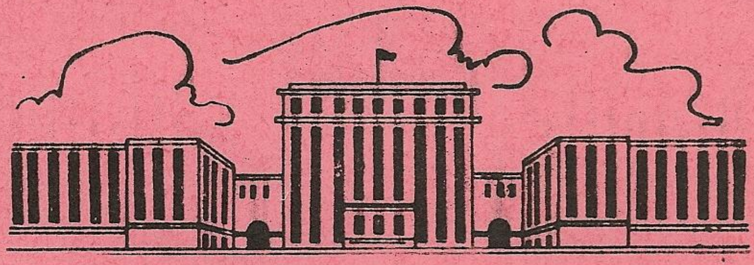


ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Методические указания)

ЧЕЛЯБИНСК
1979

Министерство высшего и среднего специального
образования СССР

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

КАФЕДРА № 2 "ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА"

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Методические указания)

Одобрено
методической комиссией
механико-технологического
факультета

Челябинск
1979

В данной работе дается краткое описание вариационных методов и методические указания к их практическому использованию при решении краевых задач. Применение каждого из методов иллюстрируется примерами. Приводится набор задач для самостоятельного решения.

Методические указания рассчитаны на студентов некоторых специальностей механико-технологического и металлургического факультетов.

Составители: Макаров А.С., Малиновский Ю.Г.,
Смекалина Л.А.

Под редакцией Белякова Л.М.

Техн. редактор Т.В.Симакова

Подписано к печати 2/Х-79г. Формат бумаги 60х90 1/16. Объём 1,25 п.л., 1 уч.-изд.л. Тираж 500 экз. ЧПИ. Заказ 433/1230.

Среди приближенных методов решения краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных, значительное место занимают вариационные методы. Ввиду того, что эти методы, в отличие от большинства других численных методов, позволяют найти приближенное решение в аналитической форме, в некоторых областях научных исследований вариационные методы являются самыми распространенными. Чаще всего применяются методы Ритца, Галеркина, Канторовича, подробное описание и обоснование которых можно найти в книге Михлина С.Г. "Прямые методы в математической физике" или в книге Канторовича Л.В. и Крылова В.И. "Приближенные методы высшего анализа" гл.IУ, § 2,3 . Кроме того ряд примеров и рекомендаций по практическому использованию вариационных методов содержится в учебнике Л.Э.Эльсгольца "Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление" гл.10, § 3,4 .

§ 1. МЕТОД РИТЦА

В основе решения некоторой краевой задачи методом Ритца лежит построение функционала $J(z)$, принимающего наименьшее значение при подстановке в него решения данной краевой задачи. При этом исходная краевая задача заменяется эквивалентной вариационной задачей минимизации функционала $J(z)$. Решение вариационной задачи ищется в виде линейной комбинации

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \qquad (1.1)$$

с постоянными коэффициентами a_k , составленной из n первых функций некоторой выбранной последовательности функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$, называемых координатными функциями. При подстановке (1.1) функционал $J(z)$ превращается в некоторую функцию n переменных

$$J(z_n) = \Phi(a_1, a_2, \ldots a_n) \qquad (1.2)$$

и задача минимизации функционала сводится к отысканию минимума такой функции. Этот минимум находится обычным способом: приравнивая к нулю частные производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots,n), \qquad (1.3)$$

получаем систему уравнений для определения $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Приближенное решение z_n вариационной, а следовательно, и исходной краевой задач получается при подстановке найденного решения системы (I.3) в (I.I). Для решения краевой задачи с заданной точностью на практике строятся приближенные решения z_n для последовательных значений n. Этот процесс продолжается до тех пор пока значения z_n и z_{n+1} не совпадут в пределах заданной точности.

При подготовке к практическим занятиям по решению краевых задач методом Ритца по рекомендованной выше литературе и конспекту лекций особое внимание следует уделить методам получения эквивалентной вариационной задачи и выбору системы координатных функций.

Вид минимизируемого функционала определяет структуру системы (I.3), решение которой является, вообще говоря, весьма сложной задачей. Эта задача значительно упрощается, если минимизируемый функционал имеет вид интеграла, под знаком которого стоит многочлен второй степени относительно неизвестной функции и ее производных. В этом случае уравнения системы (I.3) линейны и решение системы отыскивается несложными стандартными методами.

Выбор последовательности координатных функций сильно влияет на сложность всех дальнейших вычислений. При неудачном выборе координатных функций для достижения требуемой точности приходится брать большое n - число координатных функций, входящих в состав приближенного решения (I.I). Это приводит к необходимости решать систему (I.3) с большим числом уравнений и неизвестных. Если же координатные функции выбраны удачно, то часто высокая точность достигается уже при $n = 2$ или даже $n = 1$. Некоторые указания по выбору минимизируемого функционала и координатных функций приводятся далее.

а) Решение краевых задач
для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть на отрезке $[a, b]$ решается краевая задача для дифференциального уравнения

$$L(z) = f. \qquad (I.4)$$

Очевидно, что функционал

$$J(z) = \int_a^b [L(z) - f]^2 dx,$$

рассматриваемый на множестве функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи (I.4) и обладающих достаточным числом непрерывных производных, принимает наименьшее значение при подстановке в него решения краевой задачи (I.4). Тем же свойством обладает и более общий функционал

$$J(z) = \int_a^b P(x)[L(z) - f]^2 dx,$$

где $P(x)$ - некоторая положительная функция. Такой способ получения функционалов, минимизирующихся решением краевой задачи, принято называть методом наименьших квадратов.

Однако этот метод является не единственным путем получения эквивалентной вариационной задачи. Можно, например, попытаться подобрать минимизируемый функционал так, чтобы уравнение Эйлера для этого функционала совпадало с исходным дифференциальным уравнением (I.4). Этот метод чаще всего и применяется на практике, так как получаемые при этом функционалы имеют наиболее простую структуру.

Так решение краевой задачи на отрезке $[a, b]$ для дифференциального уравнения второго порядка

$$a(x)z'' + b(x)z' + c(x)z = f(x), \qquad (I.5)$$

где функции $a(x), b(x), c(x), f(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $a(x) > 0$ на этом отрезке, заменяется задачей минимизации функционала

$$J(z) = \int_a^b [\alpha(x)z'^2 + \beta(x)z^2 + \gamma(x)z]dx \qquad (I.6)$$

где $\alpha(x) = exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right)$; $\beta(x) = \frac{1}{2} c(x)\mu(x)$;

$\gamma(x) = -f(x)\mu(x)$, а $\mu(x) = -\frac{2\alpha(x)}{a(x)}$.

В частности, если, как часто бывает на практике, $b(x) = a'(x)$, то уравнение (I.5) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}(a(x)z') + C(x)z = f(x),$$

а в функционале (I.6) $\alpha(x) = a(x)$, $\beta(x) = -c(x)$, $\gamma(x) = 2f(x)$.

Минимизация функционала производится на классе всех непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям исходной краевой задачи.

Эти граничные условия определяют выбор последовательности координатных функций и структуру приближенного решения. Если граничные условия для уравнения (I.5) имеют вид

$$z(a) = \alpha; \quad z(b) = \beta, \qquad (I.7)$$

то приближенное решение z_n ищется в виде

$$z_n = \psi_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

где $\psi_0(x)$ - любая непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (I.7), например,

$$\psi_0(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - \alpha),$$

а координатные функции $\varphi_k(a)$ - любые линейно независимые функции, удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям

$$\varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n...).$$

Например, в качестве функций φ_k $(k = 1, 2, ..., n)$ можно взять

$$\varphi_k(x) = (x - a)^k (x - b), \qquad (I.8)$$

или

$$\varphi_k(x) = \sin\left(k\pi \frac{x - a}{b - a}\right),$$

или

$$\varphi_k(x) = (x - a)(x - b) g_k(x),$$

где $g_k(x)$ - какие-нибудь непрерывно дифференцируемые функции.

Если же граничные условия для уравнения (I.5) имеют более общий вид

$$\begin{cases} \alpha_0 z(a) + \alpha_1 z'(a) = \alpha \\ \beta_0 z(b) + \beta_1 z'(b) = \beta, \end{cases} \qquad (I.9)$$

то при нулевых α и β приближенное решение можно искать в виде

$$z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

положив, например

$$\varphi_1(x) = (x - a)^2 \left[x - b - \frac{\beta_1(b - a)}{2\beta_1 + \beta_0(b - a)}\right]$$

$$\varphi_2(x) = (x - b)^2 \left[x - a - \frac{\alpha_1(b - a)}{\alpha_0(b - a) - 2\alpha_1}\right]$$

$$\varphi_k(x) = (x - a)^{k-1}(x - b)^2 \qquad (k = 3, 4, 5, ...).$$

Случай ненулевых α и β можно свести к случаю нулевых заменой искомой функции

$$z(x) = u(x) + g(x),$$

где $g(x)$ - некоторая функция, удовлетворяющая условиям (I.9).

Пример I. Найти решение уравнения

$$y'' + 6xy = 6x^4,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

Эту краевую задачу можно свести к вариационной задаче, построив функционал вида (I.6), для которого данное уравнение является уравнением Эйлера. В нашем случае этот функционал имеет вид

$$J(y) = \int_0^1 [y'^2 - 6xy^2 + 12x^4 y]dx.$$

В качестве координатных функций возьмем последовательность (см. (I.8))

$$\varphi_k(x) = x^k(1 - x), \qquad k = 1, 2, ..., n, ...$$

Ограничиваясь одним членом, приближенное решение ищем в виде

$$y_1(x) = \psi_0(x) + a_1\varphi_1(x),$$

где $\psi_0(x)$ - функция, удовлетворяющая граничным условиям данного уравнения. Проще всего положить $\psi_0(x) = 1 - x$. Тогда

$$y_1(x) = (1 - x)(1 + a_1 x).$$

Подставляя $y_1(x)$ в функционал $J(y)$, получаем

$$J(y_1) = \Phi(a_1) = \frac{7}{30}a_1^2 - \frac{24}{35}a_1 + \frac{7}{10}.$$

Эта функция достигает минимума при $a_1 = \frac{72}{49}$, а следовательно, искомое приближенное решение имеет вид

$$y_1(x) = (1 - x)\left(1 + \frac{72}{49}x\right).$$

б) Решение краевых задач
для дифференциальных уравнений в частных производных

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении методом Ритца краевых задач для уравнений в частных производных минимизируемый функционал обычно строится либо методом наименьших квадратов, либо так, чтобы его уравнение Эйлера совпадало с решаемым уравнением.

Пусть, например, в конечной области D, ограниченной контуром Γ, задано эллиптическое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial z}{\partial y}\right) + gz = f. \qquad (I.10)$$

при нулевых граничных условиях простейшего типа

$$z(x, y)\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad \text{(I.II)}$$

либо

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad \text{(I.I2)}$$

Здесь $p(x,y)$, $g(x,y)$ – положительные, а $f(x,y)$ – произвольная непрерывно дифференцируемые в замкнутой области Д функции, а n – внешняя нормаль к границе. Нулевые граничные условия рассматриваются потому, что общий случай условий типа (I.II) или (I.I2) может быть сведен к рассматриваемому обычной заменой неизвестной функции. Для краевых задач (I.I0), (I.II) или (I.I0), (I.I2) эквивалентные вариационные задачи состоят в минимизации функционала

$$\mathcal{J}(z) = \iint\limits_{D} \left\{ p\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - gz^2 + 2fz \right\} dx\,dy. \qquad \text{(I.I3)}$$

на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (I.II) или (I.I2) соответственно.

Если же в уравнении (I.I0) $g(x,y) \equiv 0$, то вариационная задача эквивалентна краевой задаче (I.I0), (I.II) не изменяется. Для краевой же задачи (I.I0), (I.I2) у минимизируемого функционала (I.I3) на множество допустимых функций кроме условия (I.I2) налагается еще дополнительное условие

$$\iint\limits_{D} z(x,y)\,dx\,dy = 0;$$

при этом функция $f(x,y)$ из уравнения (I.I0) должна удовлетворять условию

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Универсальных рекомендаций по выбору системы координатных функций при решении краевых задач для уравнений в частных производных дать не удается, так как на этот выбор оказывают влияние как тип граничных условий краевой задачи, так и форма области Д. В указанной выше литературе имеется ряд примеров с различными типами областей и граничных условий. Здесь лишь отметим, что при решении краевой задачи (I.I0), (I.II) систему координатных функций можно выбрать следующим образом:

$$\varphi_1 = \omega;\ \varphi_2 = \omega x;\ \varphi_3 = \omega y;\ \varphi_4 = \omega x^2;\ \varphi_5 = \omega y^2;\ \varphi_6 = \omega xy, \ldots, \qquad \text{(I.I4)}$$

где $\omega(x,y)$ – любая непрерывно дифференцируемая в замкнутой области Д функция, удовлетворяющая условиям $\omega(x,y)\big|_{\Gamma} = 0$, $\omega(x,y) > 0$ внутри области Д. В частности, если кривая Г, ограничивающая область Д, может быть задана уравнением вида $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, то можно положить

$$\omega(x,y) = \pm F(x,y).$$

Применение метода Ритца к решению краевых задач для уравнений в частных производных, как правило, приводит к достаточно громоздким вычислениям, поэтому на практических занятиях целесообразно ограничиться решением краевых задач в областях простейшего вида.

Пример 2. Найти приближенное решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

в области Д, ограниченной прямыми $y = \pm(x+1)$, $x = 0$, $x = \mathrm{I}$; при граничном условии $z\big|_{\Gamma} = 0$. (К решению этого уравнения сводится задача о кручении призматического стержня, сечение которого изображено на рисунке.)

В данном случае эквивалентная вариационная задача имеет вид (см. (I.I3)): найти функцию $z(x,y)$ обращающуюся в нуль на границе заданной области и доставляющую минимум функционалу

$$\iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 4z\right] dx\,dy. \qquad \text{(I.I5)}$$

В качестве последовательности координатных функций возьмем последовательность вида (I.I4) при $\omega(x,y) = [y^2 - (x+1)^2](x^2 - x)$. Ограничиваясь одночленным приближением, ищем приближенное решение в виде

$$z_1 = a_1 \varphi_1(x,y) = a_1\left[y^2 - (x+1)^2\right](x^2 - x).$$

Найдя $\frac{\partial z_1}{\partial x}$; $\frac{\partial z_1}{\partial y}$, подставив их в (I.I5) и вычислив полученные двойные интегралы, мы придем, применив необходимое условие экстремума, к уравнению, позволяющему определить значение $a_1 = 0{,}35$. Таким образом искомое приближенное решение поставленной задачи имеет вид $z_1 = 0{,}35\,(y^2 - (x+1)^2)(x^2 - x)$.

§ 2. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Пусть L – некоторый дифференциальный оператор и требуется найти приближенное решение в области Д уравнения

$$L(z) = 0,$$

удовлетворяющее нулевым граничным условиям.

Выберем координатную систему функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Приближенное решение будем искать в виде

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

где a_k – неопределенные коэффициенты. Идея метода Галеркина заключается в том, что коэффициенты a_k определяются так, чтобы функция $L(z)$ была ортогональна всем функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т.е. коэффициенты a_k должны быть решением алгебраической системы уравнений

$$\left(L(z), \varphi_k\right) = 0 \quad (k = \mathrm{I}, 2, \ldots, n). \qquad \text{(2.I)}$$

Здесь

$$(f,g) = \int_a^b f g\,dx,$$

если оператор L задан на функциях одной переменной, и

$$(f,g) = \iint\limits_{D} f \cdot g\,dx\,dy,$$

если оператор L задан на функциях двух переменных. Рекомендации по выбору системы координатных функций остаются те же, что и в предыдущем параграфе.

Метод Галеркина может быть применен для приближенного решения уравнений, не связанных с вариационными проблемами, а также нелинейных уравнений. Однако в последнем случае система уравнений (2.I) оказывается нелинейной, что существенно затрудняет ее решение.

Пример 3. Найти приближенное решение уравнения

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(\mathrm{I}) = \mathrm{I}.$$

Легко найти точное решение этого уравнения:

$$y = \frac{e}{e^2 - 1} e^{x} + \frac{e}{1 - e^2} e^{-x} = \frac{2e}{e^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,x.$$

Найдем приближенное решение, воспользовавшись методом Галеркина. Но прежде преобразуем исходную задачу в задачу с нулевыми граничными условиями. Для этого подберем сначала какую-либо функцию,

удовлетворяющую заданным граничным условиям. В качестве такой функции можно взять, например, функцию $u(x) = x$. Положим теперь $p = y - u = y - x$. Тогда для определения функции p имеет дифференциальное уравнение

$$L(p) \equiv p'' - p - x = 0 \qquad \text{(2.2)}$$

при условии $p(0) = p(\mathrm{I}) = 0$.

В качестве координатных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ возьмем функции

$$\varphi_1 = x(x-1),\ \varphi_2 = x^2(x-1), \ldots, \varphi_n = x^n(x-1).$$

Ограничимся сначала первым приближением:

$$p_1(x) = a\,x(x-1).$$

Применяя метод Галеркина, составим уравнение:

$$\left(L(p_1), \varphi_1\right) = \int_0^1 (p_1'' - p_1 - x)\,x(x-1)\,dx = 0$$

или

$$\int_0^1 \left(2a - ax^2 + (a-1)x\right)(x^2 - x)\,dx = 0.$$

Из этого уравнения находим $a = 0{,}2273$. Следовательно, $p_1(x) = 0{,}2273(x^2 - x)$, а

$$y_1(x) = 0{,}2273(x^2 - x) + x = 0{,}2273x^2 + 0{,}7727x.$$

Найдем теперь приближенное решение уравнения (2.2) в виде

$$p_2(x) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = a_1 x(x-1) + a_2 x^2(x-1).$$

Для нахождения коэффициентов a_1 и a_2 составим систему (2.I):

$$\left.\begin{aligned} \left(L(p_2), \varphi_1\right) &= \int_0^1 (p_2'' - p_2 - x)\,x(x-1)\,dx = 0, \\ \left(L(p_2), \varphi_2\right) &= \int_0^1 (p_2'' - p_2 - x)\,x^2(x-1)\,dx = 0. \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \left[2a_1 + a_2(6x-2) - a_1(x^2 - x) - a_2(x^3 - x^2) - x\right](x^2 - x)\,dx = 0, \\ &\int_0^1 \left[2a_1 + a_2(6x-2) - a_1(x^2 - x) - a_2(x^3 - x^2) - x\right](x^3 - x^2)\,dx = 0. \end{aligned}\right\}$$

Вычислив интегралы, получим:

$$\begin{cases} 0{,}366666\,a_1 + 0{,}183333\,a_2 = 0{,}083333 \\ 0{,}183333\,a_1 + 0{,}142857\,a_2 = 0{,}05\,. \end{cases}$$

Решение этой системы $a_1 = 0{,}14588$, $a_2 = 0{,}16279$. Таким образом,

$$P_2(x) = 0{,}14588(x^2 - x) + 0{,}16279(x^3 - x^2),$$

а $$y_2(x) = P_2(x) + x = 0{,}16279x^3 - 0{,}01691x^2 + 0{,}85412x.$$

Сравним полученные приближенные решения с точным решением:

$x = 0{,}2$;	$y = 0{,}17132$;	$y_1 = 0{,}16363$;	$y_2 = 0{,}17145$;
$x = 0{,}5$;	$y = 0{,}44341$;	$y_1 = 0{,}44317$;	$y_2 = 0{,}44318$;
$x = 0{,}7$;	$y = 0{,}64549$;	$y_1 = 0{,}65227$;	$y_2 = 0{,}64544$.

Видно, что во втором приближении получился хороший результат.

Пример 4. Найдем приближенное решение краевой задачи примера 2 методом Галеркина.

В качестве координатных функций возьмем

$$\varphi_1 = x(x-1)(y^2-(x-1)^2),\ \varphi_2 = x^2(x-1)(y^2-(x+1)^2),\ \varphi_3 = xy(x-1)(y^2-(x+1)^2), \ldots$$

Будем сначала приближенное решение разыскивать в виде

$$z_1(x, y) = a\,x(x-1)[y^2 - (x+1)^2].$$

Для определения a имеем, согласно методу Галеркина, уравнение

$$(\Delta z_1 + 2, \varphi_1) = \iint_D \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + 2\right) x(x-1)(y^2-(x+1)^2)\,dx\,dy = 0.$$

Подставив в это уравнение

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} = 2a(y^2 - 6x^2 - 3x + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = 2a(x^2 - x),$$

мы получим:

$$\int_0^1\int_{-x-1}^{x+1} \left[a(y^2 - 6x^2 - 3x + 1) + a(x^2 - x) + 1\right](x^2-x)(y^2-(x+1)^2)\,dx\,dy = 0.$$

Вычислив двойной интеграл, найдем $a = 0{,}35$. Следовательно,

$$z_1(x, y) = 0{,}35x(x-1)(y^2 - (x+1)^2).$$

Полученное решение совпадает с найденным в примере 2. Это не случайно. Хотя метод Галеркина является более универсальным, в применении к задачам, связанным с вариационными проблемами, он оказывается в ряде случаев эквивалентен методу Ритца в том смысле, что

приводит обычно с более простыми выкладками к тому же самому приближенному решению.

Найдем теперь приближенное решение в виде

$$z_2(x, y) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 = (a_1 + a_2x)(x^2 - x)[y^2 - (x+1)^2].$$

Для определения a_1 и a_2 составим систему уравнений

$$\begin{cases} (\Delta z_2 + 2, \varphi_1) = 0, \\ (\Delta z_2 + 2, \varphi_2) = 0, \end{cases}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\iint_D \left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + 2\right) x(x-1)(y^2 - (x+1)^2)\,dx\,dy = 0 \\ &\iint_D \left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + 2\right) x^2(x-1)(y^2 - (x+1)^2)\,dx\,dy = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Произведя вычисление двойных интегралов, входящих в эту систему, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}14286\,a_1 + 0{,}83975\,a_2 = 0{,}40000, \\ 0{,}83969\,a_1 + 0{,}71678\,a_2 = 0{,}23809, \end{cases}$$

приближенное решение которой $a_1 = 0{,}76081$, $a_2 = -0{,}55910$. Таким образом,

$$z_2(x, y) = (0{,}76081 - 0{,}55910x)(x^2 - x)[y^2 - (x+1)^2].$$

§ 3. МЕТОД КАНТОРОВИЧА

При применении метода Канторовича также, как и в методе Ритца, выбирается координатная система функций

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_m),\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

и приближенное решение вариационной задачи ищется в виде

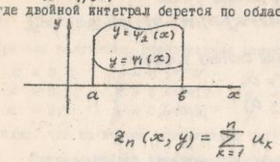
$$z_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x_i)\,\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

но теперь коэффициенты $u_k(x_i)$ не постоянные, а неизвестные функции одной из независимых переменных.

Если, например, требуется исследовать на экстремум функционал

$$J = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где двойной интеграл берется по области Д, изображенной на рисунке,



а функция $z(x, y)$ принимает заданные значения на границе Г области Д, то приближенное решение $z_n(x, y)$ можно искать в виде

$$z_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,\varphi_k(x, y). \qquad (3.1)$$

В частности, если функция z принимает нулевые значения на границе области Д, то функции $\varphi_k(x, y)$ можно выбрать так, чтобы они обращались в нуль при $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, а неизвестные функции $u_k(x)$ следует искать при условии $u_k(a) = u_k(b) = 0$.

Подставив выражение функции z_n в функционал J, можно выполнить интегрирование по y, так как подынтегральная функция F является известной функцией переменной y. После этого функционал J примет вид

$$J = \int_a^b f(x, u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), u_1'(x), \ldots, u_n'(x))\,dx.$$

Неизвестные функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ выбираются так, чтобы функционал J достигал экстремума. Для этого необходимо, чтобы функции $u_k(x)$ удовлетворяли системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} f_{u_1} - \dfrac{d}{dx} f_{u_1'} = 0, \\ f_{u_2} - \dfrac{d}{dx} f_{u_2'} = 0, \\ \text{- - - - - - - - - -}, \\ f_{u_n} - \dfrac{d}{dx} f_{u_n'} = 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Произвольные постоянные определяются так, чтобы функция z_n удовлетворяла при $x = a$ и $x = b$ граничным условиям.

Метод Канторовича, вообще говоря, более точен, чем методы Ритца и Галеркина, так как в методе Канторовича приближенное решение ищется в более широком классе функций.

Пример. 5. Решим задачу в примере 2 с помощью метода Канторовича.

Будем искать решение в форме

$$z(x, y) = [y^2 - (x+1)^2]\,u(x), \qquad (3.3)$$

где $u(0) = u(1) = 0$. Неизвестную функцию u определим так, чтобы функция z доставляла экстремум функционалу

$$J = \int_0^1 \int_{-x-1}^{x+1} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 4z\right] dx\,dy. \qquad (3.4)$$

Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2(x+1)u(x) + (y^2 - (x+1)^2)\,u'(x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yu(x).$$

Подставив найденные частные производные и функцию z в функционал (3.4), получим:

$$J = \int_0^1 \int_{-x-1}^{x+1} 4(x+1)^2u^2 - 4(x+1)(y^2 - (x+1)^2)\,u u' + [y^2 - (x+1)^2]^2 u'^2 + 4y^2u^2 - 4(y^2 - (x+1)^2)\,u\,]\,dx\,dy.$$

После вычисления внутреннего интеграла по y функционал J примет вид:

$$J = \frac{16}{15}\int_0^1 \left[10(x+1)^3u^2 + 5(x+1)^4uu' + (x+1)^5u'^2 + 5(x+1)^3u\right] dx.$$

Составим для этого функционала уравнение Эйлера:

$$(x+1)^2u'' + 5(x+1)u' = \frac{5}{2}. \qquad (3.5)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение есть уравнение типа Эйлера. Будем разыскивать частные решения соответствующего однородного уравнения

$$(x+1)^2\tilde{u}'' + 5(x+1)\tilde{u}' = 0. \qquad (3.6)$$

в виде $\tilde{u} = (x+1)^k$. Подставляя $\tilde{u}$ в уравнение (3.6) и производя сокращение на $(x+1)^k$, мы получим уравнение $k^2 + 4k = 0$, решения которого $k_1 = 0$, $k_2 = -4$. Следовательно, общее решение уравнения (3.6) можно записать в виде

$$\tilde{u} = c_1 + c_2(x+1)^{-4}.$$

Частное решение u_2 уравнения (3.5) можно найти в виде $u_2 = a\ln(x+1)$. Действительно, подставив u_2 в (3.5), мы получим $a = \frac{5}{8}$. Тогда общее решение уравнения (3.5)

$$u = \tilde{u} + u_2 = c_1 + c_2(x+1)^{-4} + \frac{5}{8}\ln(x+1).$$

Чтобы определить постоянные C_1 и C_2, воспользуемся условием $u(0) = u(1) = 0$ и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + \frac{1}{16} C_2 + \frac{5}{8} \ln 2 = 0. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = -0{,}4621$, $C_2 = 0{,}4621$.

Таким образом, приближенное решение

$$z = \left[y^2 - (x+1)^2\right]\left[-0{,}4621 + 0{,}4621(x+1)^{-4} + \frac{5}{8}\ln(x+1)\right].$$

Сравним полученные приближенные решения в примерах 2, 4, 5 между собой:

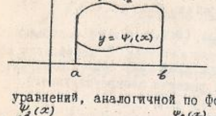
$x = 0{,}2$; $y = 0$; $z_1 = 0{,}08064$; $z_2 = 0{,}14953$; $z = 0{,}18043$;
$x = 0{,}5$; $y = 0$; $z_1 = 0{,}19688$; $z_2 = 0{,}27071$; $z = 0{,}26416$;
$x = 0{,}7$; $y = 0$; $z_1 = 0{,}21242$; $z_2 = 0{,}22421$; $z = 0{,}21712$.

Как видно, более близки значения z_2 и z.

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = P(x, y),$$

при условии $z(x, y)$ на границе Г области Д, изображенной на рисунке. Приближенное решение можно разыскивать в виде (3.1), где $\varphi_k(x, y) = 0$ при $y = \psi_1(x)$ и $y = \psi_2(x)$. Для нахождения неизвестных функций $u_k(x)$ вместо системы уравнений (3.2) можно воспользоваться системой уравнений, аналогичной по форме уравнениям метода Галеркина:



$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} (\Delta z_n - P)\varphi_k \, dy = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} - P\right)\varphi_k \, dy = 0. \quad (3.7)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $u_k(x)$. Ее следует решить при граничных условиях

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Составим систему (3.7) для задачи в примере 5. Если ограничиться решением в форме (3.3), то мы будем иметь только одно уравнение ($k = 1$).

Найдем $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2u(x) - 4(x+1)u'(x) + (y^2 - (x+1)^2)u''(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2u(x).$$

и подставим их в уравнение (3.7). Тогда, учитывая, что $p = -2$, получим:

$$\int_{-x-1}^{x+1} \left[-4(x+1)u' + (y^2 - (x+1)^2)u'' + 2\right](y^2 - (x+1)^2)\,dy = 0.$$

Вычислив интеграл в левой части, мы снова получим уравнение (3.5).

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Прямые методы могут быть использованы при отыскании собственных значений операторов. Подробно об этом можно прочитать, например, в книге С.Г.Михлина "Вариационные методы в математической физике" или в книге Л.В.Канторовича и В.И.Крылова "Приближенные методы высшего анализа", гл.IУ, § 2, п.5.

Отметим лишь, что при отыскании собственных чисел оператора L мы приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} (L(\varphi_1), \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (L(\varphi_2), \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \ldots & (L(\varphi_n), \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (L(\varphi_1), \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (L(\varphi_2), \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \ldots & (L(\varphi_n), \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (L(\varphi_1), \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (L(\varphi_2), \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \ldots & (L(\varphi_n), \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

Наименьший корень этого уравнения дает приближенно наименьшее собственное значение оператора L с избытком. Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – система координатных функций.

<u>Пример 6</u>. Найдем приближенно наименьшее собственное число оператора $Ly = -y''$, рассматриваемого на функциях $y(x)$, $x \in [0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$, т.е. найдем наименьшее λ такое, что

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y \neq 0.$$

Точное значение $\lambda_{наим.} = \pi^2$.

В качестве координатных функций возьмем следующие:

$$\varphi_1 = (1-x)x, \quad \varphi_2 = x^2(1-x), \ \ldots, \ \varphi_n = x^n(1-x), \ \ldots$$

(эти функции должны удовлетворять условиям $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$). Ограничимся тремя первыми приближениями, т.е. в уравнении (4.1) полагаем последовательно $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \frac{1}{30}, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x^3(1-x)^2 dx = \frac{1}{60}, \quad (\varphi_1, \varphi_3) = \frac{1}{105},$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{1}{105}, \quad (\varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{168}, \quad (\varphi_3, \varphi_3) = \frac{1}{252},$$

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = (-\varphi_1'', \varphi_1) = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{3},$$

$$(L\varphi_1, \varphi_2) = (L\varphi_2, \varphi_1) = \frac{1}{6}, \quad (L\varphi_1, \varphi_3) = (L\varphi_3, \varphi_1) = \frac{1}{10},$$

$$(L\varphi_2, \varphi_2) = \frac{2}{15}, \quad (L\varphi_2, \varphi_3) = (L\varphi_3, \varphi_2) = \frac{1}{10}, \quad (L\varphi_3, \varphi_3) = \frac{3}{35}.$$

При $n = 1$, т.е. при использовании только функции $\varphi_1 = x(1-x)$ имеем $(L\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) = 0$ т.е. $\frac{1}{3} - \lambda\frac{1}{30} = 0$, $\lambda = 10$.

Точное значение $\lambda_{наим} = \pi^2 = 9{,}8696\ldots$

При $n = 2$ уравнение (4.1) дает

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda\frac{1}{30} & \frac{1}{6} - \lambda\frac{1}{60} \\ \frac{1}{6} - \lambda\frac{1}{60} & \frac{2}{15} - \lambda\frac{1}{105} \end{vmatrix} = 0.$$

меньший корень этого уравнения $\lambda_{наим} = 10$.

При $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda\frac{1}{30} & \frac{1}{6} - \lambda\frac{1}{60} & \frac{1}{10} - \lambda\frac{1}{105} \\ \frac{1}{6} - \lambda\frac{1}{60} & \frac{2}{15} - \lambda\frac{1}{105} & \frac{1}{10} - \lambda\frac{1}{168} \\ \frac{1}{10} - \lambda\frac{1}{105} & \frac{1}{10} - \lambda\frac{1}{168} & \frac{3}{35} - \lambda\frac{1}{252} \end{vmatrix} = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения 9,8716.

Погрешность равна 0,002, т.е. приблизительно 0,02%.

<u>Пример 7</u>. Найдем приближенно наименьшее собственное значение оператора Лапласа Δu в круге $x^2 + y^2 \le 1$ при граничном условии

$$u(x, y)\Big|_{x^2+y^2=1} = 0.$$

В качестве координатных функций возьмем:

$$\varphi_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2; \quad \varphi_2(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2),$$

$$\varphi_3(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2, \ \ldots$$

Вычислим

$$(\varphi_1, \varphi_1) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (1 - x^2 - y^2)^2 dx\,dy = \frac{\pi}{3},$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} (1 - x^2 - y^2)^2 (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{12},$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{\pi}{30},$$

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = (-\Delta\varphi_1, \varphi_1) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} 4(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = 2\pi,$$

$$(L\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2}{3}\pi = (L\varphi_2, \varphi_1), \quad (L\varphi_2, \varphi_2) = \frac{2}{3}\pi.$$

При $n = 1$ уравнение (4.1) дает

$$2\pi - \frac{\pi}{3}\lambda = 0, \quad \lambda = 6.$$

Точное значение $\lambda = 5{,}779\ldots$

Второе приближение получим при $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 2\pi - \frac{\pi}{3}\lambda & \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{12}\lambda \\ \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{12}\lambda & \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е. } 3\lambda^2 - 128\lambda + 640 = 0.$$

Меньший корень этого уравнения 5,781...

Таким образом, во втором приближении $\lambda_{наим} = 5{,}781\ldots$

Погрешность 0,002, т.е. приблизительно 0,04%.

В книге Л.В.Канторовича и В.И.Крылова этот пример решается с помощью других координатных функций, а именно: $\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi_2 = \cos\frac{3}{5}\pi\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi_3 = \cos\frac{5}{2}\pi\sqrt{x^2+y^2}$, ... Для сравнения приведем первое и второе приближения при $n = 1$, $\lambda_{наим} = 5{,}832$; при $n = 2$ $\lambda_{наим} = 5{,}792$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Найти приближенное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y(1) = 0$.

Указание. Функционал, соответствующий данной краевой задаче

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}(y^2 - y'^2)\,dx.$$

Решение искать в виде $y = (x-1)(1 + ax)$.

2. Найти приближенное решение уравнения $y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0$, $y(1) = y(-1) = 0$.

Указание. Соответствующий функционал

$$J(y) = \int_{-1}^{1}\left[y'^2 + (1 + x^2)y^2 - 2y\right]dx.$$

Решение искать в виде $y = a(1 - x^2)$ или $y = a_1(1 - x^2) + a_2(1 - x^4)$.

3. Найти приближенное решение уравнения Пуассона $\Delta z = -1$ в прямоугольнике $D = \{-a \le x \le a,\ -b \le y \le b\}$ при условии $z = 0$ на границе.

Указание. Решить задачу методами Ритца, Галеркина, Канторовича. При решении методами Ритца и Галеркина решение можно искать в виде $z_1 = A(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, а при решении методом Канторовича $- z = (b^2 - y^2)u(x)$. Полученные решения сравните.

4. Найти приближенно первое собственное значение в задаче

$$y'' + \lambda(1 + x^2)y = 0, \quad y(-1) = y(1) = 0.$$

Указание. Можно ограничиться первым приближением, положив $y_1 = a(1 - x^2)$.