МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математике

«ТЕСТОВАЯ ПРОВЕРКА ЗНАНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ»

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
70,72 % авторского текста

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Старцев Андрей Викторович

Работа рекомендована к защите
«29» марта 2019 г.
И.о. зав. кафедрой МиМОМ
__________ Шумакова Е.О.

Научный руководитель:
кандидат пед.наук, доцент
Коржакова С.В.

Челябинск
2019

Содержание

Введение

Понятие «функция» является основополагающим и пронизывает весь курс школьной математики. Функциональные зависимости и их применение в различных сферах жизнедеятельности – одна из важнейших тем курса школьной математики, пренебрегать которой система образования и педагоги не могут. Изучать функции нужно, а значит, педагогам-математикам нужно уметь преподавать этот раздел широкой аудитории учащихся.

Наиболее актуальной на сегодняшний день является проверка знаний учащихся посредством тестов. Тест является одной из ведущих форм контроля знаний в процессе обучения. Термин «тест» в данной работе подразумевает систему заданий, позволяющую объективно оценить уровень подготовленности учащихся и структурированность их знаний.

Тестирование является одним из наиболее эффективных методов при оценивании. Он позволяет рационализировать процесс обучения, определять результаты освоения материала, оперативно обращать внимание на пробелы в знаниях и вносить в них изменения. Школы на сегодняшний день широко используют тестовую проверку качества подготовки своих выпускников. Самым масштабным примером здесь может служить единый государственный экзамен (ЕГЭ).

Цель данной работы состоит в разработке тестовой проверки знаний по теме «Функция». Для ее достижения необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Изучить и изложить теоретические основы понятия «функция».

2. Проанализировать изложение темы «Функция» в различных школьных учебниках.

3. Осуществить анализ материалов ЕГЭ по теме функция.

4. Разработать тесты по теме «Функция» в старших классах и дать их решение.

5. Разработать факультатив по теме «Функция» и осуществить его апробацию.

Объект исследования: процесс изучения функции в школе.

Предмет исследования: тесты по теме «Функция».

Гипотеза: процесс подготовки обучающихся к ЕГЭ по математике окажется эффективнее, если осуществить проведение факультативных занятий с использованием тестов в качестве постоянного контроля освоения темы.

Квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе излагаются психолого-педагогические основы тестовой проверки знаний, рассматриваются ее преимущества и недостатки.

Во второй главе изложены понятия функции в ВУЗе и школе, рассмотрены основные свойства функций и преобразования их графиков. Проводится анализ школьных учебников на предмет изложения темы «Функция».

В третьей главе предложен факультатив по теме «Функция» для учащихся 10-11 классов, с целью подготовки к ЕГЭ, а также полные решения составляющих его тестов.

В приложении даны формы факультативных тестов без решений.

Глава I. Основы тестовой проверки знаний

§1. Психолого-педагогические основы тестов

В настоящее время существуют разнообразные формы проверки знаний, умений, навыков. Важными принципами проверки знаний учащихся являются систематичность, объективность, наглядность. *Тестирование* – это один из многочисленных видов проверки знаний в образовательной системе, который удовлетворяет этим принципам.

Анализ научной литературы позволяет выделить два основных вида тестов: психологические (тесты интеллекта) и педагогические (тесты достижений или тесты успешности, или дидактические тесты, или тесты контроля знаний и умений). Различие состоит в том, что тесты достижений направлены на выявление степени овладения учащимися конкретными знаниями, умениями, навыками, измерение уровня которых может осуществляться на различных этапах процесса обучения. Близкие по структуре тесты интеллекта предназначены для выявления уровня овладения испытуемыми разнообразными знаниями и умениями, осваиваемыми ими в процессе обретения жизненного опыта в целом.

Психологические тесты часто используются при конкурсном отборе учащихся в классы с углубленным изучением математики и других предметов, но ведущее место в процессе обучения занимают тесты достижений. Измерение уровня достижений учащихся на различных этапах обучения с помощью педагогических тестов позволяет определить степень эффективности тех или иных специальных программ обучения, качественный уровень профессиональной или любой другой подготовки. Тесты достижений используются на различных этапах процесса обучения: усвоение новых знаний, формирование умений и навыков, обобщение и систематизация знаний и др.

Выступая как инструмент оценивания, тесты достижений, тем не менее, имеют значительные отличия от контрольных работ. Во-первых, тесты – объективный и более качественный способ оценивания и, во-вторых, показатели тестов ориентированы на измерение степени и определения уровня усвоения ключевых понятий, тем, разделов учебной программы, умений и навыков учащихся. Контрольные работы ориентированы на констатацию наличия у учащихся определенной совокупности нормально усвоенных знаний. Тесты оказываются значительно более качественным и объективным способом оценивания, объективность тестирования достигается путем стандартизации процедуры проведения и путем стандартизации проверки показателей качества заданий и тестов целиком.

Тесты – емкий инструмент; показатели тестов ориентированы на измерение степени, определения уровня усвоения ключевых понятий, тем и разделов учебной программы, умений, навыков и пр.

Тесты – объемный инструмент; выполняя тестовую работу, каждый ученик выполняет задания, используя знания по всем темам, изучение которых предусматривала программа.

Тестирование, как и любой другой метод контроля, имеет своих сторонников и противников.

Противники тестирования считают, что:

- ✓ тесты часто необъективны и неточно определяют то, что должны измерять;
- ✓ не могут фиксировать сложные знания и умения;
- ✓ требуют больших затрат времени на их разработку и проверку, т.е. неэкономичны при контроле.

Недостатки используемых тестов вызвали критику тестирования как метода диагностики – критику не всегда объективную, верную лишь в частных случаях.

Сторонники тестирования считают, что:

- ✓ тесты разрабатываются в строгом соответствии с теорией тестов (классической или современной);
- ✓ тесты имеют устойчивые статистические характеристики для выборки испытуемых, для оценки достижений которых они разрабатывались;
- ✓ процедура тестирования стандартизирована (т.е. выполнение тестов, проверка, обработка и интерпретация их результатов проводится по единым правилам).

Современная дидактическая тестология считает, что необъективность тестов зависит от низкого качества их разработки – если они сделаны наскоро, не проверены на надежность и пригодность.

Многие учителя, преподаватели в учебных заведениях стали оценивать тесты, как средство контроля, которые развивает память и мышление, формирует умения и навыки применять знания на практике, словом, тесты работают на ту сферу, которую можно отнести к развивающей функции контроля знаний учеников.

§2. Тестирование как метод проверки и оценки знаний учащихся

Сегодня часто говорят об объективных способах проверки знаний учащихся, возможности отслеживать их продвижение к знанию. Одним из инструментов, который предоставляет эти возможности, является тест. Выполнение этих подходов и требований делает тесты объективным и действенным инструментом определения качества обучения на заданном уровне усвоения учебного материала.

Возникает вопрос: почему речь идет о каких-то специально составленных тестах, если мы до сих пор пользовались обычными контрольными работами, после выполнения которых можно было установить, что усвоил, а что не усвоил учащийся. Действительно, проверив контрольную работу ученика, учитель может это сделать. Проблема в том, как объективно оценить знания и умения учащихся на заданном уровне учебного предмета. Существуют случаи, когда согласно нормам оценок тяжело объективно оценить работу ученика или его ответ.

Выступая как инструмент оценивания, тесты имеют значительные отличия от контрольных работ. Во-первых, тест – объективный и более качественный способ оценивания и, во-вторых, показатели тестов ориентированы на измерение степени и определения уровня усвоения ключевых понятий, тем, разделов учебной программы, умений и навыков учащихся.

Использование тестов в обучении является одним из рациональных дополнений к методам проверки знаний, умения и навыков учащихся. Оно оптимально соответствует полной самостоятельности в работе каждого ученика.

Кроме того, тестовый контроль знаний имеет ряд преимуществ перед другими видами контроля. Он дает учителю возможность проверить значительный объем изученного материала малыми порциями и быстро диагностировать овладение учебным материалом большим числом учащихся. При этом жесткая процедура проверки знаний учащихся практически исключает субъективизм.

Систематичность в применении тестового контроля, как правило, формирует у школьников дисциплинированность и стремление к состязательности в усвоении программного материала.

Достоинствами теста принято считать то, что он:

- развивает и проявляет способности к быстрому угадыванию по малейшим признакам правильного ответа;
- полезен для оценки знаний абитуриентов задолго до вступительных экзаменов;
- может облегчить оценку знаний по отдельным разделам курса в течение учебного года.

К недостаткам тестирования относят то, что:

- не учитываются психологические особенности испытуемых, что позволяет оценить глубину знаний;
- не позволяет с гарантией определить учеников, знающих предмет;
- не позволяет следить за ходом мысли испытуемых;
- при тестировании ограничивается диапазон мышления;
- с помощью тестирования нельзя выявить действительно талантливых и способных учеников.

Очень важно, что тесты имеют разноуровневый характер, т.е. список заданий делится на части – обязательную и необязательную. Обязательный уровень обеспечивает базовые знания для любого ученика. Располагая ими, ученик получает отметку «зачет» по данной теме. Необязательная часть рассчитана на более глубокие знания, она готовит ученика к тому, чтобы заслужить на зачете хорошую или отличную оценку.

Для учителя такой вид работы тоже очень удобен. Во-первых, предлагая ученикам задания разного уровня, он обеспечивает достаточно интересной и, главное, выполнимой работой как слабого, так и сильного ученика. Во-вторых, у всех учеников вырабатываются устойчивые умения и знания согласно их желаниям и возможностям. И, в-третьих, таким образом, легко увидеть общую картину: как усвоена тема в классе, какова подготовленность отдельных учеников, на чем заострить внимание на пути к зачету по этой теме. Если при проверке выявляются ошибки, то учитель может посмотреть записи учащихся и выяснить причину ошибки.

Тесты применяются на всех этапах учебного процесса. С их помощью эффективно обеспечивается предварительный, текущий, тематический и итоговый контроль знаний, умений, учет успеваемости академических достижений. Тесты все больше проникают в массовую практику. Ныне кратковременный опрос всех учащихся на каждом уроке с помощью теста используют почти все педагоги. Преимущество такой проверки в том, что одновременно занят весь класс и за несколько минут можно получить срез обученности всех учащихся. Это вынуждает их готовиться к каждому уроку, работать систематически, чем и решается проблема эффективности и необходимой прочности знаний. При проверке в первую очередь определяются пробелы в знаниях, что очень важно для продуктивного самообучения.

Глава II. Теоретические основы изучения понятия функции в школе

§1. Понятие функции в вузе и школе

Понятие функции одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальностью. В процессе эволюции математического знания оно подвергалось изменениям, но долгое время функция была привязана к математической формуле.

В математическом анализе понятие функции вводится следующим образом.

Пусть X и Y – два произвольных множества, где каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$; в таком случае говорят, что на X определена функция f, принимающая значения из Y.

Стоит отметить, что вместо термина «функция» часто используют термин «отображение», говоря об отображении одного множества в другое. Для обозначения функции (отображения) пользуются записью $f: X \to Y$.

Данное определение рассматривает функцию в наиболее широком логико-математическом смысле этого слова, позволяя сформировать общее понимание сущности функций. Рассмотрим же теперь функции, которые будут интересовать нас в нашем исследовании. Это те функции, что изучаются учениками школы, а именно – действительные функции от одной переменной.

Итак, пусть задано множество X действительных точек числовой прямой. Действительной функцией действительного переменного (далее просто функцией), определенной на множестве X, называют соответствие f, которое каждой точке $x \in X$ соотносит некоторую единственную точку $y \in R$.

При этом множество X называют областью определения (или областью существования) функции f и обозначают D(f) у точку $x \in X$ — аргументом функции, точку $y \in R$, соответствующую x, — значением функции в точке x и обозначают f(x). Множество $f(x) = \{f(x) \in R: x \in R)$ называют областью значений функции f и обозначают R(f). Факту задания функции f соответствует запись y = f(x), x ∊ X. Обозначение функции в виде f(x) ввел Л. Эйлер.

Итак, понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей:

1) области определения D(f) = X;

2) области значений R(f) = f(X);

3) правила f, которое каждой точке x ∊ X ставит в соответствие некоторую единственную точку y = f(x) ∊ f(X).

Данное понятие, пусть и в менее конкретном виде, используется школьниками старшей школы при решении задач, связанных с применением функций и построением их графиков. Важно отметить, что в качестве множеств X и f(X) в школе рассматриваются числовые множества. И в этом случае функции называются числовыми функциями. Приведем пример числовой функции.

1) Парабола $y = ax^2 + bx + c$ - является функцией, так как для любого x ∈ X в соответствие ставится один и только один элемент f(x) ∈ Y (рис.1)

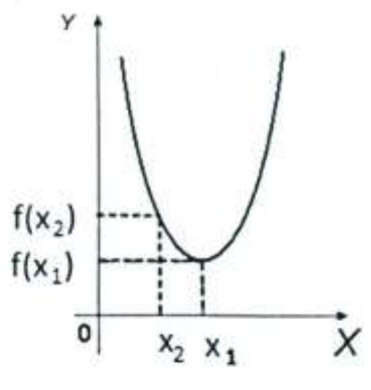


Рис. 1

2) Окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, в свою очередь, функцией не является, т.к. на интервале (-r;r) ∈ X любому x соответствует y = $b \pm \sqrt{r^2-(x-a)^2}$ (рис.2)

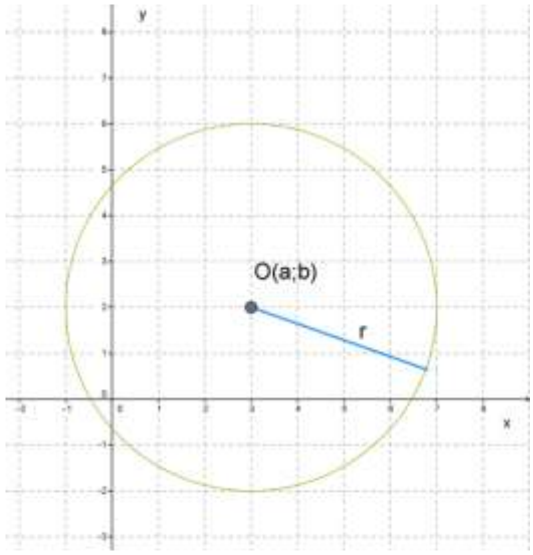


Рис.2

Для наглядного изображения функций используют их графики.

Графиком функции f(x) называют множество точек плоскости с координатами (x;f(x)), x ∈ D(f).

Если задана функция f с областью определения D(f), то каждому значению аргумента x ∈ D(f) соответствует значение функции y = f(x). (рис.3)

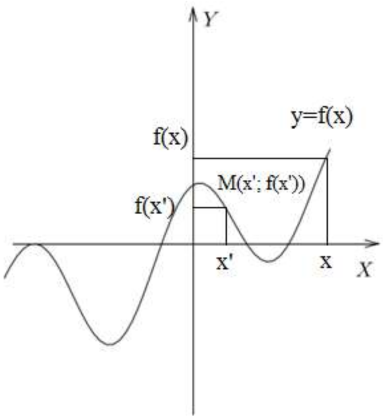


Рис.3

По двум числам x’ и y’= f(x’) можно построить на координатной плоскости точку M (x'; f(x’)). Совокупность всех таких точек образует график функции f. (рис.3)

График функции обладает следующим свойством. Любая прямая параллельная оси Oy пересекает график функции не более чем в одной точке.

§2. Свойства функций

1) Область определения функции и множество значений функции

Область определения функции – это множество всех допустимых действительных значений аргумента x (переменной x), при которых функция y = f(x) определена и обозначается D(f).

Множество значений функции – это множество всех действительных значений y, которые принимает функция и обозначается E(y).

2) Монотонность функции

Функция y = f(x), x $\in X$, называется возрастающей на множестве X, если $\forall$ x_1, x_2 из множества X таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. (рис.4)

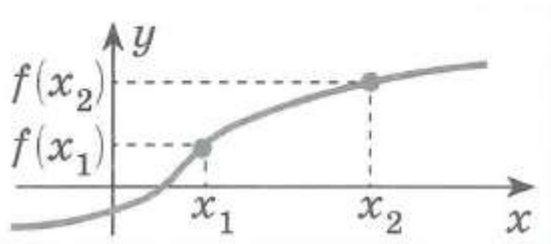


Рис.4

Функция y = f(x), x$\in X$, называется убывающей на множестве X, если $\forall$ x_1, x_2 из множества X таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$. (рис.5)

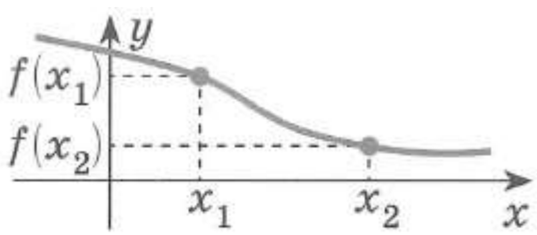


Рис.5

Заметим, что функция в одних промежутках может быть возрастающей, а в других – убывающей.

3) Четность и нечетность функции

Говорят, что множество точек X числовой прямой называется симметричным относительно начала координат, если $\forall\, x\ \in X\ \ => \ -x\ \in X$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется четной, если:

1. Множество X симметрично относительно начала координат.
2. $\forall\, x\ \in X\ \ => \big(f(x) = f(-x)\big)$.

Примеры четных функций:

$y =\ x^2, y = \cos x,\ \ y =\ \frac{x^4}{1+x2}$.

Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется нечетной, если:

- Множество X симметрично относительно начала координат.
- $\forall\, x\ \in X\ \ => \big(f(x) = -f(x)\big)$.

Примеры нечетных функций:

$y =\ x^3, y = sin$ x, y $=\ \frac{x^3}{1+x2}$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, то есть $f(-x) = f(x) = y$. Значит, точке графика A соответствует симметричная ей точка $\mathrm{A}'(-x; y)$. (рис.6)

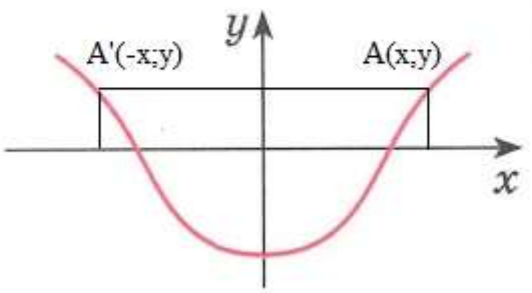


Рис.6

Поэтому для построения графика честной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем отобразить полученную часть графика симметрично относительно оси ординат.

График нечетной функции симметричен относительно начала кооординат, то есть $f(-x) = -f(x) = -y$. Значит, точке графика A(x;y) соответствует симметричная ей точка $A'(-x;-y)$. (рис. 10)

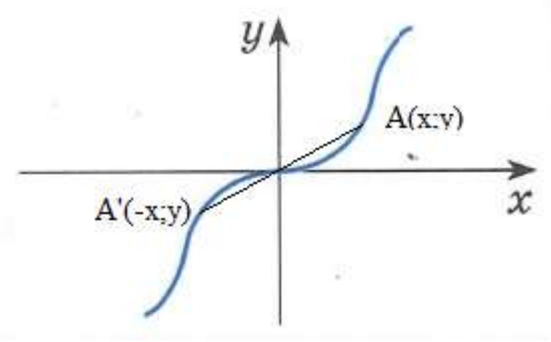


Рис.7

Поэтому для построения графика нечетной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем отобразить полученную часть графика симметрично относительно начала координат.

Отметим, что существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Например: функция $y = \sqrt{x}$ (рис.8) не является четной и не является нечетной, так как ее область существования не есть множество, симметричное относительно начала координат.

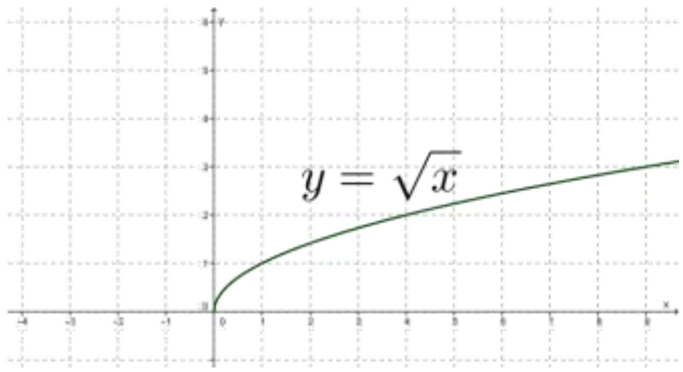


Рис.8

4) Ограниченность и неограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху, если:

$(\exists b)\big(\forall x \in D(f) => (f(x) \leq b)\big)$. (рис.9)

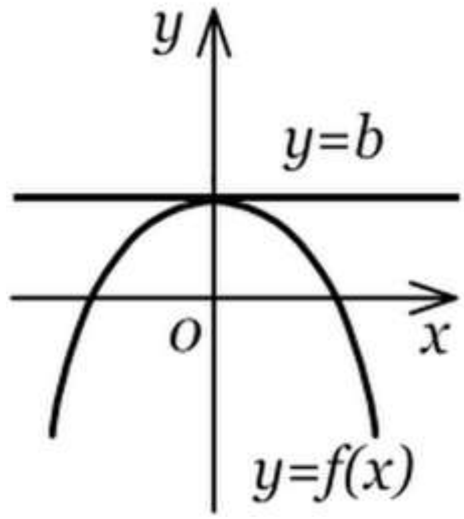


Рис.9

Функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу, если:

$(\exists a)\big(\forall x \in D(f) => (f(x) \geq a)\big)$. (рис.10)

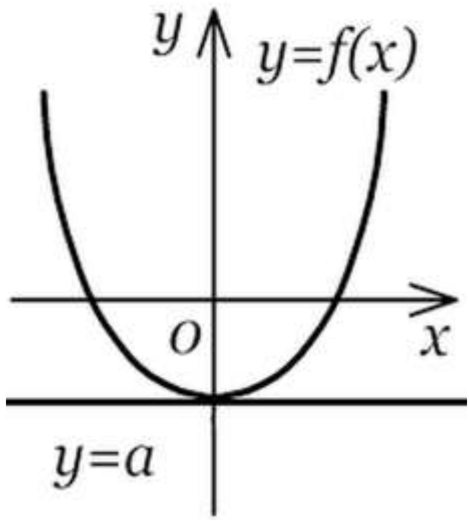


Рис.10

Функция называется ограниченной, если существует положительное число M, такое что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x. Если такого числа не существует, то функция – неограниченная. (рис. 11)

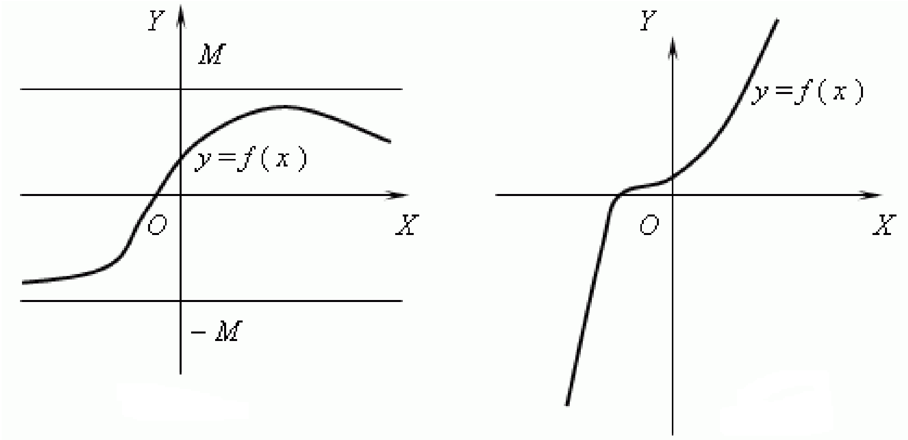


Рис.11

5) Периодичность функций

Функция $y = f(x), x \in X,$ называется периодической на X если существует число T, T $\neq$ 0, называемое периодом функции f(x), такое что:

a) x+T $и$ x-T принадлежат множеству X для каждого $x \in X$;
b) для $\forall x \in X$ имеет место равенство $f(x+T) = f(x)$.

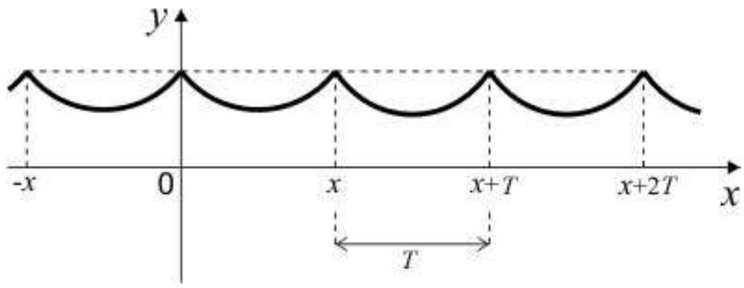


Рис.12

График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.(рис.12)

6) Нули функции

Нулем функции $y = f(x)$ называется такое значение аргумента x_0, при котором функция обращается в нуль: f(x_0) = 0. В нуле функции ее график пересекает ось Ox. (рис.13)

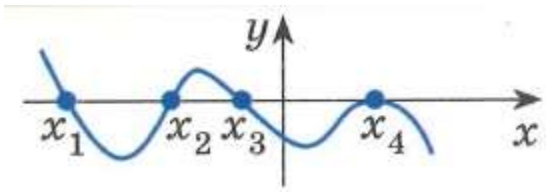


Рис.13

x_1, x_2, x_3 – нули функции $y = f(x)$.

7) Экстремумы функций

Точка x_0 называется точной строгого максимума функции $\mathrm{f}(x), x \in X,$ если существует такая δ – окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех значений $\mathrm{x} \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $\mathrm{f(x)} < \mathrm{f}(x_0)$.

Точка x_0 называется точной строгого минимума функции $\mathrm{f}(x), x \in X,$ если существует такая δ – окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, что для всех значений $\mathrm{x} \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $\mathrm{f(x)} > \mathrm{f}(x_0)$.

Значение функции в точке максимума (точке минимума) называется максимумом (минимумом) функции y = f(x). Точки минимума и максимума называются точками экстремума функции y = f(x), а значение функции в этих точках – экстремумами функции y = f(x).(рис.14)

Рис.14

§3. Преобразование графиков функций

Пусть известен график функции $y = f(x)$.

1) График функции $y = f(x - a)$ можно получить путем сдвига графика $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц (если $a > 0$ – сдвигаем влево, если $a < 0$ – сдвигаем вправо).(рис.15)

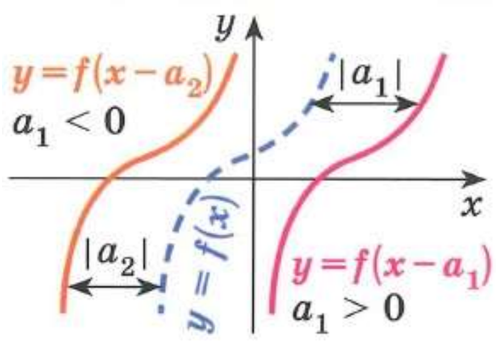


Рис.15

2) График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ путем сдвига графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц (если $b > 0 -$ поднимаем, если $b < 0$ – отпускаем).(рис.16)

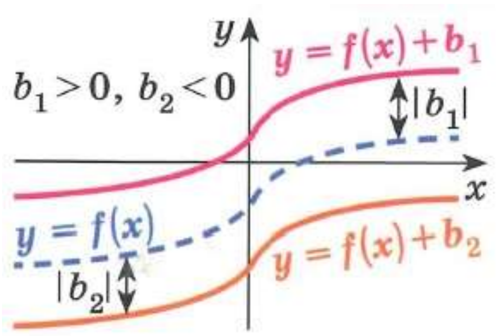


Рис. 16

3) График функции $y = f(-x)$симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.(рис.17)

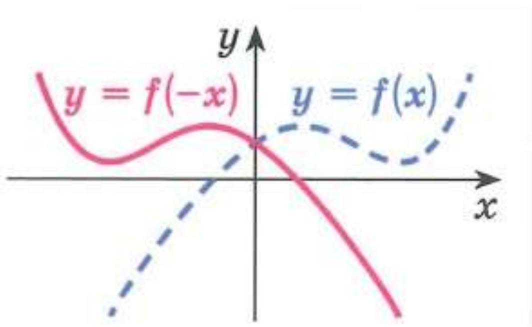


Рис.17

4) График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.(рис.18)

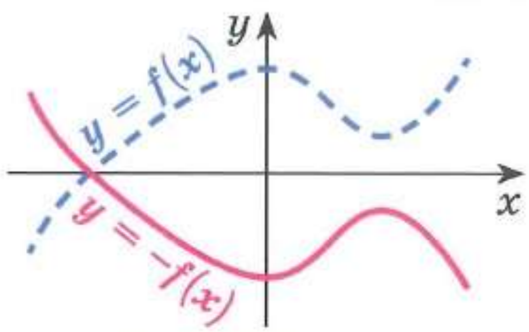


Рис.18

5) График функции $y = f(ax), a > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью деления абсцисс всех точек на a единиц при тех же ординатах.

Если $a = a_1 > 1$, то происходит сжатие графика функции $y = f(x)$ по оси Ox в a_1 раз. Если $a = a_2,\ 0 < a_2 < 1$, то происходит растяжение графика функции $y = f(x)$ по оси Ox в a_2 раз. (рис.19)

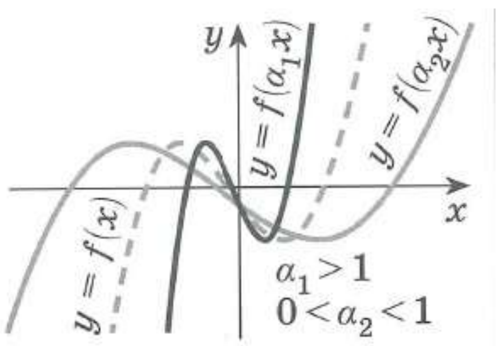


Рис.19

6) График функции $y = kf(x), k > 0$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью умножения ординат всех точек на k единиц, при тех же абсциссах.

Если $k = k_1 > 1$, то происходит растяжение графика функции $y = f(x)$ по оси Оy в k раз.

Если $k = k_2,\ 0 < k_2 < 1$, то происходит сжатие графика функции $y = f(x)$ по оси Оy в k раз. (рис.20)

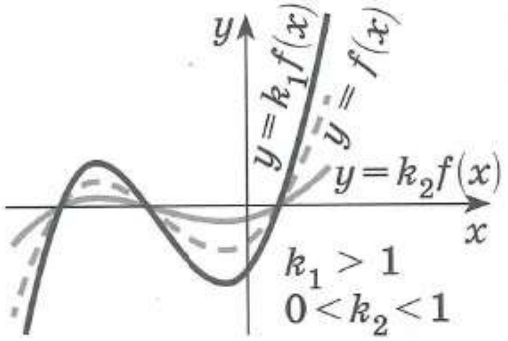


Рис. 20

7) График функции $f(|x|) = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ f(-x), f(x) < 0 \end{cases}$ получен из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: при x≥ 0 график $y = f(x)$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Ox. График функции $y = |f(x)|$ изображен на рис.21

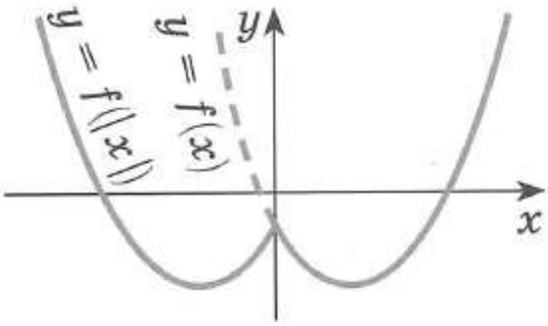


Рис.21

8) График функции $|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ f(x), f(x) < 0 \end{cases}$ получен из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, лежащая над осью Ox

– сохраняется, а часть его, лежащая под осью Ох отображается симметрично относительно оси Ох. График функции $y = |f(x)|$ изображен на рис.22

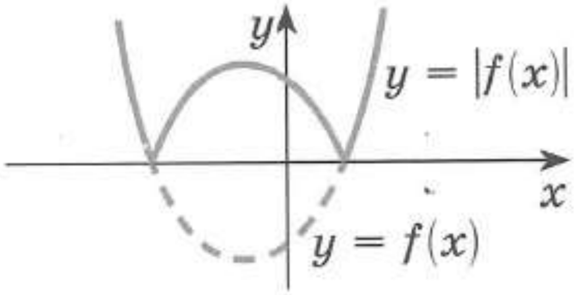


Рис.22

§4. Анализ школьных учебников по изложению темы «Функция»

Нами осуществлен анализ школьных учебников 7-11 классов различных авторов, таких как Мордкович А.Г., Алимов Ш.А. и Никольский С.М., используемых в современной российской школе на предмет изложения темы «Функция» в школе. Анализ школьных учебников представлен в таблице 1.

Таблица №1.

Анализ школьных учебников

Класс	Учебники		
	Алимов Ш.А., Калягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.	Мордкович А.Г.	Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.
7 класс	**Глава VI. Линейная функция и ее график.** §29. Прямоугольная система координат на плоскости. §30. Функция §31. Функция $y = kx$ и ее график. §32. Линейная функция и ее график.	**Глава 2. Линейная функция.** §6. Координатная плоскость. §7. Линейное уравнение с двумя переменными и его график. §8. Линейная функция и ее график. §9. Линейная функция $y = kx$. §31. Взаимное расположение графиков линейных функций. **Глава 8. Функция $y = x^2$.**	

		§37. Функция $\boldsymbol{y = x^2}$ и ее график.	
8 класс	**Глава V. Квадратичная функция.** §35. Определение квадратичной функции. §36. Функция $y = x^2$. §37. Функция $y = ax^2$ §38. Функция $y = ax^2 + bx + c$ §39. Построение графика квадратичной функции.	**Глава 2. Функция $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$. Свойства квадратного корня.** §13. Функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график. **Глава 3. Квадратичная функция. Функция $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$.** §17. Функция $y = kx^2$, ее свойства и график. §18. Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график. §19. Как построить график функции $y = f(x+l)$, если известен график функции $y = f(x)$. §20. Как построить график функции $y = f(x) + m$, если известен график функции $y = f(x)$. §21. Как построить график функции $y = f(x+l) + m$, если	**Глава 1. Простейшие функции. Квадратные корни.** **§1. Функции и графики.** 1.4. Понятие функции. 1.5. Понятие графика функции. **§2. Функции $\boldsymbol{y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}}$.** 2.1. Функция $y = x$ и ее график. 2.2. Функция $y = x^2$ 2.3. График функции $y = x^2$. 2.4. Функция $y = \frac{1}{x}$. 2.5. График функции $y = \frac{1}{x}$. **Глава III. Линейная и квадратичная функции.** **§6. Линейная функция**

		известен график функции $y = f(x)$. §22. Функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график.	6.1. Прямая пропорциональная зависимость. 6.2. График функции $y = kx$. 6.3. Линейная функция и ее график. 6.5. Функция $y = \|x\|$ и ее график 6.6. Функции $y = [x]$ и $y = \{x\}$. **§7. Квадратичная функция** 7.1. Функция $y = ax^2 (a > 0)$ 7.2. Функция $y = ax^2 (a \neq 0)$ 7.3. Функция $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. 7.4. График квадратичной функции. Дополнения к главе III. 1. График функции $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$. 2. Построение графиков

			функций, содержащих модули.
9 класс	**Глава III. Степенная функция.** §12. Область определения функции. §13. Возрастание и убывание функции. §14. Четность и нечетность функции. §15. Функция $y = \frac{k}{x}$.	**Глава 3. Числовые функции.** §13. Определение числовой функции. Область определения, область значений функции. §14. Способы задания функции. §15. Свойства функций. §16. Четные и нечетные функции. **Глава 4. Степенные функции. Степени и корни.** §18. Функции $y = x^n (n \in N)$, их свойства и графики. §20. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики. §21. Функции $y = x^r (r \in Q)$, их свойства и	**Глава II. Степень числа.** **§4. Корень степени n** 4.1. Свойства функции $y = x^n$ 4.2. График функции $y = x^n$ 4.8. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geq 0)$.

		графики. **Глава 5. Тригонометрические функции.** §28.Тригонометрические функции числового аргумента. §29.Тригонометрические функции углового аргумента. §30. Функции $y = \sin x,\ \ y = \cos x$, их свойства и графики.	
10-11 классы	**Глава II. Степенная функция.** §6. Степенная функция, ее свойства и график. §7. Взаимно обратные функции. **Глава III. Показательная функция.** §11. Показательная функция, ее свойства и график. Глава IV.	**Глава 1. Тригонометрические функции.** §6. Тригонометрические функции числового аргумента. §7. Тригонометрические функции углового аргумента. §9. Функция $y = sin\,x$, ее свойства и график. §10. Функция $y = cos\,x$, ее свойства и график. §11. Периодичность	**<u>10 класс:</u>** **Глава I. Корни, степени, логарифмы.** **§3. Корень степени n** 3.1. Понятие функции и ее графика. 3.2. Функция $y = \ x^n$ 3.7. Функция $y = \sqrt[n]{x}\ (x \geq 0)$. 3.8. Функция $y = \ \sqrt[n]{x}$. **§4. Степень положительного числа.** 4.8. Показательная

	Логарифмическая функция. §18. Логарифмическая функция, ее свойства и график. **Глава VII. Тригонометрические функции.** §38. Область определения и множество значений тригонометрических функций. §39. Четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций. §40. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график. §41. Свойства функции $y = sin\, x$ и ее график. §42. Свойства функции $y = tg\, x$ и ее график. §43. Обратные	функций $y = sin\, x$, $y = cos\, x$. §12. Как построить график функции $y = mf(x)$, если известен график функции $y = f(x)$. §13. Как построить график функции $y = f(kx)$, если известен график функции $y = f(x)$. §14. Функции $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, их свойства и графики. **Глава 5. Производная.** §34. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы. §35. Построение графиков функций. §36. Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин.	функция. **§5. Логарифмы.** 5.3. Логарифмическая функция. 5.5. Степенные функции. **Глава II. Тригонометрические формулы. Тригонометрические функции.** **§10. Тригонометрические функции числового аргумента.** 10.1. Функция $y = sin\, x$. 10.2. Функция $y = cos\, x$. 10.3. Функция $y = tg\, x$. 10.4. Функция $y = ctg\, x$. **<u>11 класс:</u>** **Глава I. Функции. Производные. Интегралы.** **§1. Функции и их**

	тригонометрические функции. **Глава VIII. Производная и ее геометрический смысл.** §45. Производная степенной функции. §47. Производные некоторых элементарных функций. **Глава IX. Применение производной к исследованию функций.** §49. Возрастание и убывание функции. §50. Экстремумы функции. §52. Наибольшее и наименьшее значение функции. §53. Выпуклость графика функции, точки перегиба.	**Глава 6. Степени и корни. Степенные функции.** §40. Функции $y = \sqrt[n]{x}$, ее свойства и графики. §41. Степенные функции, их свойства и графики. **Глава 7. Показательная и логарифмическая функции.** §45. Показательная функция, ее свойства и график. §46. Функция $y = log_a x$, ее свойства и график.	**графики.** 1.1.Элементарные функции. 1.2.Область определения и область изменения функции. Ограниченность функции. 1.3. Четность, нечетность, периодичность функций. 1.4. Промежутки возрастания, убывания, знакопостоянства и нули функции. 1.5. Исследование функции и построение их графиков элементарными методами. 1.6. Основные способы преобразования графиков. 1.7. Графики

			функций, содержащих модуль. 1.8. Графики сложных функций. **§2. Предел функции и непрерывность.** 2.4. Понятие непрерывности функции. 2.5. Непрерывность элементарных функций. 2.6. Разрывные функции. **§3. Обратные функции.** 3.1. Понятие обратной функции. 3.2. Взаимно обратные функции. 3.3 Обратные тригонометрические функции. **§5. Применение производной.** 5.1. Максимум и минимум функции. 5.5. Возрастание и убывание функции.

			5.7. Выпуклость графика функции. 5.8. Экстремум функции с единственной критической точкой. 5.10. Асимптоты. Дробно – линейная функция. 5.11. Построение графиков функций с применением производных.

В разных школьных учебниках место изучения функции различно.

В учебниках Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина понятие функции вводится в 7 классе, как зависимость одной переменной величины от другой. Рассматриваются способы задания функции, и ее график, однако не вводятся понятия аргумента и области определения функции. Изучаются прямая пропорциональность и линейная функция, а также их графики.

В 8 классе изучается квадратичная функция, ее график и свойства. Рассматриваются основные виды преобразования графиков функций.

В 9 классе вводятся понятие области определения функции, возрастание и убывание функции, чётность и нечётность функции, а также рассматривается обратная пропорциональность. Рассматриваются частные случаи степенных функций.

В 10-11 классах изучение функций начинают со степенных функций. Рассматривают различные случаи и для каждого случая перечисляются основные свойства. Далее дается определение обратной функции, а уже затем вводится определение взаимно обратных функций. Делается акцент на то, что область определения обратной функции совпадает со множеством значений исходной функции, а множество значений обратной функции совпадает с областью определения исходной функции. Далее рассматривается логарифмическая функция, ее свойства и график.

Далее переходят к изучению тригонометрических функций. Сначала доказывают область определения и множество значений каждой из них. А уже после этого дается определение тригонометрических функций в общем виде. Доказывается четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций. После тригонометрические функции изучаются по отдельности, рассматриваются их свойства и график. Затем изучаются обратно тригонометрические функции. Доказывается, что аркфункции являются обратными к соответствующим им функциям.

В учебниках А.Г. Мордковича функция начинает изучаться в 7 классе. Здесь рассматривается линейная функция, прямая пропорциональность и их графики.

В 8 классе рассматриваются следующие функции: $y = \frac{k}{x}$, $y = kx^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, их свойства и графики. Рассмотрены три основных преобразования графиков функций.

В 9 классе вводится определение числовой функции, способы задания функции, область значения, область определения функции, свойства функций: монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке, четность и нечетность. Рассмотрены построение графика функции по известному графику функции. Произведен обзор свойств и графиков известных функций, которые были рассмотрены в 8 классе. Введены элементы теории тригонометрических функций, их свойства и графики.

В 10-11 классе изучение функций начинается с тригонометрических функций. Для каждой в отдельности перечисляются основные свойства и график. Дается определение периодичности тригонометрических функций. Также рассматриваются основные преобразования графиков функций. Изучаются функции вида $y = \sqrt[n]{x}$, степенные функции, их свойства и графики. В последнюю очередь рассматриваются показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики.

В учебниках математики С.М. Никольского, М.К. Потапова функция начинает изучаться в 8 классе. Сначала вводится понятие функции, рассматриваются способы ее задания. Дается определение непрерывной функции. Далее рассматриваются следующие функции: $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x}$, их свойства и графики. При рассмотрении этих функций вводятся следующие понятия: возрастающая, убывающая, четная, нечетная функции. Далее изучаются функции вида: $y = kx, y = ax^2 (a > 0)$, $ax^2 (a \neq 0), y = |x|$, их свойства и графики. Изучаются преобразования графиков. Далее дается определение функции целой и дробной части числа.

В 9 классе изучение темы функции начинается с функции вида: $y = x^n$, рассматриваются основные свойства и график этой функции. После рассматривают функцию $y = \sqrt[n]{x}\ (x \geq 0)$, ее свойства и график.

В 10 классе дается определение функции и графика функции. Рассматривают функции вида: $y = x^n, y = \sqrt[n]{x}\ (x \geq 0)$, $y = \sqrt[2m+1]{x}$, их свойства и графики. Далее изучаются показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики. Основные свойства логарифма доказываются. Затем изучаются частные случаи степенных функций, их свойства и графики. А уже затем рассматриваются основные тригонометрические функции, их свойства и графики.

В 11 классе изучение начинают с понятия функции и сложной функции. Далее вводятся понятия области определения, области значения функции и ограниченности функции, наибольшего и наименьшего значения функции. После дается определение четной, нечетной и периодической функции. Затем рассматриваются промежутки возрастания, убывания, знакопостоянства и нули функции. В отдельном параграфе рассмотрены основные преобразования графиков функций. Вводится понятие непрерывной функции. Рассматриваются примеры разрывных функций. Уже после этого изучаются обратные, взаимно обратные функции и обратно тригонометрические функции (перечисляются основные свойства и графики).

Итак, можно сделать вывод, что в учебниках А.Г. Мордковича и С.М. Никольского тема функции является одной из ведущих. Здесь рассмотрены такие свойства функций, которым не уделяется внимания в учебнике Ш.А. Алимова; например, непрерывность и выпуклость функции, по причине сложности их обоснования.

В ходе анализа были сделаны следующие выводы о формировании понятия «функции» у школьников:

1) Начинать изучение темы с определения теоретических основ не принято; необходима практическая необходимость введения данного понятия, зачастую – при помощи линейной функции.
2) Наиболее важным принципом изучения функций можно считать наглядность; активная работа с графиком функции начинается, в среднем, с 7 класса и продолжается до конца 11 класса;
3) Изучение функций циклично: авторы постепенно углубляют понятие функции, увеличивая охват темы и приводя обучающегося в 10-11 классах к началам анализа.

Глава III. Тестовые задания по теме «Функция»

§1. Анализ материалов ЕГЭ по теме «Функция»

В 2019 году экзамен по математике профильного уровня содержит задания, распределенные на две части, отличающиеся по сложности, числу заданий и форме ответов.

Экзаменационная работа по математике профильного уровня состоит из 8 заданий базового уровня сложности, 9 заданий повышенного уровня сложности и 2 заданий высокого. Таким образом, школьнику предполагается решить 19 заданий за 3 часа 55 минут (235 минут).

Первая часть работы содержит 12 заданий с кратким ответом: 8 базового уровня сложности и 4 повышенного по материалу курса математики.

Вторая часть работы содержит 7 заданий: 5 повышенного уровня сложности и 2 высокого. При их выполнении необходимо записать полное решение и ответ.

Анализ материалов ЕГЭ 2018-2019 года показал, что задания на тему «Функция» встречаются в следующих заданиях экзамена профильного уровня:

5 - простейшие уравнения (с функциями показательной, логарифмической, степенной, тригонометрическими);

7 - производная и первообразная функции (физический и геометрический смысл, касательная, применение к исследованию функций);

9 – вычисления и преобразования (с логарифмическими и тригонометрическими функциями в том числе);

10 - задачи с прикладным содержанием (работа с функцией как выражением физической формулы);

12 - нахождение наибольшего/наименьшего значения функции;

13 - решение уравнения (с логарифмическими, показательными и тригонометрическими функциями в том числе; нахождение ОДЗ);

15 - решение неравенства с функциями (показательная, логарифмическая, степенная, модуль);
18 - решение системы уравнений с параметром.
Это составляет более трети всех заданий, что подтверждает актуальность данной темы.
Таким образом, после анализа школьных учебников и материалов ЕГЭ становится очевидным, что многие задания, встречающиеся в ЕГЭ (чаще всего во второй части) вызывают затруднения у учащихся, а это связано в первую очередь с тем, что в школьных учебниках задания таких типов практически не рассматриваются.

Поэтому возникает необходимость разработки факультативных занятий для учащихся старших классов, с целью подготовки к единому государственному экзамену.

§2. Факультатив на тему «Функция»

Учитывая недостатки школьных учебников по изложению темы «Функция» и анализы материалов ЕГЭ, был разработан курс факультативных занятий для учащихся старших классов, с целью подготовки учащихся к ЕГЭ и повышению уровня знаний по теме «Функция».

Главной целью факультатива является обобщение, повторение, углубление и систематизация полученных знаний по теме «Функция», а также расширение кругозора учащихся, развитие математического мышления, формирование активного познавательного интереса к предмету.

В рамках ФГОС, факультативные занятия направлены на следующие результаты развития:

1) в **личностном** направлении:

- креативность мышления, инициатива, находчивость, активность

при решении математических задач;

- умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

- способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

2) в **метапредметном** направлении:

- умение понимать и использовать математические средства наглядности (графики, диаграммы, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

- умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач, понимать необходимость их проверки;

- умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач;

- умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;

3) в **предметном** направлении:

- овладение системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой, умение на основе функционально-графических представлений описывать и анализировать реальные зависимости;

Каждое из пяти факультативных занятий предполагает коллективное решение теста из пяти заданий повышенного и высокого уровня сложности. Учитель выполняет координирующую и контролирующую функции, поощряя самостоятельность и творческий подход к решению предлагаемых заданий. В процессе решения при необходимости учитель может повторить с учениками теорию, необходимую для решения задания.

Кроме того, к каждому классному тесту прилагается домашнее задание из двух задач для самостоятельного решения.

В данных тестах и домашних заданиях представлены следующие темы:

1) Область определения и область значения функции;

2) Наибольшее и наименьшее значение функции;

3) Действия над функциями; нахождение значения функции;

4) Свойства функций;

5) Функция и параметры.

Уровень сложности заданий возрастает с каждым занятием, темы повторяются и углубляются.

ЗАНЯТИЕ 1

1. Укажите область определения функции f(x) = $\sqrt{16-x^2} + \dfrac{3x+7}{x^2-4x-5}$

1)[-4;4], 2) [-4;-1)∪(-1;4],

3) (-∞; -4]∪[4;5) ∪(5;∞), 4) [-4;4] ∪(5;∞)

Решение:

D(f): $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ x^2-4x-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 \geq -16 \\ \begin{cases} x_1+x_2 \neq 4 \\ x_1x_2 \neq -5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq -16 \\ \begin{cases} x_1 \neq 5 \\ x_2 \neq -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

⇒ D(f): x∈[-4;-1)∪(-1;4]

Ответ: вариант 2.

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(0), если f(5) + f(-5) = 10?

1)3 2)4 3)5 4)10

5)20

Решение: т.к. y = f(x) – линейная функция, то f(x) = k x+b

⇒ f(5) = 5k + b и f(-5) = -5k+b

⇒ т.к. f(5) + f(-5) = 10, то: 5k + b + (-5k+b) = 10

⇒ 2b = 10 ⇒ b = 5

⇒ f(0) = k(0)+5 = 5

Ответ: 5 (вариант 3).

3. Известно, что y = f(x) – четная и y = g(x) – нечетная функции. Чему равно g(-3), если f(-2) + g(3) = 10 и f(2)+g(-3)=4?

1)2 2)7 3)-7 4)3 5)-3

Решение:

$g(-3) = 4 - f(2)$; $f(-2) = 10 – g(3)$

т.к. $f(x)$ – четная, то $f(-2) = f(2)$

$\Rightarrow$ $f(2) = 10 – g(3)$ $\Rightarrow$ $g(-3) = 4 – (10 – g(3)) = -6+g(3)$

т.к. $g(x)$ – нечетная функция и $g(-3) = -6+g(3)$, то:

$g(-3) = -6 – g(-3)$;

$\Rightarrow$ $2g(-3) = -6$ $\Rightarrow$ $g(-3) = -3$.

Ответ: $g(-3) = -3$ (вариант 5).

4. Даны функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Если $f(x-1) = 3x+1$ и $f(g(x)) = 6x-8$, то чему равно $g(x)$?

1)2x-3 2)2x+1 3)x-3 4)x+1
5)2x-4

Решение:

$f(x) = k*x + b$

$\Rightarrow$ $f(x-1) = k(x-1)+b = 3x+1$

$\Rightarrow$ $k x – k + b = 3x+1$

Из данного уравнения следует, что $k*x = 3x$, то есть $k = 3$. Подставим это значение в уравнение и найдем b:

$3x – 3 + b = 3x+1$ $\Rightarrow$ $b – 3 = 1$ $\Rightarrow$ $b = 4$

Получим формулу функции $y = f(x) = 3x+4$;

Подставим в эту формулу $g(x)$:

$f(g(x)) = 3(g(x)) + 4 = 6x-8$

$3(g(x)) = 6x – 12$

g(x) = 2x-4

Ответ: g(x) = 2x-4 (вариант 5).

5. Чему равна площадь фигуры, образованной графиком системы:

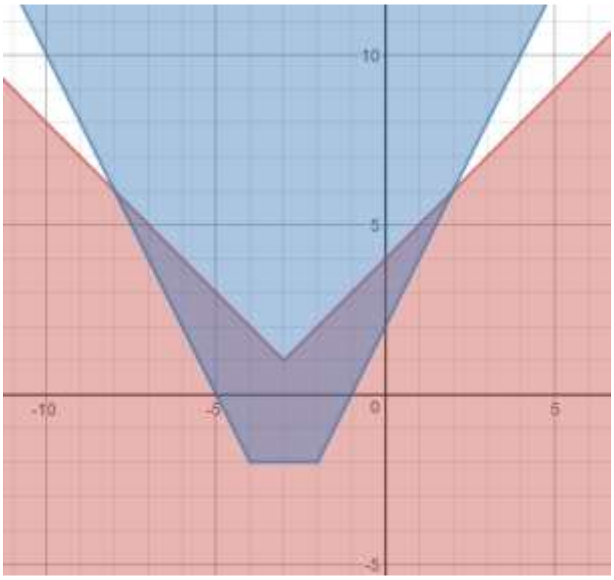
$$\begin{cases} y \le |x+3|+1 \\ y+4 \ge |x+2|+|x+4| \end{cases}?$$

Решение:

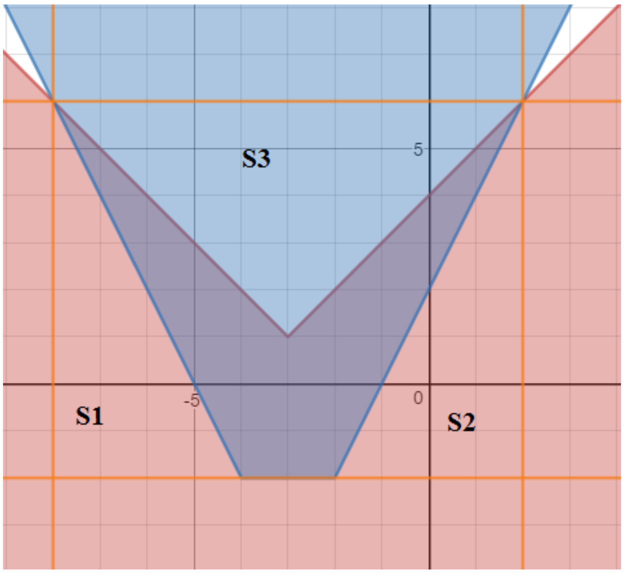
Для того чтобы вычислить площадь фигуры, образованной графиком системы, необходимо построить данный график.

$$\begin{cases} y \le |x+3|+1 \\ y+4 \ge |x+2|+|x+4| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \le |x+3|+1 \\ y \ge |x+2|+|x+4|-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y \le x+3+1, x > -3, \\ y \le -x-3+1, x \le -3, \end{cases} \\ \begin{cases} y > -4-x-2-x-4, x < (-4) \\ y \ge -4-x-2+x+4, -4 \le x \le 2 \\ y > -4+x+2+x+4, x > -2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \le x+4, x > -3, \\ y \le -x-2, x \le -3, \end{cases} \\ \begin{cases} y > -2x-10, x < (-4) \\ y \ge -2, -4 \le x \le 2 \\ y > 2x+2, x > -2 \end{cases} \end{cases}$$



По графику мы можем вычислить площадь наименьшей прямоугольной области, охватывающей фигуру системы, а также площади треугольников, образованных их пересечением.



Данная область будет представлена в виде $S_{\text{пр}}$: $\begin{cases} -8 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 6 \end{cases}$

$S_{\text{пр}} = 10 * 8 = 80$

S_1=S_2, S_1+S_2 $= 8 * 4 = 32;$

$S_3 = 5 * 5 = 25$

Обозначим искомую площадь S. Тогда:

S = $S_{\text{пр}} - (S_1 + S_2 + S_3)$ = 80 – (32+25) = 80 – 57 = 23.

Ответ: 23.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 1

1. Укажите область определения функции $y = \sqrt{\log_{10}(2 - \sqrt{x-1})}$

Решение:

$\log_{10}(2 - \sqrt{x-1}\,) \geq 0 \Rightarrow$

$2 - \sqrt{x-1} \;\geq 1 \Rightarrow$

$-\sqrt{x-1} \geq -1 \Rightarrow$

$\sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow$

$\begin{cases} x-1 \leq 1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$

Ответ: x ∊ [1;2]

2. Найти значение функции $y = \frac{f(x)+2f(-x)-3g(-x)}{g(x)}$ в точке x_0, если y = f(x) – четная, а y = g(x) – нечетная и f(x_0) = 1, g$(x_0) = 2$.

Решение:

$y(x_0) = \frac{f(x_0)+2f(-x_0)-3g(-x_0)}{g(x_0)} \Rightarrow$

Т.к. f(x) – четная, то f(-x) = f(x) и $y(x_0) = \frac{f(x_0)+2f(x_0)-3g(-x_0)}{g(x_0)}$

$y(x_0) = \frac{1+2*1-3*(-2)}{2} = \frac{1+2+6}{2}$ = 4,5

Ответ: 4,5

ЗАНЯТИЕ 2

1. Укажите функцию, которая возрастает на всей области определения:

1) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = ctg(x)$; 3) $y = \cos(x)$; 4) $y = |-x|$

Решение:

Тангенс и котангенс не могут возрастать на всей своей области определения, т.к. они являются периодичными функциями.

Функция y = $|-x|$ является симметричной относительно оси Oy, потому также не может возрастать на всей области определения, D(f): (-∞; +∞).

Очевидно, что верный вариант – y = $x^{\frac{1}{3}}$. Данная функция является степенной, и по свойствам степенных функций возрастает на всей своей области определения, D(f): [0; +∞).

Ответ: вариант 1.

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(12), если f(-4) = 6 и f(4) = 4?

1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) -1

Решение:

Т.к. f(x) – линейная функция, то она имеет вид f(x) = $kx + b \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(-4) = 6 \\ f(4) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4k + b = 6 \\ 4k + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 + 4k \\ 4k + (6 + 4k) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 + 4k \\ 8k = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f(x) = $-\frac{1}{4}x + 5$

f(12) = $\left(-\frac{1}{4} * 12\right) + 5 = -3 + 5 = 2$

Ответ: вариант 2

3. Нечетная функция y = f(x) определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции g(x) = x(2x+1)(x-2)(x-3). Сколько корней имеет уравнение f(x) = 0?

1) 4; 2) 5; 3) 2; 4)3

Решение:

f(x) = 0;

g(x) = 0 $\Rightarrow$ x(2x+1)(x-2)(x-3) = 0

Решениями данного уравнения будут: 0, --$\frac{1}{2}$, 2 и 3. Но т.к. значения функции g(x) совпадают со значениями f(x) лишь для неотрицательных x, то из данных корней в число корней уравнения f(x) = 0 войдут только 0, 2 и 3.

Т.к. f(x) – нечетная, для неотрицательных значений x значения f(x) совпадут с g(x) ⇒ для тех же значений f(x) аргументами будут (-x). Таким образом, корнями уравнения f(x) = 0 будут являться 0, 2,3, -2 и -3.

Ответ: вариант 2.

4. Даны функции f(x) = max{1-4x; 2x-3} и g(x) = min{|x|; x^2}. Вычислите f(g$\left(\frac{-1}{2}\right)$)+g(f(3)).

1)-11 2)3 3)8 4)9 5)12

Решение:

1) $g\left(\frac{-1}{2}\right) = \min\left\{\left|\frac{-1}{2}\right|;\ \left(\frac{-1}{2}\right)^2\right\} = min\left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}.$
2) $f(g\left(\frac{-1}{2}\right)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \max\{1 - 4\left(\frac{1}{4}\right);\ 2 * \left(\frac{1}{4}\right) - 3\} = max\{0;\ \frac{1}{2} - 3\} = 0;$
3) $f(3) = \max\{1 - (4 * 3); (2 * 3) - 3\} = max\{-11; 3\} = 3;$
4) $g(f(3)) = \min\{|3|; 3^2\} = \min\{3;9\} = 3;$
5) $f(g\left(\frac{-1}{2}\right)) + g(f(3)) = 0 + 3 = 3.$

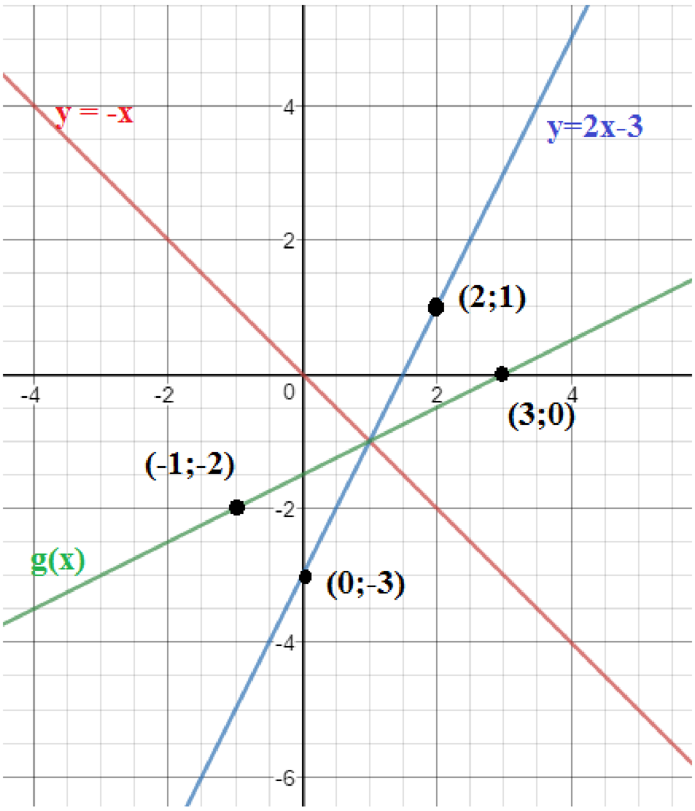
Ответ: 3 (вариант 2).

5. Графики функций y = f(x) и y = g(x) симметричны относительно прямой y = (- x). Чему равна сумма коэффициентов g(x), если f(x) = 2x-3?

Решение:

Сумма коэффициентов g(x) равна значению g(x) при x=1.

Построим график f(x) = 2x-3 и по нему построим симметричный ему график относительно прямой y = (-x).



Точки (0;-3) и (2;1) принадлежат графику f(x) и при симметрии перейдет в точки из g(x), (3;0) и (-1;2) соответственно.

С их помощью найдем коэффициенты для g(x):

g(x) = k*x+b

Составим систему равенств:

$$\begin{cases} 0 = 3k + b \\ -2 = -k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3k \\ -2 = -k - 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3k \\ -2 = -4k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3k \\ k = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом, получим уравнение, определяющее функцию g(x):

g(x) = $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow$ g(1) = -1.

Ответ: -1.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 2

1. y = f(x) – линейная функция. Найти f(3), если f(x+1) – f(x-1) = 6 и f(0) = 4.

Решение:

f(x) = kx+b;

f(x+1) = k(x+1)+b = kx+k+b;

f(x-1) = k(x-1) = kx-k+b;

⇒ f(x+1) – f(x-1) = kx+k+b – (kx-k+b) = kx+k+b –kx+k-b = 2k ⇒ 2k = 6 ⇒ k = 3

f(0) = (k*0)+b ⇒ f(0) = b ⇒ b = 4.

Таким образом, функция f(x) имеет вид: f(x) = 3x+4 ⇒ f(3) = (3*3)+4 = 13.

Ответ: 13.

2. Найти множество значений функции $y = \log_4(16+|x|) - \frac{3x}{|x|}$, если $x \leq 48$.

Решение:

y = $\begin{cases}(\log_4(16+\text{x}) - 3, \text{где x} > 0\\(\log_4(16-\text{x}) + 3, \text{где x} < 0\end{cases}$, где x≠0 и x ≤ 48.

Для того, чтобы найти множество значений данной функции, рассмотрим ее область определения:

D(f): (-∞;0)∪(0;48]

Рассмотрим оба данных промежутка:

1) $\text{x} < 0$, т.е. x ∈ (-∞;0).

При данных значениях x функция будет принимать положительные значения от значения функции при x=0 до +∞. Найдем значение функции при x=0 для $\text{x} < 0$:

y = $(\log_4 16) + 3 = 2 + 3 = 5$

⇒ y ∈ (5; +∞)

2) x > 0, т.е. x ∈ (0;48].

$0 < x \leq 48 \Rightarrow$

$16 < x+16 \leq 64 \Rightarrow$

$2 < \log_4(x+16) \leq 3 \Rightarrow$

$-1 < \log_4(x+16) - 3 \leq 0 \Rightarrow$

$-1 < y \leq 0$, т.е. , $y \in (-1;0]$.

Таким образом, множеством значений функции $y = \log_4(16+|x|) - \frac{3x}{|x|}$ при $x \leq 48$ является совокупность двух полученных промежутков: $y \in (-1;0] \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $y \in (-1;0] \cup (5; +\infty)$.

ЗАНЯТИЕ 3

1. Укажите область определения функции $y = \begin{cases} \frac{3x+1}{\sqrt{9-x^2}}, \text{если } x > 1, \\ \frac{5}{x^2+2x-8}, \text{если } x \leq 1. \end{cases}$

1) (-3;2)∪(2;3);   2) (-3;3);   3) (-∞;-4)∪(-4;1)∪(1;3);

4)(-∞;-4)∪(-4;3);   5)(-∞;-4)∪(-4;2)∪(2;3).

Решение:

$$D(f): \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9 - x^2 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x - 8 \neq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 3 \\ \begin{cases} x \neq -4, x \neq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 3, \text{если } x > 1 \\ x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1], \text{ если } x \leq 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x \in (-\infty;-4) \cup (-4;3)$

Ответ: вариант 4.

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(5), если f(f(x)) = 25x+18 и f(0)>0?

1)0 2)13 3)21 4)28 5)35

Решение:

Т.к. $f(x) = kx + b$, то $f\big(f(x)\big) = k(kx + b) + b = k^2x + kb + b = k^2x + (k + 1)b$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25x = k^2x \\ (k + 1)b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 5 \\ \left[\begin{array}{l} (5 + 1)b = 18 \\ (-5 + 1)b = 18 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 5 \\ \left[\begin{array}{l} 6b = 18 \\ -4b = 18 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \pm 5 \\ \left[\begin{array}{l} b = 3 \\ b = -4{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

f(0) >0 ⇒ b >0 ⇒ $\begin{cases} k = 5 \\ b = 3 \end{cases}$

f(x) = 5x+3 ⇒ f(5) = 25+3 = 28

Ответ: 28 (вариант 4).

3. График которой из нижеперечисленных функций совпадает с графиком функции $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{если } x < 1 \\ x, x = 1 \\ x - 1, \text{если } x > 1 \end{cases}$?

1) y = x + $\frac{|x-1|}{x-1}$; 2) y = x - $\frac{|x-1|}{x-1}$; 3) y = $\begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1}, \text{если } x \neq 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$;

4) y = $\begin{cases} x - \frac{|x-1|}{x-1}, \text{если } x \neq 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$; 5) $y = x + \frac{|x|}{x}$.

Решение:

$$x - 1 = x - \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

Если $x > 1 \Rightarrow |x - 1| = x - 1 \Rightarrow f(x) = x - \frac{x-1}{x-1} = x - 1;$

Если $x < 1 \Rightarrow |x - 1| = -x + 1 \Rightarrow f(x) = x - \frac{-x+1}{x-1} = x + 1;$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{|x-1|}{x-1}, \text{если } x \neq 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: вариант 4.

4. Дана функция f(x) = $ax^5 + bx^3 + cx + 10$. Вычислите f(-99), если f(99)=7.

1)-13 2)-7 3)7 4)13 5)17

Решение:

f(99)=7

$\Rightarrow \quad a(99)^5 + b(99)^3 + 99c + 10 = 7$;

$\Rightarrow \quad 99(a(99)^4 + b(99)^2 + c) = 7 - 10$;

$\Rightarrow \quad a(99)^4 + b(99)^2 + c = -\frac{1}{33}$;

f(-99)= $a(-99)^5 + b(-99)^3 - 99c + 10$

$$-99(a(-99)^4 + b(-99)^2 + c) + 10$$

$$-99(a(99)^4 + b(99)^2 + c) + 10$$

$$-99(-\frac{1}{33}) + 10 = \frac{99}{33} + 10 = 3 + 10 = 13$$

Ответ: 13 (вариант 4).

5. При каких a функция y = $\sqrt{2x^2 - (a+1)x + a + 1}$ + $\sqrt{x^2 + 2x + 3 - a}$ определена на всей числовой прямой?

1) $2 \leq a \leq 7$; 2) $-1 \leq a \leq 2$; 3) $-1 \leq a \leq 7$; 4) $a \leq -1$ или $a \geq 7$; 5) $a \geq 7$

Решение:

$$\begin{cases} 2x^2 - (a+1)x + a + 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 3 - a \geq 0 \end{cases}$$

1) $2x^2 - (a+1)x + a + 1 \geq 0$

Проведем замену: a+1 = k;

$2x^2 - kx + k \geq 0$

D = $k^2 - 4 * 2 * k = k^2 - 8k$

x = $\frac{k \mp \sqrt{k^2 - 8k}}{4}$

$k^2 - 8k \geq 0$

k(k-8) $\geq 0 \Rightarrow$ k ∊ (-∞; 0]∪[8;+∞)

k = a+1 ⇒ a ∊ (-∞; -1] ∪ [7;+∞)

2) $x^2 + 2x + 3 - a \geq 0$

D = 4 – 4*1*(3-a) = 4 – 12+4a = 4a-8

x = $\frac{-2 \mp \sqrt{4a-8}}{2}$

4a-8 ≥ 0

4(a-2) ≥ 0

a ≥ 2

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -1] \cup [7; +\infty) \\ a \in [2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in [7; +\infty)$$

Ответ: $a \geq 7$, вариант 5.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 3

1. Дана функция y = f(x). Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ для всех действительных a и b; $f(1{,}3) = 0{,}2$ и $f(3{,}7) = 1{,}8,$ то чему равно $10 * f(1{,}9)$?

Решение: необходимо найти f(1,9):

$$f(1{,}9) = f\left(\frac{3{,}8}{2}\right) = f\left(\frac{1{,}3 + 2{,}5}{2}\right) = \frac{f(1{,}3) + f(2{,}5)}{2} = \frac{0{,}2 + f(2{,}5)}{2}$$

Найдем f(2,5):

$$f(2{,}5) = f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{1{,}3 + 3{,}7}{2}\right) = \frac{f(1{,}3) + f(3{,}7)}{2} = \frac{0{,}2 + 1{,}8}{2} = 1$$

Подставим полученное выражение в $f(1{,}9)$:

$$f(1{,}9) = \frac{0{,}2 + f(2{,}5)}{2} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$$

Полученный результат умножим на 10:

$10 * f(1{,}9)$ = 10*0,6 = 6

Ответ: 6.

2. При каких a область определения y = $\sqrt{4 + 3x - x^2}$+$\sqrt{ax - 1}$ – пустое множество?

Решение:

Найдем D(f):

$$\begin{cases} 4 + 3x - x^2 \geq 0 \ (1) \\ \quad ax - 1 \geq 0 \ \ (2) \end{cases}$$

1) $4 + 3x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0$

D = $(-3)^2 - 4 * (-4) = 9 + 16 = 25$

x = $\frac{3\mp 5}{2}$ ⇒ x ∈ [-1;4]

2)$ax-1\geq 0$

$x\geq\frac{1}{a}\Rightarrow -1\leq\frac{1}{a}\leq 4\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}\geq -1\\ \frac{1}{a}\leq 4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geq -1\\ a\leq\frac{1}{4}\end{cases}$

Таким образом, f(x) определяется при $a\in\left[-1;\frac{1}{4}\right]$

⇒ D(f)=⃠ при $a\in(-\infty;-1)\cup(\frac{1}{4};+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(\frac{1}{4};+\infty)$.

ЗАНЯТИЕ 4

1. Сколько целых чисел содержится в области определения функции

$y=\sqrt{\frac{\sqrt{x+3}}{(x^2-16)\times\sqrt{7-x}}}$?

1) 1; 2) 2; 3)5; 4;1.

Решение:

Найдем область определения данной функции:

$D(f):\begin{cases}\frac{\sqrt{x+3}}{(x^2-16)\times\sqrt{7-x}}\geq 0\\ x+3\geq 0\\ (x^2-16)\times\sqrt{7-x}\neq 0\\ 7-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x^2-16)>0\\ x+3\geq 0\\ 7-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|>4\\ x\geq -3\\ x<7\end{cases}$

⇒ x∈(4;7) ⇒ x = 5 или x = 6, то есть, получили 2 целых значения x.

Ответ: вариант 2.

2. Какое из нижеперечисленных значений является наименьшим для функции y=|x-3|+|5-x| на отрезке [-1;10]?

1)8; 2)6; 3)2: 4)0; 5)12

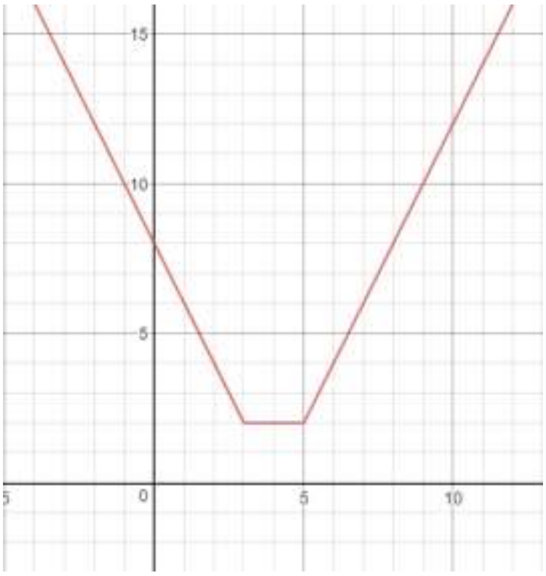
Решение:

y=|x-3|+|5-x|

Разобьем отрезок [-1; 10] на три части точками x = 3 и x = 5:

$$y=\begin{cases} x-3-5+x, x>5 \\ x-3+5-x, 3\le x\le 5 \\ -x+3+5-x, x<3 \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} 2x-8,\ x>5 \\ 2, \quad 3\le x\le 5 \\ -2x+8,\ x<3 \end{cases}$$

Построим график:



По графику можно увидеть, что на отрезке [-1;10] функция принимает наименьшее значение y=2.

Ответ: вариант 3.

3. Даны функции f(x) = ax+2 и g(x) = x+a-1. При каком значении a равенство f(g(x))=g(f(x)) выполняется для всех x?

1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 0,5

Решение:

$f\big(g(x)\big) = f(x + a - 1) = a(x + a - 1) + 2 = ax + a^2 - a + 2$

$g\big(f(x)\big) = g(ax + 2) = (ax + 2) + a - 1 = ax + a + 1$

$ax + a^2 - a + 2 = ax + a + 1 \Rightarrow$

$a^2 - a + 2 = a + 1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

Проверка: f(x) = ax+2 = x+2 и g(x) = x+a-1= x

⇒ f(g(x)) = x+2 и g(f(x)) = x+2.

Ответ: вариант 2.

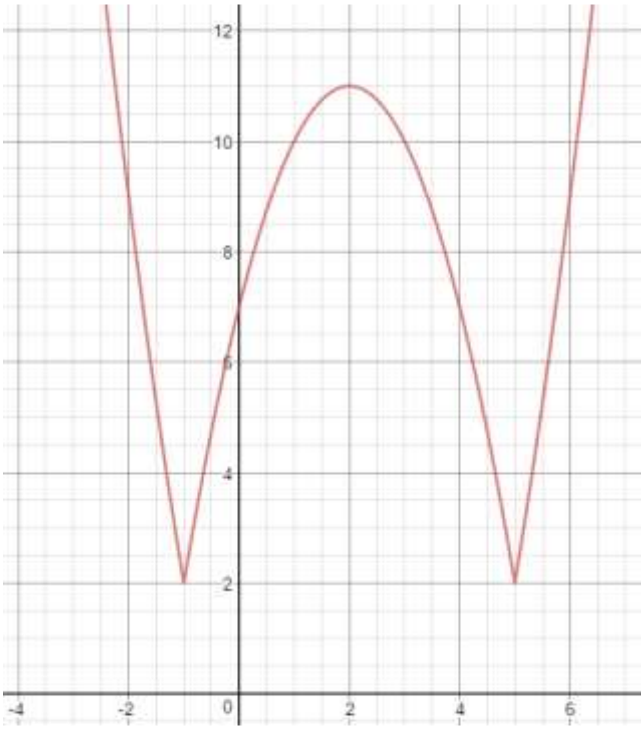
4. При каких значениях а графики функций у = $|x^2 - 4x - 5| + 2$ и $y =$ а + 5 имеют 3 точки пересечения?

1) а = -3 или а>6; 2) а = 6; 3) -3<а<6; 4) а<-3; 5) а>6

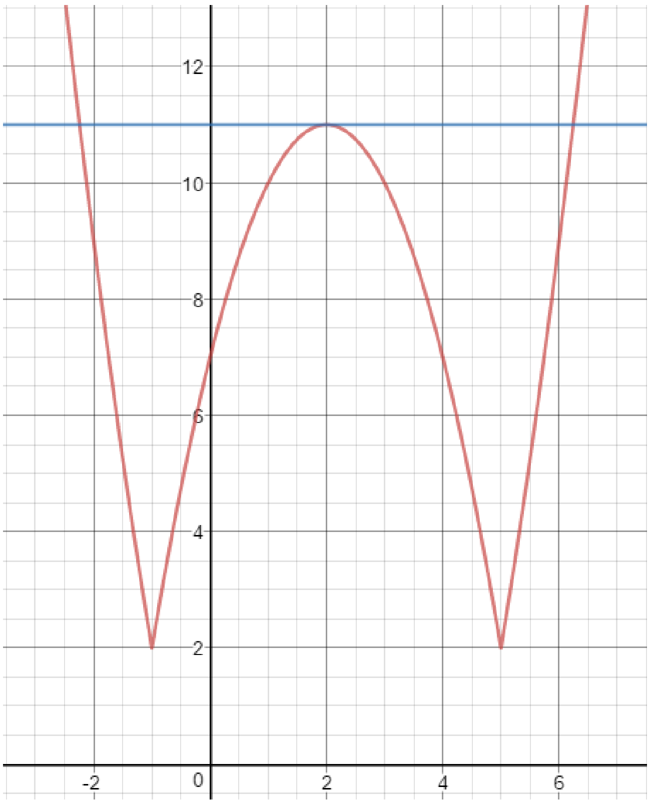
Решение:

Т.к. график функции у = а+5 представляет собой прямую, параллельную оси Ох, то для решения необходимо построить график функции у = $|x^2 - 4x - 5| + 2$, и с его помощью определить, при каком значении а прямая у = а+5 пересечет его в трех точках.

Строим график у = $|x^2 - 4x - 5| + 2$:



По данному графику видно, что нужная нам прямая будет проходить через точку (2;11), то есть, это прямая y = 11;



Т.к. y = a + 5, то a примет значение 11-5 = 6.

Ответ: вариант 2.

5. Найти наибольшее целое значение функции $y = 13 * 2^{(\sin x * \sin 2x + \cos x * \cos 2x) - 3}$.

Решение:

Для того, чтобы найти наибольшее целое значение данной функции, необходимо найти наибольшее значение $(\sin x\ * \sin 2x + \cos x * \cos 2x) - 3$.

$$\sin x\ * \sin 2x + \cos x * \cos 2x$$
$$= sin\,x\ * (2\sin x * \cos x) + \cos x * (1 - 2\,sin^2\,x) = \cos x$$

$\Rightarrow y = 13 * 2^{\cos x - 3}$.

Наибольшее значение, принимаемое косинусом, равно 1. Подставим его в функцию:

$y = 13 * 2^{\cos x - 3} = 13 * 2^{1-3} = 13 * 2^{-2} = \frac{13}{2^2} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$.

Таким образом, мы получили наибольшее значение функции y = $13 * 2^{\sin x * \sin 2x + \cos x * \cos 2x - 3}$. Данная функция определена на всей числовой прямой. Следовательно, наибольшим целым значением данной функции является 3.

Ответ: 3.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 4

1. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{34}{(\frac{1}{5})^x + (\frac{1}{3})^x}$ на промежутке [-5;-2].

Решение:

Подставляя значения из промежутка [-5;-2] в функцию, можем увидеть, что на данном промежутке функция возрастает:

x = - 5 ⇒ y = $\frac{34}{5^5 + 3^5}$

x = -4 ⇒ y = $\frac{34}{5^4+3^4}$

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

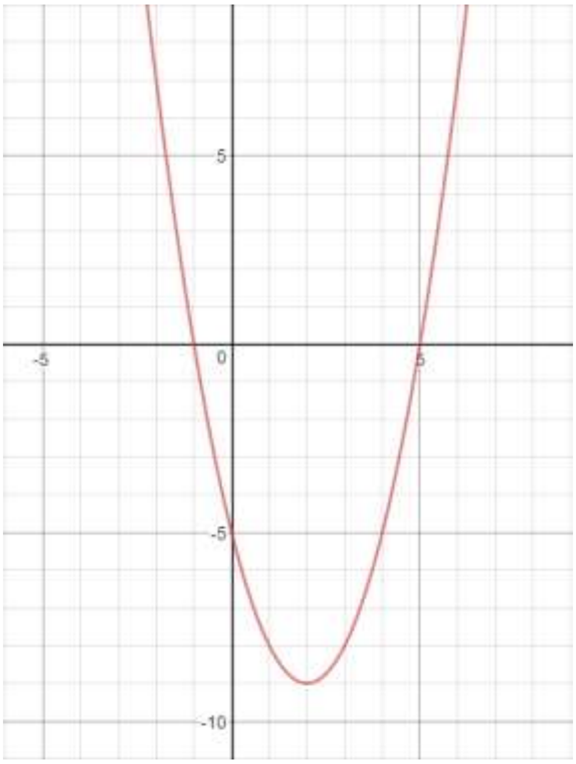
x = -2 ⇒ y = $\frac{34}{5^2+3^2} = \frac{34}{25+9} = \frac{34}{34}$ = 1.

Ответ: 1.

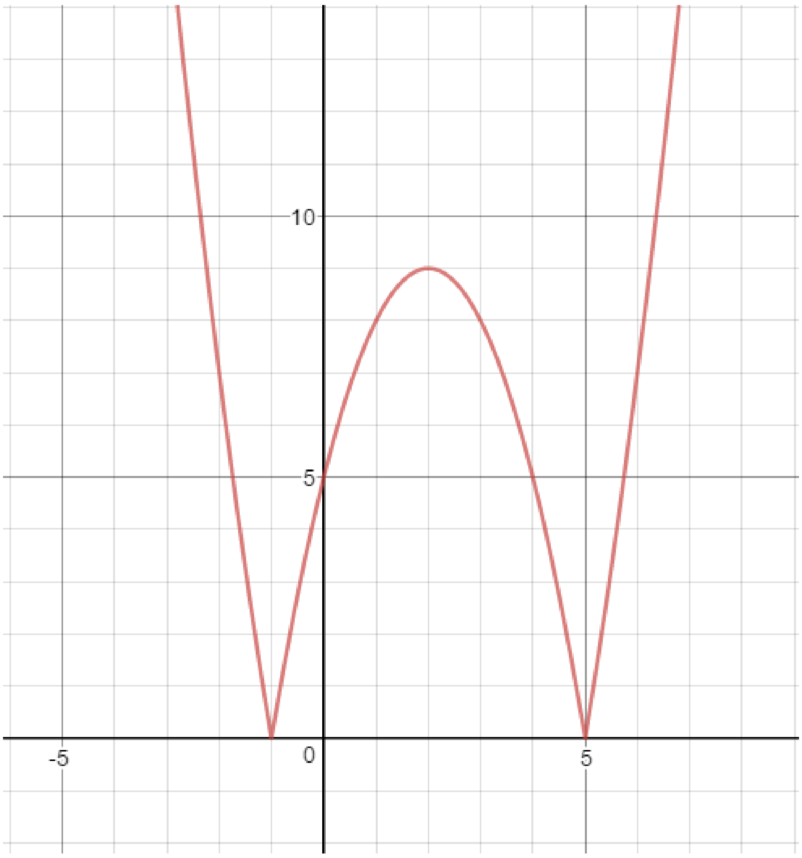
2. При каких значениях a график функции y = a+5 и y = $|x^2-4x-5|+2$ имеют три точки пересечения?

Решение:

Функция y = $|x^2-4x-5|+2$ – сложная. В ее состав входит функция x^2-4x-5. Это парабола, ветви которой направлены вверх:



Т.к. данная функция заключена в модуль, то все ее отрицательные значения поменяют свой знак на противоположный, т.е. график y = $|x^2-4x-5|$ будет иметь вид:



Графиком функции y = a+5 является прямая, параллельная оси Ox. Она может пересечь график функции y = $|x^2 - 4x - 5| + 2$ d в трех точках лишь при условии, что она пересечет точку, полученную из вершины параболы $x^2 - 4x - 5$ (при этом она пересечет также и две точки, полученные из точек, принадлежащих ветвям данной параболы).

Вершина данной параболы имеет абсциссу x = 2 ⇒ y = $|2^2 - 4 * 2 - 5| + 2 = |4 - 8 - 5| + 2 = 9 + 2 = 11.$

Ордината точки, соответствующей вершине параболы, равна 11 ⇒

y = a+5=11 ⇒ a = 6.

Ответ: 6.

КОНТРОЛЬНОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ

1. Сколько точек пересечения имеют графики функций y = $\frac{2}{x}$ и $y = 1 - x$?

1)0 2)1 3)2 4)3 5)4

Решение:

Для того чтобы найти общие точки графиков функций, приравняем правые части определяющих их уравнений.

$\frac{2}{x}$ = 1-x, где x≠0;

2 = x(1-x);

2 = $x - x^2$;

$-x^2 + x - 2 = 0$;

По теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$ ⇒ в поле действительных чисел решений нет ⇒ графики функций y = $\frac{2}{x}$ и $y = 1 - x$ не имеют точек пересечения.

Ответ: 0 (вариант 1).

2. Графики функций y = f(x) и y = g(x) симметричны относительно оси Oy. Какое из нижеперечисленных утверждений верно для $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{если } x \geq 0 \\ g(x), \text{если } x < 0 \end{cases}$?

1) h(x) = |f(x)|
2) h(x) = |g(x)|
3) h(x) = f(|x|)
4) h(x) = g(|x|)
5) h(x)=f(x)+g(x)

Решение:

Рассмотрим каждый из предложенных вариантов и найдем среди них верное утверждение.

1) h(x) = |f(x)| - не верно, т.к. графики g(x) и f(x) не симметричны относительно оси Ox;
2) h(x) = |g(x)| - не верно, по той же причине;
3) h(x) = f(|x|) – верно, т.к. графики g(x) и f(x) симметричны относительно оси Oy;
4) h(x) = g(|x|) – не верно, т.к. если $x \geq 0$, то h(x) = f(x)
5) h(x)=f(x)+g(x) – не верно, т.к. график h(x) представляет собой не сложение значений функций f(x) и g(x), а совокупность левой части графика g(x) и правой – f(x).

3. y=f(x) – четная функция, y = g(x) – нечетная функция. Чему равно g(-3), если f(-2)+g(3)=10 и f(2)+g(-3)=4.

Решение:

Т.к. f(x) – четная функция, то f(-2) = f(2)

$\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 10 - g(3) \\ f(2) = 4 - g(-3) \end{cases}$ ⇒ 10-g(3)=4-g(-3) ⇒ g(3)-g(-3)=6

Т.к. g(x) – нечетная функция, то g(-3) = -g(3) ⇒ g(3)+g(3) = 6 ⇒ g(3) = 3

⇒ g(-3) = -g(3) = -3

Ответ: -3.

4. Даны две функции, y = f(x) и y = g(x). Если f(x-1) = 3x+1 и f(g(x))=6x-8, то чему равно g(1)?

1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) -4

Решение:

f(x) = $kx + b \;\Rightarrow$

f(x-1) = $k(x-1) + b = kx - k + b = 3x + 1$

$\Rightarrow \begin{cases} kx = 3x \\ b - k = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ b = 4 \end{cases}$

⇒ f(x) = 3x+4

f(x-1) = 3(x-1) + 4 = 3x-3+4 = 3x+1

⇒ f(g(x)) = 3(g(x))+4 = 6x-8

g(x) = kx+b ⇒ 3(g(x))+4 = 3(kx+b)+4 = 3kx+3b+4 = 6x-8 ⇒

$\begin{cases} 3kx = 6x \\ 3b + 4 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

⇒ g(x) = 2x-4

Проверка: f(g(x)) = f(2x-4) = 3(2x-4)+4 = 6x – 12 + 4 = 6x-8

g(1) = 2-4= -2

Ответ: вариант 3.

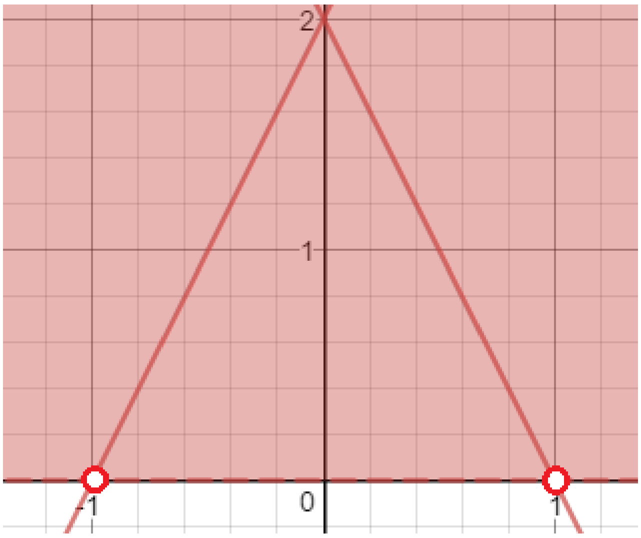
5. Чему равна сумма целых значений параметра a,

при которых система $\begin{cases} |x| + \frac{|y|}{2} = 1 \\ y = x + \frac{a}{2} \\ y > 0 \end{cases}$ имеет 2 решения?

Решение:

Построим график $|x| + \frac{|y|}{2} = 1$ при $y > 0$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 - 2x \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 + 2x \\ x \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



По графику очевидно, что x ∊ (-1;1) и y ∊ (0;2].

Для того, чтобы система имела два решения, необходимо, чтобы прямая $y = x + \frac{a}{2}$ пересекала верхнюю часть ромба $|x| + \frac{|y|}{2} = 1$ в двух точках.

То есть, данная прямая может проходить через все точки верхней части ромба, кроме его вершин.

С помощью данного условия отыщем подходящие целые значения параметра a:

Вычислим значение a в точке (-1;0):

$$0 = (-1) + \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2$$

Вычислим значение a в точке (0;2):

$$2 = 0 + \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4$$

Следовательно, параметр a∊(2;4). По условию, нам нужна сумма целых значений $a \Rightarrow a = 3$.

Ответ: 3.

Заключение

В данной квалификационной работе был рассмотрен метод тестирования, как один из важнейших методов проверки знаний в образовательной системе. Именно тестирование, как метод контроля, позволяет создать основу объективной оценки уровня подготовки школьников, помогает сделать учебный процесс более эффективным.

Ученики встречаются с применениями функциональной зависимости на протяжении всего курса математики, в частности – читают и составляют графики и диаграммы; это предполагает определенное функциональное мышление. Понятие функции же является основным в математике, поэтому качество подготовки учащихся средней школы к усвоению предмета во многом зависит от того, насколько эффективно изучено понятие.

Анализ школьных учебников с 7 по 11 классы по алгебре показывает, что изучение функциональной линии в школе различно. В рассмотренных в данной ВКР учебниках функциональная линия является ведущей в учебниках А.Г. Мордковича и С.М. Никольского. В этих учебниках рассматриваются свойства функции, которые не затрагиваются в учебнике Алимова Ш.А.: непрерывность, выпуклость функции.

Для исследования конкретных функций в учебниках применяется комбинированный метод; часть свойств обосновывается аналитически, часть – графически.

Тесты для факультатива по теме «Функция» были составлены с учетом требований ФГОС и апробированы в ходе педагогической практики. В тестах представлены задания повышенного и высокого уровня сложности, что позволило углубить и расширить знания, умения и навыки каждого ученика.

Работа может быть полезна для учителей математики, может быть использована ими в ходе проведения уроков, на факультативных занятиях и на курсах подготовки учащихся к ЕГЭ.

Таким образом, углубленное изучение понятия функции на факультативных занятиях способствует гармоничному усвоению материала школьниками при подготовке к ЕГЭ. Следовательно, все поставленные в работе задачи выполнены, цель достигнута.

Список литературы

1. Алгебра: Учеб. Для 7 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.:Просвещение, 2012.
2. Алгебра. 8 класс: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.:Просвещение, 2016.
3. Алгебра: Учеб. Для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.:Просвещение, 2016.
4. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.:Просвещение, 2016.
5. Алгебра. 8 класс: учеб.для общеобразоват.учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин. – М.: Просвещение, 2014.
6. Алгебра. 9 класс: учеб.для общеобразоват.учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин. – М.: Просвещение, 2015.
7. Алгебра и начала мат.анализа. 10 класс: учеб.для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин. – М.: Просвещение, 2009.
8. Алгебра и начала мат.анализа. 11 класс: учеб.для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин. – М.: Просвещение, 2009.
9. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г. – 7-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2014.
10. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г. – 10-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2014.

11. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г. – 10-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2014.
12. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч.1: учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г. – 9-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2014.
13. Введение в анализ: Учеб. для вузов / Морозова В.Д. , под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. - 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. I).
14. Введение в математический анализ. Предел функции одной переменной. Дифференцирование функций. Методические указания для студентов первого курса всех специальностей. Иванов А.Б., Морева М.Б. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2008.
15. Элементарные функции и их графики: учеб. пособие / И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2011.

Приложение

ТЕСТ 1

1. Укажите область определения функции f(x) = $\sqrt{16-x^2} + \frac{3x+7}{x^2-4x-5}$

1)[-4;4], 2) [-4;-1)∪(-1;4], 3) (-4;4),

4) (-∞; -4]∪[4;5) ∪(5;∞), 5) [-4;4] ∪(5;∞).

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(0), если f(5) + f(-5) = 10?

1)3 2)4 3)5 4)10 5)20

3. Известно, что y = f(x) – четная и y = g(x) – нечетная функции. Чему равно g(-3), если f(-2) + g(3) = 10 и f(2)+g(-3)=4?

1)2 2)7 3)-7 4)3 5)-3

4. Даны функции y = f(x) и y = g(x). Если f(x-1) = 3x+1 и f(g(x)) = 6x-8, то чему равно g(x)?

1)2x-3 2)2x+1 3)x-3 4)x+1 5)2x-4

5. Чему равна площадь фигуры, образованной графиком системы:

$$\begin{cases} y \le |x+3| + 1 \\ y + 4 \ge |x+2| + |x+4| \end{cases}?$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 1

1. Укажите область определения функции $y = \sqrt{\log_{10}(2-\sqrt{x-1})}$

2. Найти значение функции $y = \frac{f(x)+2f(-x)-3g(-x)}{g(x)}$ в точке x_0, если y = f(x) – четная, а y = g(x) – нечетная и f(x_0) = 1, g(x_0) = 2 .

ТЕСТ 2

1. Укажите функцию, которая возрастает на всей области определения:

2) $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = ctg(x)$; 3) $y = \cos(x)$; 4) $y = |-x|$

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(12), если f(-4) = 6 и f(4) = 4?

1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) -1

3. Нечетная функция y = f(x) определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции g(x) = x(2x+1)(x-2)(x-3). Сколько корней имеет уравнение f(x) = 0?

1) 4; 2) 5; 3) 2 4)3

4. Даны функции f(x) = max{1-4x; 2x-3} и g(x) = min{|x|; x^2}. Вычислите f(g$\left(\frac{-1}{2}\right)$)+g(f(3)).

1)-11 2)3 3)8 4)9

5)12

5. Графики функций y = f(x) и y = g(x) симметричны относительно прямой y = (- x). Чему равна сумма коэффициентов g(x), если f(x) = 2x-3?

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 2

1. y = f(x) – линейная функция. Найти f(3), если f(x+1) – f(x-1) = 6 и f(0) = 4.

2. Найти множество значений функции $y = \log_4(16+|x|) - \frac{3x}{|x|}$, если x ≤ 48.

ТЕСТ 3

1. Укажите область определения функции $y = \begin{cases} \frac{3x+1}{\sqrt{9-x^2}}, \text{если } x > 1, \\ \frac{5}{x^2+2x-8}, \text{если } x \le 1. \end{cases}$

2) (-3;2)U(2;3); 2) (-3;3); 3) (-∞;-4)U(-4;1)U(1;3); 4)(-∞;-4)U(-4;3); 5)(-∞;-4)U(-4;2)U(2;3).

2. y = f(x) – линейная функция. Чему равно f(5), если f(f(x)) = 25x+18 и f(0)>0?

1)0 2)13 3)21 4)28 5)35

3. График которой из нижеперечисленных функций совпадает с графиком функции $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{если } x < 1 \\ x, x = 1 \\ x-1, \text{если } x > 1 \end{cases}$?

2) $y = x + \frac{|x-1|}{x-1}$; 2) $y = x - \frac{|x-1|}{x-1}$; 3) $y = \begin{cases} x + \frac{|x-1|}{x-1}, \text{если } x \neq 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$;

4) $y = \begin{cases} x - \frac{|x-1|}{x-1}, \text{если } x \neq 1 \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$; 5) $y = x + \frac{|x|}{x}$.

4. Дана функция f(x) = $ax^5 + bx^3 + cx + 10$. Вычислите f(-99), если f(99)=7.

1)-13 2)-7 3)7 4)13 5)17

5. При каких а функция y = $\sqrt{2x^2 - (a+1)x + a + 1}$ + $\sqrt{x^2 + 2x + 3 - a}$ определена на всей числовой прямой?

2) $2 \le a \le 7$; 2) $-1 \le a \le 2$; 3) $-1 \le a \le 7$; 4) $a \le -1$ или $a \ge 7$; 5) $a \ge 7$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 3

1. Дана функция y = f(x). Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ для всех действительных a и b; $f(1{,}3) = 0{,}2$ и $f(3{,}7) = 1{,}8$, то чему равно $10 * f(1{,}9)$?

2. При каких a область определения y = $\sqrt{4 + 3x - x^2}$+$\sqrt{ax - 1}$ – пустое множество?

ТЕСТ 4

1. Сколько целых чисел содержится в области определения функции

$y = \sqrt{\frac{\sqrt{x+3}}{(x^2 - 16)\times\sqrt{7-x}}}$?

2) 1; 2) 2; 3)5; 4;1.

2. Какое из нижеперечисленных значений является наименьшим для функции y=|x-3|+|5-x| на отрезке [-1;10]?

1)8; 2)6; 3)2: 4)0; 5)12

3. Даны функции f(x) = ax+2 и g(x) = x+a-1. При каком значении а равенство f(g(x))=g(f(x)) выполняется для всех x?

1) 2; 2) 1; 3) 3; 4) 0,5

4. При каких значениях а графики функций у = $|x^2 - 4x - 5| + 2$ и $y =$ а $+ 5$ имеют 3 точки пересечения?

1) а = -3 или а>6; 2) а = 6; 3) -3<а<6; 4) а<-3; 5) а>6

5. Найти наибольшее целое значение функции $y = 13 * 2^{(\sin x * \sin 2x + \cos x * \cos 2x) - 3}$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ 4

1. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{34}{(\frac{1}{5})^x + (\frac{1}{3})^x}$ на промежутке [-5;-2].

2. При каких значениях а график функции у = а+5 и у = $|x^2 - 4x - 5| + 2$ имеют три точки пересечения?

ТЕСТ 5

1. Сколько точек пересечения имеют графики функций у $= \frac{2}{x}$ и $y = 1 - x$?

1)0 2)1 3)2 4)3
5)4

2. Графики функций y = f(x) и y = g(x) симметричны относительно оси Oy. Какое из нижеперечисленных утверждений верно для $h(x) = \begin{cases} f(x), \text{если } x \geq 0 \\ g(x), \text{если } x < 0 \end{cases}$?

6) h(x) = |f(x)|
7) h(x) = |g(x)|
8) h(x) = f(|x|)
9) h(x) = g(|x|)
10) h(x)=f(x)+g(x)

3. y=f(x) – четная функция, y = g(x) – нечетная функция. Чему равно g(-3), если f(-2)+g(3)=10 и f(2)+g(-3)=4.

4. Даны две функции, y = f(x) и y = g(x). Если f(x-1) = 3x+1 и f(g(x))=6x-8, то чему равно g(1)?

1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) -4

5. Чему равна сумма целых значений параметра a,

при которых система $\begin{cases} |x| + \frac{|y|}{2} = 1 \\ y = x + \frac{a}{2} \\ y > 0 \end{cases}$ имеет 2 решения?