следующие пути и направления реализации прикладной направленности при обучении математике:

- использование в процессе обучения прикладных задач (задач, поставленных вне математики и решаемых математическими средствами);

- привлечение к содержанию учебного материала практических задач (задач из окружающей действительности, связанных с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни), в том числе с использованием материалов краеведения, элементов производственных процессов;

- сближение методов решения учебных задач с методами, применяющимися на практике;

- обучение учащихся построению математических моделей;

- реализация в процессе обучения межпредметных связей, в том числе согласование трактовок одноименных понятий;

- использование новых информационных технологий.

Как известно, учащиеся не видят связей изучаемого с задачами, возникающими в их личной практике, практике общества. В контексте сказанного встает вопрос о средствах реализации прикладной направленности, примерами которых исследователями предлагаются интересные и практически важные задачи, задачи с практическим содержанием, задачи из окружающей действительности, связанные с формированием практических навыков.

Для прочного и сознательного усвоения знаний, формирования адекватного отражения изучаемых фактов в сознании, создания условий для перехода знаний в действия, развития мышления школьников эффективной дидактической единицей являются сюжетные задачи. Сопоставление функций сюжетных задач с целью прикладной направленности школьного курса математики и примерами задач, имеющимися в литературе для усиления прикладной роли школьной математики, позволяет сформулировать положение о том, что эффективными «носителями» прикладного аспекта в процессе обучения математики являются практико-ориентированные (прикладные и практические) задачи, как особые сюжетные задачи.

Сюжетная задача, как правило, должна быть сформулированна в виде задачи-проблемы и удовлетворяющая следующим требованиям:

1) вопрос должен быть поставлен в таком виде, в каком он обычно ставится на практике,
2) искомые и данные величины (если они указаны) должны быть реальными, взятыми из практики,
3) задача должна показывать применение математической теории в практических ситуациях.

Практико-ориентированные задачи как особый вид сюжетных задач во многих отношениях отличаются от математических задач школьного курса. Однако схема их решения и этапы мыслительных действий могут в процессе обучения математики в школе быть приведены в соответствие с сюжетными задачами. Так, решение практико-ориентированной задачи в силу ее роли в процессе реализации прикладной направленности школьного курса математики можно представить следующим образом (рис. 1):

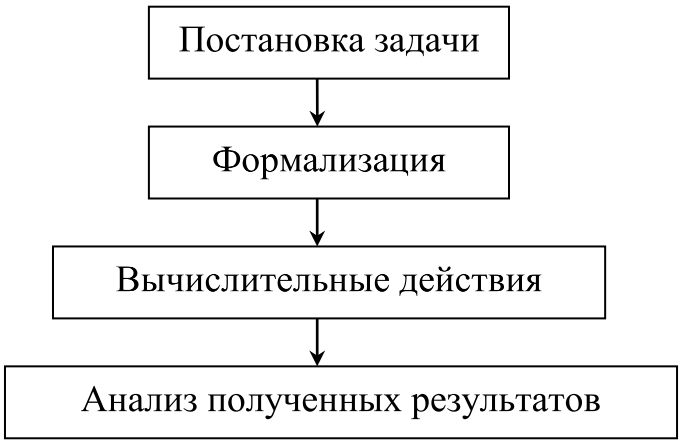


Рис. 1. Схема решения практико-ориентированной задачи

Эта схема соотносится со схемой решения сюжетной задачи, выделенной Д.Пойа[9] (рис.2):

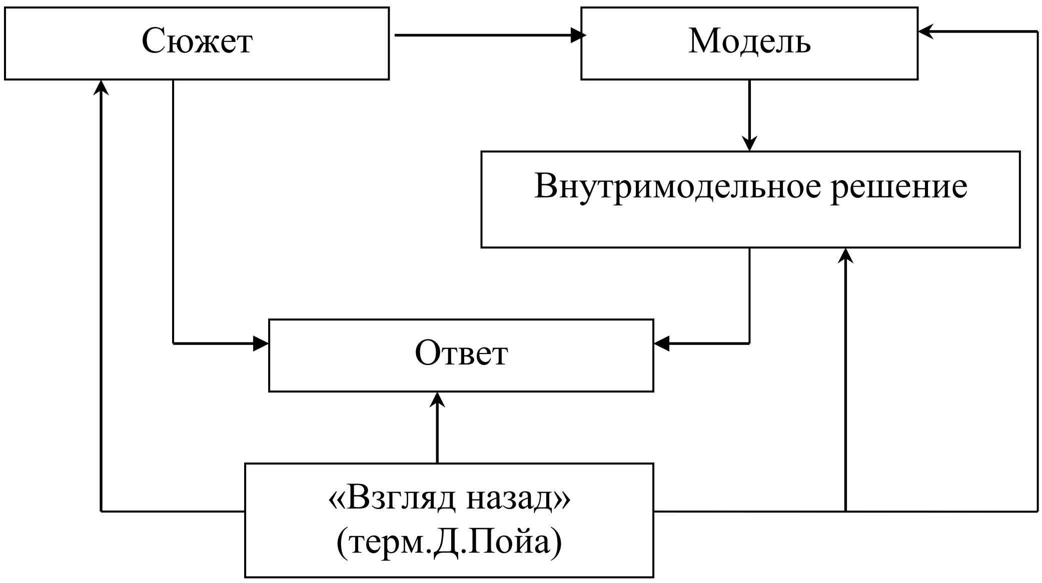


Рис.2. Схема решения сюжетной задачи

Отличая общие черты и связи, существующие между сюжетными и практико-ориентированными задачами, укажем, что:

1) по сравнению с сюжетными задачами в практико-ориентированной задаче неизвестные данные и условия составляют более сложный комплекс и менее четко очерчены;

2) чтобы решить сюжетную задачу, необходим определенный предметный запас знаний, в практико-ориентированной же задаче понятия и знания, необходимые для ее решения, имеют межпредметный интегративный характер и менее четко определены;

3) в практико-ориентированной задаче должны быть представлены (доступны) данные, имеющие отношение к условию;

4) практико-ориентированная задача может пренебрегать второстепенными данными и условиями, в результате чего решение задачи упрощается.

Рассматривая этапы мыслительных действий при решении практико-ориентированной задачи из профессиональной деятельности или практики бытового общения, согласно схеме (рис.1), укажем, что эти этапы воспроизводимы при изучении школьного курса математики в процессе организации деятельности учащихся по поиску решения сюжетных задач. Для этого в учебные задания, сформулированные сюжетным задачам школьного курса математики, следует включать условия, имитирующие ситуации практической значимости на познавательном, учебном, предметном и мыслительном уровнях.

Построение процесса обучения учащихся решению практико-ориентированных задач школьного курса математики обуславливает необходимость разработки и включения специальных приемов и методов, способствующих формированию затребованных пониманий, знаний и умений.

Появляется необходимость построения технологии для обеспечения эффективного формирования у учащихся умения решать и формулировать практико-ориентированные задачи школьного курса математики как средства реализации прикладной направленности и концептуальный выбор деятельностного подхода для построения этой технологии.

В концепции деятельностного подхода проектирование траектории деятельности обучающегося проводится с помощью перевода целей образования, содержания обучения, методов овладения самостоятельной учебной деятельностью и процессами саморазвития на язык действий учащихся. Указанный перевод, составляя ядро технологии деятельностного подхода, определяет особенность выбора, конструирования и выстраивания совокупности методов обучения и формулировки учебных заданий для организации индивидуальной образовательной деятельности учащихся разных профильных траекторий.

Представленный перевод составляет способ проектирования целей обучения и дает возможность учителю и учащемуся выстраивать индивидуальную траекторию обучения и развития, при четкой диагностике и самодиагностике успешности личного продвижения.

Проиллюстрируем использование практико-ориентированных задач школьного курса математики в условиях профильного обучения при реализации прикладной направленности аннотированной программой профильного курса «Производная в физике и технике. Задачи на экстремум», адресованного учащимся физико-математического профиля.

Профильный курс «Производная в физике и технике. Задачи на экстремум» для учащихся физико-математического профиля.

Цели: *образовательная* – формирование межпредметных знаний и умений, закрепление знаний и умений по теме «Производная»;

развивающая– развитие мыслительных действий обобщения, анализа и систематизации, развитие воображения и творческих умений;

воспитывающая - воспитаниепознавательной культуры.

Задачи:

1) решение прикладных задач из физики и техники;

2) на основе анализа решения и обобщения результатов формулировка выводов практического характера;

3) составление ситуаций, исследуемых с помощью результатов решенных задач.

Аннотированный план содержания:

1. Занятия-практикумы по решению практико-ориентированных задач на экстремум.

2. Работа по анализу решения выбранных задач для формулировки практических выводов.

3. Семинар по обсуждению предложенных (подобранных и составленных) учащимися задач.

Примерная совокупность практико-ориентированных задач для практических занятий.

Задача 1

Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $S(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$, S – путь в метрах, t – время в секундах. В какой момент времени t скорость движения будет наибольшей, и каково числовое значение этой наибольшей скорости?

Задача 2

Установлено, что энергия, выделяемая электрическим элементом, определяется по формуле $W = \frac{E^2 R}{(r+R)^2}$, где E – электродвижущая сила элемента, r – внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление цепи, чтобы выделяемая элементом энергия W была наибольшей?

Задача 3

Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединённых сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Задача 4

Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, э.д.с. которого равна E, а внутреннее сопротивление и сопротивление подводящих проводов в сумме равны r. Какое сопротивление R должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Задача 5

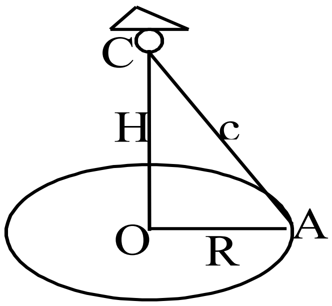


Рис. 3

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R (рис. 3). При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

Задача 6

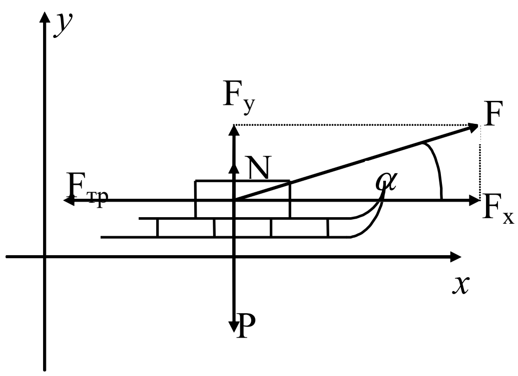


Рис. 4

Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F, приложенной к центру тяжести (рис.4). Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k .

Задача 7

В точке A прямолинейного рычага второго рода, находящейся на расстоянии d сантиметров от его точки опоры, подвешен груз P килограммов (рис. 5).

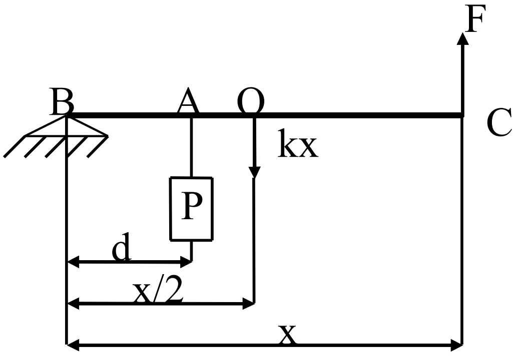


Рис. 5

Собственный вес рычага составляет k килограммов на каждый сантиметр его длины. Какой длины должен быть этот рычаг, чтобы сила F , приложенная к его другому концу и уравновешивающая груз и собственный вес рычага, имела наименьшую величину?

Задача 8

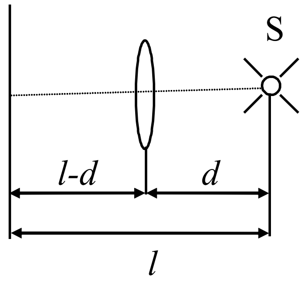


Рис. 6

Между экраном и расположенной на расстоянии l от него светящейся точкой требуется поместить собирательную линзу, чтобы получить на экране изображение этой точки (рис. 6). Определите наибольшее допустимое для этой цели фокусное расстояние линзы и соответствующее расстояние линзы от светящейся точки.

Задача 9

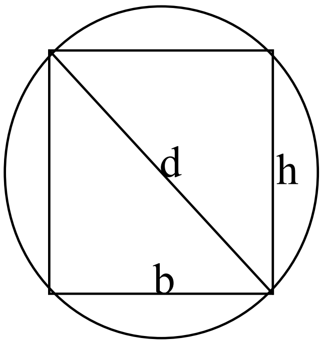


Рис.7

Известно, что прочность балки T с прямоугольным сечением вычисляется по формуле $T = k \cdot b \cdot h^2$, где b - ширина и h - высота балки (рис. 7).

а) Каковы должны быть размеры сечения балки наибольшей прочности, если балка выпилена из круглого бревна данного диаметра $d = 60$ см. Как выбрать b и h? Вычислите отношение $h : b$.

б) Для прогиба d балки длины l, ширины b и высоты h с нагрузкой L имеем $d = c \cdot L \cdot \dfrac{l^3}{h^3 b}$. Как изменится прогиб, когда l, h и b удвоятся?

Задача 10

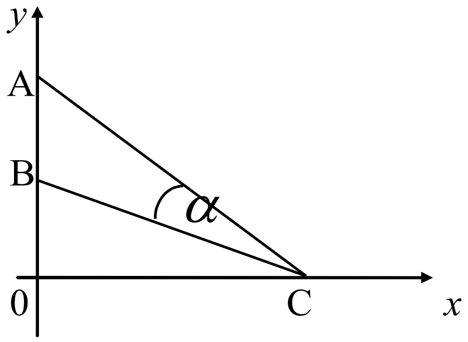


Рис. 8

На стене висит картина. Нижний конец её на 75см, а верхний на 3м выше глаз наблюдателя (рис.8). На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

Учебные задания для решения образовательной задачи 2:

а) провести анализ решения задачи 8 с целью формулировки выводов и обобщений.

б) провести анализ решения задач 5 и 6 с целью формулировок практических выводов (например, для задачи 6: когда необходимо везти груз на санях по дороги с большим коэффициентом трения, нужно тянуть сани за короткую веревку, если коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной).

4.*Технология обучения учащихся решениюпрактико-ориентированных задач в курсе математики профильной школы*

Важным компонентом обучения учащихся решению практико-ориентированных задач является составление и формулирование условия задачи, поскольку сформированность этих умений позволяет определить достижения той цели профильного обучения, которая состоит в готовности школьников самостоятельно ставить задачи профессионального и жизненного плана.

Математический анализ функций действительного переменного с самого своего зарождения был направлен на решение многочисленных прикладных задач. Естественно поэтому, что одним из основных аргументов введения начал анализа в курс средней школы была необходимость придать школьной математике прикладную, и прежде всего практическую, направленность.

Применение математических методов во вне математических ситуациях требует от специалиста глубоких знаний и в математике, и в соответствующей базовой области. Поэтому очень трудно эффективно «спроецировать» приложения математического анализа в школьный курс.

Ознакомление учащихся с понятиями и методами математического анализа даже на уровне общих представлений имеет для них большое познавательное, развивающее и общекультурное значение. Более того, специфика рассуждений, свойственных математическому анализу, способствует формированию качества мышления, необходимого в настоящее время каждому образованному человеку. Другими словами, в изучении математического анализа в курсе средней школы существенную роль имеет не только его естественнонаучное содержание как в большей степени прикладной науки, как аппарата для решения практических задач, но и его гуманитарная составляющая, дающая возможность ориентации его преподавания на развитие личности.

Выделим методические особенности использования прикладных задач в учебном процессе. С помощью производной можно: исследовать функцию; анализ помогает алгебре: довольно часто алгебраическую задачу удается решить, подыскав и исследовав методами анализа какую-нибудь функцию; с помощью дифференциала вычислять приращения и приближенно значения; используя геометрический и физический смысл производной решать задачи; исследовать функцию на экстремум, предварительно составив модель и т.д.

С помощью интеграла можно: доказывать неравенства; вычислить площадь любой плоской фигуры; решать задачи на применения интеграла в разных областях науки; вычислить длину дуги кривой, объем тела по площадям параллельных сечений, объем тела вращения, площадь поверхности вращения; вывести формулы для вычисления объемов пирамиды, конуса и т.д. И это далеко не весь список задач, которые можно решить с помощью дифференциального и интегрального исчисления.

Реализация сформулированных в нормативных документах положений о прикладной направленности определяет необходимость разработки содержания материала и содержания образовательной деятельности школьников по усвоению социального опыта для формирования на этой основе индивидуальных умений для готовности к решению профессиональных задач.

Эффективным средством реализации прикладной направленности в процессе обучения математики являются практико-ориентированные (прикладные и практические) задачи как особый вид сюжетных задач.

В процессе организации деятельности учащихся с практико-ориентированными задачами позволило определить значимый компонент функционирования принципов реализации прикладной направленности школьного курса математики, который заключается в формировании у школьников умения формулировать практико-ориентированные задачи. С одной стороны, практико-ориентированные задачи являются средством осуществления прикладной направленности, с другой – их решение является целью профильного обучения.

Для учащихся физико-математического профиля, согласно основным позициям Концепции профильного обучения, значимо формирование умения формулировать практико-ориентированные задачи на обобщенном (функциональном) уровне. Этот уровень является высшим уровнем приведенной иерархии. Сформулированное положение определяет выделение значимых функций практико-ориентированных задач для указанного профиля:

- формирование умений решать задачи профессионального и жизненного плана,

- формирование и развитие исследовательских и творческих умений,

- формирование приемов мыслительной деятельности,
- развитие рефлексивных умений,
- формирование предметных умений.

Сформированность умения формулировать практико-ориентированные задачи на функциональном уровне определяется поэтапным проведением учащихся через операционный и технологичный уровни.

Таким образом, организация деятельности учащихся по решению задач, включающая этап формулировки практико-ориентированной задачи, предполагает, с нашей точки зрения, уровневое формирование у учащихся как умений решать прикладные задачи (в соответствии с теорией усвоения учебного материала В.П.Беспалько, выделившего для формирования умения решить задачи алгоритмический, эвристический и творческий уровни), так и формирование умения формулировать эти задачи на операционном, технологичном и функциональном уровнях[1].

Таблица 1 **– Соотнесение уровней умения решать практико-ориентированные задачи и уровней умения формулировать эти задачи для учащихся физико-математического профиля**

Уровни умения решать практико-ориентированные задачи (по В.П.Беспалько)	Уровни умения формулировать практико-ориентированные задачи		
	Операционный	Технологичный	Обобщенный (функциональный)
Алгоритмический	+		
Эвристический		+	
Творческий			+

Соотнесение выделенных уровней умения учащихся формулировать практико-ориентированные задачи с умениями решать эти задачи представим в виде таб. 1.

Для отбора методов формирования умения формулировать практико-ориентированные задачи были выделены следующие уровни, соответствующие уровням сформированности рефлексии предметных действий учащихся: первый уровень – операционный, второй уровень – технологичный, третий уровень – обобщенный. На основе выделенных соответствий уровней формирования умения решать и формулировать практико-ориентированные задачи были определены этапы обучения учащихся решению практико-ориентированных задач в курсе математики на старшей ступени профильного обучения:

I этап: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на алгоритмическом уровне и умение формулировать прикладные задачи – на операционном уровне.

II этап: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на эвристическом уровне и умения формулировать эти задачи – на технологичном уровне.

III этап: формирование умения решать прикладные и практические задачи на творческом уровне и умения формулировать прикладные задачи – на обобщенном уровне.

Для формулировки методов обучения учащихся решению практико-ориентированных задач в технологии деятельностного подхода выделим уровни сформированности умения формулировать практико-ориентированные задачи, соответствующие этапам становления рефлексии учебно-познавательных действий:

Операционный уровень характеризуется сформированностью у учащихся умения выполнять на предметном материале конкретный вид или отдельное действие как компонент конкретного вида прикладной деятельности.

На этом уровне ученик выполняет конкретную мыслительную деятельность или предметный прием на основе сформулированного образца. При этом он осознает (а, значит, контролирует) только правильность выполнения операции, без соотнесения выполненных действий с их значимостью для собственного развития в предметном, профессиональном и личностном планах.

Технологичный уровень характеризуется тем, что сформированность деятельности на предметной области обладает свойством «обратимости».

На этом уровне учащийся самостоятельно, без образца может составить рациональную (в том числе и измененную) последовательность действий для осуществления конкретной операции (действия) при выполнении на каждом шаге последовательности обратного хода и провести самоконтроль правильности выполняемых действий (приемов).

Обобщенный уровень характеризуется пониманием необходимости применения и сферы переноса предметных и мыслительных действий.

На этом уровне учащийся самостоятельно отвечает на вопросы «Зачем, почему мне нужна такая деятельность?», диагностирует успешность осуществления профессиональной образовательной деятельности, осмысливает результаты собственного продвижения.

При этом иерархия действий, составляющих каждый уровень, выстраивается на основе теории поэтапного формирования умственных действий.

Сформированность умения формулировать практико-ориентированные задачи на функциональном уровне определяется поэтапным проведением учащихся через операционный и технологичный уровни.

Для обеспечения формирования умений учащихся физико-математического уровня решать и формулировать практико-ориентированные задачи в школьном курсе математики в технологии деятельностного подхода необходимо описать каждый уровень в переводе на язык деятельности учащихся по действиям.

Мы используем для формирования умений учащихся формулировать практико-ориентированные задачи на операционном уровне – «алгоритмические задачи», на технологичном уровне – «оптимизационные задачи», а на обобщенном (функциональном) уровне – «задачи прогноза» и «задачи-рецензии».

При решении алгоритмических задач необходимо выделение шагов предметных действий (преобразований) на основе известной (заданной) схемы.

Практико-ориентированные «оптимизационные задачи», как особый вид прикладных задач, содержат в условии необходимость выбора рационального пути достижения результата, определяя, в частности, необходимость применения знаний математических основ компьютерного моделирования.

Практико-ориентированные «задачи прогноза» – это особый вид практико-ориентированных задач, которые требуют от учащихся на основе интеграции выполнения определенных предметных и мыслительных действий формулировки прогноза некоторого события, приближенного к практической деятельности. Для постановки и решения таких задач необходимо использование численных методов решения и вероятностно-статистического подхода к компьютерной обработке экспериментальных данных.

Практико-ориентированные «задачи-рецензии» – это задачи, требующие оценки представленных или формулируемых суждений. В процессе решения таких задач (на этапе самостоятельной формулировки) возникает необходимость применения вероятностно-статистический подхода к обработке экспериментальных данных на компьютере.

С учетом сформулированных положений представим содержание этапов технологии формирования умений учащихся физико-математического профиля решать и формулировать практико-ориентированные задачи школьного курса математики при изучении темы «Производная».

Первый этап.

Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на алгоритмическом уровне и умения формулировать практико-ориентированные задачи на операционном уровне.

Дидактические средства – практико-ориентированные задачи на формирование действий, составляющих умение решения (алгоритмические задачи).

Уровень математических ассоциаций – локальный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения: анализ, синтез, сравнение, конкретизация, систематизация.

Второй этап.

Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на эвристическом уровне и умения формулировать эти задачи на технологичном уровне.

Дидактические средства – «оптимизационные задачи».

Уровень математических ассоциаций – внутрипредметный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения: анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, систематизация, развитие, углубление, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности.

Третий этап.

Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на творческом уровне и умения формулировать эти задачи на обобщенном уровне.

Уровень математических ассоциаций – межсистемный.

Дидактические средства – «задачи – прогноза» и «задачи – рецензии».

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения: анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, развитие, углубление, расширение, систематизация, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности, умение выдвигать гипотезы, умение проводить оценочные суждения.

В соответствии с приведенными результатами опишем организацию работы с задачным материалом, при изучении темы «Производная» для формирования умения учащихся физико-математического профиля формулировать и решать прикладные задачи в школьном курсе математики на различных уровнях.

Выделены типы задач курса «Начала математического анализа», направленные на формирование умений учащихся физико-математического профилясамостоятельно формулировать и решать практико-ориентированные задачи:

- на операционном уровне – «алгоритмические задачи»;
- на технологичном уровне – «оптимизационные задачи»;
- на обобщенном уровне – «задачи прогноза» и «задачи рецензии».

При этом задача может быть одна и та же, но на разных этапах она будет предложена по разному. Покажем это на примерах.

Первый этап.

Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на алгоритмическом уровне и умение формулировать прикладные задачи – на операционном уровне.

Дидактические средства – «алгоритмические задачи».

Уровень математических ассоциаций – локальный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения – анализ, синтез, сравнение, конкретизация, систематизация.

Задача 1

Необходимо проложить водопроводную трубу от дома А к дому В. Стоимость прокладки трубы под асфальтом дороги – 6000 рублей, а в любом другом месте – 3600 рублей за метр. Как экономичнее проложить трубу? (На рис. 9 отражены все необходимые данные).

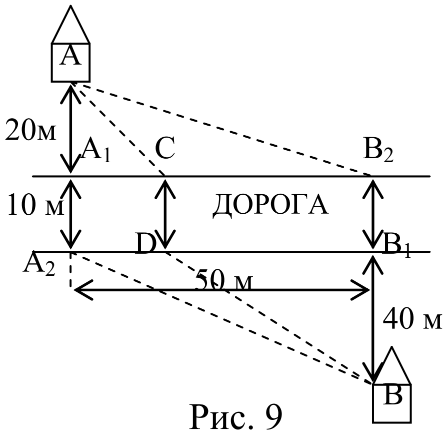


Рис. 9

1. Решите задачу по следующему алгоритму:

1.1. Определите расходы по прокладке трубы:

а) из А в В через A_1;

в) из А в В через B_2;

с) из А в В через С (пусть A_1C = 20 м).

1.2. Сформулируйте вопрос задачи на оптимизацию. (Определите расположение пункта С так, чтобы расходы по прокладке трубы из А в В через С были минимальными).

1.3. Составьте функцию отражающую затраты про прокладке трубы. Для этого:

а) определите оптимизируемую величину (расстояние A_1C = x);

в) установите, можно ли пренебречь шириной дороги;

с) определите какую сумму мы затратим при проделывании пути АС+ДВ;

d) определите область изменения x.

1.3. Исследуйте полученную функцию на экстремум.

1.4. Сравните минимальные расходы с расходами при прокладке трубы из А в В через $А_1$ и из А в В через $В_2$, сделайте вывод.

2. Ответьте на вопросы: «Как еще можно проложить трубу?».

3. Сформулируйте практическую задачу для этого случая.

Второй этап. Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на эвристическом уровне и умения формулировать эти задачи – на технологичном уровне.

Дидактические средства – прикладные и практические оптимизационные задачи.

Уровень математических ассоциаций – внутрипредметный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения – анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, систематизация, развитие, углубление, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности.

Задача 2

Необходимо проложить водопроводную трубу от дома А к дому В (см. рис. 10). Стоимость прокладки трубы под асфальтом дороги – 6000 рублей, а в любом другом месте – 3600 рублей за метр (единичный отрезок равен 10 м). Как экономичнее проложить трубу?

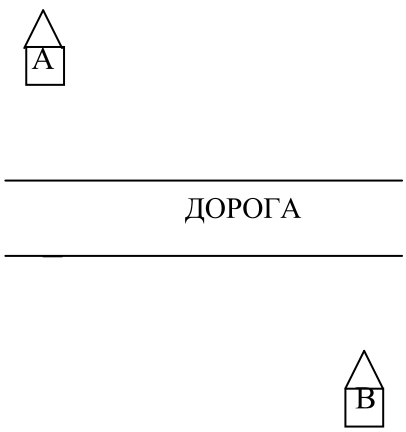


Рис. 10

1. Решите задачу, предварительно определив данные необходимые для решения задачи.

2. Как еще можно проложить трубу?

3. Сформулируйте практическую задачу для этого случая.

Третий этап.

Цель: формирование умения решать прикладные и практические задачи на творческом уровне и умения формулировать прикладные задачи – на обобщенном уровне.

Уровень математических ассоциаций – межсистемный.

Дидактические средства – прикладные и практические «задачи прогноза» и «задачи рецензии».

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения – анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, развитие, углубление, расширение, систематизация, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности, умение выдвигать гипотезы, умение проводить оценочные суждения.

Задача 3

Необходимо проложить водопроводную трубу от дома А к дому В (см. рис. 10). На прокладку трубы выделено 341000 рублей. Достаточно ли этой суммы?

1.Решите задачу.

2.Сформулируйте обратную задачу и решите ее.

3.Сформулируйте практический вывод.

Из рассмотренных задач видно, что овладение учащимися способом решения задач на каждом этапе разное. На операционном уровне – решение осуществляется по алгоритму, на технологичном уровне – искомые и данные величины должны быть получены самостоятельно, затем необходимо решить задачу и провести самоконтроль правильности выполняемых действий; на обобщенном уровне – необходим предметный запас знаний, так как много неизвестных данных и условие составляет более сложный комплекс, который менее четко очерчен (в условии задачи нет ни слова об экономии).

Таким образом, организация деятельности учащихся по решению задач, включающая этап формулировки практико-ориентированной задачи, предполагает уровневое формирование у учащихся как умений решать прикладные задачи, так и формирование умения формулировать эти задачи на операционном, технологичном и обобщенном уровнях.

И цель обучения должна быть направлена на перевод школьников с одного уровня на другой уровень, более высокий. Этому способствуют практико-ориентированные задачи и умения решать их на всех уровнях. Так как перевод учащихся на обобщенный уровень позволяет решать конкретные задачи, возникшие в практике. Можно использовать их и в индивидуальных проектах.

Индивидуальный проект – это особая форма организации деятельности обучающихся, выполняется обучающимся 10-11-х классов в течение одного или двух лет в рамках учебного времени. Задача индивидуального проекта – обеспечить обучающимся опыт конструирования социального выбора и прогнозирования личного успеха в интересующей сфере деятельности. Если вы грамотно организуете работу над индивидуальными проектами, то поможете старшекласснику осознать выбор будущей профессиональной деятельности и спроектировать личностный успех.

Проиллюстрируем примеры практико-ориентированных задач, предлагаемые на занятиях студентам, обучающимся по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки), профиль «Физика. Математика» и профиль «Математика. Информатика»Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета при изучении дисциплины «Методика обучения математике».

Первый этап.

Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на алгоритмическом уровне и умение формулировать прикладные задачи - на операционном уровне.

Дидактические средства - «алгоритмические задачи».

Уровень математических ассоциаций - локальный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения - анализ, синтез, сравнение, конкретизация, систематизация.

Задача 4

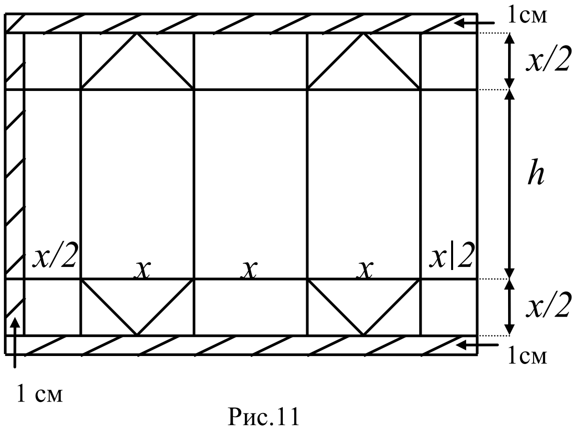


Рис.11

Пакет молока имеет форму параллелепипеда, в основании которого находится квадрат. Каково должно быть соотношение между стороной основания и высотой пакета, чтобы при данной ёмкости 1 литр на изготовление пакета было затрачено меньше бумаги? (На рис. 11 показано, как происходит складывание пакета).

1. Решите задачу по следующему алгоритму:

1.1. определите оптимизируемую величину.

1.2. выразите её как функцию стороны основания х пакета. Для этого:

а) определите, сколько бумаги затрачено при раскладке, указанной на рис. 11;

б) установите, можно ли пренебречь расстоянием для склеивания;

в) выразите объем пакета через переменные h и х ;

г) обоснуйте, почему удобнее выразить переменную х через h;

г) определите область изменения х.

1.3. исследуйте полученную функцию на экстремум.

1.4. найдите соотношение между стороной основания и высотой пакета и сделайте вывод.

2.Ответьте на вопрос: «Какую еще форму может иметь пакет?»

3.Сформулируйте практическую задачу для пакета, имеющего форму:

а) параллелепипеда, в основании которого находится параллелограмм;

б) пирамиды.

Второй этап. Цель: формирование умения решать практико-ориентированные задачи на эвристическом уровне и умения формулировать эти задачи – на технологичном уровне.

Дидактические средства – прикладные и практические оптимизационные задачи.

Уровень математических ассоциаций - внутрипредметный.

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения - анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, систематизация, развитие, углубление, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности.

Задача 5

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R(см. рис.12). При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

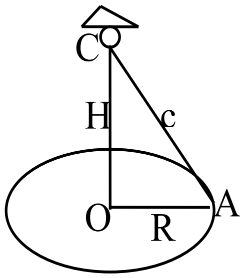


Рис. 12

1. Решите задачу.
2. Сформулируйте условие задачи для квадратного стола и решите её.
3. Третий этап.

Цель: формирование умения решать прикладные и практические задачи на творческом уровне и умения формулировать прикладные задачи - на обобщенном уровне.

Уровень математических ассоциаций - межсистемный.

Дидактические средства - прикладные и практические «задачи прогноза» и «задачи рецензии».

Опорные мыслительные действия и учебно-познавательные умения - анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, систематизация, развитие, углубление, прогнозирование, выбор рационального приема (способа) деятельности, умение выдвигать гипотезы, умение проводить оценочные суждения

Задача 6

Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами А и В, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая (рис.13).

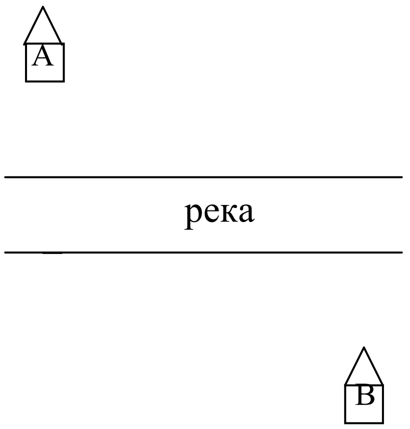


Рис. 13

1. Решите задачу.
2. Сформулируйте обратную задачу и решите ее.
3.Сформулируйте практический вывод.

Функционирование технологии обучения учащихся решению практико-ориентированных задач направлено на перевод школьников с алгоритмического уровня решения и операционного уровня формулирования на эвристический уровень решения и технологичный уровень формулирования и далее – на творческий уровень решения и обобщенный уровень формулирования практико-ориентированных задач.

Задача учителя заключается в поэтапном проведении учащихся через операционный и технологичный уровни на обобщенный уровень.

5.*Использование адаптивной методической системы при обучении решению задач на оптимизацию*

Из приведенных примеров видно, что овладение учащимися способами решения задач на каждом уровне происходит по разному, с учетом выбора конкретного уровня. И для оптимизации процесса обучения было бы удобно использовать современные компьютерные технологии, предварительно создав банк учебных задач. Все учащиеся разные, уровень обученности – разный. Выход из этой ситуации, на наш взгляд – создание адаптивной системы обучения (АСО).

Мы должны сделать так, чтобы для учителей стало естественным использовать компьютер практически во всех аспектах своей работы - и как средство коммуникации, и как средство для получения информации, и как помощника в индивидуальном тренинге для детей... Необходимо понимать, что использование информационных технологий приводит к достижению качественно новых образовательных результатов.

Уровень использования информационных и коммуникационных технологий в российской школе низок. Основная масса педагогов вообще не готова работать с компьютером, не говоря об использовании его возможностей в учебном процессе.

Возникла необходимость в создании других форм обучения. Это стало необходимо, в связи с тем, что:

1. Обеспечение активной учебной работы школьников, формирование у них организованности, способности самостоятельно учиться, находить и использовать нужную информацию, работать в

коллективе, находить решения в нестандартных ситуациях, решать не встречавшиеся ранее задачи.

2. Поддержка развития творческой работы педагогов и педагогических коллективов, обеспечение педагогов к более индивидуальным и активным методам обучения, представление им возможности использовать новые электронные и цифровые ресурсы.

3. Обеспечение доступности качественных образовательных услуг для каждого заинтересованного в них школьника через цифровые образовательные ресурсы, даже если он не может получить эти услуги в своей школе.

Закон Российской федерации "Об образовании" провозглашает в качестве одного из основных принципов государственной политики - адаптивность системы образования к уровням и особенностям развития учащихся.

Адаптивная система обучения – система, отражающая некоторые характеристики обучаемого в модели обучаемого и применяющая данную модель для адаптации различных аспектов программированного обучения и контроля знаний.

Адаптивная система обучения (АСО) возникла на основе анализа наметившихся за последнее время тенденций совершенствования учебного процесса под влиянием воздействия на формирование творческого мышления учителя новейших психологических теорий. Особенно плодотворными из них являются теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина и деятельностный подход к обучению А.А. Леонтьева [3]. В АСО создаются условия для разумного включения в учебный процесс передового опыта учителей и результатов теоретических исследований ученых и педагогов-практиков. Учение, как один из видов деятельности человека, в условиях АСО становится преимущественно активной самостоятельной деятельностью, управляемой посредством использования контролирующих и диагностирующих мероприятий, обусловленных целеполаганием процесса обучения и предусматривающих в динамике уровни усвоения учащимися материала и его корректировку.

Главные причины появления адаптивных систем основана на принципе индивидуального обучения.

Как мы сегодня учим? Рассмотрим этот процесс подробнее, чтобы выявить нереализованные в нем резервы и возможности.

Идет объяснение нового материала. Во многом оно зависит от мастерства учителя. Он объясняет – учащиеся слушают, думают, усваивают. Все работают. Но вот начинается закрепление. Учитель ставит вопросы классу. Для ответа вызывает к доске или с места отдельных учеников. Что делают в это время остальные? Предполагается, что они слушают ответы товарищей, чтобы подключиться к исправлению ошибок, дополнить или уточнить ответ ученика. Слушать надо внимательно всем, а вызовут одного-двух. Но зачем тогда слушать? – делает вывод ученик. Если вызовет учитель, тогда и начну думать, медленно поднимаясь с места. Сколько времени теряется при этом из урока в урок! При традиционной организации обучения нет возможности адаптироваться к индивидуальным особенностям учащихся во время урока.

Выход из сложившейся ситуации очевиден – в создании *адаптивных методических систем*(АМС).

Применение компьютерных технологий в данной модели обучения предоставляет учителю и обучающимся еще большие возможности.

Определив разные уровни, у учащихся есть возможность идти со своей собственной скоростью, не подстраиваясь в изучении темы к некоторому среднему уровню, при этом контроль теоретических и практических навыков может осуществляться автоматически компьютерной системой на каждом этапе работы, переход к следующему этапу возможен только при освоении предыдущего этапа. Учителю использование компьютерных технологий позволяет освободиться от рутинной работы по проверке и подведению итогов работы всего класса и каждого ученика в отдельности. Задания разделены по уровням трудности.

В литературе [18, 19] выделяется три варианта адаптивного тестирования. Первый называется пирамидальным тестированием. При отсутствии предварительных оценок всем испытуемым дается задание средней трудности и уже затем, в зависимости от ответа, каждому испытуемому дается задание легче или труднее; на каждом шаге полезно использовать правило деления шкалы трудности пополам.

Второй вариант (flexilevel) - начало контроля с любого подходящего уровня трудности, с постепенным приближением к реальному уровню знаний.

Третий вариант - (stradaptive, от англ. stratified adaptive), когда тестирование проводится посредством банка заданий, разделенных по уровням трудности. При правильном ответе следующее задание берется из верхнего уровня, при неправильном - из нижнего. Целесообразность адаптивного контроля вытекает из соображений рационализации традиционного процесса тестирования, в котором из стремления к объективности всем дается одинаковый набор заданий.

В нашей адаптивной методическойсистеме ученику предлагается выбрать уровень самостоятельно. Задается определенная ситуация (с учетом выбранного профиля), которая может возникнуть в практике и в зависимости от уровня сложности предлагаются адаптивный тест.

Адаптивное тестирование - это такой контроль, который позволяет регулировать трудность и число предъявляемых заданий каждому ученику в зависимости от его ответа на текущее задание: в случае правильного ответа следующее задание он получит труднее, в случае неправильного - легче текущего.

Программный продукт для адаптивной методической системы позволяет и индивидуально обучить ученика решать математические задачи с практическим содержанием. Для реализации программного продукта выбрана среда программирования Delphi. Данный программный продукт написан достаточно понятно, что позволяет использовать его на уроках математики в школе учителями, не имеющими специальной подготовки для работы на компьютере.

Эта система создана в виде компьютерного банка заданий, упорядоченных в соответствии с интересующими характеристиками заданий.

В нашей адаптивной методическойсистеме ученику предлагается выбрать уровень самостоятельно. Задается определенная ситуация, которая может возникнуть в практике и в зависимости от уровня сложности предлагаются адаптивный тест.

Адаптивныйтест как вариант автоматизированной системы тестирования, в которой заранее известны параметрами трудности и дифференцирующей способности каждого задания. Эта система создана в виде компьютерного банка заданий, упорядоченных в соответствии с интересующими характеристиками заданий.

Первоначально обучаемые получают вводные материалы по курсу (урок 1). После этого все они проходят тестирование (урок 2).

Выделенные уровни представлены в таблице 2.

***Таблица 2* – Уровни тестирования**

Обучающий курс	Операционный (алгоритмический) уровень	Технологичный (эвристический) уровень	Обобщенный (творческий) уровень

Система ученику предлагает задачу.

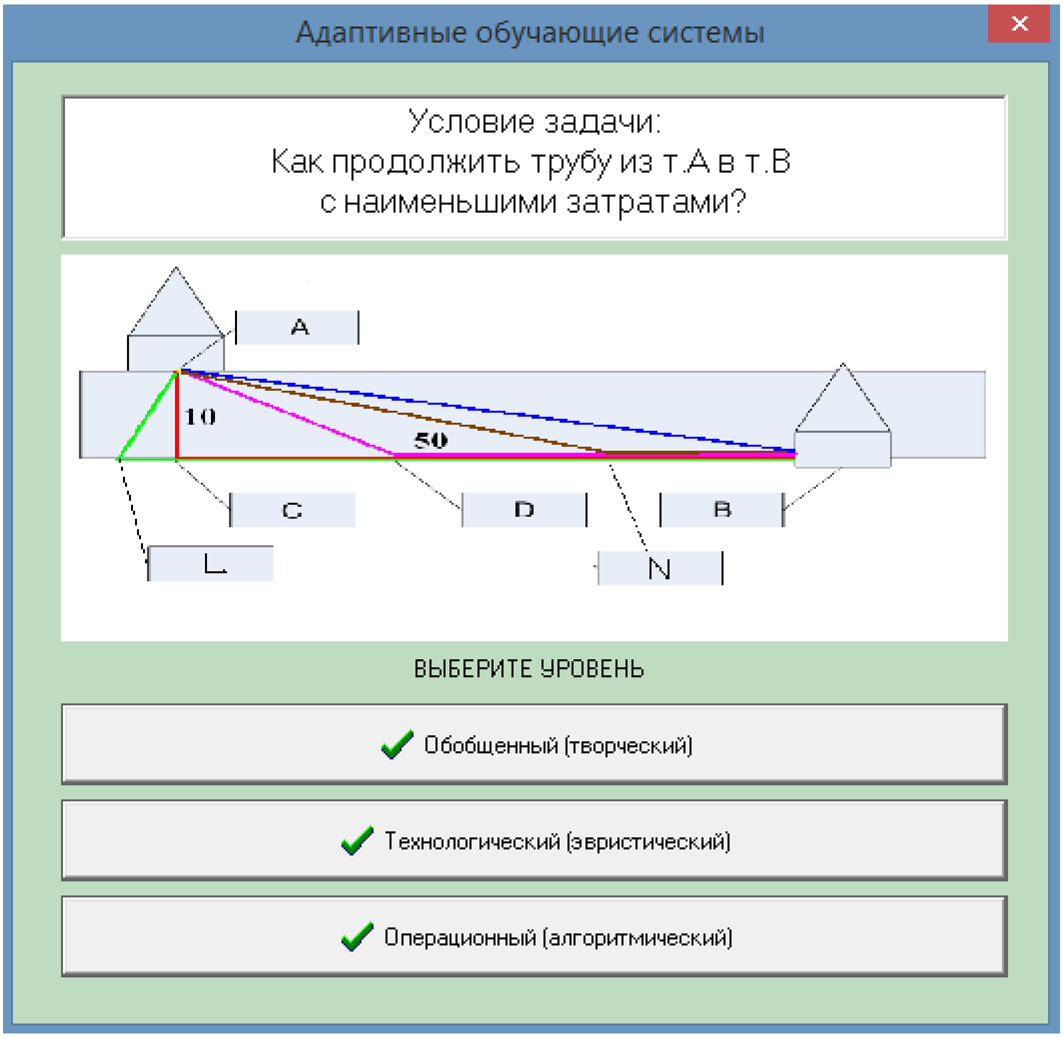
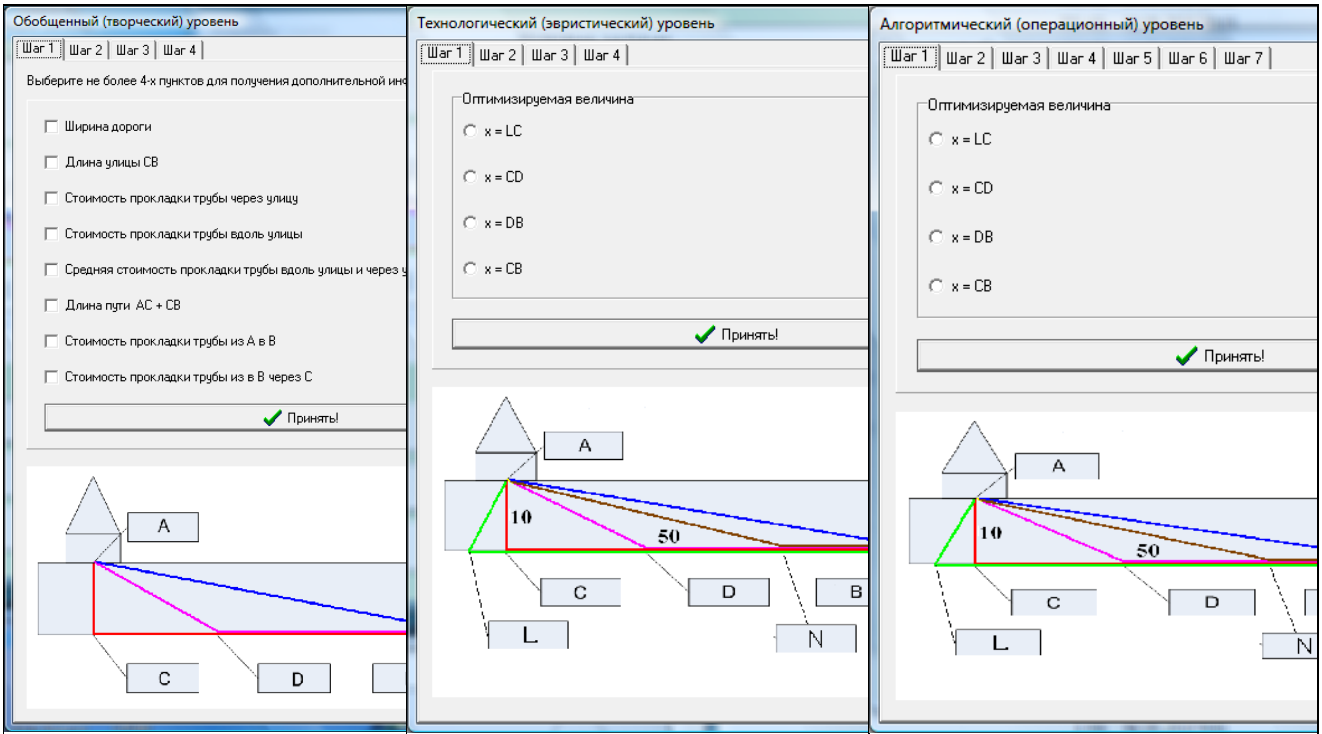


Рис. 14

Ученик сам выбирает уровень, в зависимости от оценки на которую он рассчитывает (рис.14). Решив задачу на обобщенном уровне он получит «отлично», на технологическом уровне – «хорошо», на обобщенном – «удовлетворительно». Если ученик не решит на обобщенном уровне ему программа предложит пройти обучающий курс.

На разных уровнях все задания будут разными. Ученику необходимо будет выполнять вычисления в тетради и вносить в систему промежуточные ответы.



Обобщенный уровень	Технологический уровень	Операционный уровень

Рис. 15. Задания на разных уровнях.

Выбрав определенный уровень, например обобщенный, ученику будет предложена ситуация, возникшая из жизни. Например, Вам выделили участок для строительства коттеджа, необходимо проложить подземные коммуникации. Конечно, Вам бы хотелось потратить как можно меньше средств. И прокладывать эти коммуникации Вы будете от ближайшего дома, расположенного через улицу. Всю необходимую информацию можно получить, выбрав в первом тесте 4 пункта, из 8необходимых для продолжения решения (ширина дороги, длина дороги, стоимость прокладки трубы через улицу и вдоль улицы) (рис.15 – обобщенный уровень).

При правильном выборе система пропустит ко второму этапу. На втором шаге будут представлены 4 функции затрат, из которых нужно выбрать одну. Ученик промежуточные вычисления, позволяющие выбрать нужную функцию, производит в тетради. При правильно выборе система пропускает ученика на следующий этап.

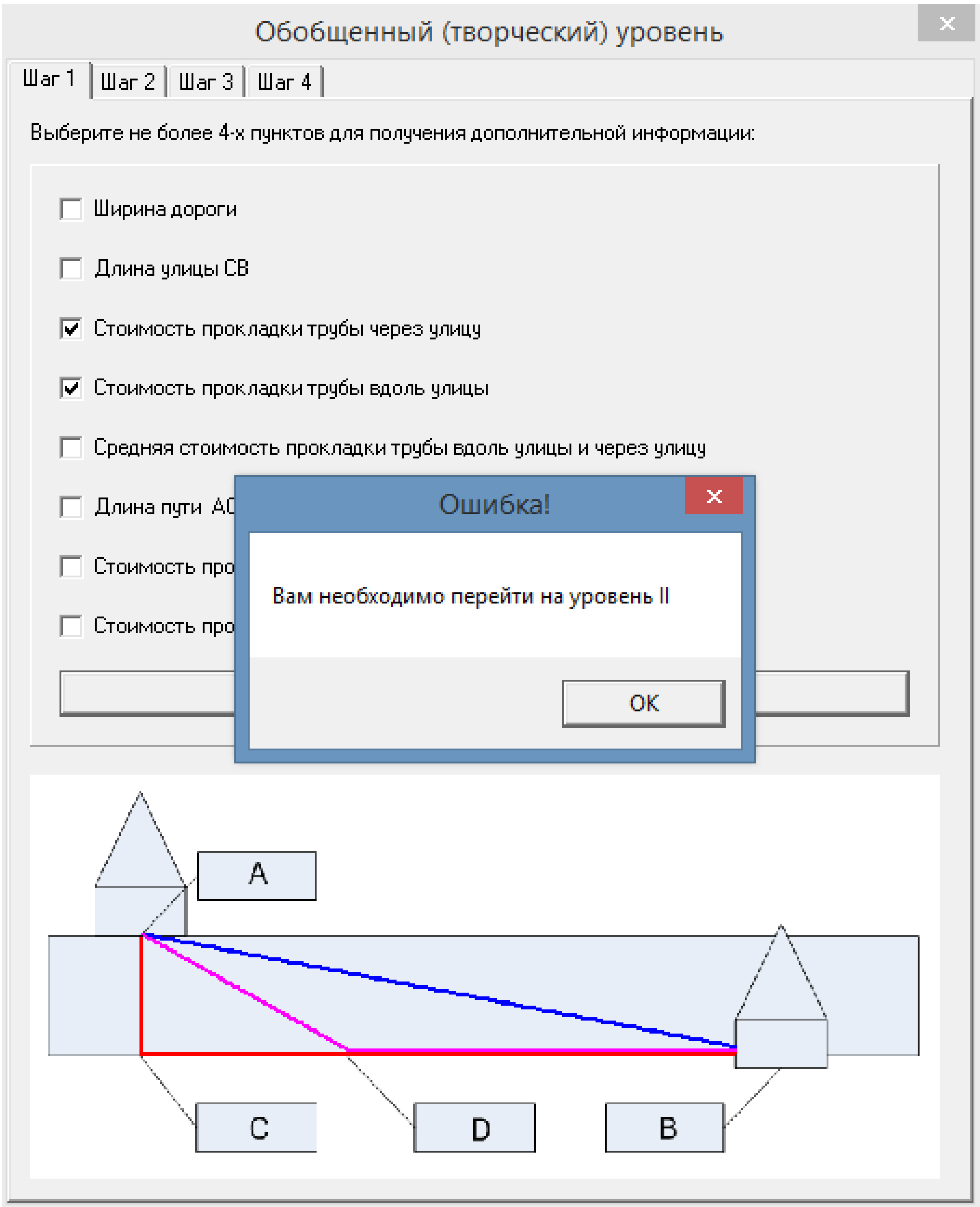


Рис. 16

Затем ученик в тетради ищет производную от выбранной функции, точки подозрительные на экстремум. На 4 шаге надо вписать полученный ответ, ответив на вопрос задачи. Если все шаги пройдены, система выставляет оценку «5». Если где то, на каком то шаге был дан не правильный ответ, система предлагает перейти обучающему на уровень ниже (рис. 16).

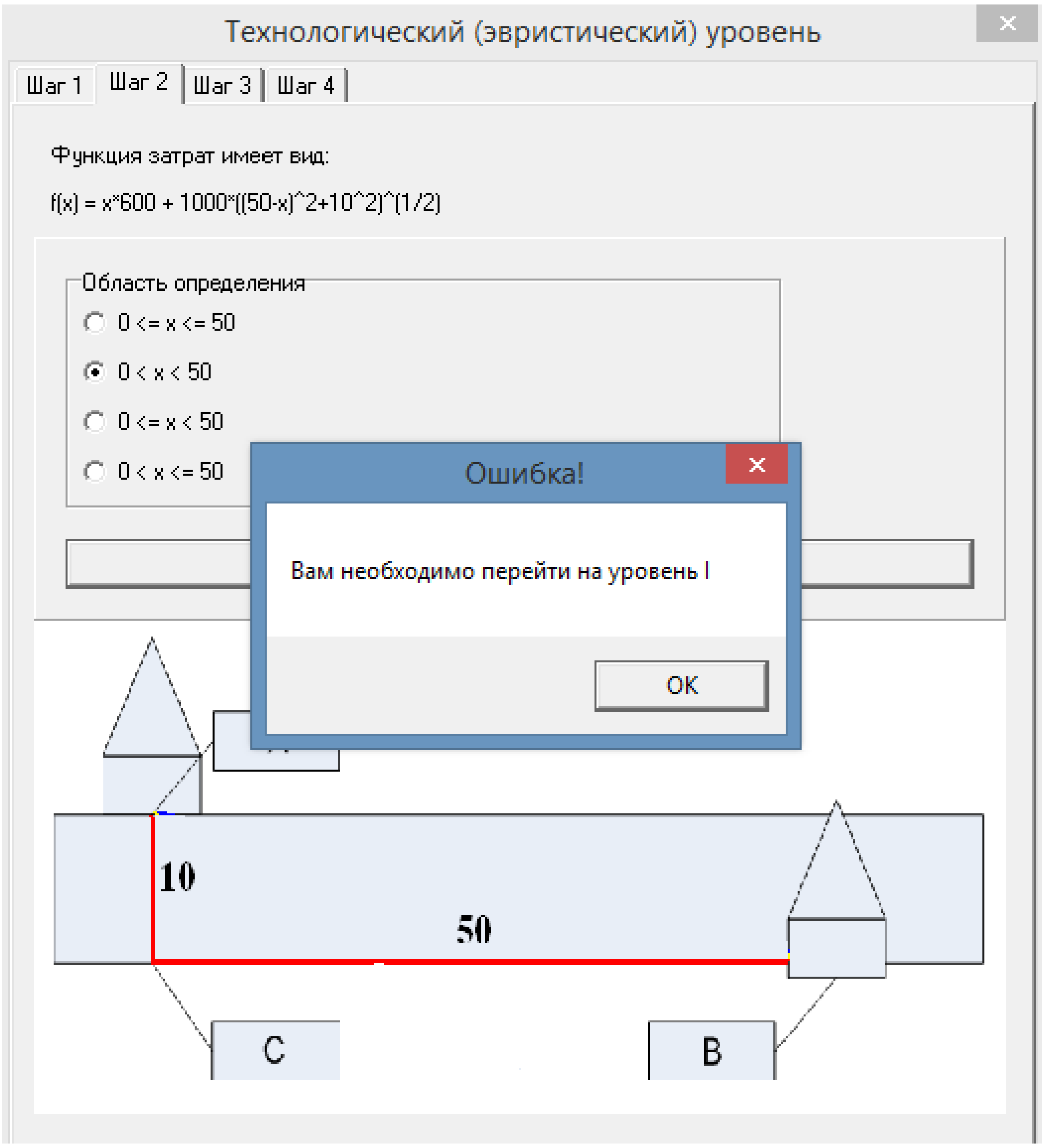


Рис. 17

В случае принятия неправильного решения система предлагает перейти на уровень ниже – на технологический уровень.Там будет ему предложена эта задача с другими более подробными вопросами. На 1 шаге определить переменную величину, на втором функцию затрат с ограничениями, на третьем шаге проверяется критическая точка и на четвертом – значение функции на концах интервала и в критической точке. Если на каком то шаге была допущена ошибка, то система предлагает перейти ученику на уровень ниже (рис. 17).

Если и здесь будет допущена ошибка, то ему предложат перейти на уровень ниже – операционный. Там будет ему предложена эта задача с другими более подробными вопросами. На операционном уровне будет уже 7 шагов (рис. 18).

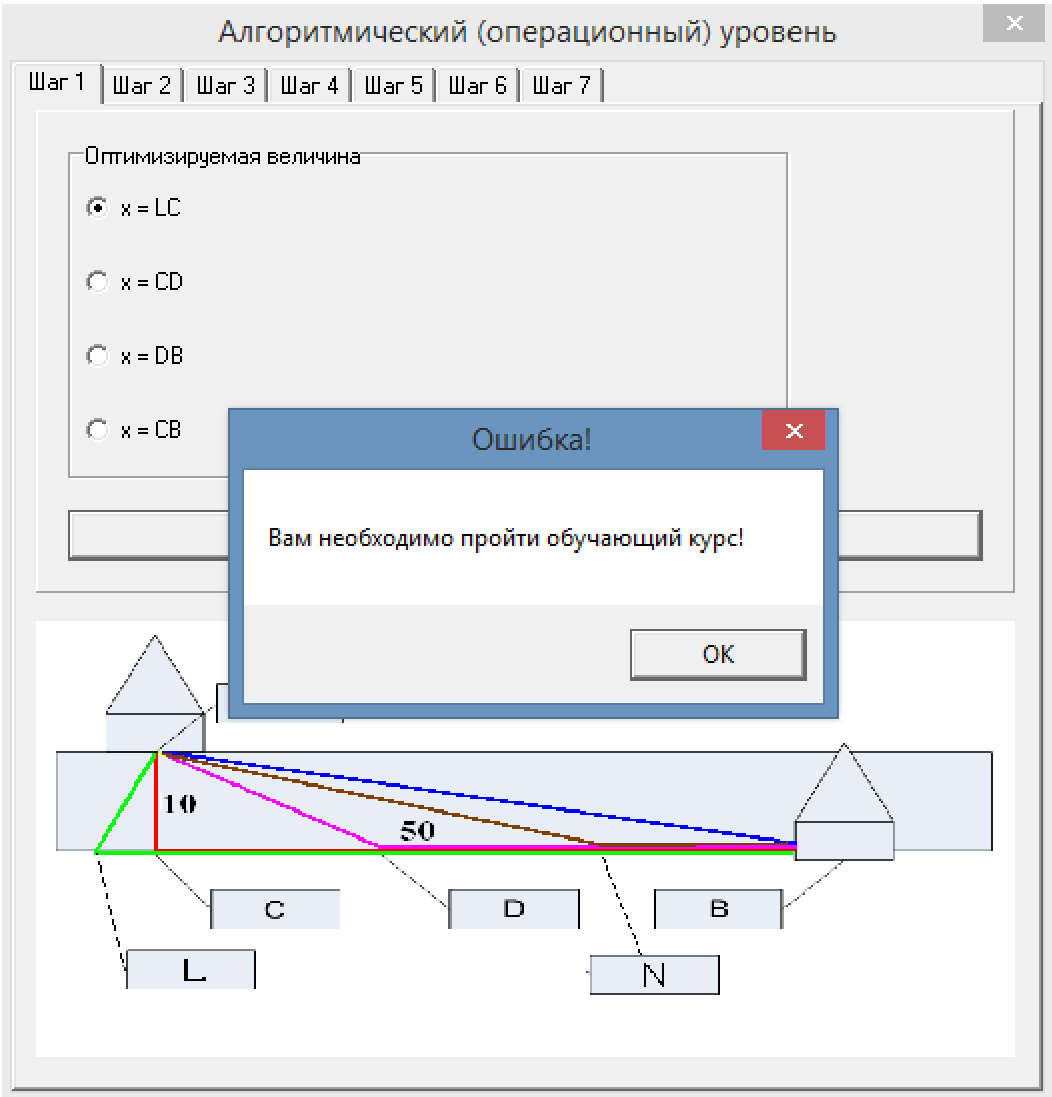


Рис. 18

Если и здесь будет допущена ошибка, ученику будет предложен обучающий курс, где будут предложены вопросы, позволяющие пошагово получить верный ответ(рис. 19). И все это будет проходить на одной и той же задачи.

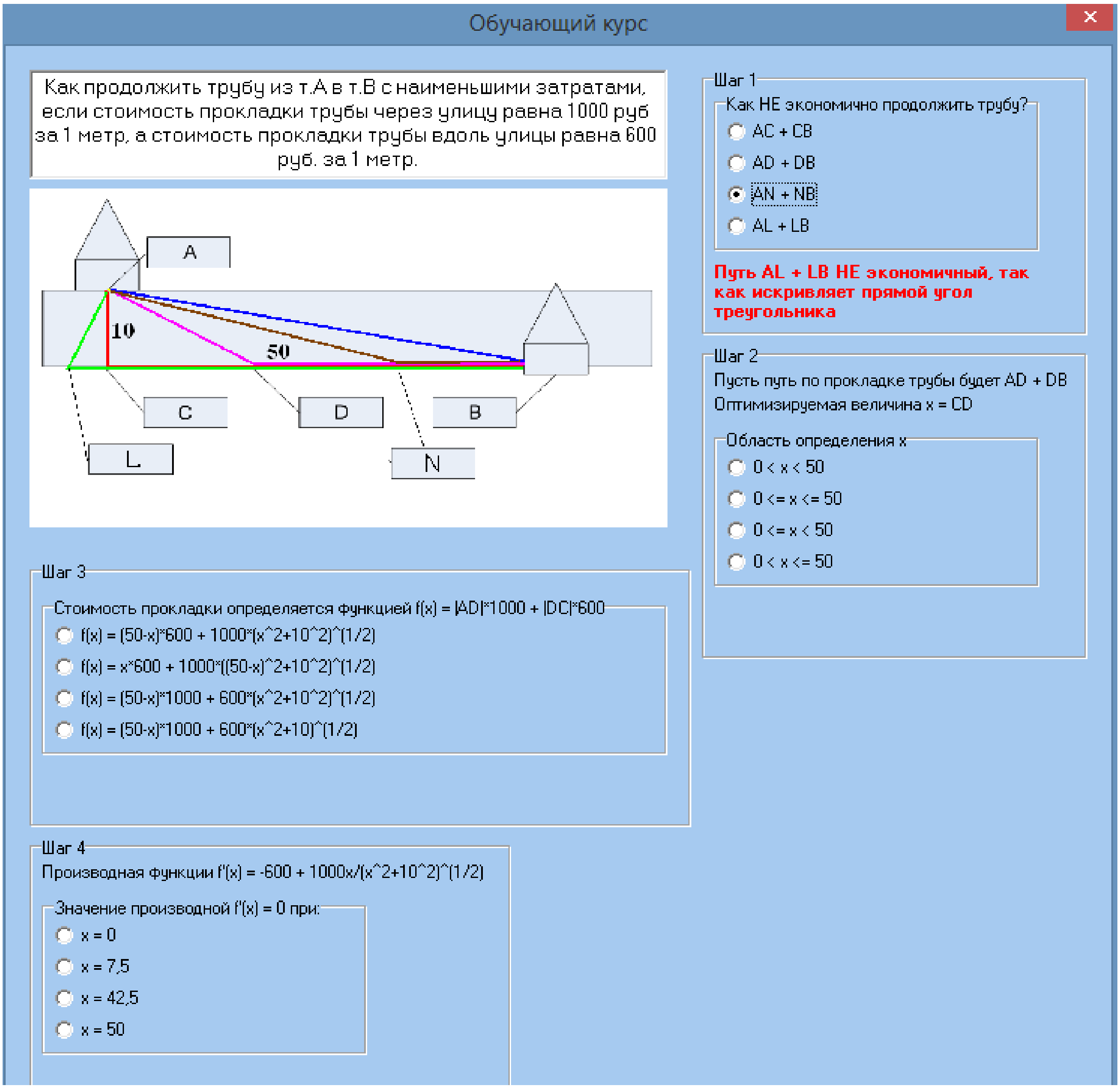


Рис.19

При прохождении обучающего курса при каждом неправильном выборе ответа, будет дано пояснение и можно будет выбрать другой ответ и так до конца ученик сможет самостоятельно разобрать задачу. Все результаты будут представлены на компьютере преподавателя. Учитель будет видеть, кто, где и какую допустил ошибку. Если ученик пропустил эту тему, то на этом уроке он может разобраться на обучающем уровне с помощью учителя, так как остальные ученики будут работать на АСО. И если ученик готов отчитаться по этой теме, то ему будет предложена другая задача для сдачи теста.

При прохождении обобщенного уровня до конца, оценка будет «отлично», технологичный уровень до конца – «хорошо», а если операционный уровень – «удовлетворительно». Оценка будет выставлена программой.

Если ученик не смог получить «отлично» или «хорошо», но при этом рассчитывал на более высокую оценку, то он может на другой задаче пройти его снова.

Учение, как один из видов деятельности человека, в условиях АСО становится преимущественно активной самостоятельной деятельностью, управляемой посредством использования контролирующих и диагностирующих мероприятий, обусловленных целеполаганием процесса обучения и предусматривающих в динамике уровни усвоения учащимися материала и его корректировку. Для этого необходим мониторинг, позволяющий в системе “учитель – ученик” наблюдать (и корректировать по мере необходимости) продвижение ученика от незнания к знанию с помощью инструментов контроля знаний и умений (педагогические тесты).

Есть две основные цели для вовлечения ученика в различные виды деятельности в обучающей системе. Первая цель – оценка. Вторая цель – самообучение. Через такие действия, как решение задач и исследование обучаемые могут прийти к пониманию предмета, сделать его своей интеллектуальной собственностью. В web-практике обучения есть ясное различие между двумя группами действий. Объективные действия – тесты (да/нет вопросы, вопросы с множественным выбором, вопросы с короткими ответами), созданы для проверки понимания обучаемого и предполагают минимальное творчество. Функциональные действия (или упражнения) вовлекают обучаемых в решение серьезных задач, разработку или исследование.

Предложенное тестирование в большей степени направленно на оценку обучаемого, но в то же время и на автоматизированное обучение.

Организационная структура урока в АСО позволяет увеличить время на самостоятельную работу. С учётом того, что при самостоятельной работе все учащиеся работают в разном темпе и требуют разную степень помощи в АСО применяют многоуровневые задания с адаптацией. Главное их достоинство – полная занятость всех учащихся. Каждый работает в меру своих способностей и возможностей, в своём темпе. Работают в режиме «самоконтроль», «взаимоконтроль», что обеспечивает полную контролируемость результатов. При этом каждому обеспечена необходимая доза помощи со стороны учителя.

Положительные моменты урока данной структуры в АСО:

1. Деятельность учащихся на уроке организуется с учётом их индивидуальных способностей;

2. Увеличение времени на самостоятельную работу;

3. Системная работа по овладению понятийным аппаратом предмета через контрольные вопросы;

4. Задания разного уровня сложности (многоуровневые задания с адаптацией);

5. Обучение умению добывать знания, обобщать, делать выводы, фиксировать главное в свёрнутом виде;

6. Учёт закономерности памяти, внимания, мышления, воображения.

7. Основная задача использования АСО заключается в поэтапном проведении учащегося через операционный и технологичный уровни на обобщенный.

Всё, что составляет так называемый учебный арсенал ученика, помогает ученику лучше учиться, а учителю учить.

В связи с изменениями в обществе в последние годы резко повысилась роль образования в жизни каждого человека. В условиях стремительно возрастающего объема информации человеку необходимо не только владеть определенной суммой знаний, умений и навыков, но и уметь адаптироваться к новым условиям жизни: ориентироваться в различных ситуациях, анализировать, критически оценивать и находить пути решения возникающих проблем, ставить перед собой цели и достигать их, организовывать собственную деятельность, владеть средствами коммуникации, добывать информацию и пользоваться ею, т.е. быть компетентным специалистом.

Именно в процессе решения практико-ориентированных задач соответствующего содержания и разного уровня сложностиу учащихся комплексно формируются ключевые компетенции.

Технологическая компетенция - это способность понимать инструкции и алгоритмы и четко их соблюдать, а также уметь «свернуть» информацию в схему, таблицу, план. Эта компетенция формируется во время решения задачи на алгоритмическом уровне. Развитию у школьников способности понимать алгоритмы деятельности и четко им следовать способствует решение практико-ориентированных задач на всех уровнях

Коммуникативная компетенция - это способность получать информацию, представлять и грамотно отстаивать свою точку зрения в диалоге или в публичном выступлении.При решении текстовых задач ученик должен провести рассуждения, объяснить каждое свое действие, чтобы было понятно всем.При этом очень важно, чтобы учащиеся понимали материал, тогда разрозненные сведения соединяются для них в цельную систему и ребята видят суть процесса.

Социальная компетенция– это способность соотносить свои устремления с интересами других людей и социальных групп; продуктивно взаимодействовать в команде; реализовывать свои права и выполнять обязанности гражданина. Использовать ресурсы социума для решения проблем. Очень часто в жизни важно знать мнения и взгляды людей по самым разным вопросам. Для этого проводят специальные опросы населения, или опросы общественного мнения. При этом школьники учатся анализировать и обобщать материал. Это прекрасная предпосылка для творчества.

Информационная компетенция — это способность искать и извлекать информацию из различных источников, делать на ее основе выводы, использовать информацию в своей деятельности.В целях формирования у учащихся этой компетенции им предлагают задачи на технологичном и обобщенном уровнях, где для того что бы решить эти задачи необходимо «добыть» недостающую информацию.

Проектная компетенция - это способность анализировать ситуацию, выделять проблемы, выдвигать идеи, планировать и оценивать результаты своей деятельности.Решая задачи исследовательского характера, учащиеся и работают по алгоритму, и проводят мини-исследования. У ребят развиваются аналитические способности и вкус к исследовательской деятельности.

Рефлексивная компетенция - это способность организовывать свою деятельность в соответствии с позициями:

1) что я делаю;

2) зачем я делаю;

3) как я делаю;

4) что я получил.

Формирование данной компетенции происходит при решении именно практико-ориентированных задач на разных уровнях.Когда задача решена, учащиеся видят, насколько выгодно выбирать оптимальный план. Делают вывод: чтобы не попасть впросак, нужно уметь все просчитать. При решении практико-ориентированных задач учащиеся действительно убеждаются, что знания, полученные на уроках математики, могут пригодиться им в жизни.

Причем многие задачи формируют две и более компетенции.

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующий вывод: формировать у учащихся ключевые компетенции можно и нужно в процессе решения практико-ориентированных задач соответствующего содержания, с учетом выбранного профиля и разного уровня сложности – используя адаптивную систему обучения.

Таким образом, всё это и то, что составляет так называемый учебный арсенал ученика, помогает ученику лучше учиться, а учителю учить.

Предположим, что есть возможность разработать учебную единицу (урок, главу, модуль – на данном этапе это не важно), которая обеспечивает полное и качественное научение человека. Единица представляет собой целостный комплекс, обеспечивающий предоставление информации (учебники и т.п.) и управление деятельностью обучаемого, включая контроль. Системообразующей частью данной единицы являются средства информационных и коммуникационных технологий. Важно, что данная единица обеспечивает качественное и самостоятельное обучение ученика вне зависимости от его интеллектуального уровня. Подобная деятельность может осуществляться как с преподавателем, так и самостоятельно.

Далее предположим, что из подобных единиц разработано максимально возможное количество для каждой дисциплины (от базового до профессионального уровня). Причем данные единицы могут иметь жесткие (т.е. данную единицу можно изучать только после изучения предыдущей) и слабые (а можно изучать и без предыдущей) связи. Более того, таких дисциплин, состоящих из подобных учебных единиц, уже сделано много. Что необычного в данной модели? Во-первых, она адаптивна к учебному заведению. В зависимости от целей и задач обучения можно набрать тот перечень единиц, которые перекрывают цели подготовки специальности. Во-вторых, легко настраиваться на заданное количество часов: качество обучения гарантированно. В-третьих, полностью обеспечены не только аудиторные занятия, но и самостоятельная работа. В-четвертых, подобные единицы можно использовать как при заочном, так и при дистанционном обучении. Учитывая, что роль преподавателя здесь меняется (он становится скорее консультантом), результативность обучения (при хорошо поставленной системе диагностики результатов обучения) хотя и будет отличаться в разных формах обучения, но не столь разительно, как в настоящее время. Подобные адаптивные методические системы легко тиражируются (в виду их частичной электронной составляющей), не менее легко внедряются и передаются [4].

6. *Методические рекомендации по использованию адаптивной методической системы*

I.До использования адаптивной методической системыученик должен уметь находить экстремумы, определять наибольшее и наименьшее значения функции.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$ нужно:

1) найти производную y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции;

2) определить знак y' слева и справа от каждой критической точки:

если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

а) y' меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 есть точка максимума;

б) y' меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 есть точка минимума;

в) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y' = 0$, по знаку второй производной. Для этого необходимо найти вторую производную y'' и определить ее знак в каждой критической точке x_0:

♦ если $y''(x_0) > 0$, то x_0 точка минимума;

♦ если $y''(x_0) < 0$, то x_0 точка максимума;

♦ если $y''(x_0)=0$, то такую критическую точку можно исследовать, изучая поведение первой производной в окрестности этой точки.

Говоря об экстремальных задачах, мы имеем в виду задачи школьного курса математики, которые связаны с понятиями наибольшего, наименьшего, наилучшего, наиболее выгодного.

Чтобы решить задачу на оптимизацию, нужно:

1) выразить оптимизируемую величину как функцию некоторой переменной и найти область определения этой функции;

2) найти критические точки, лежащие внутри области определения, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида);

3) вычислить значения функций на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$;

4) сравнить полученные значения функции: самое большее из них будет наибольшим значением, а самое меньшее – наименьшим значением функции на всей области определения;

Примечание: если стационарная точка одна, принадлежащая области определения, то иногда достаточно определить знак второй производной в этой точке и если, например, вторая производная в этой точке больше нуля, а необходимо найти наименьшее значение, то в этой точке оно и будет; если точек две или более, то необходимо вычислить значения функции на концах и в стационарных точках.

На этом этапе важно отработать алгоритм на числовых примерах, где функция определена и известен интервал исследования или неизвестен:

Задача 1

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-2)$ на отрезке $[-1;\,1]$.

Решение

Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет производную $f'(x)=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$ на всей числовой прямой, кроме $x=0$. Следовательно при $x=0$ также возможен экстремум:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)+x^{\frac{2}{3}}=\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{3x}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Критическими точками данной функции будут $x=0$ и $x=0{,}8$.

Обе критические точки функции принадлежат отрезку $[-1;\,1]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данной функции на $[-1;\,1]$ находятся среди значений:

$$f(-1)=-3;\qquad f(0)=0;\qquad f(0{,}8)\approx-1{,}03;\qquad f(1)=-1.$$

Наименьшее значение функция принимает при $x=-1$, а наибольшее при $x=0$. При этом $f_{наим}=-3$, $f_{наиб}=0$.

Задача 2

Найдите наибольшее значение функции $S(x)=x\cdot\left(4-x^2\right)$ на отрезке $[0;\,2]$.

Решение

$S'(x)=\left(4-x^2\right)+x\cdot(-2x)=4-3x^2$. Следовательно, $S'(x)=0$ при

$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Учитывая отрезок, на котором определена функция, получаем лишь одну критическую точку $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $S''(x) = -6x$; т.к. $S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$, то функция S в критической точке $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ достигает наибольшего значения. Следовательно, $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$ - наибольшее значение функции.

В задачах, встречающихся на практике, часто функция не дается готовым выражением. В таких случаях по условию задачи нужно составить соотношение, связывающее функцию с тем переменным, от которого зависит максимум или минимум функции или наибольшее, наименьшее значения.

Для решения практико-ориентированной задачи необходимо:

1. Понять задачу и сформулировать математическую модель:

а) Внимательное чтение и понимание – выделение известных данных, искомых величин и ограничений.

б) Формулировка целевой функции.

в) Определение переменных.

г) Формулировка ограничений.

д) Составление математической модели.

2. Найти оптимальное решение модели:

а) Выбор метода решения.

б) Нахождение оптимального решения экстремума (наибольшего или наименьшего значения).

3. Интерпретировать результат и дать ответ на вопрос задачи:

а) Перевод решения на язык задачи.

б) Проверка решения.

в) Ответ на вопрос задачи в требуемой форме, используя найденное значение.

Определим по этапноалгоритм решения практико-ориентированных задачна оптимизацию.

Алгоритм решения задач на оптимизацию

Шаг 1. Выделить значение, которое необходимо найти, и выразить его с помощью переменной. Составить функцию – математическую модель.

Шаг 2. Исследовать полученную функцию.

Шаг 3. Записать ответ.

Главная цель– показать школьникам физико-математического профиля как можно использовать элементы математического анализа в жизни.

II.На втором этапе важно разобрать с учащимися задачу на оптимизацию вида:

Задача 3

Для каких двух положительных чисел, произведение которых равно восьми, сумма наименьшая.

Этот пример иллюстрирует другой тип задач, где функция и ограничения явно не представлены.

Учащиеся на этом этапе должны понимать, что чаще всего уравнение не задаётся, его приходится составлять по данныміз условия задачи. Здесь необходимо уже работать по алгоритму.

Решение

Шаг 1. Предположим, что x и y - искомые числа, тогда сумма: $S = x + y$. Из условия известно: $x \cdot y = 8$ выразим $y = \frac{8}{x}$. Подставим в $S = x + y$,

получим функцию $S(x) = x + \frac{8}{x}$, где $x > 0$.

Шаг 2. Исследуем функцию: $S'(x) = 1 - \frac{8}{x^2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x_1 = 2\sqrt{2}, x_2 = -2\sqrt{2}$; $x_2 < 0$. Подставим x_1 в $S''(x) = \frac{16}{x^3}$. Получим $S''(2\sqrt{2}) > 0$. Следовательно, функция имеет наименьшее значение. Итак, при $x = 2\sqrt{2}$; $y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ достигается наименьшая сумма: $S = 4\sqrt{2}$.

Шаг 3. Ответ: при $x = y == 2\sqrt{2}$ сумма будет наименьшей: $S = 4\sqrt{2}$.

III.На этом этапе разобрать три задачи возникшие в практике. Предварительно описав ситуации - представив их как сюжеты на самом высоком обобщенном уровне и обязательно в диалоге с учащимися разобрать их (или хотя бы одну задачу) на всех уровнях.

IV.Важно придерживаться общего алгоритма решения задач на оптимизацию и при формулировке ответа обязательно его интерпретировать в требуемой форме.

V. Предложить учащимся представить другие возможные варианты – в виде аналитических рассуждений о других возможных вариантах.

Эти задачи надо предлагать на определенном этапе, когда классические задачи при изучении темы «Наибольшее и наименьшее значения функции» уже рассмотрены. Учащимся предлагается ситуация, возникшая в практике. Сюжеты этих ситуаций могут быть разными. Это и есть мини проекты (они могут быть и индивидуальными). Например:

Сюжет №1. У дедана даче, есть квадратный лист жести. И он давно мечтал изготовить бак с квадратным основанием для воды.

Условие задачи сформулировано на обобщенном уровне. При такой формулировке не совсем ясно, как будем кроить жесть. Из условия не совсем ясно, что воды хотелось бы в этот бак налить как можно больше!

Возможные вопросы для обсуждения в диалоге со всеми учениками:

1) *Какой лист?* (Квадратный – известно из условия).

2) *Известны ли его размеры?* (Нет).

3) *Можем узнать размеры листа?* (Можно измерить, мы ведь на даче, лист перед нами – учитель сообщает, что сторона листа равна 3 м).

4) *Как вы думаете, устроит вашего дедушку бак, в который войдет ведро воды?* (Нет)

5) *Какой должен иметь объем бак?* (Наибольший)

6) *Как раскроить бак?* (Ответ можно найти в интернете:вариант представлен на рисунке – во всех четырех углах вырезают квадраты с равными сторонами).

7) *Какой может быть сторона вырезанного квадрата и почему?*(Сторона квадрата не может быть равной 0 и больше 1,5 м, так как иначе бак не сможем собрать – н е может быть в основании точка (при стороне равной 1,5 м) и высота бака не может быть равной 0 (рис. 20).

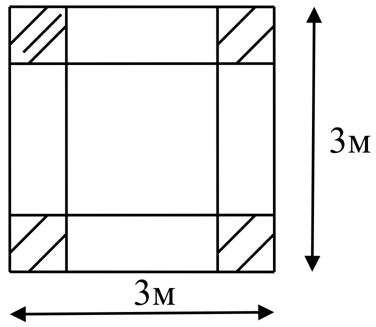


Рис. 20

8) *Что должно быть наибольшим?* **(**Объем).

9) Предложите учащимся сформулировать условие задачи на технологическом уровне!

10) Обобщим при этом всю полученную информацию:

Понимаем, что лист можно измерить или решать задачу в общем виде, при этом объем бака должен быть наибольшим. Варианты раскроя квадратного листа для изготовления бака с квадратным основанием можно узнать в интернете – вырезав в углах равные квадраты и загнув соответствующие срезы, можно получить параллелепипед без верхней грани. В основании будет квадрат, но стороны этого квадрата возможны разные, так как вырезаем квадраты равные, но стороны могут быть разными.

Измерив сторону листа, сформулировав вопрос и определив план раскроя, ученик перешел на технологический уровень:

Задача 4

Как из квадратного листа жести со стороной 3 м изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объёма?

Решение

11) Какая величина изменяется и влияет на объем? **(**сторона вырезанного квадрата).

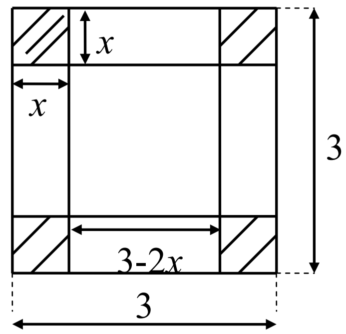


Рис. 21

Шаг 1.Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата (рис. 21) Так как в основании бака квадрат, то $0 < x < 3/2$ и объём бака будет определяться по формуле $V(x) = (3-2x)^2 x,$ где $0 < x < 3/2.$

Таким образом, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $V(x)$ на отрезке $(0;3/2)$.

Шаг 2.Исследуем функцию на экстремум: $V'(x) = 9 - 24x + 12x^2$. Отсюда $V'(x) = 0$ при $x_1 = 3/2, \quad x_2 = 1/2$. Рассмотрим далее значения функции в точках $x_0 = 0, \quad x_1 = 3/2, \quad x_2 = 1/2.$ Имеем $V(0) = 0, \quad V(1/2) = 2$, $V(3/2) = 0$. Итак, при $x = 1/2$ м объём бака будет наибольшим. При решении текстовых задач очень важен ответ, в требуемой форме.

Шаг 3.

Ответ:объём бака будет наибольшем, если у квадратного листа со стороной 3 м вырезать в четырех углах равные квадраты со сторонами равными 0,5 м. При этом объем будет равен 2 м^3.

12) Очень важен правильно сформулированный ответ на этом этапе.

13) Аналитические рассуждения:

Всегда найдется ученик, который задумается:может возможно было бы раскроить без остатков материалов жести? Ведь при таком раскрое останутся четыре квадратных куска жести со сторонами 0,5 м. В целом 1 м^2 из 9м^2.

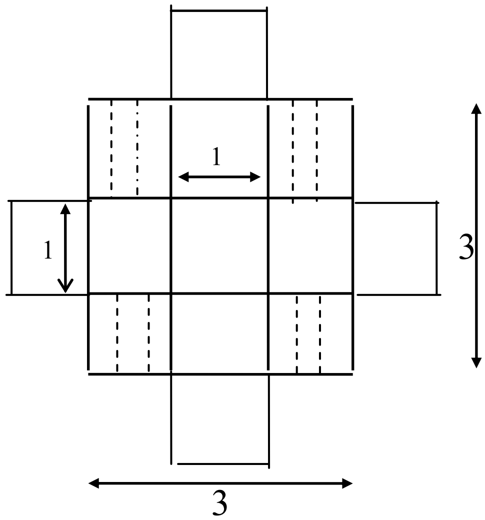


Рис. 22

Можно предложить вариант безотходного производства, когда разделив каждую сторону на 3 равные отрезки по 1 м, вырезать в углах квадраты со стороной 1 м и вырезанные квадраты приварить к средним рубцам (рис. 22). Тогда в основании будет квадрат со стороной 1 м, а высотой 2 м. Объем такого бака так же будет равен 2 м^3.И при раскрои, показанном на рисунке 3, объем равен 2 м^3, но еще при этом остаются 4 квадратных куска жести со сторонами 0,5 м, которые можно использовать в других целях.

Сюжет №2. Вы являетесь частным предпринимателем. Вылавливаете и продаете рыбу.Рыба храниться не долго. Ваша задача увеличить срок хранения рыбы. Как увеличить срок хранения?

Это возможно с помощью консервирования. Возможен вариант постройки консервного завода, но при этом жесть придется покупать.

Условие задачи сформулировано на обобщенном уровне. При такой формулировке не совсем ясно, как организовать консервацию? Какую форму будут иметь банки? Предположим, что цилиндрическую форму.

Возможные вопросы для обсуждения в диалоге со всеми учениками:

1) *У вас есть возможность организовать завод по производству консервов, но жесть придется закупать. Как можно сэкономить?*(На упаковке).

2) *Какие возможны упаковки?* **(**Консервировать будем в цилиндрические жестяные банки).

3) *Какие возможны виды банок?* **(**Учащимся можно обратить внимание на то, что на полках в магазинах стоят банки разных цилиндрических форм с одинаковыми объемами (от плоских упаковок шпрот до вытянутых банок, содержащих маслины, причем чаще всего одинакового объема)).

4) *Что должно быть наименьшим при заданном объеме?*(площадь поверхности)

5) Предложите учащимся сформулировать условие задачи на технологическом уровне!

Задача 5

Консервная банка, заданного объёма, имеет форму прямого кругового цилиндра. При каких размерах на ее изготовление пойдет наименьшее количество жести?

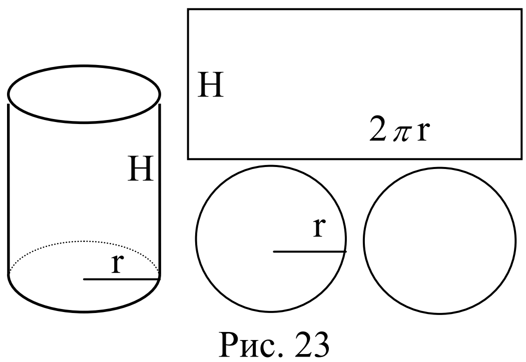


Рис. 23

Решение

Оптимизируемая величина S – площадь полной поверхности цилиндра: $S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rH$.

Площадь полной поверхности цилиндра состоиит из двух кругов – дно и крышка банки, и боковой поверхности – прямоугольник.

6) *Какая величина изменяется и влияет на площадь поверхности?* (Неизвестные переменные радиус основания и высота).

7) *Есть ли в условии задачи еще информация, связывающая эти величины?* (Консервная банка, заданного объема $V=\pi r^2 H$).

8) *Какую величину лучше выразить радиус или высоту, если объем постоянный и почему?* (Лучше H – высота цилиндра, так как радиус в квадрате).

Выразим её как функцию радиуса r основания цилиндра. Если H – высота цилиндра, то из формулы $V=\pi r^2 H$ получаем $H=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

Тогда $S(r)=2\pi r^2+2\pi rH=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.

9) *Как может изменяться радиус основания, при данной высоте?* (Радиус может быть только больше 0)

Нам нужно выяснить, при каком значении $r>0$ функция $S(r)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$ принимает наименьшее значение. Для этого найдём производную. Имеем $S'(r)=2\pi\cdot 2r-2V\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{4\pi r^3-2V}{r^2}$.

Следовательно, $S'(r)=0$ при $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Это единственная критическая точка. Определим знак второй производной в этой точке: $S''(r)=\dfrac{4\pi r^3+4V}{r^3}$, $S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)>0$. Следовательно, в этой точке функция достигает наименьшего значения.

Далее имеем $H=\dfrac{V}{\pi r^2}=\dfrac{Vr}{\pi r^3}=\dfrac{Vr}{\pi\cdot\dfrac{V}{2\pi}}=2r.$

Это означает, что высота цилиндра равняется диаметру основания.

Ответ: при данной ёмкости, на производство банки пойдёт наименьшее количество жести, если банку изготовить в виде равностороннего цилиндра (цилиндр называется равносторонним, если его осевое сечение – квадрат).

10) Аналитические рассуждения:

Если подставитьв $H=\dfrac{V}{\pi r^2}$ вместо $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, то получили $H=\dfrac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$, то совсем не понятно, как в магазине определить самую экономичную упаковку.При решении задачи, учащиеся столкнутся со значениями, которые не дают возможность ситуацию оценить на глаз. Было бы нагляднее сформулировать вопрос в виде «Каково должно быть соотношение между диаметром основания и высотой цилиндра, чтобы при данной ёмкости V на производство банки пошло наименьшее количество жести?»

При решении этой задачи очень важно обратить внимание учащихся на то, что важно для объективного представления экономичной упаковки, иметь представление об отношении высоты банки к диаметру. Тогда в магазине легче определить экономного производителя. Зачем платить больше?

Задача из этой серии могла быть и про пакет молока и про спичечный коробок и др.

Сюжет №3. Вам выделили участок под строительство коттеджа А. Коттедж построен и необходимо проложить коммуникации из В в А. Как можно это сделать? (Вы на местности определили коттедж, близко расположенный к вам).

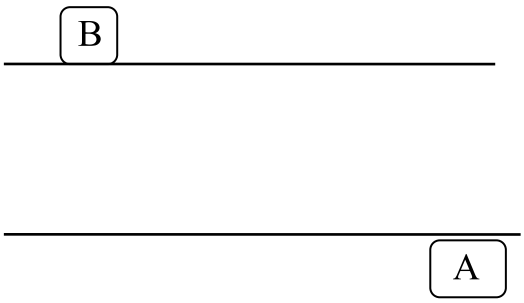


Рис. 24

Условие задачи сформулировано на обобщенном уровне. При такой формулировке не совсем ясно, как организовать процесс прокладки трубы (рис. 24).

Возможные вопросы для обсуждения в диалоге со всеми учениками:

1) *Что между пунктами А и В?* (Дорога).

2) *Какие данные мы можем узнать на местности?* **(**ширину и длину участка дороги).

3) *Ширина дороги 10 - м, длина участка дороги от ближайшей к точке В до А* **-** 50 м.

4) *Как можно проложить* **т**рубу из А в В? (Соединив А и В напрямую, можно из В попасть в А через С, можно через любую точку на прямой СА (см. рис. 7), например, Д. Вариантов бесконечно много).

5) *Как вы думаете, стоимость затрат всегда будет одинаковая?* **(**Нет).

6) *От чего зависит стоимость затрат?* **(**Где прокладывают коммуникации вдоль дороги или под дорогой, так как разные покрытия (асфальт и грунт) и от длины пути).

7) *Как узнать стоимость этих услуг?***(**Найти фирму через интернет и узнать расценки прокладки трубы под дорогой и вдоль дороги.Затраты по прокладке трубы составляют вдоль улицы за 1 метр 600 DM (DM – денежная единица Германии до 2001 года) и через улицу – 1000 DM за метр. Задача из учебника Германии [19,14]).

8) *При прокладки коммуникаций сколько хотелось бы потратить средств?* **(**Как можно меньше).

9) Предложите учащимся сформулировать условие задачи на технологическом уровне!

Задача 6

Необходимо проложить трубу из *A* в *B* с наименьшими затратами, если ширина дороги равна 10 м, а расстояние вдоль дороги от ближайшей точке к В до А равно 50 м. (рис. 25). Затраты по прокладке трубы составляют вдоль улицы за 1 метр 600 DM (DM – денежная единица Германии до 2001 года) и через улицу – 1000 DM за метр.

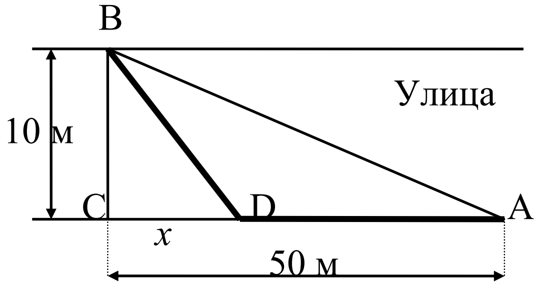


Рис. 25

10) Выберем на отрезке CA произвольно точку D.

11) *Какую функцию будем составлять?*(Функцию затрат).

12) *От чего зависит функция затрат?* (От длины участка и стоимости прокладки на этом участке).

13) *Какая величина изменяется и влияет на цену?* **(**Расстояние от точки С и случайно выбранной точке на отрезке СА).

Решение

Введём систему координат таким образом, чтобы начало координат было в точке $C(0,0)$. Пусть точка D имеет координаты $(x,0)$, тогда, прокладывая трубы, мы проделаем путь $AD+DB$ и затратим соответствующую сумму:

$$f(x)=(50-x)\cdot 600+\sqrt{x^2+10^2}\cdot 1000, \text{ где } 0\le x\le 50.$$

Исследуем эту функцию на экстремум, для этого вычислим первую производную и приравняем к нулю. Имеем

$f'(x)=-600+\dfrac{1000x}{\sqrt{x^2+100}}$. Следовательно, $f'(x)=0$ при $x=\dfrac{15}{2}=7\dfrac{1}{2}$.

Вычислим расходы при прокладке труб из A в B по прямой – это значение функции при $x=50$ и из A в B через C – это при $x=0$.

$$f(0)=50\cdot 600+10\cdot 1000=30000+10000=40000\,DM;$$

$$f\left(\frac{15}{2}\right)=\left(50-\frac{15}{2}\right)\cdot 600+\sqrt{\frac{225}{4}+100}\cdot 1000=25500+12500=38000\,DM;$$

$$f(50)=\sqrt{2500+100}\cdot 1000=10000\cdot\sqrt{26}\approx 50990\,DM.$$

Ответ:Если от дома А отступить вдоль дороги на 42,5 м, то на прокладку коммуникаций уйдет наименьшее количество средств. Именно в таком виде логично было бы сформулировать ответ для практико-ориентированной задачи, так как зная, что CD=7,5 м, то AD=50-7,5=42,5 м.

На обобщенном уровне в условие задачи изначально можно было бы добавить условие: На прокладку коммуникаций было выделено 38000 DM, хватит ли этой суммы? Ответ положительный возможен, если вы найдете оптимальное значение – самое наименьшее.

14) Аналитические рассуждения:

В 80 годах прошлого века, абитуриентам на вступительных экзаменах при поступлении в институты, университеты на математическую специальность, предлагались задачи на оптимизацию: Человек сидит на пляже в точке В, в воде на глубине плещется ребенокв точке А и он начинает тонуть.Скорости передвижения по воде и по песку разные. Если бы скорости были бы одинаковые, то бежать и плыть надо по диагонали.В нашем случае, представленном на рис.26, скорость передвижения по писку больше, чем скорость передвижения по морю. Конечно, и в голову никому не придет начать решать задачу в такой ситуации, но интуитивно каждый должен это понимать и не выбирать крайние варианты – через С и К.

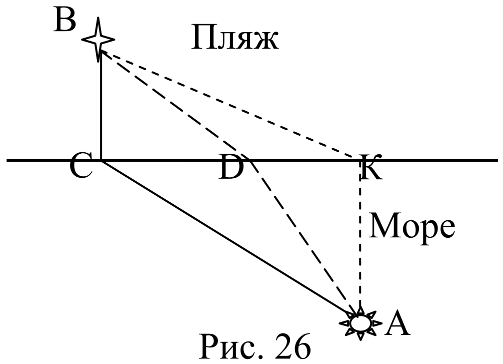


Рис. 26

Хотелось бы здесь в качестве примера еще предложить один интересный факт: в своей статье величайший в мире математик Маркус дю Сотой в книге «Искусство мыслить рационально. Шорткаты в математике и в жизни» в статье «Занимаются ли собаки матанализом?»[12, С.228] приводит очень интересный факт:

Тим Пеннигс, профессор математики в Мичиганском университете Хоуп и собаковод, решил провести несколько экспериментов, чтобы проверить, насколько хорошо решает эту задачу из математического анализа его собака по кличке Элвис. Пеннигс решил, что проведет этот эксперимент, не спасая тонущих пловцов, а бросая мячик в озеро Мичиган во время прогулки с Элвисом и наблюдая за тем, какой маршрут к мячику Элвис будет выбирать. Главной целью Элвиса могла быть минимизация количества сил, затраченных на добывания мячика. Пеннигс выбрал благоприятный день и при неоднократном бросании мячика в воду, замерял место, где Элвис входил в воду. Измерял расстояние, которое Элвис преодолевал, проплывая за мячом. В большинстве случаев Элвис оказывался довольно близко к оптимальной точке входа в воду. Значит ли это, что Элвис умеет использовать шорткат матанализа? Разумеется, нет. Но мозг животного поразительным образом развил способность находить такие пути. Природа благоволит к тем,кто способен оптимизировать решения. Так что у животных, которые могли интуитивно решать такие задачи, было больше шансов выжить, чем у тех, кто ошибался.

Это действительно искусство мыслить рационально! Чем больше ученик сталкивается с задачами – проблемами, тем смекалистее он становится. При появлении нестандартной ситуации всегда приходится принимать нестандартные решения.

VI.После рассмотрения сюжетных задач, можно предложить учащимся проверить свой уровень готовности на АСО.

Ученик сам оценивает себя – выбираю уровень сложности:

обобщенный на оценку «5», технологический на оценку «4» или Операционный на оценку «3».

VII.Разобрать задачи

Задача 7

Каким может быть наибольший объем бандероли в форме рулона?

Решение

В правилах почтовой связи указано, что у бандероли в форме рулона «сумма ее длины и двойного диаметра» не должна быть больше 104 см, а любое измерение должно находиться в пределах от 10 до 90 см. Так как рулон достаточно близок к форме цилиндра, то мы приходим к отысканию цилиндра наибольшего объема среди цилиндров, диаметр основания (d) и высота *(h)* которых принадлежат отрезку [10; 90], а h $+2d \leq 104$.

Пусть x - радиус основания цилиндра. Ясно, что в случае наибольшего объема бандероль будет иметь наибольшие возможные габариты, т.е. будет выполняться соотношение $h + 4x = 104$. В таком случае объем цилиндра

$$V = \pi h x^2 = 4\pi\left(26x^2 - x^3\right), \quad 5 \leq x \leq 45$$

Найдем производную: $V' = 4\pi x(52 - 3x)$. На отрезке [5; 45] она обращается в нуль в точке $x_0 = \frac{52}{3}$ x_0 =52/3 и при переходе через нее меняет знак с плюса на минус. Это означает, что при таком значении x функция Vдостигает наибольшего значения на рассматриваемом отрезке, причем $V_{\max} = 4\pi \frac{2704 \cdot 26}{9 \cdot 3} \approx 32721 \quad (см^3)$

Задача 8

Каким может быть наибольший объем бандероли в форме коробки?

Решение

В правилах почтовой связи находим, что сумма длины, ширины и толщины такой бандероли не должна выходить за 90 см, каждое измерениене должно превосходить 60 см, *а* длина и ширина не могут быть меньше 148 и 105 миллиметров соответственно.

Задача сводится к отысканию параллелепипеда наибольшего объема среди параллелепипедов (назовем их подходящими), измерения x, y, zкоторых (в миллиметрах) удовлетворяют условиям: $x + y + z = 900$,

$$148 \le x \le 600, \quad 105 \le y \le 600, \quad z \le 600.$$

Рассмотрим вначале подходящие параллелепипеды с фиксированной высотой h. В этом случае $z = h$(константа),

$y = 900 - h - x, \quad V = h(900 - h - x)x, \; 148 \le x \le 600$.

С помощью производной легко находим, что наибольший объем будет при $x = \frac{1}{2}(900 - h)$. Так как в таком случае $y = x$, то получается параллелепипед с квадратным основанием.

Рассмотрим теперь подходящие параллелепипеды с квадратным основанием $(y = x)$. В этом случае

$z = 900 - 2x, \; V = x^2(900 - 2x), \; 148 \le x \le 600$.

С помощью производной находим, что наибольший объем будет при $x = 300$.

Итак, наибольшей по объему будет кубическая бандероль с ребром 30 см. Ее объем 27 000 см^3.

Задача 9

Какой наибольший объем может иметь международная посылка в форме рулона?

Справка. В правилах почтовой связи сказано, что любое измерение международной посылки не должно быть больше 105 и меньше 11 см, а «сумма длины и периметра наибольшего поперечного сечения не более 200 см», предельная масса 20 кг.

Решение

Задача сводится к отысканию цилиндра наибольшего объема среди цилиндров, радиус основания *(x)* и высота *(h)* которых (в сантиметрах) удовлетворяют условиям: $11 \le 2x \le 105, \quad 11 \le h \le 105, \quad 2\pi x + h \le 200$. Задача приводит к исследованию функции $V = \pi x^2(200 - 2\pi x)$ на промежутке $\left[\frac{11}{2}; \frac{105}{2}\right]$.

С помощью производной находим, что наибольшее значение достигается при $x = \frac{200}{3\pi}$

и оно равно примерно 94314 см^3.

Задача 10

Можно ли послать международной посылкой в форме коробки 5 кг пенопласта?

Решение

Сначала найдем максимально возможный объем такой посылки. Пусть z — ее длина, x и y — другие измерения (в сантиметрах), V- объем. Тогда периметр ее поперечного сечения 2x + $2y$, $V = xyz$, где согласно приведенной выше справке 2x + $2y$ + $z \leq$ 200, $11 \leq x \leq 105$. Рассуждая так же, как и при решении задачи 2, получим, что наибольший объемдостигается при $x = y = \dfrac{100}{3}, \quad z = \dfrac{200}{3}$

приблизительно равен 74 074 см^3 = 0,074 м^3.

С помощью справочников или Интернета находим, что плотность самого тяжелого пенопласта 45 кг/м^3 Значит (поскольку 0,074 м^3 • 45 кг/м^3 = 3,3 кг), | в международную посылку в форме коробки нельзя загрузить и 4 кг пенопласта.

VIII.Очень важно, давать учащимся задания: составлять сюжеты индивидуальных проектов из предложенных задач.

7. Комплекс учебных заданий

7.1 Задачи с подробным решением

Задача 1

Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вершины которого находятся в начале декартовой системы координат, на положительной полуоси $0x$, на положительной полуоси $0y$ и на параболе $y = 4 - x^2$.

Решение

Обозначим стороны прямоугольника через x и y. Тогда его площадь $S = x \cdot y$ (рис. 27). Выразим y через x, исходя из

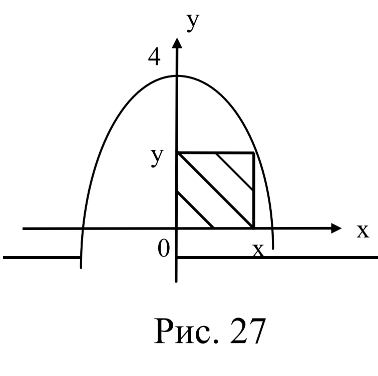


Рис. 27

того, что одна из вершин находится на параболе $y = 4 - x^2$. Заменяя y в выражении площади, имеем $S(x) = x \cdot \left(4 - x^2\right)$, где x, согласно условию задачи, изменяется на отрезке $[0; 2]$. Следовательно, $0 \le x \le 2$. Ищем далее наибольшее значение функции $S(x)$ на указанном отрезке. $S'(x) = \left(4 - x^2\right) + x \cdot (-2x) = 4 - 3x^2$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Учитывая область определения, получаем лишь одну критическую точку $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $S''(x) = -6x$; т.к. $S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$, то функция S в критической точке $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ достигает наибольшего значения. Следовательно, $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$.

Задача 2 [15,С.184]

Кривая CD задана уравнением $f(x) = \frac{7}{16}x^2 + 2$. Для какой точки Q, лежащей на кривой CD, площадь прямоугольника $RBPQ$, показанная на рис.28, будет наибольшая?

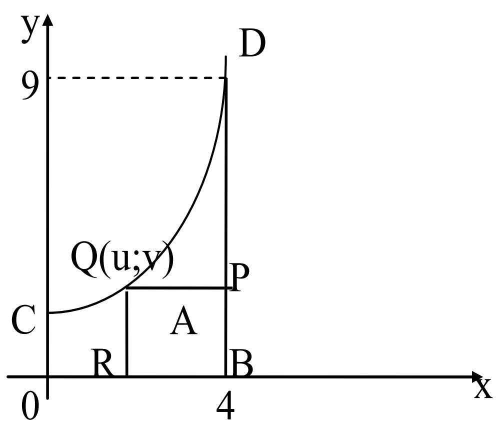


Рис. 28

Решение

Площадь прямоугольника A равна: $A = (4 - u) \cdot v$.

1. Промежуточные значения: $v = f(u)$.

2. Исследуемая функция:

$$A(u) = (4-u)\cdot\left(\frac{7}{16}u^2 + 2\right) = -\frac{7}{16}u^3 + \frac{7}{4}u^2 - 2u + 8, \text{ где } 0 \le u \le 4.$$

Исследуем на экстремум: $A'(u) = -\frac{21}{16}u^2 + \frac{7}{2}u - 2$. Следовательно, $A'(u) = 0$ при $u_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{21}\sqrt{7}$, $\quad u_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{21}\sqrt{7}$. Вычислим

$$A''(u) = -\frac{21}{8}u + \frac{7}{2}.$$

$A''(u_1) = \frac{1}{2}\sqrt{7} > 0$, $\quad A''(u_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{7} < 0$. Таким образом при u_2 достигается локальный максимум. Вычислим $A(u_2) = \frac{200}{27} + \frac{8}{189}\sqrt{7} \approx 7{,}52$. Значения в крайних точках: $A(0) = 8$; $A(4) = 0$. Так как $A(0) > A(u_2)$ то наибольшая площадь будет достигнута, когда точка будет находиться на кривой CD в точке $Q(0;2)$.

Задача 3

Какой из прямоугольников с периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Решение

Прямоугольников с периметром $2p$ имеется бесконечное множество. Наша задача - выделить из этого множества прямоугольников прямоугольник, площадь которого будет наибольшей. Если через x обозначить длину одной из сторон прямоугольника, то длина другой стороны равна $p - x$, а площадь S такого прямоугольника равна $x(p-x)$. Найдём критические точки функции $S = x(p-x)$, $x \in [0; p]$. $S' = p - 2x$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \frac{p}{2}$. Т.к. $S'' = -2 < 0$, функция S в критической точке достигает наибольшего значения. Следовательно, площадь $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$ будет наибольшей, а искомый прямоугольник – квадрат со стороной $\frac{p}{2}$.

Задача 4[15,188]

Из круга радиуса r вырезают симметричную звезду (рис. 29), и четыре вершины A, B, C, D соединяют в вершину, образуя правильную пирамиду, в основании которой – квадрат. Какой наибольший объём возможен?

Решение

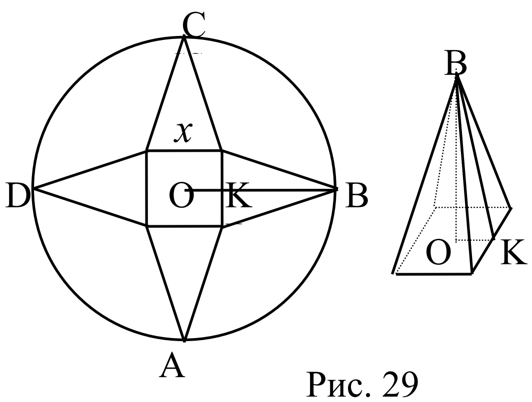


Рис. 29

Пусть сторона квадрата x, тогда объём пирамиды будет равен (рис. 29) $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot OB.$ Рассмотрим треугольник OBK: $OK = \frac{x}{2}$, $BK = r - \frac{x}{2}$.

Следовательно, $OB = \sqrt{BK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(r - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{r^2 - rx}.$

Имеем $V(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{r^2 - rx}$, где $0 < x < r$. Фигуру на рис. 7б можно выстроить только при условии $0 < x < r$ Исследуем эту функцию: $V'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\sqrt{r^2-rx}-x^2\frac{r}{6\sqrt{r^2-rx}}=\frac{4xr^2-5x^2r}{6\sqrt{r^2-rx}}$, где $0<x<r$. Следовательно, $V'(x)=0$ при $x=0$, $x=\frac{4r}{5}$ *и* $x=r$. При этом $V(0)=0$, $V\left(\frac{4}{5}r\right)=\frac{16\cdot r^3}{75\sqrt{5}}$, $V(r)=0$. Следовательно, объем пирамиды будет наибольшим при $x=\frac{4}{5}r$.

Задача 5

Найдите наибольший объём цилиндра, вписанного в данный конус.

Решение

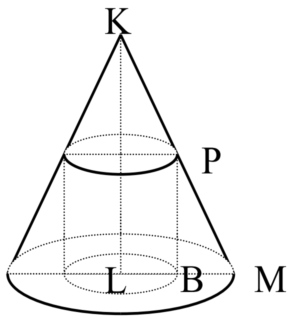


Рис.30

Пусть задан конус с высотой H и радиусом R (рис. 30). Обозначим через h высоту цилиндра и через r радиус основания цилиндра, вписанного в данный конус. Обозначим $BM=x$. Тогда

$h=PB=x\cdot\operatorname{tg}K\hat{M}L=x\cdot\frac{H}{R}$ и $r=R-x$. Объём цилиндра V равен $\pi r^2 h$. В нашем случае $V(x)=\pi(R-x)^2\frac{xH}{R}$. Определим, при каком значении x объём цилиндра будет принимать наибольшее значение. Найдём производную $V'(x)$:

$$V'(x)=\frac{\pi H}{R}(R-x)^2+\frac{\pi H}{R}x\cdot 2\cdot(R-x)(-1)=\frac{\pi H}{R}(R-x)(R-x-2x)=$$

$= \frac{\pi H}{R}(R-x)(R-3x)$. Следовательно, $V'(x)=0$ при $x=\frac{R}{3}$. При $x<\frac{R}{3}$ производная $V'(x)>0$ и $V'(x)<0$ при $x>\frac{R}{3}$. Следовательно, в точке $x=\frac{R}{3}$ функция $V(x)$ имеет максимум. Так как x может меняться от нуля до R, причём $V(0)=V(R)=0$, то число $V\left(\frac{R}{3}\right)=\frac{4}{27}\pi HR^2$ является наибольшим значением объёма вписанных цилиндров.

Задача 6[15,188]

В шар вписана правильная треугольная призма (рис.31), в основании которой лежит правильный равносторонний треугольник. Какой наибольший объём может иметь призма?

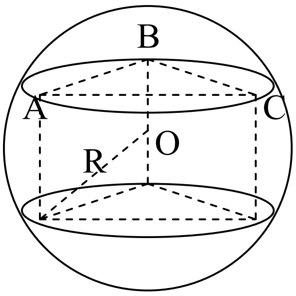


Рис. 31

Решение

Радиус шара обозначим R, длину стороны равностороннего треугольника – a, расстояние от центра шара до плоскости, содержащей основание призмы – h. Так как в основании призмы лежит правильный треугольник ABC (рис. 9), то его площадь равна: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Треугольник вписан в круг, тогда круг имеет радиус, равный $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Если M – центр круга, то из треугольника OAM выразим a. Имеем: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = R^2$.

Следовательно, $a = \sqrt{3 \cdot \left(R^2 - h^2\right)}$. Находим объём призмы как функцию переменной h: $V_{приз}(h) = S_{ABC} \cdot 2h = 3\left(R^2 - h^2\right) \cdot 2h = 6R^2 h - 6h^3$, где $0 < h < R$. Ищем критическую точку найденной функции: $V'_{приз}(h) = 6R^2 - 18h^2$.

Следовательно, $V'_{приз}(h) = 0$ при $h_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$. $V''(h) = -36h$, $V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$.

Очевидно, что при $h = h_0$ функция имеет наибольшее значение. Получаем, что наибольший возможный объём рассматриваемых треугольных призм равен

Задача 7

Группа спортсменов организовала на берегу моря следующее соревнование. Стартуя из точки A (см. рис. 32) на берегу моря, каждый спортсмен должен достичь буйка B, расположенного на расстоянии $l = 120$ м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта A до основания перпендикуляра BC, опущенного на эту линию, равно $L = 200$ м. Каждый спортсмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта A по направлению к основанию перпендикуляра BC, а затем плыть к буйку. Победителем считается тот, кто доплывет до буйка B быстрее всех. Из какой точки берега наиболее выгодно начать плыть к буйку спортсмену, который знает, что при беге по песчаному берегу его скорость равна 13 км/ч, а скорость плавания – 5 км/ч.

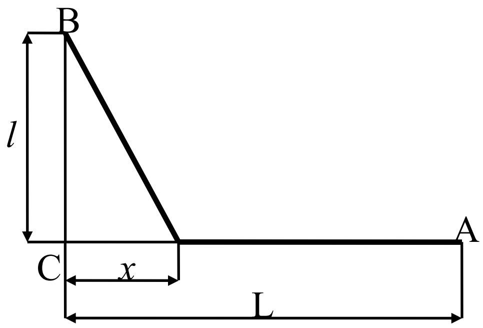


Рис. 32

Решение

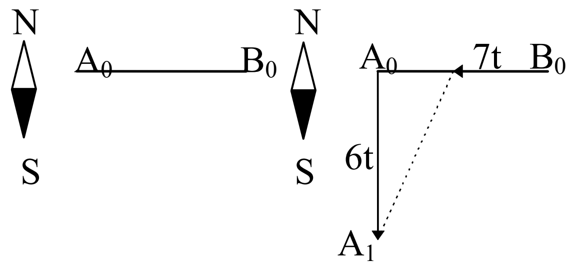
Пусть x – расстояние от точки C до того места, откуда спортсмен начинает плыть к буйку. Тогда спортсмен пробегает расстояние $L - x$, а проплывает расстояние $\sqrt{l^2 + x^2}$. Общее время движения от старта A до буйка B равно $t(x) = \dfrac{L - x}{v_1} + \dfrac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v_2}$, где $0 \le x \le L$. Исследуем эту функцию на экстремум: $t'(x) = -\frac{1}{v_1} + \frac{x}{v_2 \cdot \sqrt{l^2 + x^2}}$. Отсюда, $t'(x) = 0$ при $x = l\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$. Определим знак второй производной

в этой точке: $t''\left(l\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}\right) = \frac{l^2}{v_2\sqrt{\left(l^2 + x^2\right)^3}} > 0.$

Подставляя численные значения всех величин, получим $x_m = 50$ м.

Задача8

Бортовые огни малых судов можно различить в море на расстоянии до 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях от корабля B, который идет на запад со скоростью 7 миль в час. Будут ли корабли друг от друга на расстоянии, достаточном для приема бортовых сигналов?



а) б)

Рис. 33

Решение

Рассмотрим положение кораблей A и B в настоящее время (см. рис. 33,а). Через t часов корабли займут новое положение (см. рис. 33,б): первый окажется в точке A_1, $|A_0A_1| = 6t$ миль, второй – в точке B_1, $|B_0B_1| = 7t$ миль. В момент t расстояние d между кораблями будет составлять

$d(t) = |A_1B_1| = \sqrt{|A_0A_1|^2 + |A_0B_1|^2} =$
$\sqrt{(6t)^2 + (5 - 7t)^2} = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}.$ Исследуем функцию $d(t) =$

$\sqrt{85t^2-70t+25,}$ где $t>0$ на экстремум. Имеем $d'(t)=\dfrac{170t-70}{2\sqrt{85t^2-70t+25}}$. Отсюда $d'(t)=0$ при $t=\dfrac{7}{17}$ ч. Найдем вторую производную и определим знак второй производной в критической точке $d''(t)=\dfrac{80100}{4\sqrt{\left(85t^2-70t+25\right)^3}}>0$ при $t=\dfrac{7}{17}$. Итак, наименьшее расстояние, на котором друг от друга могут оказаться корабли A и B, составляет примерно $d\left(\dfrac{7}{17}\right)=\sqrt{85\cdot\dfrac{49}{289}-70\cdot\dfrac{7}{17}+25}=\sqrt{\dfrac{180}{17}}\approx 3{,}25$ мили, что значительно больше 1 мили. Следовательно, принимать друг от друга сигналы бортовых огней они не смогут.

Задача 9

Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $S(t)=5t+2t^2-\dfrac{2}{3}t^3$, S – путь в метрах, t – время в секундах. В какой момент времени t скорость движения будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

Решение

Нас интересует скорость движения. Мгновенная скорость движения v есть производная пути S по времени t, т.е. $v=S'$. Функция имеет вид: $v(t)=5+4t-2t^2$. Эту скорость будем теперь рассматривать как функцию времени. Очевидно, $0<t$. Производная $v'(t)=-4t+4$ обращается в нуль в единственной точке $t=1$. Это значение и доставляет v максимальное значение, так как $v''(t)=-4$.

При $t = 1$ скорость движения будет наибольшей: $v(1) = 7$ м/с.

Задача 10

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R (рис. 3).При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

Решение

Пусть предметнаходится в точке A.Из условия задачи имеем: $E = k\dfrac{\cos\alpha}{c^2}$, где $c = \sqrt{H^2 + R^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{H}{c}$.Определим функцию:

$E(H) = k\dfrac{H}{\left(\sqrt{H^2 + R^2}\right)^3}$, где $H > 0$. Исследуем её на экстремум:

$E'(H) = k\dfrac{R^2 - 2H^2}{\sqrt{\left(H^2 + R^2\right)^5}}$. Следовательно, $E'(H) = 0$ при $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R.$

Определим знак второй производной в этой точке:

$$E''\left(H = \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) = \frac{6H^3 - 9HR^2}{\sqrt{\left(H^2 + R^2\right)^7}} = \frac{3R^3\left(2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}R^2\right)^7}} < 0,$$

т.к. числитель меньше нуля. Итак, освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей, т.е. достигнет наибольшей величины, когда высота лампы над столом составит $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R.$

Задача 11

Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.

Решение

Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие F_x и F_y (см. рис. 4). Сила нормального давления саней и вертикальной составляющей силы F: $N = P - F\sin\alpha$, поэтому сила трения $F_{тр} = kN = k(P - F\sin\alpha)$. Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x = F_{тр}$, то есть $F\cos\alpha = k(P - F\sin\alpha)$. Отсюда находим силу F как функцию угла α: $F(\alpha) = \dfrac{kP}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$. $F'(\alpha) = \dfrac{kP(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{(k\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$.

Следовательно, $F'(\alpha) = 0$ при $k = tg\alpha$.

Определим знак второй производной в этой точке:

$$F''(\alpha) = \frac{(k^2+2)\sin^2\alpha - 2k\sin\alpha\cos\alpha + (2k^2+1)\cos^2\alpha}{(k\sin\alpha + \cos\alpha)^3}.$$

При $tg\alpha = k$ имеем $\alpha = arctgk$; $\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

Поэтому $F'' = \dfrac{k^4 + 2k^2 + 1}{\sqrt{(k^2+1)^5}} > 0$. Следовательно, сила F будет минимальной. При этом минимальное значение силы F равно $F_{\min} = \dfrac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$.

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую веревку. Если же коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной.

Задача12

В точке A прямолинейного рычага второго рода, находящейся на расстоянии d сантиметров от его точки опоры, подвешен груз P килограммов. Собственный вес рычага составляет k килограммов на каждый сантиметр его длины. Какой длины должен быть этот рычаг, чтобы сила F , приложенная к его другому концу и уравновешивающая груз и собственный вес рычага, имела наименьшую величину?

Решение

Пусть длина рычага равна x сантиметрам. Тогда его собственный вес составляет kx килограммов и приложен на расстоянии $\dfrac{x}{2}$ сантиметров от точки опоры (см. рис. 5). На основании закона равновесия рычага имеем $Pd + kx \cdot \dfrac{x}{2} = Fx,\ F(x) = \dfrac{Pd}{x} + \dfrac{kx}{2}$, где $x > 0$. Исследуем функцию на экстремум: $F'(x) = -\dfrac{Pd}{x^2} + \dfrac{k}{2}$. Следовательно, $F'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{\dfrac{2Pd}{k}}$. Т.к. $x > 0$, то определим знак второй производной в точке $x = \sqrt{\frac{2Pd}{k}}$. Имеем: $F''\left(\sqrt{\frac{2Pd}{k}}\right) = 2 \cdot \frac{Pd}{x^3}\Bigg|_{x=\sqrt{\frac{2Pd}{k}}} > 0$. Следовательно, $F_{наим} = \sqrt{2Pdk}$. Этот рычаг должен иметь длину $x = \sqrt{\frac{2Pd}{k}}$ см.

Задача13

Между экраном и расположенной на расстоянии l от него светящейся точкой требуется поместить собирательную линзу, чтобы получить на экране изображение этой точки. Определите наибольшее допустимое для этой цели фокусное расстояние линзы и соответствующее расстояние линзы от светящейся точки.

Решение

Обозначим искомое фокусное расстояние линзы буквой F, а соответствующее расстояние линзы от светящейся точки – буквой d (см. рис. 6). Тогда расстояние от линзы до экрана составит $l-d$. Поэтому, полагая в формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ величину $f=l-d$, получим, что $\frac{1}{d}+\frac{1}{l-d}=\frac{1}{F}$, откуда после сокращения найдём, что $F(d) = -\frac{1}{l}d^2 + d$, где $0<d<l$. Исследуем на экстремум: $F'(d) = -\frac{2d}{l}+1$. Следовательно, $F'(d)=0$ при $d=\frac{l}{2}$. Так как $F''(d) = -\frac{2}{l} < 0$, то F достигает наибольшей величины при $d=\frac{l}{2}$ и

$F_{наиб} = \frac{l}{4}$.

Задача14[17,215]

Известно, что прочность балки T с прямоугольным сечением изменяется прямо пропорционально ширине b и квадрату высоты h

(см. рис. 7). Таким образом, $T = k \cdot b \cdot h^2$.

а) Каковы должны быть размеры сечения балки наибольшей прочности, если балка выпилена из круглого бревна данного диаметра $d = 60$ см. Как выбрать b и h? Вычислите отношение $h : b$.

б) Для прогиба d балки длины l, ширины b и высоты h с нагрузкой L имеем $d = c \cdot L \cdot \frac{l^3}{h^3 b}$. Как изменится прогиб, когда l, h и b удвоятся?

Решение

а) По условию задачи прочность

$T = k \cdot b \cdot h^2$, но $h^2 = d^2 - b^2$. Отсюда

$$T(b) = k \cdot \left(d^2 b - b^3\right), \text{ где } b > 0.$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$T'(b) = \left(d^2 - 3b^2\right) \cdot k.$$

Следовательно, $T'(b) = 0$ при $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Определим знак второй производной в этой точке:

$$T''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0.$$

Следовательно, при $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ прочность балки будет наибольшей.

Найдём h. Имеем $h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$, так как $d = 60$ см, то

$h = 60 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ см. Итак, $b = \frac{60}{\sqrt{3}}$ см, $h = 60 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ см. Отношение $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$.

б) Эту часть задания мы предлагаем решить самостоятельно.

Задача 15

На стене висит картина. Нижний конец её на 75см, а верхний на 3м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

Решение

Пусть глаз наблюдателя находится в точке $C \quad (x;0)$, верхний край картины – в точке $B(0;a)$, нижний край – в точке $A(0;b)$ (см. рис. 8), $a = 3$ м, $b = 0{,}75$ м. Тогда

$AC = \sqrt{x^2 + b^2}, BC = \sqrt{x^2 + a^2},$ по теореме косинусов

$$AB^2 = (a-b)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left(x^2 + b^2\right) + \left(x^2 + a^2\right) - 2\sqrt{\left(x^2 + a^2\right) \cdot \left(x^2 + b^2\right)} \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{x^2 + b^2 + x^2 + a^2 - (a-b)^2}{2\sqrt{\left(x^2 + a^2\right) \cdot \left(x^2 + b^2\right)}} = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right) \cdot \left(x^2 + b^2\right)}}.$$

Поскольку $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а на этом промежутке $\cos\alpha$ убывает, то задача сводится к нахождению точки минимума функции

$f(x)=\dfrac{x^2+ab}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)\cdot\left(x^2+b^2\right)}}$ на промежутке $(0;+\infty)$. Производная

$$f'(x)=\frac{(a-b)^2\left(x+\sqrt{ab}\right)x\left(x-\sqrt{ab}\right)}{\left(\left(x^2+a^2\right)\cdot\left(x^2+b^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Критическая точка $x=\sqrt{ab}\in(0,+\infty)$. Исследуем эту критическую точку по знаку производной $f'(x)$ слева и справа от неё, как это показано в таблице 3, убеждаемся, что критическая точка $x=\sqrt{ab}$ есть точка минимума. Таким образом наблюдатель должен стоять на расстоянии $\sqrt{0{,}75\cdot 3}$ м=1,5 м от стены.

Таблица 3 **– Исследование по знаку производной**

x	$\left(0;\sqrt{ab}\right)$	$\sqrt{ab}$	$\left(\sqrt{ab};\infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	убыв.	$\smile$ min	возр.

Задача 16

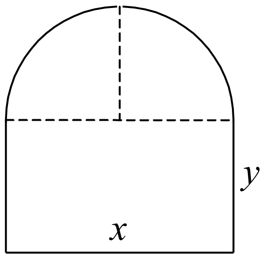


Рис. 34

Окно имеет форму прямоугольника, дополненного полукругом (см. рис. 34). Периметр окна равен P. При каком отношении сторон прямоугольника окно будет пропускать больше света?

Решение

Обозначим длины сторон прямоугольника x и y; тогда площадь окна $S = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Но x и y связаны соотношением $x + 2y + \pi\frac{x}{2} = P$. Следовательно,

$$S(x) = x\left(\frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\frac{x^2}{8} \quad \text{или} \quad S(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 + \frac{P}{2}x\,,\ \text{где}$$

$x > 0$.

Чтобы окно пропускало много света, необходимо чтобы оно имело наибольшую площадь. Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{P}{2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \frac{P/2}{1+\frac{\pi}{4}} = \frac{2P}{4+\pi}$.

Так как $S''(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < 0$, то $S(x)$ достигает наибольшего значения при $x = \frac{2P}{4+\pi}$, $y = \frac{P}{4+\pi}$. Таким образом, высота прямоугольной части окна должна быть в два раза меньше ширины.

Задача 17

Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку так, чтобы количество отходов было наименьшим (см. рис. 35).

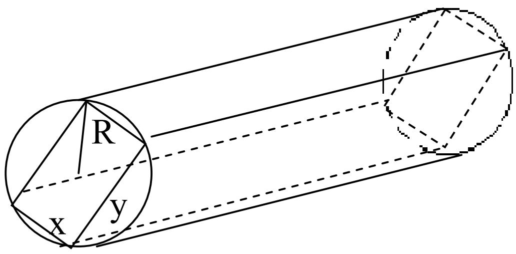


Рис. 35

Решение

Количество отходов определяется площадью той части в сечении бревна, которая не входит в прямоугольник.

Поэтому задачу можно переформулировать: в круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади. Если x и y – стороны прямоугольника, S – площадь прямоугольника, то $S = xy$. Если прямоугольник вписан в круг, то $x^2 + y^2 = 4R^2$. Следовательно, $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, где $x > 0$. Найдём производную $S'(x)$: $S'(x) = \dfrac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \sqrt{2}R$. Исследуем функцию в этой точке на экстремум, для этого определим знак второй производной в этой точке: $S''(x) = \dfrac{-12R^2x + 2x^3}{\sqrt{(4R^2 - x^2)^3}}$, то $S''(\sqrt{2}R) < 0$. Следовательно, функция в этой точке достигает своего наибольшего значения. Таким образом, количество отходов будет наименьшим, если в сечении – квадрат.

Задача 18

Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

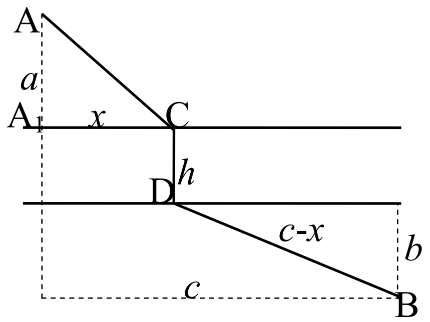


Рис. 36

Решение

Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (см. рис. 36). Расстояния a, b, c и h согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном в плане месте, то длина дороги между пунктами A и B равна $l = AC + h + DB$. Выбрав за независимую переменную x расстояние A_1C, получим $AC = \sqrt{a^2 + x^2}$, $DB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ и $l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (x - c)^2}$, где x изменяется на отрезке $[0; c]$.

Теперь найдём наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0; c]$. $l'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \dfrac{x - c}{\sqrt{b^2 + (x - c)^2}}$. Следовательно, $l'(x) = 0$ при $x_1 = \dfrac{ac}{a - b}$ и $x_2 = \dfrac{ac}{a + b}$. Точка x_1 лежит вне отрезка $[0; c]$: при $a > b,\ x_1 > c$; при $a < b,\ x_1 < 0$. Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и c, так как при этом $x_2 > 0$ и $\dfrac{a}{a + b} < 1$, т. е. $x_2 < c$.

Таблица 4 **- исследование по знаку производной**

x	0	x_2	c
l'	—	0	+
l	убыв.	$\smile$ min	возр.

Внутри отрезка $[0; c]$ функция $l(x)$ имеет одну критическую точку x_2. Исследуя эту критическую точку по знаку производной $l'(x)$ слева и справа от неё, как это показано в таблице 4, убеждаемся, что точка x_2 есть точка минимума. Следовательно, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние

$$A_1C = \frac{ac}{a+b}.$$

Здесь мы исследовали критическую точку по знаку производной $l'(x)$ слева и справа от неё (см. таблицу 3). Этот способ более эффективен в данном случае, т. к. гораздо труднее вычислить вторую производную.

Задача 19[15,185]

400 – метровая беговая площадка состоит из двух параллельных прямых и двух полукругов. Какой радиус должен иметь полукруг, для того, чтобы игровая площадка (см. рис. 37) имела наибольшую площадь?

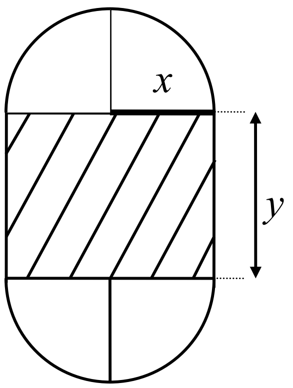


Рис. 37

Решение

Игровая площадка имеет форму прямоугольника со сторонами $2x$ и y. Площадь определяется по формуле $S = 2x \cdot y$. Из условия известно, что длина беговой дорожки равна 400 метрам. Имеем $400 = 2\pi x + 2y$. Следовательно, $y = 200 - \pi x$. Теперь найдем наибольшее значение функции

$$S(x) = 2x \cdot (200 - \pi x), \text{где } x > 0.$$

Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = 2 \cdot (200 - 2\pi x)$. Отсюда $S'(x) = 0$ при $x = \frac{100}{\pi}$. $S''(x) = -2\pi < 0$ при $x = \frac{100}{\pi}$. При

$x = \dfrac{100}{\pi}$ и $y = 100$ достигается наибольшее значение площади игровой площадки.

Задача 20

Спортплощадку площадью 0,9 гектара, имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада – проволочным. Установка 1 метра деревянного забора обходится в 500 рублей, проволочного – в 200 рублей. На строительство выделено 120000 рублей. Достаточно ли этой суммы?

Решение

Обозначим через x длину северной стороны, через y – длину восточной. Тогда $x \cdot y = 9000$ (м^2) и стоимость S (в рублях) строительства будет равна $S = 1000x + 400y$. Найдём наименьшее значение

$$S(x) = 1000x + 400y = 1000x + \frac{400 \cdot 9000}{x} = 1000\left(x + \frac{3600}{x}\right),\text{ где}$$

$$x > 0.$$

Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = 1000\left(1 - \dfrac{3600}{x^2}\right)$.

Отсюда, $S'(x) = 0$ при $x = 60$. Определим знак второй производной в точке $x = 60$. Имеем $S''(x) = \dfrac{7200000}{x^3} > 0$.

Если $x = 60$, то $y = 150$. Определим, какая сумма потребуется при этих размерах. $S = 1000 \cdot 60 + 400 \cdot 150 = 120000$ рублей.

Следовательно, выделенной на строительство суммы будет достаточно только в том случае, если с севера и юга спортплощадка будет иметь длину 60 метров, а с востока и запада – 150 метров.

Задача 21

На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строками) S см^2. Ширина полей на странице слева и справа должна быть равна k см, а сверху и снизу – d см (см. рис. 38). Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

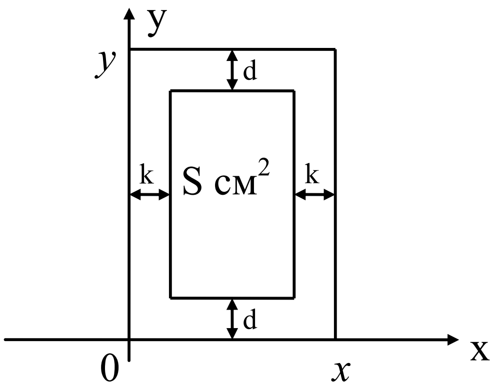


Рис. 38

Решение

Пусть ширина страницы x см, а высота – y см. Из условия задачи имеем $S=(x-2k)(y-2d)$. Выразим y. Отсюда $y=\dfrac{S}{x-2k}+2d$.

Для того чтобы страницы были наиболее выгодные, необходимо исследовать функцию $S(x)=x\cdot\left(\dfrac{S}{x-2k}+2d\right)$ на наименьшее значение (в целях экономии бумаги), где $x>0$.

Имеем $S'(x)=\dfrac{-2kS}{(x-2k)^2}+2d$. Отсюда $S'(x)=0$ при $x=\sqrt{\dfrac{kS}{d}}+2k$.

Определим знак второй производной в критической точке:

$$S''(x)=\frac{4kS}{(x-2k)^3},\quad S''\left(\sqrt{\frac{kS}{d}}+2k\right)=\frac{4\sqrt{d^3}}{\sqrt{kS}}>0\,.$$

Следовательно, $S(x)$ будет наименьшим при

$$x = \sqrt{\frac{kS}{d}} + 2k, \; y = \sqrt{\frac{dS}{k}} + 2d.$$

Задача 22

Реакции организма на два лекарства как функции времени t (время выражается вчасах) выражаются функциями $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

Решение

Исследуем первую функцию на экстремум: $r_1'(t) = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$. Отсюда $r_1'(t) = 0$ при $t = 1$. Так как $r_1''(t) = -2e^{-t} + te^{-t} < 0$, то у первого лекарства будет достигнута максимальная реакция при $t = 1$. Исследуем вторую функцию: $r_2'(t) = 2te^{-t} - t^2e^{-t} = e^{-t}\left(2t - t^2\right)$. Отсюда $r_2'(t) = 0$ при $t_1 = 0$ и $t_2 = 2$. Вычислим вторую производную $r_2'' = e^{-t}\left(t^2 - 4t + 2\right)$. При $t_1 = 0$ имеем $r_2'' = 2e^0 = 2 > 0$, поэтому достигается наименьшее значение. При $t_2 = 2$ имеем $r_2'' = \frac{1}{e^2}(4 - 8 + 2) < 0$, поэтому достигается наибольшее значение. Следовательно, максимальная реакция организма на два лекарства будет равна соответственно $r_1(1) = \frac{1}{e}$, $r_2(2) = \frac{4}{e^2}$. Так как $r_2(2) > r_1(1)$, то у второго лекарства максимальная реакция выше.

Задача 23

В химических лабораториях часто практикуется изготовление конусообразных фильтров из кружков пропускной бумаги. С этой целью сектор $OACB$ кружка (см. рис. 39) складывается и оставшийся от кружка сектор $OAMB$ свёртывается в боковую поверхность конуса. При какой величине угла AOB конусообразный фильтр, полученный таким образом из кружка радиуса r, имеет наибольший объём?

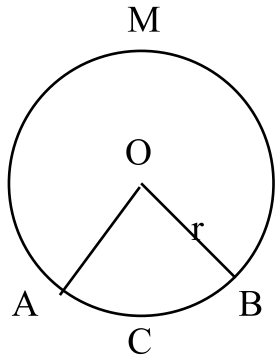


Рис. 39

Решение

Объём полученного конусообразного фильтра выражается формулой: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot x^2\sqrt{r^2-x^2}$, где x – радиус окружности, длина которой равна длине дуги AMB. Исследуем функцию $V(x)=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{r^2-x^2}$, где $0<x<r$, на экстремум. Для этого вычислим первую производную, приравняем её к нулю и найдём точки, подозрительные на экстремум: $V'(x)=\frac{\pi x}{3}\left(\frac{2r^2-3x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$.

Следовательно, $V'(x)=0$ при $x_1=0$ и $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}r$. Определим знак второй производной в критических точках. Для этого вычислим вторую производную.

$$V''(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(r^2-x^2\right)^3}}\cdot\left(2r^4-9x^2r^2+6x^4\right).$$

Таким образом $V''(0)>0$, $V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)<0$. Видим, что в точке x_2

функция достигает наибольшей величины. Но так как $2\pi x = \cup AMB = \dfrac{\pi r\left(360^0 - \angle AOB\right)}{180^0}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}r.$ Следовательно, V достигает наибольшей величины, когда $\angle AOB \approx 66^0$.

Задача 24

К яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле – расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полёта – взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам путь шмеля и путь пчелы. Найдите формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелём и пчелой от времени x их полёта. Установите момент, когда в полёте шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения.

Решение

Пусть O – точка пересечения траекторий шмеля и пчелы. Тогда через время x расстояния шмеля и пчелы от точки O будут соответственно равны $\pm\left(xv_1 - a\right)$ и $\pm\left(xv_2 - b\right)$. Отсюда, по теореме Пифагора, расстояние между шмелём и пчелой через время x будет $f(x) = \sqrt{\left(xv_1 - a\right)^2 + \left(xv_2 - b\right)^2}$, $f'(x) = 0.$ Следовательно, $v_1\left(xv_1 - a\right) + v_2\left(xv_2 - b\right) = 0$. Отсюда найдём x:

$$x = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Исследуем функцию на экстремум, для этого определим знак второй производной в точке, подозрительной на экстремум:

$$f''(x)=\frac{(v_2a-v_1b)^2}{\sqrt{(xv_1-a)^2+(xv_2-b)^2}};\qquad f''\left(\frac{v_1a+v_2b}{v_1^2+v_2^2}\right)>0.$$

Таким образом расстояние между шмелём и пчелой будет наименьшее в момент времени $x=\dfrac{v_1a+v_2b}{v_1^2+v_2^2}$.

Задача 25

В Челябинской области ежегодно выбрасывается в водоёмы миллион кубометров неочищенных вод. При постройке канала водоочистительных сооружений необходимо использовать канал с наибольшей площадью сечения, которое по форме представляет равностороннюю трапецию (боковые стороны и одно из оснований равны) (см. рис. 40). При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

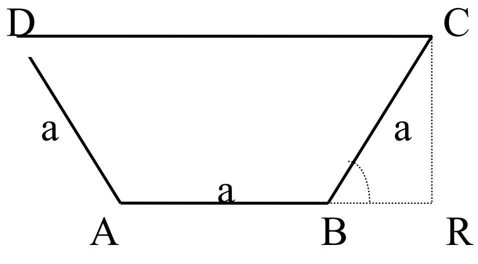


Рис. 40

Решение

Обозначим меньшее основаниетрапеции через a, угол наклона боковых сторон через $\angle CBR=\alpha$, площадь сечения через S. По условию $AB=AD=BC=a.$ Из треугольника BCR найдём $BR=a\cos\alpha$. Тогда $CD=a+2a\cos\alpha$, высота трапеции равна $CR=a\sin\alpha$. Определим площадь трапеции: $S=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha$. Чтобы найти наибольшее значение площади $S=S(\alpha)$, найдём критические точки, принадлежащие интервалу

$(0;\pi/2)$. Найдём производную $S'(\alpha)=a^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right)$. Следовательно, $S'(\alpha)=0$ при $\alpha_1=\pi/3$, $\alpha_2=\pi$. Интервалу $(0;\pi/2)$ принадлежит только критическая точка $\alpha_1=\pi/3$, найдём

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2,\quad S(0)=0,\quad S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2.$$

Таким образом, площадь сечения канала является наибольшей, если угол наклона боковых сторон равен 60^0.

Задача 26

Каковы должны быть размеры свинцового контейнера (см. рис. 41) для хранения радиоактивных отходов, чтобы на его изготовление ушло минимальное количество свинца? Дно контейнера квадратное, объём равен 64 м^3.

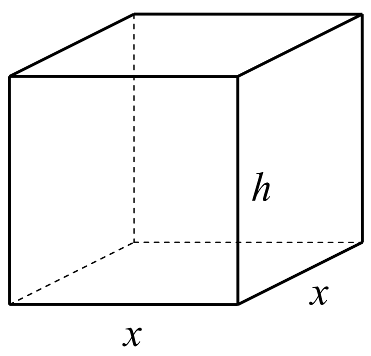


Рис. 41

Решение

Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Так как в основании контейнера квадрат, а контейнер имеет и дно и крышку, то нам потребуется на изготовление 4 боковых поверхности и 2 нижних. $S=2x^2+4hx$. Известно, что $V=64\ м^3$, следовательно, $h=\dfrac{64}{x^2}$. Запишем функцию

$$S(x)=2x^2+4x\frac{64}{x^2}=2x^2+\frac{256}{x},\ \text{где}\ x>0.$$

Исследуем эту функцию на экстремум: $S'(x)=4x-\dfrac{256}{x^2}$.

Следовательно, $S'(x)=0$ при $x=4$. Так как $S''(4)=4+\frac{256\cdot 2}{4^3}>0$, то при $x=4$, $h=4$ потребуется минимальное количество свинца.

Задача 27

Для ликвидации утечки нефти в порту ночью нужно осветить место аварии. Для этого на высоту h нужно поднять фонарь над центром площадки (рис. 42), представляющей собой квадрат со стороной a метров, чтобы в средних точках каждой из сторон этого квадрата освещённость достигла наибольшей величины. Освещённость выражается формулой $T=\frac{k\cos\alpha}{|FK|^2}$, где k – число, определяющее мощность фонаря, FK – расстояние от фонаря до средней точки стороны квадрата. Найдите высоту h, при которой освещённость будет максимальной.

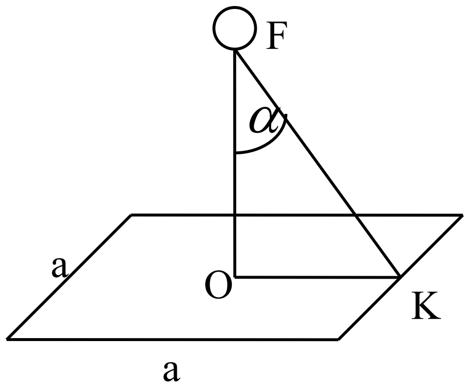


Рис. 42

Решение

Известно, что $OF=h$, $OK=\frac{a}{2}$. Следовательно, $|FK|^2=h^2+\frac{a^2}{4}$.

$$\cos\alpha=\frac{OF}{FK}=\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}=\frac{2h}{\sqrt{4h^2+a^2}}$$

Получили функцию $T(h)=\frac{k\cdot 2h\cdot 4}{\sqrt{4h^2+a^2}\cdot\left(4h^2+a^2\right)}=\frac{8kh}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\right)^3}}$, где

$h > 0$. Исследуем её на экстремум: $T'(h) = \dfrac{8k\left(a^2 - 8h^2\right)}{\sqrt{\left(4h^2 + a^2\right)^5}}$.

Следовательно, $T'(h) = 0$ при $h = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. Так как

$$T''(h) = \frac{8k}{\sqrt{\left(4h^2 + a^2\right)^7}} \cdot \left(96h^3 - 36ha^2\right) \text{ и}$$

$$T''\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{8k}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{2} + a^2\right)^7}} \cdot \left(\frac{96a^3}{16\sqrt{2}} - \frac{36a^3}{2\sqrt{2}}\right) < 0,$$

то освещённость будет наибольшей при $h = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Задача 28

Для хранения радиоактивных отходов при перевозке разработали специальный контейнер. Отходы помещают в резервуар, имеющий форму правильной треугольной призмы заданного объёма V. Призму помещают в цилиндр. Призма и цилиндр сделаны из соединений свинца и специальных биодобавок, а между стенками цилиндра и призмы находится вакуум. Найдите наименьшую площадь поверхности такого цилиндра.

Решение

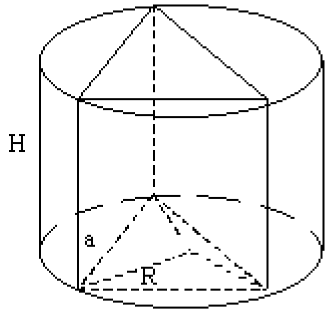


Рис. 43

Высоту призмы обозначим H, длину стороны основания a, радиус описанного цилиндра R (см. рис. 43). Этот радиус равен радиусу окружности, описанной около основания призмы, а поскольку основание – правильный треугольник, то $R = a/\sqrt{3}$. По условию имеем $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 H = V$. Следовательно, $H = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. Площадь поверхности цилиндра равна $S(a) = 2\pi R^2 + 2\pi RH = \frac{2\pi}{3}\left(a^2 + \frac{4V}{a}\right)$, где $a > 0$.

Находим критическую точку этой функции: $S'(a) = \frac{2\pi}{3}\left(2a - \frac{4V}{a^2}\right)$.

Следовательно, $S'(a) = 0$ при $a = \sqrt[3]{2V}$. Так как $S''(a) = \frac{2\pi}{3}\left(2 + \frac{8V}{a^3}\right)$ и $S''\left(\sqrt[3]{2V}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(2 + \frac{8V}{2V}\right) > 0$, то функция $S(x)$ имеет наименьшее значение при $a = \sqrt[3]{2V}$ и оно равно $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$.

7.2 Задачи для самостоятельного решения

1. Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости x (км/ч) при движении на четвёртой передаче приблизительно описывается функцией f :
$f(x) = 0{,}0017x^2 - 0{,}18x + 10{,}2;\ x \geq 30.$

При какой скорости расход горючего будет наименьший? Какова наименьшая величина расхода?

2. Из луговых земель, расположенных на берегу реки Икса, фермер решил отвести под овощные культуры 8 га. Найдите ширину и длину участка прямоугольной формы

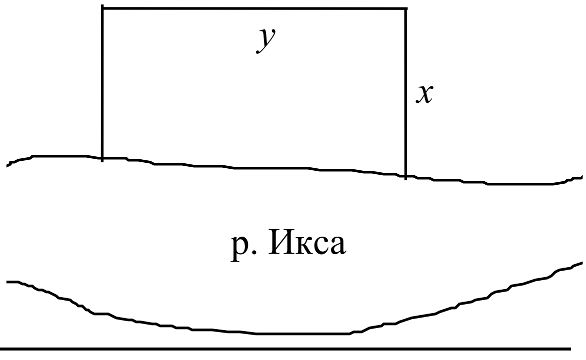


Рис. 44

(см. рис. 44), отводимого под овощные культуры, чтобы на ограждение этого участка израсходовать наименьшее количество строительного материала.

3. Стоимость топлива, необходимого для движения океанского танкера, пропорциональна кубу его скорости и составляет 10 руб. в час при скорости 10 узлов (1 у=1852 м/ч). Все другие виды расходов составляют 40 руб. в час. Найдите экономию средств при движении с наиболее выгодной скоростью, если до порта назначения 1000 морских миль.

4. Требуется построить канал, имеющий в сечении форму равнобедренной трапеции, основание и боковые стороны которого имеют по 8 м. Какова должна быть ширина канала, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

5. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

6. Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью 40000 м^2. Затраты на постройку одного дома жилой площадью S складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. При строительстве дома жилой площадью 400 м^2 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо строить домов, чтобы затраты были наименьшими?

7. Пакет 1 литра молока имеет форму параллелепипеда. Пакет изготовлен из специального куска бумаги. На рисунке 45 показано, как происходит складывание пакета. При каких значениях x и h будет затрачено меньше бумаги?

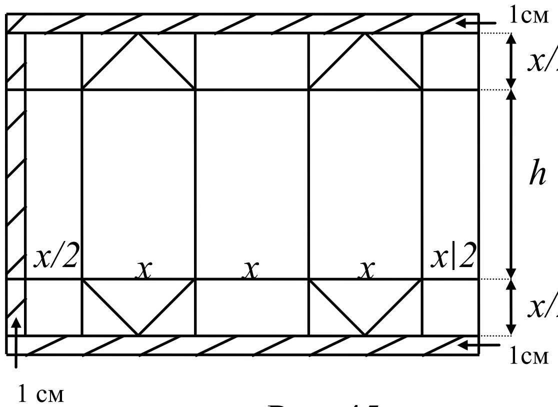


Рис. 45

8. Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку так, чтобы количество отходов было наименьшим.

9. Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь расположен на берегу). Если матрос может делать пешком по 5 км/час, а на веслах по 4 км/час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

11. Верхняя точка трамплина находится на высоте H над землей, а на высоте h трамплин обрывается (рис. 46). Какой должна быть высота h при заданной высоте H, чтобы лыжник, съехав с трамплина, мог пролететь наибольшее расстояние S (считая по горизонтали)? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

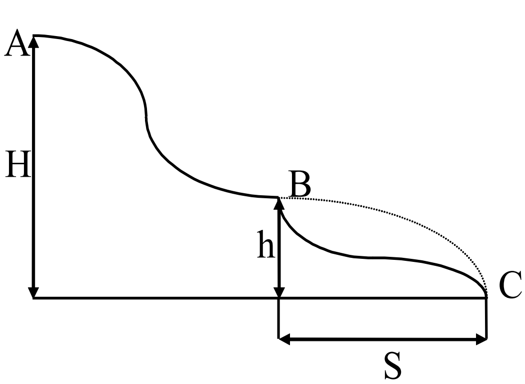


Рис. 46

10.

12. Из полукруглого листа железа, радиус которого 4 дм, требуется вырезать равнобедренную трапецию максимальной площади

13. На территории целинных земель строят элеватор в пункте A на расстоянии h км от ближайшей железнодорожной магистрали. Расстояние BC от ближайшей станции этой магистрали до основания перпендикуляра AC , проведённого из пункта A к линии этой железной дороги, равно d км. Участок BC железной дороги прямолинейный. На этом участке требуется выбрать пункт D, чтобы от него построить прямолинейную железнодорожную узкоколейную ветку DA к элеватору. На каком расстоянии от пункта C должен находиться пункт D, чтобы проезд по трассе $BD+DA$ со средней скоростью v км/ч на участке BD и со средней скоростью v_1 км/ч на участке $DA\left(v_1 < v\right)$ длился наименьшее время?

14. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным направлениям. В 9 ч расстояние между ними 20 миль, а в 9 ч 36 мин – 15 миль и в 9 ч 55 мин – 13 миль. В какой момент времени расстояние между пароходами минимально и каково это расстояние?

15. Расстояние от песчаного карьера до кирпичного завода, расположенного на прямолинейной автомагистрали, равно 30 км. Песчаный карьер удален от этой магистрали на 24 км. Строительный кооператив взял подряд на строительство подъездной дороги от карьера к автомагистрали. На каком расстоянии от кирпичного завода должна находиться развилка дорог, чтобы время доставки грузов от карьера до завода было наименьшим, если известно, что автомашины

могут развивать на магистрали скорость 52 км/ч, а на подъездной дороге – 20 км/ч?

16. На рисунке 47 изображен контейнер для мусора. Чтобы он имел наибольший объем, передняя стенка (при заданной ширине b) должна иметь максимально возможную площадь. Определите угол φ так, чтобы площадь S этой стенки была наибольшей.

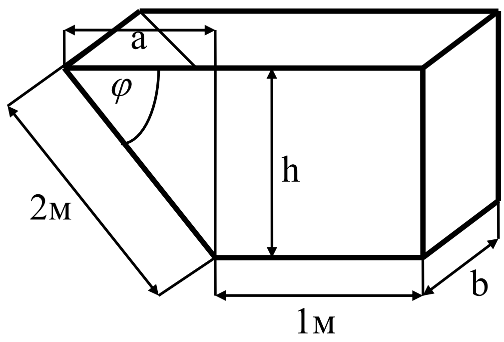


Рис. 47

17. Два прямолинейных шоссейных пути пересекаются в пункте C под углом 60^0. К пункту C одновременно отбыли две автомашины: одна со скоростью 1 км/мин – из пункта A, расположенного на одном из этих шоссе на расстоянии 60 км от C, и вторая – со скоростью 0,5 км/мин – из пункта B, находящегося на другом из этих двух шоссе на расстоянии 40 км от C. Через сколько минут после своего отбытия автомашины окажутся на наименьшем расстоянии одна от другой и каково это расстояние?

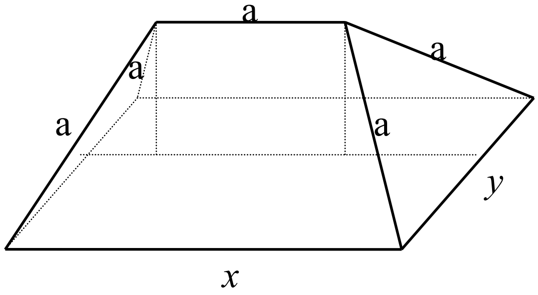


Рис. 48

18. Требуется построить дом с определенной жилой площадью S так, чтобы объем каркаса крыши, формы указанной на рисунке 48, был наибольшим. Длина пяти ребер $a = 5$м.

19. Группа спортсменов организовала на берегу моря следующее соревнование. Стартуя из точки А на берегу моря, каждый спортсмен должен достичь буйка В, расположенного на расстоянии $l = 120$ м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта А до основания перпендикуляра ВС, опущенного на эту линию, равно $L = 200$ м (см. рис. 49). Каждый спортсмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта А по направлению к основанию перпендикуляра ВС, а затем плыть к буйку. Победителем считается тот, кто доплывет до буйка В быстрее всех. Из какой точки берега наиболее выгодно начать плыть к буйку спортсмену, который знает, что при беге по песчаному берегу его скорость равна 13 км/ч, а скорость плавания – 5 км/ч.

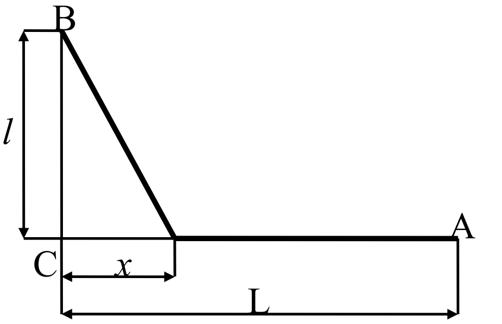


Рис.49

20. Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая (см. рис. 50).

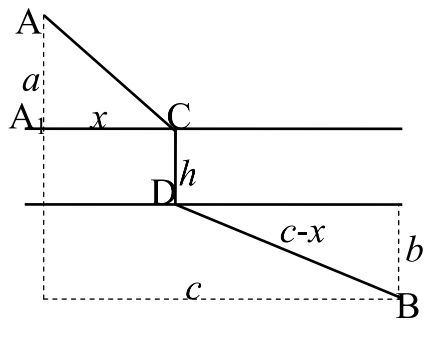


Рис. 50

21. Пункт А стоит в поле на расстоянии 8 км от дороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт В. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из А в В так, что часть пути пройдет по дороге,

то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. Найти максимально возможное расстояние между А и В.

22. Автомобиль выезжает из пункта А и едет с постоянной скоростью υ км/ч до пункта В, отстоящего от пункта А на расстояние 24,5 км. В пункте В автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в А с постоянной скоростью υ км/ч.Какова должна быть скорость и, чтобы автомобиль за наименьшее время проехал путь от А до полной остановки и обратно до пункта А указанным выше способом?

23. Три бригады должны выполнить работу. Первая бригада делает в день 200 деталей. Вторая бригада делает в день на а деталей меньше, чем первая ($0 < a < 200$), а третья бригада делает в день на 5а деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют 1/5 всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся 4/5 работы. На сколько деталей в день меньше должна делать вторая бригада, чем первая, чтобы вся работа была выполнена указанным способом как можно скорее?

24. Между двумя портами, удаленными друг от друга на расстояние 1200 км, с постоянной скоростью курсирует теплоход. Затраты на рейс в одном направлении слагаются из двух частей.

Первая часть, связанная с обслуживанием пассажиров, пропорциональна времени нахождения теплохода в пути,а другая, обусловленная стоимостью топлива, пропорциональна кубу скорости движения. Найти скорость, с которой должен идти теплоход, чтобы затраты на рейс были минимальны, если известно, что при скорости 90 км/ч затраты равны 11,61 тыс. руб., причем стоимость обслуживания пассажиров составляет 16/27 стоимости топлива.

8.Библиографический список

1. Беспалько В.П., Татур Ю.Г. Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов: Учебн.-метод. пособие. М.: Высш. шк., 1989. 144 с.

2. Ганеев Х.Ж. Теоретические основы развивающего обучения математике. Екатеринбург: УрГПУ, 1997. 160 с.

3. Границкая А.С. Научить думать и действовать: Адаптивная система обучения в школе: Кн. для учителя.-М.:Просвещение,1991.-175с.

4. *Далингер В. А.* Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2021. — 460 с.

5. *Далингер В. А.* Методика обучения математике. Практикум по решению задач : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2021. — 271 с.

6. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2-х ч. Ч I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. 110 с.

7. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования//Официальные документы в образовании. 2002.№27. С. 13-33.

8. Мансурова, А.Х. Формирование основ экономической грамотности на уроках математики // Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования: XIV межвузовский сборник научных трудов. Под ред. О.Р.Шефер. Челябинск, 2018.. – С. 127-134.

9. Пойа Д. Усвоение математики, ее преподавание и обучение // Математика в школе. 1964. №6. С. 80-89.

10. Семенова И.Н. Роль и место сюжетных задач в развитии математического мышления и повышении качества знаний учащихся (на материале алгебры и начал анализа). Дисс. на соиск. уч. ст. канд. пед. наук. Свердловск, 1990. 195 с.

11. Семенова И.Н., Слепухин А.В., Стороженко М.А. Сборник задач и учебных заданий, направленных на формирование профессионального умения работать с задачным материалом: Учеб.-методич. пособие/ Урал. гос. пед. ун-т Екатеринбург, 2005. 51 с.

12. Сотой М. Искусство мыслить рационально: Шорткаты в математике и в жизни/ Маркус дю Сотой; [пер. с англ. Д.А. Прокофьева]. – М. : КоЛибри, Азбука Аттикус, 2022. – 384 с.

13. Эрентраут, Е.Н. Практико-ориентированные задачи как средство реализации прикладной направленности курса

математики в профильных школах[Текст]: автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. пед. наук (13.00.02) / Елена Николаевна Эрентраут, Уральский государственный педагогический университет. – Екатеринбург, 2005. – 24 с.

14. Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников. Учебное пособие. Издание второе, дополненное. Челябинск, 2004. 108 с.

15. Ingo Weidig, Peter Zimmermann. Lambacher Schweizer Analysis Grundkurs Mathematisches Unterrichtswerk Ausgabe Baden. – Dusseldorf: Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1998.

16. Gerhard Brustle, Heidi Buck, Rolf Durr, Haus Freudigmann, Rolf Reimer. Lambacher Schweizer Analysis Grundkurs Mathematisches Unterrichtswerk fur das Gymnasium Ausgabe Baden-Wurttemberg. – Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH, 1999.

17. Kurt Arzt, Tubingen August Schmid, Tubingen Jorg Stark, Tubingen. Lambacher Schweizer Analysis Zwei Grundkurs. – Stuttgart Dusseldorf Berlin Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag, 1998.

18. Lord F.M. Application of Item Response Theory to Practical Testing Problems. Hillsdale N - J. Lawrence Erlba-um Ass., Publ. 1980, - 266 pp.

19. Weiss D.J.(Ed.) New Horizons in Testing: Latent Trait Test Theory and Computerised Adaptive Testing. N - Y..., Academic Press, 1983.-345pp.

Учебное издание

Эрентраут Елена Николаевна

Технология обучения решению задач на оптимизацию с использованием адаптивной методической системы

Учебно-методическое пособие

Издательство «Абрис»
454007, г. Челябинск пр. Ленина, 15

Подписано в печать 10.06.2025.

Формат 60*90/16 Тираж 500
Объем 7,25 уч.-изд.л. Заказ № 574.

Отпечатано с готового оригинал-макета в
типографии издательства «Абрис»
454007, г. Челябинск, 15