МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Обучение методу математического моделирования в процессе решения геометрических задач

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
60,59 % авторского текста
Работа _рекомендована_ к защите
«_26_» _марта_ 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
__________ Шумакова Е.О.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Беляева Наталья Николаевна
Научный руководитель:
Старший преподаватель
Мартынова Елена Владимировна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

С древнейших времен осознана огромная роль метода математического моделирования в процессе познания и практического использования окружающего мира. Решение любой практической задачи связано с необходимостью перевода ее на язык математических символов и формул, то есть с ее формализацией.

Моделирование наиболее распространённый способ познания окружающего мира, уже дети создают в своем творчестве ни что иное как модели окружающих их предметов и в каждой своей игрушке ребенок отражает те черты предмета которые его интересуют. Такое отражение носит условный характер, при чем формы условности могут быть различны, например, портной снимая мерки с клиента составляет табличку с цифрами, такая цифровая модель составляет простую совокупность геометрических размеров данного человека.

Самые разнообразные функциональные зависимости можно выразить языком математики в распоряжении которого и аналитические формулы, и графики и геометрические фигуры. Еще в древние времена математическая символика была средством превращения реальных объектов и явлений в абстрактные модели математики, так земельный участок превращался в сочетание простых геометрических фигур, то есть в свою геометрическую модель результаты исследований которой могли быть использованы и для вычисления площади этого участка, и для определения размеров строительных элементов, и для расчета координат и расстояний между значительно удаленными между друг другом объектами. Математические методы широко применялись для решения военно-инженерных задач, например, в баллистике задачи о полете заряда.

В условиях современного быстро развивающегося общества, научно-технического прогресса вопрос качества школьного образования стоит наиболее остро. С ростом значимости качества образования в целом растет и значимость математического школьного образования: наблюдается прямая зависимость между уровнем математического образования населения страны и важнейшими национальными показателями государства.

Математическая грамотность представляет собой совокупность знаний, умений и навыков, дающих возможность осознавать роль математики в мире, а также применять математические знания для решения тех или иных задач, направленных на удовлетворения потребностей личности и общества.

Важным критерием определения уровня математической грамотности, учащегося является его способность распознавать проблемы, возникающие в окружающей действительности, и формулировать эти проблемы на языке математики. А это не что иное, как математическое моделирование.

Математическое моделирование – мощный инструмент познания и развития интеллекта, умственных способностей, мышления и логики, в целом, и средство решения математических задач, в частности. Однако, насколько этот метод эффективен, настолько и сложен в использовании. Учащиеся сталкиваются с большим количеством трудностей и проблем, связанных с освоением данного метода.

Основная проблема заключена в том, что ученики привыкают к использованию стандартизированных алгоритмов при выполнении определённого рода математических заданий, в противовес логическим рассуждениям: творческому процессу составления модели и ее решения.

Актуальность выбранной темы определяется тем, что не все ученики осваивают геометрический метод решения задач даже на базовом уровне. Причины: устоявшийся страх перед задачей, неумение устанавливать, что дано в задаче, что надо найти, выявлять по тексту взаимосвязи рассматриваемых в задаче величин. Недостатки в овладении необходимыми приемами рассуждений, незнание общих методов решения задач не дают возможности многим школьникам успешно работать над конкретной задачей.

Цель данного исследования – выявить пути совершенствования процесса обучения геометрии на основе обучения метода математического моделирования, определить учебный материал (теории и задач), на котором целесообразно обучать математическому моделированию.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии.

Предметом исследования является обучение учащихся математическому моделированию.

Задачи:

1) определить сущность модели и моделирования в целом;

2) дать понятие математической модели, раскрыть суть и виды математического моделирования;

3) определить функции, цели и роль обучения математическому моделированию в школьном курсе геометрии;

4) проанализировать школьные учебники геометрии;

5) разработка уроков с применением метода математического моделирования в процессе решения геометрических задач;

6) подобрать серию задач, на которых будет применяться метод математического моделирования.

Гипотеза исследования: с использованием метода математического моделирования при решении задач по геометрии повысится эффективность усваивания предмета.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 Сущность и классификация моделирования

Как известно одну из самых первых математических моделей в начале нашей эры построил Птолемей в виде системы гиперциклов и циклов, она точно описывала движение планет, за которыми он наблюдал. Аристотель применял метод моделей в естественных работах.

Леонардо да Винчи, И.Кеплер, Г.Галилей и другие ученые эпохи Возрождения обращались к моделям-аналогам, создавали идеальные и графические конструкции из воображаемых элементов реальных вещей, т.е. строили математическую модель, а затем результаты исследований использовали в своих проектах.

Г. Галилей считал, что "великую книгу природы может читать лишь тот, кто сначала научится постигать ее язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки ее-треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни единого слова [15].

На протяжении всего развития математики вырабатывалась специальная система знаков, с помощью которых можно было моделировать явления, оценивать их, систематизировать знания и Факты о них. Математическая символика выступила как мощное средство моделирования мира. Однако, понадобились многие века, прежде чем появился такой универсальный язык, который позволяет легко и быстро производить арифметические операции.

В современной эпохе становления науки и техники моделирование – это универсальный инструмент, применяемый в самом широком спектре гуманитарных, точных и прикладных наук.

Изучением моделирования занималось и занимается по сей день большое количество ученых, философов, педагогов и психологов.

«Модель» как научный термин применяется в разнообразных сферах жизни и деятельности человека и, как следствие, имеет множество трактовок и смысловых значений. Однако, везде соблюдается основной принцип моделирования: объект, по которому строится модель называется оригиналом, а объект, который является продуктом моделирования называется моделью.

Само понятие «модель» появилось как результат эмпирического познания окружающего мира. Слово «модель», произошло от слияния латинских слов «modus», «modulus», которые означают образ, меру, прообраз [3].

МОДЕЛЬ (франц. modèle, итал. modello, от лат. modulus - мера, мерило, образец, норма):

1) образец, служащий эталоном (стандартом) для серийного или массового воспроизведения (модель автомобиля, модель одежды и т. п.), а также тип, марка какого-либо изделия, конструкции;

2) изделие (изготовленное из дерева, глины, воска, гипса и др.), с которого снимается форма для воспроизведения в другом материале (металле, гипсе и др.);

3) человек, позирующий художнику (натурщик), и вообще изображаемые объекты («натура»);

4) устройство, воспроизводящее, имитирующее (обычно в уменьшенном масштабе) строение и действие какого–либо другого устройства в научных, практических (например, в производственных испытаниях) или спортивных целях.

Ученые по-разному трактуют понятие «модель». Так, например, А.И. Уемов определяет модель как «систему, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе» [9].

Чарльз Лейв и Джеймс Марч дают такое определение модели: «Модель – это упрощенная картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет» [10].

В. А. Поляков считает, что «модель – это идеальное формализованное представление системы и динамики ее поэтапного формирования. Модель должна интегрировано имитировать реальные задачи и ситуации, быть компактной, адекватно передавать смены состояний и должна совпадать с рассматриваемой задачей или ситуацией» [8].

Иногда под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Примеры моделей:

Перед тем как запустить в разработку производства новую модель, например, пассажирского лайнера или самолета, его обкатывают в аэродинамической трубе или искусственно созданных условиях – это модель

Художник натурщик нарисовал на своем холсте прекрасную деву. В данном случае можно считать, что, картина, изображающая молодую девушку будет моделью.

Чтобы продемонстрировать систему работы нейронных связей, профессор обращается к графическому изображению-это модель.

«Моделирование – это есть процесс использования моделей (оригинала) для изучения тех или иных свойств оригинала (преобразования оригинала) или замещения оригинала моделями в процессе какой-либо деятельности» (например, для преобразования арифметического выражения можно его компоненты временно обозначить буквами)» [17].

«Моделирование – это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система:

1) находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

2) способная замещать его в определенных отношениях;

3) дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте [9].

На основании перечисленного можем выделить следующие цели моделирования:

1) понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающим миром;

2) научиться управлять объектом или процессом, определить наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

3) прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействий на объект.

Все три цели подразумевают в той или иной степени наличия механизма обратной связи, то есть необходима возможность не только переноса элементов, свойств и отношений моделируемой системы на моделирующую, но и наоборот.

Поскольку моделирование – процесс, применяемый для достижения различных целей на разных этапах исследования, создания или преобразования, то существует некоторое разнообразия форм и типов моделей.

Классификация моделей происходит по наиболее существенным признакам, которыми обладает объект моделирования. Рассмотрим некоторое типы классификаций моделей.

В.А. Штофф предлагает следующую классификацию моделей [10]:

по способу их построения (форма модели):

1) по способу их построения (форма модели);

2) по качественной специфике (содержание модели).

Все модели можно классифицировать либо по способу их построения, то есть по форме модели, либо по качественной специфике, то есть по содержанию модели.

По способу построения выделяют модели материальные и идеальные. Все материальные модели существуют объективно, несмотря на то, что они созданы человеком. Материальные модели обладают важной функцией воспроизведения характера, протекания, сущности, структуры изучаемого объекта, процесса или явления. Идеальные или воображаемые модели представляют собой идеальные конструкции, заключенные в нашем сознании представления об объектах, процессах, явлениях и т.д.

Материальные модели неразрывно связаны с воображаемыми (прежде чем что-либо построить, необходимо иметь теоретическое представление, обоснование). Эти модели остаются мысленными даже в том случае, если они воплощены в какой-либо материальной форме. Большинство этих моделей не претендует на материальное воплощение.

В свою очередь материальные модели по форме делятся на:

1) образные (построенные из чувственно наглядных элементов);

2) знаковые (в этих моделях элементы отношения свойства моделируемых явлений выражены при помощи определенных знаков);

3) смешанные (сочетающие свойства и образных, и знаковых моделей).

Достоинства данной классификации в том, что она дает хорошую основу для анализа двух основных функций модели:

1) практической (в качестве орудия и средства научного эксперимента);

2) теоретической (в качестве специфического образа действительности, в котором содержатся элементы логического и чувственного, абстрактного и конкретного, общего и единичного).

Как видим, понятие модели в науке и технике имеет множество различных значений, среди ученых нет единой точки зрения на классификацию моделей, в связи с этим невозможно однозначно классифицировать и виды моделирования. Классификацию можно проводить по различным основаниям:

1) по характеру моделей (то есть по средствам моделирования);
2) по характеру моделируемых объектов;
3) по сферам приложения моделирования (моделирование в технике, в физических науках, в химии, моделирование процессов живого, моделирование психики и т. п.)
4) по уровням («глубине») моделирования, начиная, например, с выделения в физике моделирования на микроуровне.

Наиболее известной является классификация по характеру моделей. Согласно ей, различают следующие виды моделирования: предметное моделирование, при котором модель воспроизводит геометрические, физические, динамические или функциональные характеристики объекта. Например, модель моста, плотины, модель крыла самолета и т.д.

Аналоговое моделирование, при котором модель и оригинал описываются единым математическим соотношением. Примером могут служить электрические модели, используемые для изучения механических, гидродинамических и акустических явлений.

Знаковое моделирование, при котором моделями служат знаковые образования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, графы, слова и предложения в некотором алфавите (естественного или искусственного языка). Со знаковым тесно связано мысленное моделирование, при котором модели приобретают мысленно наглядный характер. Примером может в данном случае служить модель атома, предложенная в свое время Бором.

Наконец, особым видом моделирования является включение в эксперимент не самого объекта, а его модели, в силу чего последний приобретает характер модельного эксперимента. Этот вид моделирования свидетельствует о том, что нет жесткой грани между методами эмпирического и теоретического познания [5].

Математическое моделирование – частный случай моделирования. Является важнейшим видом знакового моделирования и осуществляется средствами языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул и т. п.) [21].

Понятия «математическая модель» и «моделирование» широко используются в науке и на производстве. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей. Современная форма «материальной реализации» знакового (прежде всего, математического) моделирования – это моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах, универсальных и специализированных.

Математическая модель – это упрощенный вариант действительности, используемый для изучения ее ключевых свойств. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений.

С математическими моделями тесно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов – метод математического моделирования.

Математическое моделирование – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Это мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления.

Математическое моделирование расширяет творческие возможности специалиста в решении целого ряда профессиональных задач, существенно изменяет его профессиональную подвижность. Современному специалисту следует «хорошо знать» математику, то есть не просто уметь использовать ее для различных расчетно-вычислительных операций, а понимать математические методы исследования и их возможности. Только понимание сущности математического моделирования позволяет адекватно использовать этот метод в профессиональной деятельности.

1.2 Математическое моделирование: функции, цели и роль обучения математическому моделированию

Известный математик-методист Н.А. Терешин, в процессе изучения математического моделирования, выделяет следующие дидактические функции [14]:

Познавательная функция.

Методической целью этой функции является формирование познавательного образа изучаемого объекта. Это формирование происходит постоянно при переходе от простого к сложному.

Здесь мысль учащегося направляется по кратчайшим и наиболее доступным путям к целостному восприятию объекта. Реализация познавательной функции не предопределяет процесса научного познания, ценность этой функции состоит в ознакомлении учащихся с наиболее кратким и доступным способом осмысления изучаемого материала.

Функция управления деятельностью учащихся.

Математическое моделирование предметно и потому облегчает ориентировочные, контрольные и коммуникационные действия. Ориентировочным действием может служить, например, построение чертежа, соответствующего рассматриваемому условию, а также внесение в него дополнительных элементов.

Контролирующие действия направлены на обнаружение ошибок при сравнении выполненного учащимися чертежа (схемы, графика) с помещенными в учебнике или на выяснение тех свойств, которые должны сохранить объект при тех или иных преобразованиях.

Коммуникационные действия отвечают той стадии реализации функции управления деятельностью учащихся, которая соответствует исследованию полученных ими результатов. Выполняя эти действия, учащийся в свете собственного опыта объясняет другим или хотя бы самому себе по построенной модели суть изучаемого явления или факта.

Интерпретационная функция.

Известно, что один и тот же объект можно выразить с помощью различных моделей. Например, окружность можно задать с помощью пары объектов (центр и радиус), уравнением относительно осей координат, а также с помощью рисунка или чертежа. В одних случаях можно воспользоваться ее аналитическим выражением, в других – геометрической моделью. Рассмотрение каждой из этих моделей является ее интерпретацией; чем значимей объект, тем желательней дать больше его интерпретаций, раскрывающих познавательный образ с разных сторон.

Кроме этих функций можно выделить еще одну –эвристическую. Математическая модель, выступая как выражение количеством качества объекта, позволяет экспериментировать с его количественной стороной, дает возможность определить границы устойчивости, нормальный и оптимальный режимы функционирования, еще глубже проникнуть в качественный аспект объекта — показать его внутренние закономерности. В этом и раскрывается эвристическая функция математического моделирования и его возможности для решения проблем разных наук: биологии, химии, физики, медицины и других.

Применение нескольких функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно. Такое переключение сводит к минимуму отвлечение умственных усилий, учащихся от предмета их деятельности.

В литературных источниках отмечается использование моделирования в обучении математике как средства познания и осмысления нового знания, выделяются его виды, отмечаются условия, необходимые для его формирования (Л.М. Фридман, В.В. Давыдов, С.И. Архангельский, О.Б. Епишева, В.И. Крупич, Л.С. Катаева, Г.А. Балл и др.). Вместе с тем остается недостаточной разработанность вопросов обучения приему моделирования, наиболее эффективной реализации всех его потенциальных возможностей.

Некоторые авторы считают, что в условиях развивающего обучения формирование у учащихся приемов интеллектуальной деятельности является одной из центральных задач (А.К. Артемов, В.В. Давыдов, И.С. Якиманская и другие), ее существенным приемом является моделирование.

Модели упрощают восприятие учащимися какой-либо ситуации и обеспечивают целостность восприятия, развивают компоненты абстрактного мышления (анализ, сравнение, обобщение, абстрагирование и др.), совершенствуют логическое мышление и помогают глубже усвоить учебный материал, так как позволяют изучать свойства объекта в «чистом» виде.

Необходимость овладения математическим моделированием как особым действием диктуется по психолого-педагогическими соображениями. Изучение процесса обучения привело к разработке психологической теории учения. Теория поэтапного формирования умственных действий, разработанная советским психологом П.Я. Гальпериным и его сотрудниками, исходит из положения, что процесс обучения – это процесс овладения системой умственных действий. При этом овладение умственным действием происходит в процессе интериоризации (перехода вовнутрь) соответствующего внешнего практического действия [9].

Когда ученика знакомят с каким-либо действием, которым ему нужно овладеть, то согласно данной теории знакомство надо начинать с выполнения этого действия соответствующими материальными предметами. Для того чтобы лучше увидеть общие черты усваиваемого действия, надо отвлечься от ненужных в данном случае свойств предметов. Это значит, что нужно перейти от действия с материальными предметами к действию с их заместителями — моделями, свободными от всех других свойств, кроме нужных в данном случае, то есть перейти на этап материализованного действия. Это может быть какая-то графическая схема, образная или знаковая модель, на которой или с помощью, которой ученик выполняет усваиваемое действие.

Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности. Моделирование позволяет видеть предмет как объект исследования, определять действия с ним задолго до того, как будет получен конечный результат. А это означает, что с самого первого момента конструирования создается образ, который позволит ориентироваться в предмете и анализировать его, служит средством продвижения в содержании.

Таким образом, включение моделирования в учебный процесс рационализирует его и одновременно активизирует познавательную деятельность учащихся. Следовательно, решается не только конкретная учебная задача, но и осуществляется развитие учащихся. Широкое использование моделирования – одно из методических средств развивающего обучения математике. Моделирование отражает преимущественно теоретический стиль мышления, который в большей мере содействует развитию учащихся, приобщает их к научному стилю мышления.

Развитие у учащихся правильных представлений о природе математики и отражении математической наукой явлений и процессов реального мира является программным требованием к обучению математике. Доминирующим средством реализации этой программной цели является метод математического моделирования.

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы.

Математическое моделирование находит применение при решении задач разного вида. Уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической моделью. Моделированию, следует уделить в школе должное внимание, так как математические модели используются для решения сложных задач в том числе и геометрических. Кроме того, при построении модели используется такие операции мышления, как анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение, которые способствует его развитию. Составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности. В чем заключается математическое моделирование, у нас есть некоторое явление или процесс по которому составляется модель, например, систем уравнений описывающей процесс, потом мы исследуем решение этих уравнений и делаем вывод на счет результатов процесса.

С развитием компьютерной техники создалась возможность решать нелинейные уравнений и сложные системы, поэтому исследовать процесс во всей полноте и получать результаты во всех областях науки.

Моделирование имеет ряд явных преимуществ — это дешевизна процесса, можно исследовать процесс многовариантный, исследовать различные варианты, можно анализировать вклад различных слагаемых, можно исследовать объект вообще не доступный для экспериментального изучения, например, черные дыры.

Моделировании проходит в несколько этапов:

1) составление модели;

2) нужно эту модель математически исследовать, не слишком ли много условий задано, не слишком ли мало дополнительных условий, устойчиво ли оно;

3) рассматриваем алгоритм, составление программы, рассчитывают, получают результаты.

Отметим, что в общем случае процесс моделирования состоит из следующих этапов:

1 этап. Постановка задачи и определение свойств оригинала, подлежащих исследованию.

2 этап. Констатация затруднительности или невозможности исследования оригинала.

3 этап. Выбор модели, достаточно хорошо фиксирующей существенные свойства оригинала и легко поддающейся исследованию.

4 этап. Исследование модели в соответствии с поставленной задачей.

5 этап. Перенос результатов исследования модели на оригинал.

6 этап. Проверка этих результатов.

На сегодняшний день наиболее распространенной является трехэтапная схема процесса математического моделирования:

1) перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, то есть построение математической модели задачи (формализация);

2) решение задачи в рамках математической теории (решение внутри модели);

3) перевод полученного результата (математического решения) на

язык, на котором была сформулирована исходная задача (интерпретация полученного решения).

Наиболее ответственным и сложным является первый этап – само построение математической модели. Оно осуществляется логическим путем на основе глубокого анализа изучаемого явления (процесса) и требует умения описать явление (процесс) на языке математики.

В свою очередь, в процессе построения модели можно выделить несколько шагов.

Первый шаг – индуктивный: это отбор наблюдений, относящихся к тому процессу, который предстоит моделировать. Этот этап состоит в формулировке проблемы, то есть в принятии решения относительно того, что следует принимать во внимание, а чем можно пренебречь.

Второй шаг заключается в переходе от определения проблемы к собственно построению неформальной модели. Неформальная модель – это такое описание процесса, которое способно объяснить отобранные нами наблюдения, но при этом определено недостаточно строго, и нельзя с точностью проверить степень логической взаимосвязанности в нем свойств.

На этой стадии рассматриваются целый ряд наборов неформальных допущений, способных объяснить одни и те же данные; тем самым рассматриваются несколько потенциальных моделей и решается, какая из этих моделей лучше всего отображает изучаемый процесс. Иначе говоря, ищутся различные способы установления логического соответствия между моделью и реальным миром.

Третий шаг – это перевод неформальной модели в математическую модель. Такой перевод включает в себя рассмотрение словесного описания неформальной модели и поиск подходящей математической структуры, способной отобразить изучаемые процессы. Это самый сложный этап во всем процессе моделирования. Стадия перевода может таить в себе две опасности. Во-первых, неформальные модели имеют тенденцию быть неоднозначными, и обычно существует несколько способов перевода неформальной модели в математическую (при этом альтернативные математические модели могут иметь совершенно различный смысл). На самом деле это одна из главных причин, изначально толкающих к применению математических моделей: язык математики лишен двусмысленностей и более точен, чем естественный язык, он позволяет исследовать скрытый смысл тончайших различий в формулировках, который плохо доступен исследованию посредством естественного языка.

Следующий этап – этап решения задачи в рамках математической теории – можно еще назвать этапом математической обработки формальной модели. Он является решающим в математическом моделировании. Для формального вывода нетривиальных следствий из исходных допущений модели. На стадии математической обработки обычно вне зависимости от сути задачи имеют дело с чистыми абстракциями и используют одинаковые математические средства. Этот этап представляет собой дедуктивное ядро моделирования.

На последнем этапе моделирования полученные выводы проходят через еще один процесс перевода на сей раз с языка математики обратно на естественный язык [9].

Учителю следует добиться от учащихся четкого понимания значения и содержания каждого из выше описанных этапов процесса математического моделирования. Это нужно для того, чтобы школьники усвоили, что они решают не просто математическую задачу, а конкретную жизненную ситуацию математическими методами. Тогда учащиеся смогут увидеть в математике практическое значение, и не будут воспринимать ее как абстрактную науку.

1.3 Проблемы, возникающие при обучении моделированию и пути их решения

В процессе обучения математике в сознании человека должна создаваться адекватная, соответствующая реальности, картина состояния и развития математики. Это, в частности, означает, что важным компонентом математического образования является обучение учащихся основным понятиям и идеям, связанным с математическим моделированием, поскольку именно математическое моделирование вскрывает реальные связи абстрактных математических понятий с реальностью. Элементы математического моделирования всегда присутствовали в школьном образовании, сопровождая решение задач координатным и векторным методами, введение некоторых математических понятий. Многочисленные исследования в области педагогики и психологии свидетельствуют, во-первых, о том, что существующий курс математики лишь эпизодически показывает процесс применения математики для решения практических задач, отражая, в основном, так называемый "внутримодельный" этап математического моделирования, и, во-вторых, о необходимости более полного включения идей математического моделирования в школьное обучение. Так, в работах В.В.Фирсова, А. Н. Колмогорова, А.И.Маркушевича, Б.Б.Гнеденко, В. Л.Гончарова, С. И. Шварцбурда указывается на необходимость формирования у учащихся представлений о том, что математика изучает не реальные явления, а лишь их математические модели.

Идея модели, считает В.Л Гончаров, весьма успешно используется в самых разнообразных разделах математики. Использование ее "делает усвоение более быстрым, прочным, эффективным, ускоряет умозаключения и процесс решения задач".

С.И.Шварцбурд одним из компонентов, влияющих на математическое развитие учащихся, называет умение перейти от конкретной ситуации к математической Формулировке вопроса, к схеме, сжато характеризующей существо дела.

В. В.Фирсов считает, что математическое образование должно приводить к овладению учащимися элементами математической культуры, относящимся к трем этапам процесса применения математики к решению практических задач:

1) этап перехода от ситуации, которую необходимо разрешить, к формальной математической модели этой ситуации, к четко поставленной математической задаче – этап Формализации;

2) решение поставленной математической задачи методами, развитыми в самой математике для задач данного типа – этап решения задачи внутри построенной модели;

3) интерпретация полученного решения математической задачи и сопоставления его с нею.

В. М. Монахов в числе компонентов математических знаний, учащихся выделяет умение перевести вопрос на математический язык, выразив его в специальных терминах и математической символике.

Выделим основные трудности, возникающие в процессе обучения математическому моделированию учащихся и предложим возможные пути решения проблем.

Наиболее важная проблема в математическом моделировании, – анализ задач. Данная проблема носит обобщающий характер и включает в себя:

1) затруднения, связанные с внимательным прочтением текста задачи;

2) затруднения, связанные с проведением первичного анализа текста задачи, то есть выделение условия и вопроса;

3) затруднения, связанные с акцентированием внимания на тех качествах и свойствах объекта (субъекта), которые важны для составления верной модели.

Причина данной проблемы связана с недостаточной внимательностью и концентрацией. Сам процесс обсуждения задачи проходит крайне быстро – ученики стараются сразу перейти к этапу ее решения (особенно в 9-11 классах). По личным наблюдениям около 20-40% учеников класса не успевает должным образом проанализировать текст и выделить важные условия.

К способам решения данной проблемы можно отнести следующее:

1) учителям необходимо больше времени уделять работе с текстом, проговаривать, что является условием задачи, а что – вопросом;

2) перед решением задачи, вместе с классом анализировать текст двух-трех задач без дальнейшего решения, для того, чтобы вырабатывать привычку рассуждать и совершать умозаключения.

Другой комплекс проблем, связанных с математическим моделированием – процесс составления модели по тексту задачи. Эта проблема также носит характер общий. После анализа текста (или любых других исходных данных) необходимо определиться с выбором переменной величины, перевести зависимость одних значений от других на язык математики, а также проверить выполнение логических связей между разными величинами и показателями. Здесь возможны несколько вариантов возникновения ошибок и трудностей:

1) ученик затрудняется оформлять краткую запись текста задачи;

2) ученик затрудняется наглядно выполнять чертежи (рисунки) по тексту задачи;

3) ученик не может верно установить взаимосвязь между известными и неизвестными величинами и записать ее;

4) ученик не может составить конечную модель.

Возможные варианты решения данной проблемы:

1) учитель должен максимально наглядно описывать процесс построения математической модели: строить таблицы, схемы, рисунки, в некоторых случаях обращаться к мультимедийным устройствам для использования наглядной анимации;

2) применять комплекс вспомогательных упражнений для ликвидации проблем с переводом записей на математический язык.

Освоение методики математического моделирования сопровождается большим количеством разнообразных проблем. Однако, ключевой момент – переход от алгоритмов к творческой составляющей – свобода в вариантах поиска ответа, в составлении моделей, «открытые» задания с выбором различных путей решения. Необходимо научиться не ограничивать учеников в их творчестве, а направлять к истине.

ГЛАВА 2. ОБУЧЕНИЕ ОСНОВНЫМ КОМПОНЕНТАМ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

2.1 Анализ школьных учебников

Рассмотрим метод математического моделирования на примере решения задач с помощью векторного метода и метода координат.

В школьном курсе геометрии существуют различные методы для решения задач и доказательства теорем. К ним можно отнести синтетический метод, метод геометрических преобразований, векторный метод и метод координат, которые в свою очередь связаны между собой. Тот или иной метод в школьных учебниках может занимать преобладающее значение, в зависимости от раскрываемой авторами концепции. В соответствии со школьной программой в V классе начинают впервые знакомиться с изучением координат. Учащиеся изучают изображение чисел на прямой и координаты точек. Данные понятия в учебниках вводятся по-разному. В учебнике Виленкина Н.Я. математика 5 класс в § 3 – I главы рассматривается прямая, затем координатный луч. В § 4- шкалы и координаты. Изучив координатный луч, ребята переходят к изучению сравнения натуральных и дробных чисел. После чего, к их сложению и вычитанию. В учебнике Виленкина Н.Я. математика 6 класс, ребята знакомятся с координатной прямой, после изучения положительного и отрицательного числа. Учатся изображать числа на координатной прямой и находить координаты точек. В отличие от данных учебников, в учебнике Дорофеева Г.В. математика 5 класс, авторы не вводят определения координатного луча, в I главе изучаются линии на плоскости, вводится понятие координатной прямой, и работа совершается только с правой частью координатной прямой, которая и представляет собой координатный луч. И лишь в 6 классе, после изучения отрицательных чисел, начинают использовать обе части координатной прямой. В соответствие со школьной программой для основной школы в геометрии координаты изучаются в следующем порядке: координатная плоскость; формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами; уравнение прямой и окружности.

Из анализа программ по геометрии основной школы можно сделать вывод, что они включают изучение не только традиционных фактов элементарной геометрии. Главной идеей изучения курса геометрии является – овладение учащимися основными методами геометрии: координатным, векторным, геометрических преобразований, а также умение применять их к решению геометрических задач.

Координатный метод или метод координат решения геометрических задач тесно связан с алгеброй, что позволяет перевести геометрическую задачу на алгебраический язык, т.е. эффективно использовать метод математического моделирования и тем самым алгоритмизировать решение.

Это в большинстве случаев упрощает поиск решения и само решение задачи. Так же рассмотрим некоторые действующие учебники старшей школы, а именно учебник Геометрия 10-11 класс Александрова, Вернера, Рыжика и учебник Математика Геометрия углубленный уровень 11 класс А.Г.Мерзляка. Данные учебники направлены на физико-математические школы или профильные классы с направленностью на математику.

В учебнике Геометрия 10-11 класса от Александрова, Вернера, Рыжика метод координат освящен в VI главе «Координаты и векторы», на данную тему выделен параграф § 29, вводит метод координат Вернер Рыжик с темы прямоугольные координаты, затем идет изучение построения точки с данными координатами и выражение расстояния между точками и только после этого учащиеся переходят к изучению метода координат и его применению. В учебнике же 11 класса от А.Г. Мерзляка отдельной выделенной темы изучения метода координат нет, эта тема изучается внутри I главы «Координаты и векторы в пространстве». В этой главе учащиеся изучают такие понятия как прямоугольная система координат, ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат, координаты плоскости и пространства, координаты точки, расстояние между двумя точками, координата середины отрезка. Все эти понятия дают нам возможность эффективно использовать метод координат при решение задач, так как они являются базовыми для данной темы.

Из анализа программ геометрии старшей школы можно сделать вывод, что все базовые знания для использования метода координат учащиеся изучают и могут в дальнейшем применять данный метод для решения более сложных задач или для решения задач в ЕГЭ, что может увеличить процент решаемости некоторых заданий, ведь зачастую старшеклассники просто избегают решения сложных задач из-за отсутствия понимая геометрического способа решения данных задач. Таким образом мы видим, что метод координат вводится еще с 5 класса, и вплоть до 11 класса дети его изучают, но при этом решения задач данным методом избегают из-за отсутствия должной практики.

Содержание и объяснение материала темы «Векторы» в учебниках геометрии 7-9 классов разных авторов различны.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов):

– понятия «прямая», «отрезок», «луч»;

– мера отрезков, градусная и радианная мера углов;

– тригонометрические функции и основные соотношения между ними;

– табличные значения тригонометрических функций;

– сонаправленные и противоположно направленные лучи.

Вводимые (новые) знания:

– определение вектора;

– изображать, обозначать сонаправленные, противоположно направленные и равные векторы;

– откладывать от любой точки вектор, равный данному;

– находить угол между векторами;

– складывать и вычитать два вектора;

– правило треугольника, параллелограмма, многоугольника для суммы векторов;

– свойства умножения вектора на число;

– применять свойства векторов для решения задач.

В Таблице 1 представлен анализ содержания теоретического материала темы «Векторы» в учебниках геометрии 8 класса. Для анализа мы рассмотрим учебники из федерального перечня, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы: «Геометрия. 7-9 класс» Л.С. Атанасяна [3], «Геометрия. 7-9 классы» А.В. Погорелова [20].

Таблица 1 – Анализ содержания теоретического материала темы «Векторы» в учебнике геометрии 8 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина	Понятие вектора. Равенство векторов. Откладывание вектора от данной точки. Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма. Сумма нескольких векторов. Вычитание векторов. Произведение вектора на число. Применение векторов к решению задач. Средняя линия трапеции. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение в координатах.
А.В. Погорелов	Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов. Координаты вектора. Сложение векторов. Сложение сил. Умножение вектора на число. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Скалярное произведение векторов. Разложение вектора по координатным осям.

Как можно заметить по таблицам, тема «Векторы» в различных учебныхпособиях по геометрии в основной школе встречается, как правило в 9 классе. И только в учебниках А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна «Векторы» изучаются в 8 классе.

Таблица 2 – Количество часов на изучение темы «Векторы», 8 класс

Автор	Количество часов
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина	8
А.В. Погорелов	9

В учебнике «Геометрии. 8 класс» Л.С. Атанасяна понятие вектора вводится в 9 главе. §1 Понятие вектора. Л.С. Атанасян вводит понятие вектора через физические величины. Далее в главе рассматриваются определения нулевого вектора, длины вектора (модуля), коллинеарные, сонаправленные и противоположно направленные векторы, вводится определения равных векторов. После параграфа авторы предлагают практические задания на закрепление пройденного параграфа. А также представлены вопросы и задачи. §2 Сложение и вычитание векторов. Пункт 79 начинается с рассмотрения примера, который приводит нас к определению суммы векторов, подводит к правилу треугольника, и параллелограмма. В следующем пункте следует доказательство теоремы о переместительном и сочетательном законе. Также автор приводит правило многоугольника (построение суммы нескольких векторов), вычитание векторов, доказывает теорему о разности двух векторов. §3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач. Пункты 3 параграфа заостряют внимание на изучении произведения вектора на число, приводятся основные свойства умножения вектора на число (сочетательный закон, первый и второй распределительный законы). На отработку знаний автор выделяет отдельный пункт 84 Применение векторов к решению задач. В этом пункте рассматривают вспомогательные задачи, в которых применяется векторный метод. Глава 10 Метод координат. Эту главу начинают с темы разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, доказывают лемму о коллинеарных векторах, доказывают теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, вводит понятие координатных векторов и координат вектора, приводит правило, позволяющее по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число, понятие середины отрезка и вычисление длины вектора по его координатам, расстояние между двумя точками.

Л.С. Атанасян объясняет почти всю теорию начиная с наглядного примера, который потом подводит учеников к понимаю теоретического материала. Задачи на закрепление идут после каждого параграфа, а в конце главы на все пройденные темы даются задания на применение знаний и отработку умений.

В учебнике «Геометрия. 8 класс» А.В. Погорелова понятие вектора впервые появляется в §10. Векторы. Пункт 91 абсолютная величина и направление вектора. Изложение темы он начинает с понятия вектора, направление вектора и введения его обозначение. Далее автор знакомит нас с абсолютной величиной вектора (модуль) и нулевым вектором. А.В. Погорелов вводит понятие равных векторов, правило параллельного переноса. Приводит задачу на доказательство равенства двух векторов. Далее автор переходит к координатам вектора, равенству векторов в координатах, приводит доказательства основной теоремы и обратной. Следом идут правила сложения треугольника, параллелограмма, разность вектор, эти правила сопровождаются рисунками. Следующей темой автор выделяет умножение вектора на число, в которой рассматривает определения операции умножения вектора на число. В пункте 97 разложение вектора по двум неколлинеарным векторам приводится правило, что любой вектор можно представить в виде сумму двух других векторов. Также раскрыты темы скалярного произведения, нахождения угла между векторами и доказывает теорему о скалярном произведении, вводит понятие перпендикулярности векторов. В заключительном пункте главы рассмотрены понятия единичного вектора, координатного вектора (орт). После каждого пункта в учебнике А.В. Погорелова есть наглядная задача с решением, после теоретической части главы идут контрольные вопросы. После контрольных вопросов идут задачи на отработку полученных знаний.

В Таблице 3 представлен анализ содержания теоретического материала темы «Векторы» в учебниках геометрии 9 классов. Для анализа мы рассмотрим учебники из федерального перечня, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы:

«Геометрия. 9 класс» А.Д. Александрова [1], «Геометрия. 9 класс» В.Ф. Бутузов [5], «Геометрия. 9 класс» А.Г. Мерзляка [17]».

Таблица 3 – Анализ содержания теоретического материала темы «Векторы» в учебниках геометрии 9 класса

Авторы учебников	Содержание учебного материала
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот	Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки. Сонаправленность векторов. Равенство векторов. О понятии вектора. Угол между векторами. Сложение векторов. Свойства сложения векторов. Вычитание векторов. Противоположные векторы. Умножение вектора на число. Распределительные законы умножения векторов на число. Векторный метод. Об истории теории векторов. Векторы на координатной оси. Векторы на координатной плоскости. Действия с векторами в координатной форме. Метод координат. Уравнения окружности прямой. Косинус. Скалярное произведение векторов. Задачи.
В.Ф.Бутузов,С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов	Ось координат. Прямоугольная система координат. Вектор. Координаты вектора. Длина вектора и расстояние между двумя точками. Угол между векторами. Уравнение окружности. Уравнение прямой. Сумма векторов. Свойства сложения векторов. Произведение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Продолжение таблицы 3

А.Г.Мерзляк,В.Б. Полонский,М.С. Якир М.С.	Понятие вектора. Координаты вектора. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектор на число. Применение векторов. Скалярное произведение векторов.

Таблица 4 – Количество часов на изучение темы «Векторы», 9 класс

Автор	Количество часов
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот	20
В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов	29
Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.	12

В учебнике «Геометрия. 9 класс» А.Д. Александрова понятие вектора вводится в первой главе «Векторы и координаты». Первый параграф автор начинает с понятия скалярных величин (скалярами), определения вектора, длины вектора (модуля), направленного отрезка, параллельности и перпендикулярности, ортогональности и коллинеарности векторов.

В пункте 1.2. даны определения сонаправленным векторам, противоположно направленным, так же доказан признак сонаправленности.

Главной темой пункта 1.3. является равенство векторов, рассмотрены два признака равенства векторов. В следующей теме рассматривают нулевой вектор или нуль-вектор, вводят обозначение нулевого вектора. Теме угол между векторами отведен отдельный пункт, дается определение угла между векторами, доказана теорема об углах с сонаправленными сторонами.

Второй параграф посвящен теме «Сложение и вычитание векторов». В пункте 2.1. изучение начинается с определения сложения векторов, затем показаны правила сложения треугольника, и правило параллелограмма. Рассмотрены свойства сложения векторов и доказаны переместительный и сочетательный законы и законы коммутативности и ассоциативности сложения векторов. В пункте 2.3. разобраны такие темы, как вычитание векторов, противоположные векторы.

Третий параграф «Умножение вектора» на число. В этом параграфе автор выделяет такие понятия как умножение вектора на число, свойства операции умножения вектора на число, доказана теорема о характерном свойстве коллинеарности, приведено следствие о векторах на прямой.

Четвертый параграф «Векторный метод». В этом параграфе рассмотрены такие вопросы как: теорема о средней линии треугольника, теорема о средней линии трапеции, также дополнительный пункт об истории теории векторов.

Пятый параграф «Координаты. Параграф» посвящен введению координат вектора на координатной оси x, свойствам сложения векторов на оси, умножении вектора на число, понятие составляющих векторов, координат вектора, теоремы о координатах вектора на плоскости, квадрата модуля вектора, метода координат, уравнения окружности и прямой, направляющего вектора прямой.

Шестой параграф «Скалярное умножение векторов». Продолжением темы о векторах приводятся определения косинуса, синуса, основного тригонометрического тождества, дается теорема косинусов, так как в определении скалярного произведения используется косинус угла. В пункте 6.2 изучается скалярное произведение векторов, скалярный квадрат вектора и свойства скалярного умножения.

После каждого пункта идут вопросы для самопроверки и задачи на закрепление и отработку навыков.

В учебнике «Геометрии. 9 класс» В.Ф. Бутузова изучение темы «Векторы» начинается с объяснение темы «Координаты точки и координаты вектора», также вводится понятие прямоугольной системы координат. Само понятие вектора встречается в пункте 86 и вводится через физические величины. Также автор приводит определения противоположных и нулевых векторов, длины вектора (модуля). Пункт 87 начинается с понятия координат вектора, доказывает теорему о координатах равных векторов.

Следующей темой является «Длина вектора и расстояние между двумя точками», автор доказывает теорему нахождения длины вектора, теорему нахождения угла между векторами. В.Ф. Бутузов в пункте 90 рассказывает об уравнении окружности, правиле нахождения расстояния от точки до точки, следом вводит понятия уравнение прямой, угловых коэффициентов прямой. Завершением параграфа служат вопросы и задачи на закрепление.

Двадцатый параграф посвящен операциям с векторами. Автор вначале вводит такие понятия, как сумма векторов и показывает наглядно правило треугольника, доказывает теорему о координатах суммы двух векторов, рассказывает о разность векторов. В пункте свойства сложения доказывает теорему о свойствах сложения векторов (законы коммутативности и ассоциативности сложения векторов), дает определение коллинеарности и знакомит с правилом параллелограмма (способ построения суммы двух коллинеарных векторов) и правилом многоугольника. Произведение вектора на число одно из основных понятий в теме «Векторы», автор доказывает теорему произведения вектора на число, отдельно выделяет следствия свойств сложения векторов и умножения вектора на число.

Скалярное произведение — это тема 95 пункта, начинается с определения скалярного произведения и приводит формулу и свойства скалярного произведения, скалярного квадрата. Завершают главу «Векторы» темой Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам, вводят понятие коэффициента разложения и доказывают теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. В.Ф. Бутузов раскрывает тему только в теории, почти нет наглядных решенных задач. Как и у многих авторов параграфу оканчиваются вопросами, задачами первичного закрепления и задачами отработки навыков.

В учебнике «Геометрия. 9 класс» А.Г. Мерзляка понятие вектора впервые встречается в четвертом параграфе.

Пункт 12 начинает с понятия скалярных и векторных величин, определение направленного отрезка, и понятия вектора, нулевого вектора, дает определение коллинеарности, противоположно направленных и равных векторов.

В последующих пунктах рассматривает координаты вектора, доказывает теорему о координатах нулевого вектора, знакомит с суммой векторов, правилом треугольника для сложения векторов, доказывает теорему сложения векторов, выделяет свойства сложения векторов, показывает также правило параллелограмма и многоугольника сложения векторов, дает определение разности векторов и определение противоположных векторов.

Огромную роль в теории векторов играет умножение вектора на число, в 15 пункте автор подробно рассматривает это определение, приводит также определения коллинеарности, выделяет сочетательное свойство, первое и второе распределительное свойства (свойства оставляет для самостоятельного доказательства, дает рекомендации как правильно доказать их). Применение векторов показывает в дополнительной главе.

Тему скалярное произведение векторов автор начинает с введения величины угла между векторами, затем изучается перпендикулярность векторов, после этого автор вводит определение скалярного произведения, понятие скалярного квадрата, приводит две формулы для нахождения скалярного произведения, вводит понятие косинуса угла, показывает относительно произведения векторов закон коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. После каждого пункта автор предоставляет контрольные вопросы, практические задания для закрепления, упражнения на отработку знаний, полученных в ходе изучения данной темы, упражнения на повторение для закрепления, изученного. В рассмотренных учебниках геометрии понятие темы «Векторы» авторы детально рассматривают и дают много заданий на отработку и закрепление знаний. Но каждый автор по-разному вводит понятие векторов

и действий с ними, определения у авторов могут идти в разном порядке. Подход к объяснению у всех разный, некоторые авторы, среди которых Л.С. Атанасян и А.Г. Мерзляк, теоретическую часть подкрепляют практическими примерами, а А.Д. Александров дает только теорию, делая упор на самостоятельное обучение. Последовательность определений разнится, но основные понятия рассматриваются в полном объеме.

2.3 Обучение математическому моделированию с помощью векторного и координатного методов

Решение геометрических задач сводится к выполнению определенного алгоритма, состоящего из III основных этапов:

I. Перевести задачу на векторный или координатный (аналитический) язык.

II. Преобразовать аналитическое выражение.

III. Обратный перевод, то есть перевести с векторного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Решим геометрические задачи, используя данный алгоритм

Задача №1

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра CC_1 .

1) Найдите угол между прямыми BE и A_1B_1

2) Докажите, что $AC_1 \perp DB$

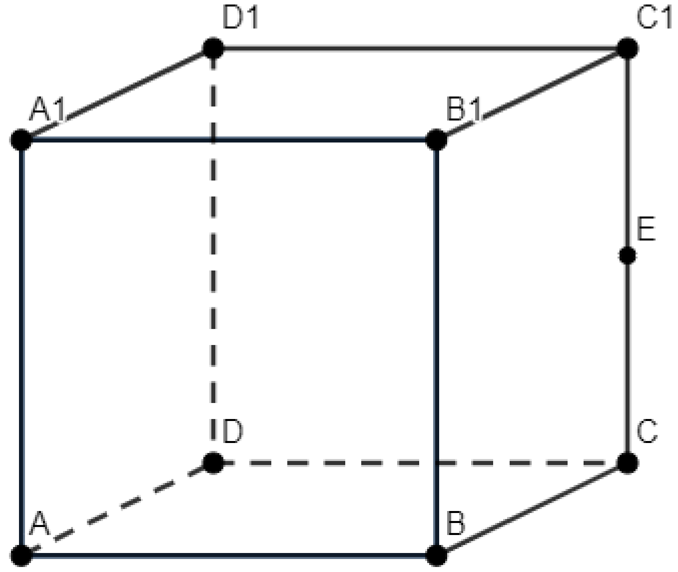


Рисунок 1 — Чертеж к задаче №1

Решение:

1.1. Впишем куб в прямоугольную систему координат,

векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{BE}$ по векторам базиса

Имеем: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

1.2. $\overrightarrow{A_1\mathrm{B}_1} = \vec{a}$, тогда $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{A_1\mathrm{B}_1} = \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\vec{a} = \overrightarrow{ab} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

1.3. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{A_1\mathrm{B}_1}$ равно нулю, отсюда следует, что угол между прямыми BE и $A_1\mathrm{B}_1$ равняется 90°.

2.1.Введем координатную ось с началом в точке А, векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Разложим вектора $\overrightarrow{\mathrm{AC}_1}$ и $\overrightarrow{DB}$ по векторам $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\,)$

Имеем: $\overrightarrow{\mathrm{AC}_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.2. $\overrightarrow{\mathrm{AC}_1} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$.

2.3. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{DB}$ равно нулю, отсюда следует, что угол между прямыми AC_1 и DBравняется 90°, что и требовалось доказать.

Задача №2

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка N — середина ребра BB_1 . Докажите, что $NC \perp C_1D_1$.

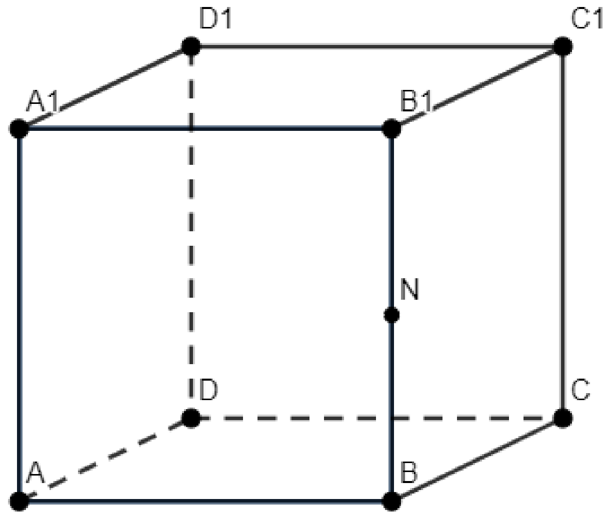


Рисунок 2 — Чертеж к задаче №2

Задача №3

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка I — середина ребра BB_1 . Докажите, что $AI \perp B_1C_1$.

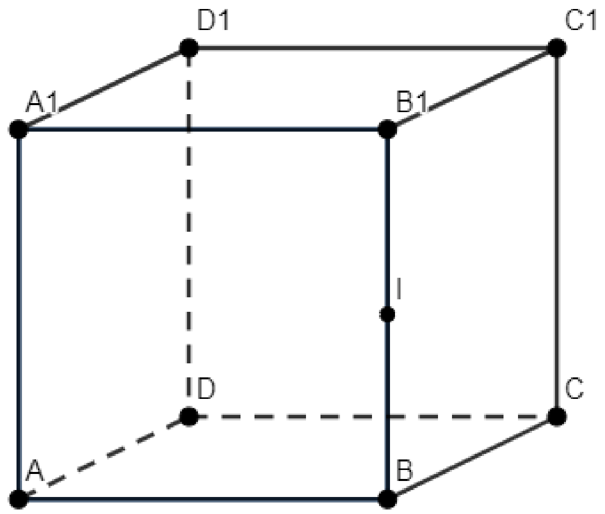


Рисунок 3 — Чертеж к задаче №3

Задача №4

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, основанием которой является треугольник. Точка D - середина ребра BB_1. Докажите, что $DC \perp A_1C_1$.

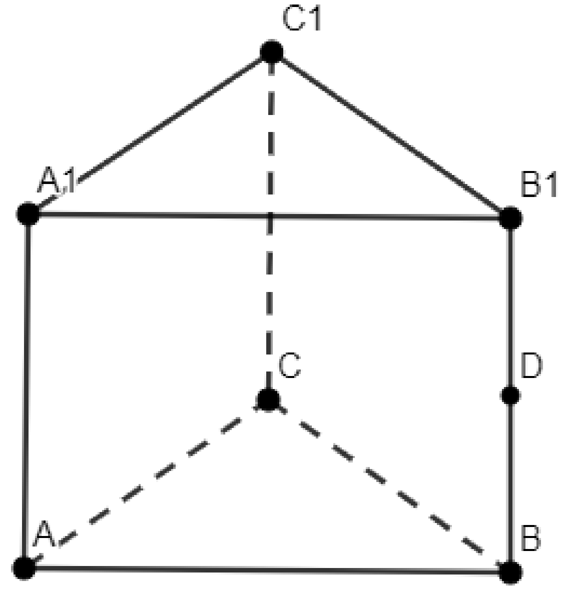


Рисунок 4 — Чертеж к задаче №4

Задача №5

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, основанием которой является треугольник. Точка D - середина ребра AA_1. Докажите, что $DC_1 \perp CB$.

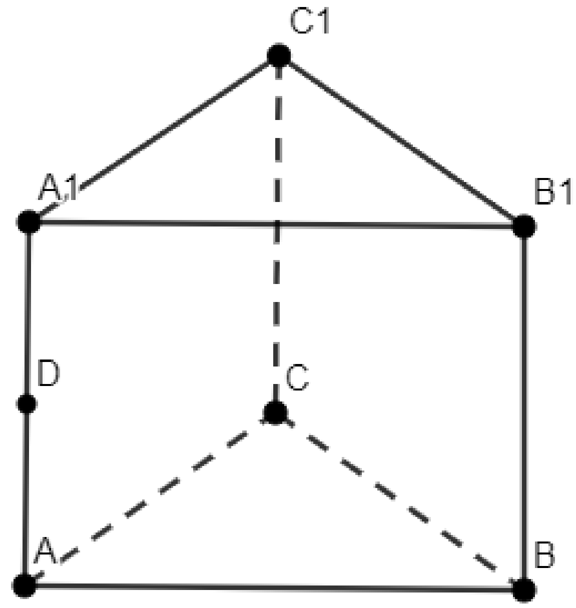


Рисунок 5 — Чертеж к задаче №5

(Задачи со 2 по 5 решаются аналогично 1)

Задача №6

Дан куб $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ с ребром a. Найдите угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

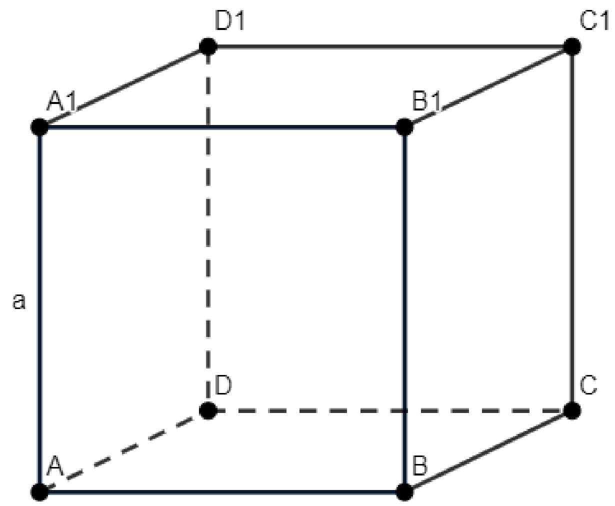


Рисунок 6 — Чертеж к задаче №6

Решение:

1) Введем систему координат с началом в точке А. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1})$. Векторы $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AA_1}| = a$ и попарно ортогональны (их скалярные произведения равны нулю). Найдем угол α между диагональю куба $\mathrm{CA_1}$ и диагональю $\mathrm{AB_1}$ грани $\mathrm{ABB_1A_1}$.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB_1}|}$$

2) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$

$$\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right)\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1^2} = 0.$$

3) Следовательно, $\cos\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Задача №7

Дан куб $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$ с ребром a. Найдите угол между диагональю CA_1 куба и плоскостью AB_1D_1.

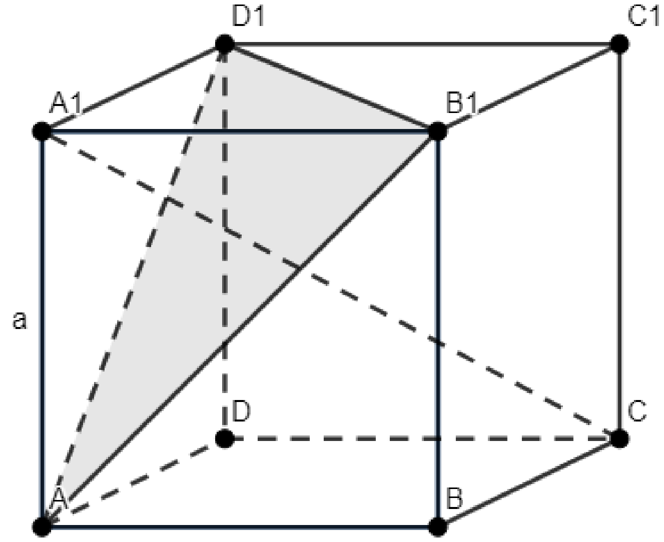


Рисунок 7 — Чертеж к задаче №7

Решение:

1) Введем систему координат с началом в точке А. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1})$. Векторы $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AA_1}| = a$ и попарно ортогональны (их скалярные произведения равны нулю). Найдем угол α между диагональю куба CA_1 и диагональю AB_1 грани ABB_1A_1.

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}|}{|\overrightarrow{CA_1}| \cdot |\overrightarrow{AB_1}|}$$

2) $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$.

$$\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right)\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right)$$

$$= -\overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1^2} = 0.$$

3) Поскольку угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани равна $\frac{\pi}{2}$, то диагональ куба CA_1 будет перпендикулярна диагоналям AB_1 и AD_1 граней, а значит и плоскости AB_1D_1.

Задача №8

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба.

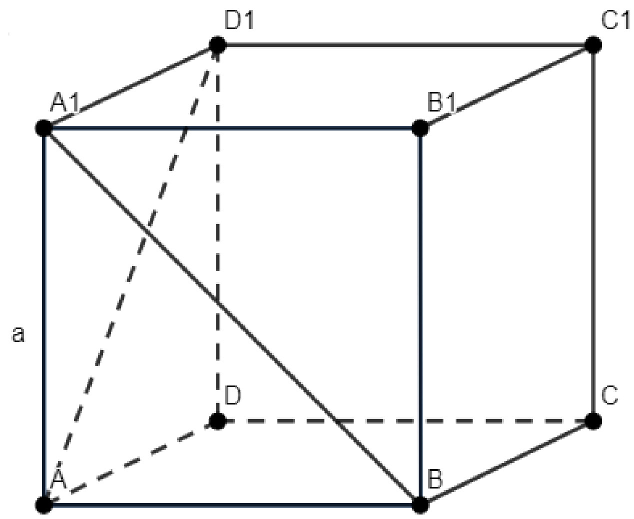


Рисунок 8 — Чертеж к задаче №8

Решение:

1) Введем систему координат в начале точки А, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1})$. Векторы $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AA_1}| = a$ и попарно ортогональны (их скалярные произведения равны нулю).

Найдем угол α между диагональю BA_1 грани ABB_1A_1 и диагональю AD_1 грани ADD_1A_1. Имеем: $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AD_1}|}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{AD_1}|}$, где $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}$ и $|\overrightarrow{BA_1}| = |\overrightarrow{AD_1}| = a\sqrt{2}$.

2) Вычисляя $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{AD_1} = (\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}^2 -\cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \alpha^2$, находим $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

3) $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

Задача №9

Дан правильный тетраэдр ABCD с ребром a. Найдите угол между его противоположными ребрами.

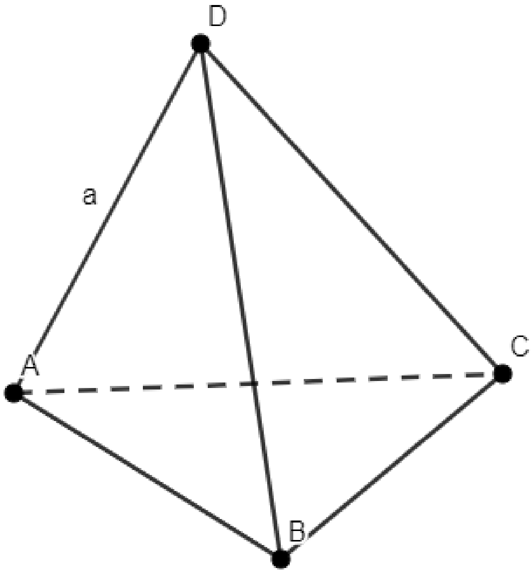


Рисунок 9 — Чертеж к задаче №9

Решение:

1. Векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ неколлинеарные и отложены от одной точки, значит через них можно выразить другие вектора.
2. По условию: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2, \vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{d} = a^2 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a^2$.

   Найдем угол $\angle(DA, BC)$ между ребрами DA и BC. Его можно найти как угол между векторами $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \vec{c} - \vec{b}$.

   Имеем: $\cos\angle(DA, BC) = \frac{\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{DA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})}{a^2} = \frac{\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}}{a^2} = 0$. 3.

   $\cos\angle(DA, BC) = 0$.
3. $\cos\angle(DA, BC) = 0 \Rightarrow \angle(DA, BC) = \frac{\pi}{2}$.

Задача №10

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$точки E и K — середины ребер соответственноA_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BK.

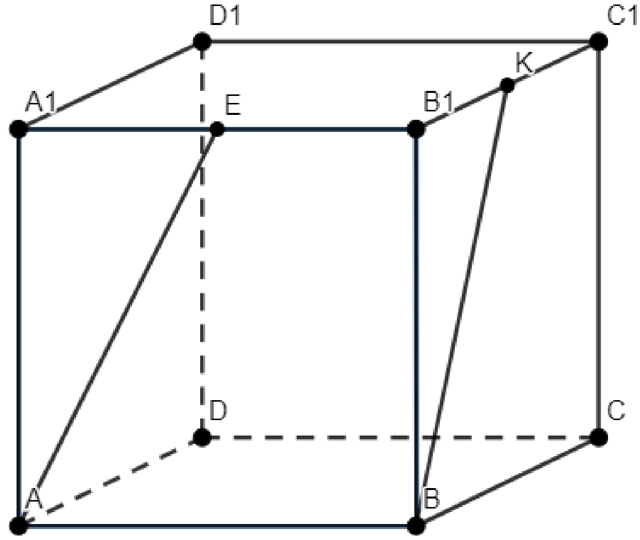


Рисунок 10 — Чертеж к задаче №10

Решение:

1) Длина ребра куба не дана. Какой бы она ни была, угол между *AE* и *BK* от нее не зависит. Поэтому возьмем куб, все ребра которого равны *1*. Введем систему координат с началом в точке *D*.

Прямые *AE* и *BK* — скрещиваются. Найдем угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{BK}$. Для этого нужны их координаты. A (0; 0; 0), B (*1*; 0; 0), E ($\frac{1}{2}$; 0; *1*),

K (*1*; $\frac{1}{2}$; *1*). Запишем координаты векторов: $\overrightarrow{AE}\left(\frac{1}{2};0;1\right), \overrightarrow{BK}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ и найдем косинус угла между векторами этими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BK}|}$$

2) $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BK}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BK}|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

3) $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Задача №11

Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника ABCD пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок МК равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Решение:

1) Введем систему координат с началом в точке D.

Найдем координаты точек A, B, C, D, M, К.

Координаты точек A (0;a), B (b;a), C (b;0), D(0;0) определяем по введённой системе координат.

Для нахождения координат точки M рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. Он является равнобедренным (так как ∠M=90°-45°= =45°=∠B) ⇒ AM=AB=b ⇒ M(0;a-b)

Для нахождения координат точки К рассмотрим прямоугольный треугольник KAD. Он является равнобедренным
(так как ∠K=90°-45°= =45°=∠D) ⇒ AK=AD⇒ K(-a;a).

BD⊥KM если $\vec{B}D\cdot\overrightarrow{KM}$ =0.

2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{KM} = ab + (-ab) = 0$.

$|BD| = \sqrt{b^2 + a^2},\ |KM| = \sqrt{a^2 + (a-b-a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{KM} = 0$ ⇒ BD⊥KM; $|BD| = \sqrt{b^2 + a^2},\ |KM| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ⇒ $BD = KM$. Что и требовалось доказать.

Задача №12

В четырехугольнике три угла равны 45°. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.

Решение:

1) Введем систему координат с началом в точке D.
Найдем координаты точек A, B, C, D, M, К.
D(0;0), AB параллельна оси OX ⇒ B (b;a).

Для нахождения координат точки А рассмотрим прямоугольный треугольник AKD. Он является равнобедренным, так как ∠D=90°-45°= =45°=∠B (∠B=45° это нам известно из условия) ⇒ АК=KD =a ⇒ A(-a;a)

Для нахождения координат точки С рассмотрим прямоугольный треугольник КВС. Он является равнобедренным (по условию) ⇒ КС=КВ⇒ C(0;a-b).

Диагонали BD⊥AC если $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = ab + (-ab) = 0$.

3) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ ⇒ BD⊥AC. Что и требовалось доказать.

Представленные задачи можно решать с помощью математического моделирования и использовать их на уроках геометрии, для лучшего усвоения материала у учащихся. При использовании этих задач были разработаны 2 урока (приложение 1).

В итоге, можно выделить следующие компоненты умения применять метод математического моделирования в конкретных ситуациях:

1) перевод с геометрического языка на аналитический для одного типа задач и с аналитического на геометрический для другого;

2) нахождение координаты заданных точек;

3) вычисление скалярного произведения векторов;

4) выбор оптимальной системы координат;

5) составление математической модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенной исследовательской работы были реализованы все поставленные задачи.

Во-первых, была определена и изучена сущность модели, рассмотрены ее виды и представлена классификация, а также даны основы теоретической базы моделирования. Так как предметом изучения исследовательской работы было обучение учащихся математическому моделированию, то необходимо было дать более общие понятия: «модель», «моделирование».

Во-вторых, раскрыта суть математического моделирования как одного из самых эффективных методов математического познания и развития математических способностей у учеников. Математическое моделирование предполагает использование в качестве специфического средства исследования оригинала его математическую модель, изучение которой дает новую информацию об объекте познания, его закономерностях.

В-третьих, приведены основные функции математического моделирования в школьном курсе геометрии, а также в соответствии с ними и основная цель. Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности.

В-четвертых, на предмет наличия элементов математического моделирования была проанализирована школьная литература.

В-пятых, были выявлены основные проблемы, которые возникают в результате обучения математическому моделированию в геометрии. Сформулированы наиболее эффективные пути ликвидации трудностей, связанных с обучением математическому моделированию

В-шестых, были разработаны уроки геометрии с элементами математического моделирования. Рассмотрены способы применения математического моделирования в курсе геометрии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Александров, А.Д.** Геометрия. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / А.Д. Александров, А Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва: Просвещение, 2014. – 175 с.: ил. – ISBN 978-5-09-028109-6.

2. **Александров, А.Д.** Геометрия: учебное пособие для 9 классов с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А Л. Вернер, В. И. Рыжик. – Москва: Просвещение, 2017. – 134 с. – URL: https://11klasov.com/4326-geometriya-9-klass-metodicheskie-rekomend acii-verner-al-ryzhik-vi.html (дата обращения 11.04.2021). – Текст: электронный.

3. **Алтухов, В.Л.** О перестройке мышления: философско-методологические аспекты / В. Л. Алтухов, В.Ф. Шапошников. – Москва: Просвещение, 1990. – 63 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01001387941 (дата обращения 27.04.2021). – Текст: электронный.

4. **Асмолов, А. Г.** Формирование универсальных учебных действий в основной школе : от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская. – 2-е изд. – Москва: Просвещение. – 2010. – 159 с. – URL: http://s_poshin.isk.edu54.ru/wp-content/uploads (дата обращения: 07.05.2021). – Текст: электронный.

5. **Бутузов, В.Ф.** Геометрия. 7 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/05656553941 (дата обращения 27.04.2021). – Текст: электронный.

6. **Веников, В.А.** Теория подобия и моделирования / В. А. Веников. – Москва: Высшая школа, 1986. – 480 с. – URL: https://www.studmed.ru/venikov-va-teoriya-podobiya-i-modelirovaniya_73d76c6a488.html (дата обращения 07.05.2021). – Текст: электронный.

7. **Гусев, В.А.** Векторы в школьном курсе геометрии: пособие для учителей / В.А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1976. – 48 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01006924440 (дата обращения 07.05.2021). – Текст: электронный.

8. **Гусев, В. А.** Практикум по решению математических задач: Геометрия / В.А. Гусев. – Москва: Просвещение, 1985. – 198 с. – URL: https://11klasov.com/8417-praktikum-po-jelementarnoj-matematike-geometrija-gusev-va-litvinenko-vn-mordkovich-ag.html (дата обращения 21.05.2021). – Текст: электронный.

9. **Давыдов, В.В.** Проблемы развивающего обучения / Давыдов В.В. – Москва: Педагогика, 1986. – 160 с.– URL: Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. (grsu.by) (дата обращения 18.05.2021). – Текст: электронный.

10. **Денисов, П. Н.** Принципы моделирования языка обучения / Денисов П. Н. – Москва: Педагогика, 1963. – 14 с. – URL: Денисов, Петр Никитич. – Принципы моделирования языка: Автореферат на соискание ученой степени кандидата филологических наук – Search RSL (дата обращения: 25.04.2021). – Текст: электронный.

11. **Емелина, Е.А.** О некоторых проблемах обучения школьников векторному методу моделирования физических процессов / Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2007. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=2980 9973 (дата обращения 11.05.2021) – Текст: электронный.

12. **Евсин, Н.Г.** Особенности обучения решению геометрических задач средствами векторной алгебры / Евсин Н.Г. Математика, некоторые ее приложения и методы преподавания Ростов-на-Дону, 1973: электронный. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-nekotoryh-metodiches kih-osobenn styah-obucheniya-shkolnikov-resheniyu-geometricheskih-zadach-vektornym-metodom (дата обращения 11.05.2021) – Текст: электронный.

13. **Исаева, М.А.** Векторный метод решения планиметрических задач в школьном курсе геометрии / М.А. Исаева Новая наука. – 2016. – № 3 (69). - С. 74–78. – URL: https://elib rary.ru/item.asp?id=25601251 (дата обращения 15.05.2021). – Текст: электронный.

14. **Колесникова, Е.В.** Векторный метод в курсе геометрии основной школы / Е.В. Колесникова Певзнеровские чтения. – 2013. – № 1. – С. 27. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21695756 (дата обращения 15.05.2021). – Текст : электронный.

15. **Лященко Е.И,** Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учебное пособие для студентов физико-математической специальности педагогических вузов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко [и др.] – под редакцией Е.И. Лященко. – Москва: Просвещение, 1988. - 223 с. ISBN 5-09-000600-8.

16. **Мельникова, Н.Б.** Дидактические материалы по геометрии: 9 класс:к учебнику Л. С. Атанасяна и др., «Геометрия. 7-9 классы» / Н.Б. Мельникова, Г.А. Захарова. – Москва: Экзамен, 2013. – 143 с. – URL: https://11klasov.com/13746-didakticheskie-materialy-po-geometrii-9-klass-k-uchebniku-atanasjana-ls-melnikova-nb-zaharova-ga.html (дата обращения 15.05.2021). – Текст: электронный.

17. **Мерзляк, А.Г.** Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк и др. – М.: Вентана-Граф, 2014. – 240 с. : ил. – ISBN 978-5-360-04345-4.

18. **Метельский, Н.В.** Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы : учебное пособие для вузов / Н.В. Метельский. – Москва: Издательство БГУ, 1982. – 256 с. – URL: https://www.mathedu.ru/text/metelskiy_di daktika_matematiki_1982/p0/ (дата обращения 15.05.2021). – Текст: электронный.

19. **Погорелов, А.В.** Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательной организаций / А.В. Погорелов. – Москва: Просвещение, 2014. – 240 с. : ил. – ISBN 978-5-09-021849-8.

20. **Саранцев, Г.И.** Общая методика преподавания математики: учебное пособие для студентов математических спец. педагогических вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. – 208 с. : ил. – ISBN 5-09-010148-5

21. Современные проблемы школьного математического образования. Материалы научно-практических конференций учителей математики и преподавателей вузов. – Текст: непосредственный // Пермский государственный педагогический университет. Пермь. – 2002. – 190 с.

22. **Федеральный Государственный Образовательный Стандарт** Основного Общего Образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «17» декабря 2010 г. № 1897. – URL: http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2588 (дата обращения: 09.04.2021). – Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Урок геометрии в 10 классе.

Тема урока: Решение задач по теме «Четырехугольник».

Тип урока: урок закрепления нового материала.

Цели урока:

обучающая: Закрепить изученный теоретический материал на практике; Сформировать видение изученного метода в различных ситуациях: при решении задач на доказательство или задач, требующих найти численное (буквенное) значение, какого – либо элемента; Учить составлению модели; Учить умению объяснять, комментировать выполняемое упражнение в виде цельного связного рассказа.

развивающая: Способствовать развитию общения как метода научного познания; Развивать навыки исследовательской деятельности.

воспитательная: Развивать у учащихся коммуникативные компетенции; Способствовать развитию творческой деятельности учащихся, потребности к самообразованию.

Ход урока

Организационный момент – 1 минута.

Учитель приветствует учащихся и объявляет цель урока и план. *Учитель*. Сегодня на уроке мы научимся применять метод математического моделирования при решении задач по теме «Четырехугольники», вы убедитесь, насколько удобен данный метод в использовании и насколько упрощается решение задачи с его помощью. Эпиграфом к уроку служат слова французского философа-материалиста атеиста Дени Дидро (1713 – 1784) – современника Декарта, Лейбница, личного библиотекаря Екатерины Великой

«Есть истины, как страны, наиболее удобный путь, к которым становится известным лишь после того, как мы испробуем все пути… На пути к истине мы почти всегда обречены, совершать ошибки» Дени Дидро.

Проверка домашнего задания – 16 минут.

Учитель. Дома вы должны были повторить тему «Координаты и векторы». А начнем мы с проверки теоретических знаний, ответьте на вопросы.

Учитель проводит проверку знаний по пройденной теме, изображая необходимые фигуры на доске. Учащиеся отвечают на теоретические вопросы устно. После демонстрации правильных ответов ими проводится самооценка своего устного ответа.

Вопросы:

1. Определите координаты вершин (фигуры изображены на доске).

Рис.1 Определить координаты точек B (0;a), C (a;0), A (0;0).

Рис.2 Определить координаты точек D (-a;a), H (0;-a), B (a;-a), A (-a;-a).

Рис.3 Определить координаты точек C (0;a), B (a;a).

Рис.4 Определить координаты точек B (a;b), A (a;0), C(0;b)

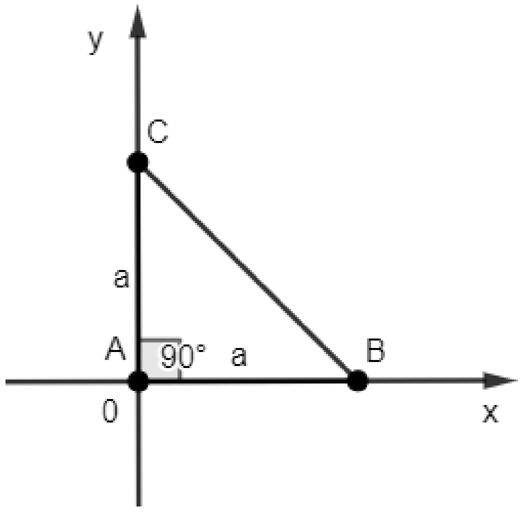


Рис. 1

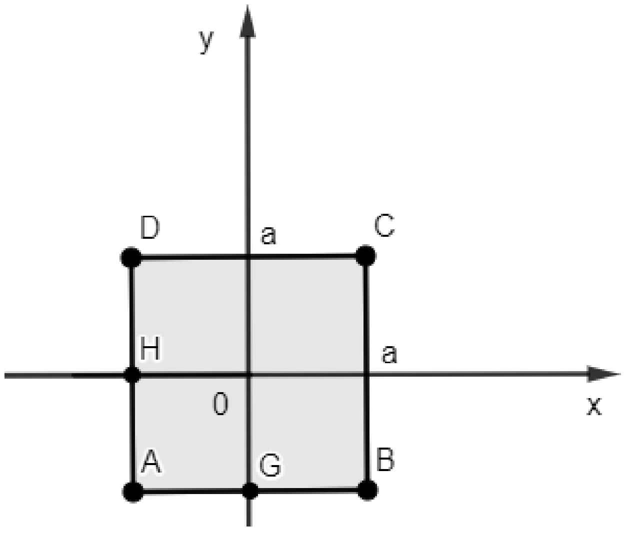


Рис. 2

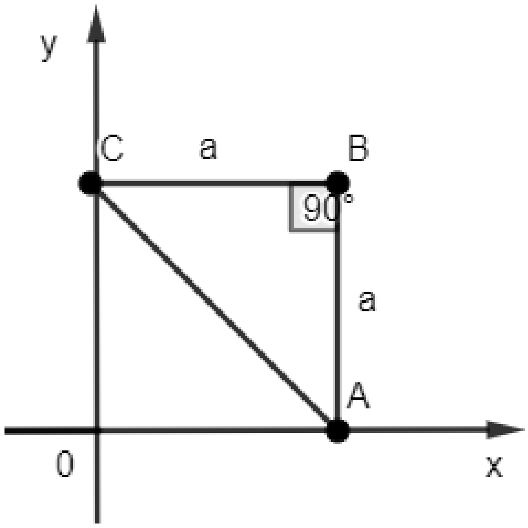


Рис. 3

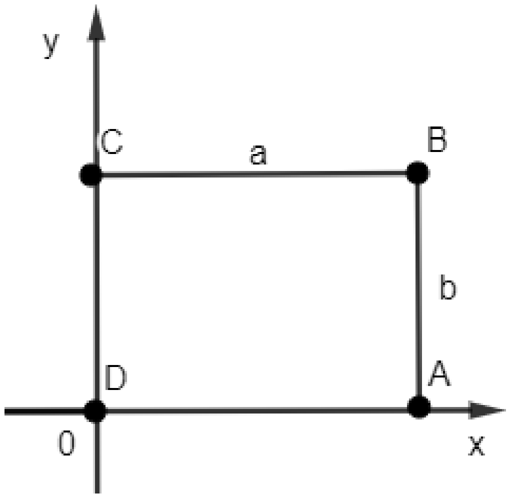


Рис. 4

2. Назовите формулу вычисления длины отрезка.

3. Найдите длину отрезка DB (Рис.4) $DB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

4. Назовите формулу для нахождения координат вектора.

5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{DB}$. $\overrightarrow{DB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1) \Rightarrow \overrightarrow{DB}(a; b)$

6. Найдите длину вектора $\overrightarrow{DB}$. $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

7. Как еще можно ввести систему координат в рис.2

Применение теории на практике.

Задача №1 (Учитель у доски решает задачу и комментирует каждый этап по ходу решения)

В четырехугольнике три угла равны 45°. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.

Решение:

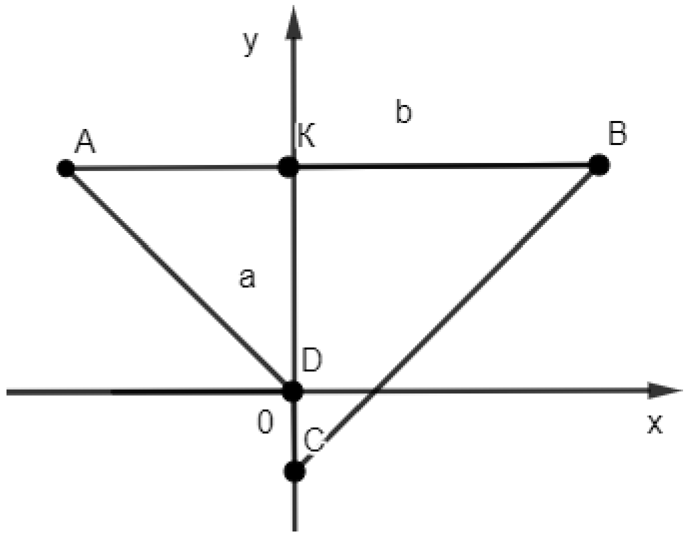


Рисунок 1 – Чертеж к задаче №1

1) Введем систему координат с началом в точке D.

Найдем координаты точек A, B, C, D, M, K.

D(0;0), AB параллельна оси OX ⇒ B (b;a).

Для нахождения координат точки A рассмотрим прямоугольный треугольник AKD. Он является равнобедренным, так как ∠D=90°-45°= =45°=∠B (∠B=45° это нам известно из условия) ⇒ AK=KD =a ⇒ A(-a;a)

Для нахождения координат точки C рассмотрим прямоугольный треугольник KBC. Он является равнобедренным (по условию) ⇒ KC=KB⇒ C(0;a-b).

Диагонали BD⊥AC если $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$.

2) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = ab + (-ab) = 0$.

3) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ ⇒ BD⊥AC. Что и требовалось доказать.

Самостоятельное выполнение учащимися заданий под контролем учителя. Учитель предлагает обобщить учащимся весь теоретический материал, используемый на уроке и решить задачу оп примеру, которая продемонстрирует успех изучения данной темы.

Задача №2 (Учащиеся решают самостоятельно на своих местах пользуясь примером)

Биссектриса угла B и биссектриса внешнего угла D прямоугольника ABCD пересекают сторону AD и прямую AB в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезок MK равен и перпендикулярен диагонали прямоугольника.

Решение:

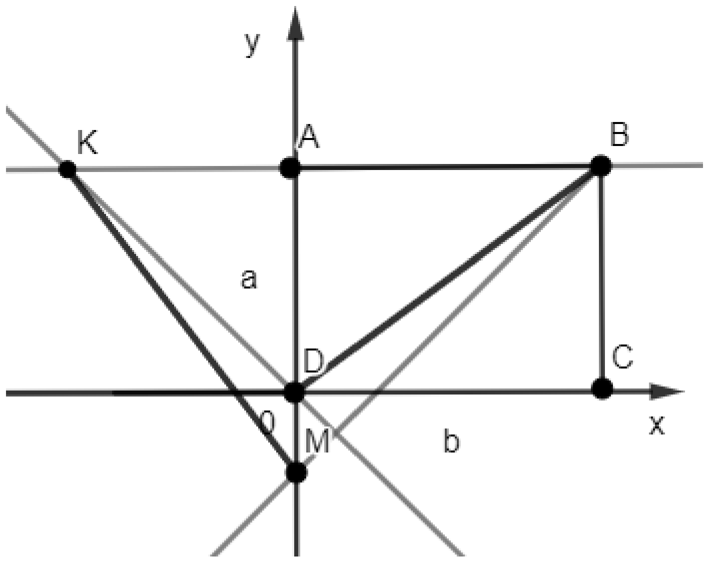


Рисунок 2 – Чертеж к задаче №2

1) Введем систему координат с началом в точке D.

Найдем координаты точек A, B, C, D, M, K.

Координаты точек A (0;a), B (b;a), C (b;0), D(0;0) определяем по введённой системе координат.

Для нахождения координат точки M рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. Он является равнобедренным (так как ∠M=90°-45°= =45°=∠B) ⇒ AM=AB=b ⇒ M(0;a-b)

Для нахождения координат точки K рассмотрим прямоугольный треугольник KAD. Он является равнобедренным (так как ∠K=90°-45°= =45°=∠D) ⇒ AK=AD⇒ K(-a;a).

BD⊥KM если $\vec{B}D \cdot \overrightarrow{KM}$ =0.

2) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{KM} = ab + (-ab) = 0.$ $|BD| = \sqrt{b^2 + a^2},\ |KM| = \sqrt{a^2 + (a - b - a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$ ⇒ BD⊥KM; $|BD| = \sqrt{b^2 + a^2},\ |KM| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow BD = KM$. Что и требовалось доказать.

Подведение итогов урока.

Выставляются оценки за урок. Учитель записывает на доске обязательную и необязательную части домашнего задания.

Дополнительная задача:

В прямоугольнике ABCD точка M – середина стороны CD. Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM, а через точку M – прямую, перпендикулярную диагонали BD. Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Урок геометрии в 10 классе.

Тема урока: Решение задач по теме «Четырехугольник».

Тип урока: урок закрепления нового материала.

Цели урока:

обучающая: с помощью практических заданий обеспечить понимание нахождения угла, между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, учащимися;

развивающая: развивать воображение учащихся при решении геометрических задач, логическое мышление, интерес к предмету, познавательную и творческую деятельность учащихся, математическую речь, память, внимание; вырабатывать самостоятельность в освоении новых знаний.

воспитательная: воспитывать у учащихся ответственное отношение к учебному труду, волевые качества; формировать эмоциональную культуру и культуру общения.

Ход урока

Организационный момент – 3 минута.

- Приветствие;
- Сообщение целей и задач урока;
- Мотивация изучения нового материала;
- Психолого-педагогическая настройка учащихся на предстоящую деятельность;
- Проверка присутствующих на уроке.

Актуализация знаний.

Учитель проводит опрос:

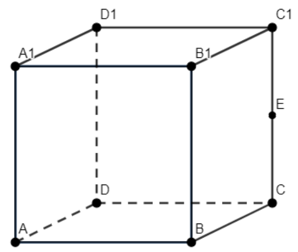
1) Какие фигуры изучает планиметрия, а какие стереометрия?

2) Каково взаимное расположение двух прямых в пространстве?

3) Сколько углов образуется при пересечении двух прямых в пространстве?

4) Как определить угол между пересекающимися прямыми?

5) Как можно вписать куб в систему координат? (куб изображен на доске)



6) Назовите формулу для нахождения координат вектора.

7) Запишите формулу нахождения суммы, разности и скалярного произведения векторов.

8) Как найти координаты вектора. $\vec{a}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Применение теории на практике.

Задача (Учитель у доски решает задачу и комментирует каждый этап по ходу решения)

Дан куб $\mathrm{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. Точка E — середина ребра CC_1 .

1) Найдите угол между прямыми BE и $A_1\mathrm{B}_1$

2) Докажите, что $\mathrm{AC}_1 \perp DB$

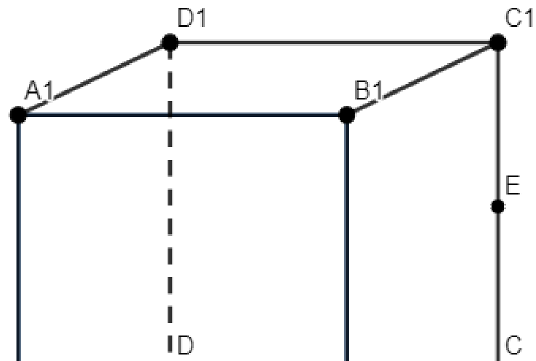


Рисунок 1 — Чертеж к задаче

Решение:

1.2. Впишем куб в прямоугольную систему координат,

векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{BE}$ по $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\,)$.

Имеем: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

1.2. $\overrightarrow{A_1\text{B}_1} = \vec{a}$, тогда $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{A_1\text{B}_1} = \left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\vec{a} = \overrightarrow{ab} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

1.3. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{A_1\text{B}_1}$ равно нулю, отсюда следует, что угол между прямыми BE и $A_1\text{B}_1$ равняется 90°.

2.1.Введем координатную ось с началом в точке А, векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Разложим вектора $\overrightarrow{\text{AC}_1}$ и $\overrightarrow{DB}$ по векторам $(\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\,)$.

Имеем: $\overrightarrow{\text{AC}_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

2.2. $\overrightarrow{\text{AC}_1} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)\left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$.

2.3. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{\text{AC}_1}$ и $\overrightarrow{DB}$ равно нулю, отсюда следует, что угол между прямыми AC_1 и DBравняется 90°, что и требовалось доказать.

Учитель выдает учащимся карточки с типовой задачей. Учащиеся решают самостоятельно на своих местах пользуясь примером.

Задача № 1

Дан куб $\text{ABCDA}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$. Точка N — середина ребра BB_1 . Докажите, что $NC \perp C_1D_1$.

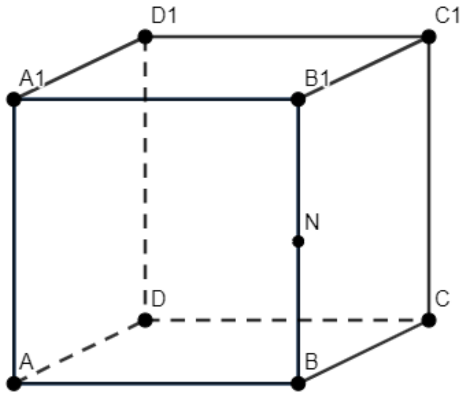


Рисунок 2 — Чертеж к задаче №1

Подведение итогов урока.

Выставляются оценки за урок. Учитель записывает на доске обязательную и необязательную части домашнего задания.

Дополнительная задача:

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка I — середина ребра BB_1 . Докажите, что $AI \perp B_1C_1$.

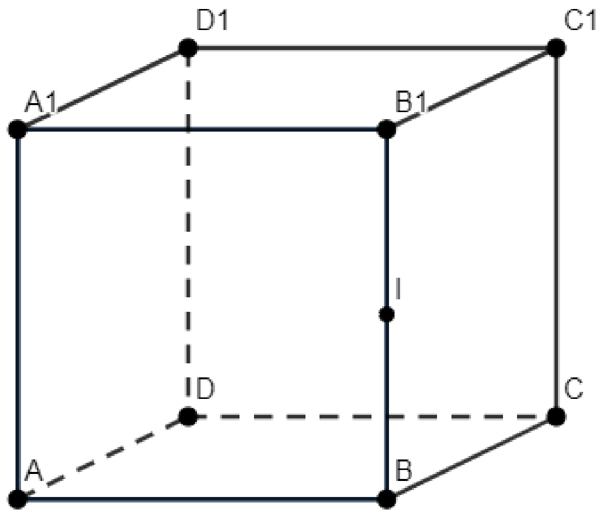


Рисунок 3 — Чертеж к дополнительной задаче