МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)**

**ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ**
**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

# Методика решения сюжетных задач в основной школе

**Выпускная квалификационная работа**
**по направлению 44.03.05 Педагогическое образование**

**Направленность программы бакалавриата**
**«Математика. Экономика»**

Проверка на объем заимствований:
72,23 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 22 » мая 2018г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математики
___________ Е.А. Суховиенко


Выполнила:
Студентка группы ОФ513/086-5-1
Григорьева Анастасия Владимировна

Научный руководитель:
Доцент, кандидат пед. наук
Эрентраут Елена Николаевна


Челябинск
2018

СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

В «Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования нового поколения» [24] представлены требования к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования. В предметные результаты изучения предметной области «Математика» входит решение сюжетных задач разных типов на все арифметические действия, а также составление плана решения задачи, выделение этапов ее решения, интерпретация вычислительных результатов в задаче, исследование полученного решения задачи.

Так как решение сюжетных задач практического содержания имеет в математическом образовании существенное значение, то на обучение решения сюжетных задач выделяется немалое количество внимания и уроков. Навык решения сюжетных задач можно отнести к одному из первостепенных и наиболее значительных показателей уровня знания математического образования обучающихся. Сюжетные задачи подведены к настоящим жизненным условиям, поэтому математические знания и умение решать задачи пригодиться учащимся в дальнейшей повседневной жизни. Благодаря чему ученики продолжают улучшать в себе такие качества, как самостоятельность, усердность, навыки умственного труда (старательность, сосредоточенность, исправность, правильную расстановку умственных действий), а также сознательное отношение к обучению.

Учитывая вышеизложенное, можно сказать, что тема «Методика решения сюжетных задач в основной школе» актуальна.

**Объект исследования:** процесс обучения математике в школе.

**Предмет исследования:** методические особенности обучения решению сюжетных задач.

**Цель** данной квалификационной работы рассмотреть и раскрыть ключевые моменты методики решения сюжетных задач, разработать факультативный курс и систему задач к нему по данной теме для подготовки к ОГЭ.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1) Рассмотреть понятие и значение сюжетной задачи;

2) Раскрыть обобщенные методы работы над сюжетной задачей;

3) Рассмотреть типизацию задач «на движение», «на работу», «на проценты», «смеси, сплавы и концентрацию» и методику их решения;

4) Подобрать систему задач по данной теме;

5) Разработать факультатив по теме «Решение сюжетных задач при подготовке к ОГЭ».

**Гипотеза:** если разработать факультативный курс по решению сюжетных задач и внедрить его, то уровень умений и навыков учащихся повысится, что в дальнейшем повысит успеваемость обучающихся и будет способствовать хорошей подготовке к сдаче ОГЭ.

# ГЛАВА 1. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ

## 1.1 Понятие, способы и этапы решения сюжетных задач в школе

При изучении начального курса математики понятие «задача» используется в разных конструкциях – «практическая задача», «арифметическая задача», «сюжетная задача», «текстовая задача». Например, в «Методике начального обучения» под редакцией А.А. Столяра и В.Л. Дрозда арифметическими текстовыми задачами являются «задачи, имеющие житейское, физическое содержание и решаемые с помощью арифметических действий» [12].

Г.В. Бельтюкова и М.А. Бантова под словом «задача» имеют ввиду жизненную ситуацию, которая связана с числами и решается арифметическими действиями или счетом [2].

А.М. Пышкало и Л.П. Стойлова [22] под понятием «текстовая задача» понимают описание определенной ситуации на простом языке, с требованием выдать количественную оценку какого-либо компонента данной ситуации, либо установить отсутствие или наличие каких-то отношений о величинах и объектах, о неизвестных и известных значениях данных величин, о взаимодействиях между ними, а также содержат вопрос с указанием на то, что необходимо найти. Вопрос может быть предложением, как в повелительной, так и в вопросительной форме.

Л.М. Фридман считает, что текстовые задачи представляют собой словесные модели, в которых учащимся надо найти значения (одной или даже нескольких) неизвестной величин. Нахождение таких величин возможно потому, что оно определяется другими неизвестными и известными величинами, и их взаимными соотношениями с неизвестной величиной. В задаче присутствуют для решения все данные, но бывают операции, которые должны к ним привести. Трудность выражается в определении пути решения. Сложность структуры, ее индивидуальность часто может скрывать математическую сущность задач и возникает необходимость постоянно строить рассуждение, подходящее к приведенному условию [25].

Ю.М. Колягин [9] говорит, что текстовая задача − это описание определенной ситуации, одной или нескольких на обычном языке, где содержится требование дать количественную оценку какого-то компонента указанной ситуации или установить наличие, либо отсутствие определенного отношения между компонентами задачи, может также потребоваться определение вида данного отношения.

С понятием «задача» тесно связано понятие «вопрос», «упражнение», «проблемная ситуация». С.Л. Рубинштейн, Л.М. Фридман в своих работах рассматривают отношения между понятиями «задача» и «проблемная ситуация», «задача» и «вопрос». Г.И. Саранцев в своей монографии [19], которая посвящена упражнениям в обучении математике рассматривает соотношения между понятиями «задача» и «упражнение». Автор делает вывод, что «упражнения – многоаспектное явление обучения, обладающее такими основными признаками:

1) является носителем действий, адекватных содержанию обучения математике;

2) является средством формирования знаний, умений и навыков;

3) служит способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью учащихся;

4) является одной из форм реализации методов обучения;

5) служит средством связи теории с практикой» [19].

Так же он говорит о том, что в контексте многих учебников математики школьные задачи являются упражнениями, поэтому типологии задач можно считать типологиями упражнений [19].

Крепкое и полное усвоение учащимися основ курса математики очень важно для развития их математической культуры, ввиду того, что задачи в обучении математики занимают очень большое место. Они формируют практические навыки применения математики, развивают алгоритмическое и логическое мышления, служат основным средством развития пространственного воображения, являются средством эвристического и творческого начал. При изучении теоретических знаний задачи помогают мотивировать введение понятий, выявлению их основных свойств, быстрому усвоению математической терминологии и терминологии символики, раскрывают взаимосвязи понятий. Функции задач состоят в том, чтобы в деятельности решения задач выработать прочные умения применять теорию на практике, уметь выделять общие способы решения, применять их на новых задачах, развивать творческое и логическое мышление, память, внимание, воображение [6].

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (теорем, определений, правил, формул, аксиом, законов) которые применяя к следствиям задачи или к ее условию (результатам промежуточного решения) получаем то, что требуется к задаче – ее ответ.

Л.В. Виноградова в книге «Методика преподавания математики в средней школе» отмечает, что при решении задач могут быть применены следующие методы: арифметический; геометрический; алгебраический; алгоритмический метод; эвристический, который подходит для решения нестандартной задачи [4].

Основными методами решения текстовых задач являются арифметический и алгебраический метод, а также комбинированный.

1) Арифметический − способ, при все логические операции при решении задачи проводятся над конкретными числами и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий. Решить задачу арифметическим методом – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над данными в задаче числами.

2) Алгебраический − способ, при котором составляется уравнение (система уравнений), решение которого основано на свойствах уравнений. Решить задачу алгебраическим методом – значит найти ответ на требование задачи путем составления и решения уравнения (системы уравнений).

3) Комбинированный − способ, который включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

Главная цель учителя−научить детей осознанно устанавливать определенные связи между данными и искомыми в разных жизненных ситуациях, предусматривая постепенное усложнение. Чтобы добиться этого, учитель должен предусмотреть в методике обучения решению задач каждого вида такие этапы:

1 этап ─ Анализ текста задачи.

Этап состоит из вопросов и советов для усвоения содержания задачи. Этот этап является подготовкой перед решением задачи. Сначала следует ознакомиться с задачей, представить описанную в задаче ситуацию. Затем, вникнув в содержание задачи, выделить в ней данные и искомые величины. Анализ может быть записан в виде таблицы, так и в виде «содержательной» схемы, «поднимаясь» по которой снизу-вверх приходят к ответу.

2 этап ─ Поиск способа решения задачи и составление плана решения.

Поиск решения задачи осуществляется аналитическим (метод рассуждений от искомых величин к данным) или синтетическим (метод рассуждений, ведущий от данных величин к искомым) путем, но осуществить поиск только аналитически или только с помощью синтеза очень трудно. Чаще всего поиск решения сюжетных задач проводится аналитико-синтетическим путем.

Правильно составленный план решения наверняка гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может быть сложным и длительным процессом. Поэтому ученику необходимо предлагать ненавязчивые вопросы и советы, которые помогут составить план решения задачи:

─ Известна ли ученику аналогичная задача? Если такая задача имеется, то составление плана решения задачи не будет затруднительным.

─ Известна ли ученику задача, к которой можно свести решаемую задачу? В этом случае составление плана также не будет затруднительным.

–Попытаться сформулировать задачу иначе, не меняя, ее математического содержания. В некоторых задачах можно текст перевести на язык алгебры.

– Составляя план решения задачи, следует задавать вопрос: «Все ли данные задачи использованы?»

Поиск решения многих задач заканчивается получением уравнения.

3 этап – Реализация плана решения задачи.

На этом этапе осуществляется план решения (решается уравнение), поэтому важно каждый свой шаг проверять. Здесь выполняется проверка решения и записывается полученный ответ.

4 этап – Анализ и проверка правильности решения задачи.

Необходимо проанализировать полученный результат. Иногда в результате решения задачи появляются несколько ответов, поэтому необходимо оставить тот ответ, который удовлетворяет всем условиям задачи. На этом этапе выделяется главная идея решения, существенных ее моментов, обобщение решения задач данного типа. Выясняются недостатки решения, и производится поиск другого, более рационального решения. Выявляются и закрепляются в памяти учащихся приемы, которые использованы в процессе решения задачи.

## 1.2 Методические особенности обучения решению сюжетных задач

Обучение школьников решению задач – одна из сложнейших методических проблем. Ей занимались следующие авторы: Л.М. Фридман и Е.Н. Турецкий, Г.И. Саранцева, Д. Пойа и другие.

Понятие «задача» включает в себя два вида деятельности. Один это процесс решения; второй - процесс составления задач.

Эти процессы взаимообратные. Им свойственен противоположный ход мыслей. Составление − это синтез, объединение частей в единое целое. Решение задачи - это анализ, то есть обратный процесс, разбивание целого на части. Рассмотрим приемы обучения решению задач [25].

1. Математическая сюжетная задача создается в результате конструирования реально предполагаемого процесса, с целью решения проблемы бытового, производственного или социального характера.

2. Эмпирический путь возникновения задачи – это возникновение на основе наблюдений, анализа, сравнения, вычислений, графических построений и т.п.

3. Между понятиями, и свойствами задач на движение существуют взаимосвязи. Они используются для составления задач. Задачи можно составлять эквивалентными, когда условие или требование, или то и другое равносильны. Можно составить задачу аналогичную по сюжету, методу или используемым в ней приемам решения. Можно составить задачу, обратную данной, и, как правило, не одну. Е.П. Виноградова утверждает, что формирование умений решать и составлять задачи приводит к развитию мышления как логического, так и интуитивного, а также влияет на целостное развитие личности, и на формирование психических процессов, таких как память, воображение, воля, эмоции и т.д. [3].

Т.И. Ивановна считает, что умение решать задачи самостоятельно, без посторонней помощи формируется непроизвольно лишь у небольшой части обучающихся. Для большинства требуется помощь учителя в этом направлении. Необходимо научить школьников, приступая к решению задачи, проанализировать ее.

Надо формировать у обучающихся умение решать, как стандартные, так и не стандартные задачи, ведь решение нестандартной задачи − процесс творческий. В нем усмотреть интуитивное и логическое достаточно сложно. Но создание базы при решении задач на движение необходимо как для логики, так и для интуиции.

Г.И. Саранцев полагает, что логические и специфические (эвристические) приемы, входящие в работу по решению задач, формируются у учащихся при реализации технологических процессов, таких как усвоение правил, определений, оценки [19]. Чаще всего это происходит в процессе специальной работы над задачей. Сначала должна быть совместная деятельность учителя и школьника, а затем уже самостоятельное решение. В учебниках к каждому пункту, параграфу прилагается большой список задач. Возникает вопрос − как правильно выбрать задачу, чтобы она на достаточном уровне обеспечивала достижение целей обучения и развития школьников, в частности обучению решению сюжетных задач?

Выше названный автор относит к базовым компонентам умения решать задачи методы и приемы решения задач, поиска решения задач, и, конечно, действия, входящие в состав данных методов. Основные из них мной уже были перечислены выше.

Обучение решению задач, по мнению Г.И. Саранцева [19], состоит в формировании у школьников умения выполнять действия, входящие в аналитико-синтетическую деятельность по решению задач, составлять цепочки действий, которые могут привести к решению, а также в выделении, накоплении и систематизации эвристического, в приобщении школьников к решению и составлению задач.

Многие логические и специфические умения (эвристические приемы), входящие в деятельность по решению задач, формируются у учащихся при реализации технологических процессов, таких как, усвоение правил, определений и т.п. Но чаще это происходит в процессе специальной работы над задачей, изначально в совместной деятельности учителя и школьника, а потом уже в самостоятельном решении, в составлении задач учащимися. В учебниках к каждому пункту, параграфу очень большой список задач. Как выбрать задачу, чтобы она на достаточном уровне обеспечивала достижение целей обучения и развития учащихся, в частности и цели обучения решению задачи?

С этой целью надо выбрать небольшое число задач, которые могут раскрыть все факты и идеи наиболее ярко и наглядно. Такие задачи называют ключевыми или опорными. Усвоение решений таких опорных задач, вместе с содержащимся в учебнике теоретическим материалом, создает учащимся хорошие условия для решения любых задач по данной тематике или даже по нескольким темам сразу. Опорные задачи рекомендуют использовать также для обучения решения задач логическими методами [27].

Т.А. Иванова выделила особенности методики обучения школьников решению задач [3]:

1) Выделить ключевые задачи по определенной теме. В учебниках математики 5 − 6 классов обычно такие задачи уже выделены, на них показываются нужные правила и алгоритмы. В учебниках алгебры, алгебры и начало анализа образцы решения задач расположены в текстах соответствующих параграфов, а вот являются ли они ключевыми − необходимо определить учителю.

2) Разработать и реализовать технологию работы с ключевыми задачами на уроке. Ключевая задача − это, единица усвоения. Технология работы с ключевыми задачами подобна технологии организации усвоения дидактических единиц. Но предметом усвоения является не сама задача, а её результат, способ решения, отдельный приём, использованный в решении, или прием составления, основанный на этой задаче, и т.д. Вообще. предметом усвоения являются умения, познавательные средства, связанные с составлением и решением задач. Содержательная часть, состоящая из поиска решения и рефлексивно-оценочная часть, состоящая из анализа результата или решения, должны быть такими, чтобы школьники с большей долей самостоятельности могли выделить элементы, в связи с которыми данные задачи выбраны в качестве ключевой. Поиск решения показывает

сам учитель, или он производится таким образом «учитель-ученик», или при проведении фронтальной работы под руководством учителя, или в работе индивидуально, в парах, в группах. В окончании этапа решения, в рефлексивно-оценочной части, в порядке осознания ценностей полученных результатов по задаче делаются выводы.

Следовательно, уровень развития школьников проявляется в том, какие задачи и как они самостоятельно решают. Количество решенных задач переходит в качество, то есть это умение решать задачи бывает лишь у части обучающихся. У большинства школьников для формирования умений решать задачи необходима целенаправленная работа учителя. Значительную роль в решении задач играют ключевые задачи, их отбор и специальная работа над ними.

Рассмотрев главные положения методики работы над составными задачами в школе, приходим к следующим выводам.

При ознакомлении с задачами школьники должны знать основное отличие составной задачи от простой. Представлять, что такую задачу нельзя решить сразу, т. е. одним действием, что для ее решения необходимо выделить простые задачи, восстановив целую систему связей между данными и исходными. Также при работе с составными задачами [20] такого вида необходимо использовать схемы, чертежи, занимательные задачи и задачи развивающего характера, которые повышают интерес у детей, способствуют осознанному освоению знаний, умений и навыков, помогают развивать мышление, память, речь и т.п. [21].

Текстовые задачи являются одним из важных средств обучения математике. С их помощью школьники получают опыт работы с величинами, познают взаимосвязи между ними, набирают опыт применения математики к решению практических задач. Использование алгебраических, геометрических, арифметических, логических способов решения задач развивает логику, сообразительность, умение ставить вопросы, отвечать на них, то есть развивает естественный язык, подготавливает учащихся к дальнейшему обучению. Использование исторических задач и разнообразных способов их решения не только обогащает опыт мыслительной деятельности школьников, но и позволяет им, в полной мере, осваивать важный культурно- исторический пласт истории человечества, связанный с нахождением решения задач [18].

Методика обучения решению задач будет эффективна тогда, когда в результате ее применения происходит повышение уровня умения учащимися решать задачи; выработке способности решать составные задачи помогают упражнения творческого характера. К ним относятся решение задач повышенной трудности, решение задач, имеющих несколько решений, решение задач несколькими способами, решение задач с недостающими и лишними данными, а также упражнения в составлении и преобразовании задач [13].

## 1.3 Типизация сюжетных задач

### Задачи на движение

К задачам «на движение» относятся задачи, которые содержат параметры: $S$ (расстояние, путь), $t$ (время прохождения расстояния), и $v$ (скорость − расстояние, пройденное движущимися объектами за единицу времени), а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении такого вида задач необходимо знать формулу зависимости пути от времени и скорости ($S= v{\cdot}t$) и уметь выражать из нее время ($t = \frac{S}{v}$) и скорость ( $v = \frac{s}{t}$).

Введем некоторые положения:

а) Пусть движутся два объекта со скоростями $v_1$ и $v_2$ навстречу друг другу, тогда расстояние $S$, которое они пройдут до момента встречи за время t, можно найти с помощью уравнения: $S= (v_1+v_2)\ t$, где $(v_1+v_2)$ – скорость сближения.

б) Пусть движутся два объекта в одном направлении. Тогда, если один объект, скорость которого $v_1$, догоняет другой со скоростью $v_2$, выходя из того же пункта спустя время t, то расстояние S, на котором произойдет встреча, можно найти из уравнения: $\frac{s}{v_1} - \frac{s}{v_2} = t;$

Следовательно, $S$=$\frac{t \cdot v_1 v_2}{v_1 - v_2}$,

где $(v_1 - \ v_2)$:

1) скорость сближения, если объект с большей скоростью догоняет объект с меньшей скоростью;

2) скорость удаления, если объект с меньшей скоростью следует за объектом с большей скоростью.

в) Пусть движутся объект со скоростью $v$. Тогда, если на перегоне $S$ произошла задержка на время $t$, то скорость $y$, с которой объект должен продолжать движение, чтобы прибыть в пункт назначения вовремя, находится из уравнения: $\frac{S}{v} - \frac{S}{y} = t.$

г) В задачах на движение по воде имеется своя специфика, которую необходимо учитывать. В задачах такого типа рассматриваются две основные скорости:

1) Собственная скорость движущегося объекта (катера, лодки и др.), то есть скорость в стоячей воде;

2) Скорость течения реки.

Если собственная скорость и скорость течения не даны в задаче, то именно их обозначают переменными. Другие скорости (скорость по течению и скорость против течения реки) можно выразить через основные скорости. Скорость по течению реки равна сумме собственной скорости движущегося объекта и скорости течения реки. Скорость против течения реки равна разности собственной скорости и скорости течения реки.

д) К задачам «на движение по окружности» относят задачи, которые содержат параметры: S – длина окружности, R – радиус окружности, t – время между встречами, $\boldsymbol{g_1}$ и $\boldsymbol{g_2}$ – скорости движущихся объектов.

В задачах такого вида движение объекта происходит по замкнутой траектории (по окружности). Поэтому при решении необходимо знать формулу зависимости длины окружности от радиуса окружности (S=2$\pi$R) и уметь выражать из нее радиус (R=$\frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{2\pi}}$).

Задачи "на движение" классифицируются по виду движения:

– Движение навстречу друг другу;

– Движение в одном направлении;

– Движение с изменениями в режиме движения;

– Движения по воде;

– Движения по окружности.

Рассмотри подробный пример решения задачи «на движение»:

Два велосипедиста одновременно отправляются в 60 километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

Из условия задачи известно: два велосипедиста начали движение одновременно; расстояние равно 60км; скорость первого велосипедиста больше скорости другого на 10 км/ч и он был в пути на 3 часа меньше. В задаче требуется найти скорость второго велосипедиста.

Краткая запись задачи:

*S*=60км.

1 велосипедист – на 10 км/ч > на 3 часа < был в пути

2 велосипедист – ? км/ч

*2. Составление плана решения задачи.*

Введем переменную $x$ км/ч – скорость велосипедиста, тогда ($x$+10) км/ч– скорость первого велосипедиста. Используя формулу $t=\frac{S}{v}$, найдем:

$\frac{60}{x+10}$ –время, затраченное на весь путь первым велосипедистом,

$\frac{60}{x}$ – время, затраченное на весь путь вторым велосипедистом.

Получаем таблицу:

| № мотоциклиста | Скорость, км/ч | Время, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| первый | $x$+10 | $\frac{60}{x+10}$ | 60 |
| второй | $x$ | $\frac{60}{x}$ | 60 |

По условию задачи первый мотоциклист был в пути на 3 часа меньше, поэтому получаем уравнение:

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3;$

$\frac{60x+600-60x}{x^2+10x} = 3;$

$3x^2 + 30x = 600;$

$x^2+10x-200 = 0;$

$D$=100+800=900 (>0);

$x=\frac{-10\pm30}{2};$

$x_1$=10 (км/ч) – скорость второго велосипедиста;

$x_2$=–20 ( не удовлетворяет условию задачи);

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

$\frac{60}{10} - \frac{60}{10+10} = 3 \longrightarrow 3=3.$

Итак, ответ 10 (км/ч) – скорость второго велосипедиста.

**Задачи на работу**

Рассмотрим задачи, в которых речь идёт о выполнении некоторой работы, объем которой может быть известным − раздельная работа, неизвестным − совместная работа или задачи связанный с изменение режима работы. Работу могут выполнять несколько человек или механизмов, при этом всё равно, какую работу выполняют и чем эту работу измеряют – числом деталей, количеством вспаханных гектаров и т. п.

Данные задачи содержат параметр $A$ (объем работы, если он неизвестен, то принимается за 1), $t$ (время выполнения работы) и $p$ (производительность труда, то есть объем работы, выполняемый за единицу времени). При решении такого вида задач необходимо знать формулу зависимости объем работы от времени выполнения работы и производительности труда ($A = p \cdot t$) и уметь выражать из нее время выполнения работы ($t = \frac{A}{P}$) и производительность труда ($p = \frac{A}{t}$)

При решении задачи краткую запись удобно оформить в виде таблицы, где для производительности, времени и объема работы полезно выделить величины, которые обычно принимают за переменную.

Если в задаче объем работы неизвестен или не является искомым, то его принимают за единицу. При решении задач на совместную работу при неизвестном объеме работы удобно сначала рассматривать работу в отдельности, а потом совместную работу. Используя зависимость между объемом работы, производительностью труда и временем работы, составляют уравнение.

При решении задач на совместную работу, вводят два неизвестных:

$x$ − время выполнения всей работы первым рабочим (механизмом)

$y$ − время выполнения всей работы вторым рабочим (механизмом).

(в некоторых задачах "выгоднее" принять за неизвестные производительность)

Тогда

$\frac{1}{x}$ – производительность первого рабочего (механизма)

$\frac{1}{y}$ – производительность вторым рабочим (механизмом).

И в этом месте появляется параметр – совместная производительность, которая равна $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

Задачи с известным объемом работы и задачи, связанные с изменением режима работы решаются с помощью дробно-рационального уравнения.

Классификация типов задач «на работу»:

– Задачи на совместную работу при неизвестном объеме работы;

– Задачи и известным объемом работы;

– Задачи, связанные с изменением режима работы.

Рассмотри подробный пример решения задачи «на работу»:

Две трубы наполняют бассейн за 8 часов 45 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 21 час. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о работе. Из условия задачи, известно, что, с помощью двух труб за 8 ч 45 мин наполняется бассейн. Первая труба наполняет его за 21 час. В задаче требуется найти время, за которое вторая труба наполнит бассейн.

Краткую запись задачи удобно оформить в виде таблицы с отдельными столбцами для производительности труда, времени работы и объема работы и с отдельными строками для работы в отдельности и совместной работы.

| Работа в отдельности | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $\frac{1}{21}$ | 21 | 1 |
| Вторая труба | $\frac{1}{?}$ | ? | 1 |
| Совместная работа | $\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{?}\right)$ | $8\frac{9}{12}$ | $\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{?}\right)\cdot 8\frac{9}{12}$ |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того, чтобы решить задачу, нужно составить уравнение, поэтому введем переменную. В задаче требуется найти время, за которое вторая труба наполнит бассейн. Обозначим за *x* (ч)– время, за которое вторая труба наполнит бассейн. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| Работа в отдельности | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $\frac{1}{21}$ | 21 | 1 |
| Вторая труба | $\frac{1}{x}$ | $x$ | 1 |
| Совместная работа | $\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{\text{x}}\right)$ | $8\frac{9}{12}$ | $\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{\text{x}}\right)\cdot 8\frac{9}{12}$ |

По формуле $A=p\cdot t$ получим уравнение:

$\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{x}\right)\cdot 8\frac{9}{12}=1.$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение и решим его.

$\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{x}\right)\cdot 8\frac{9}{12}=1;$

$\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{x}\right)=\frac{12}{105};$

$105\cdot(x+21) = 12\cdot21x$;

$105x+2205 = 252x$;

$147x=2205$;

$x= 15$.

Итак, вторая труба наполнит бассейн за 15 (ч).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти время, за которое вторая труба наполнит бассейн. Получили за 15 часов. При подстановке 15 в исходное уравнение, получим верное равенство:

$\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{15}\right)\cdot 8\frac{9}{12}=1$; => 1=1.

По условию, две трубы вместе, выполнят работу за 8 ч 45 мин. :

$1:(\frac{1}{21}+\frac{1}{15})=1:\frac{12}{105}=\frac{105}{12}=$ 8ч 45мин.

Итак, ответ: а вторая труба наполнит бассейн за 15 часов.

**Задачи на проценты**

Во многих источниках, разные авторы представляют свою классификацию задач на проценты. Рассмотрим основную, классическую, классификацию задач на проценты:

− Нахождение процента от числа;

− Нахождение числа по проценту;

− Увеличение числа на процент;

− Уменьшение числа на процент;

− Нахождение процентного отношения двух чисел;

− Задачи на простые проценты;

− Задачи на сложные проценты.

Рассмотри некоторую величину $A$ и некоторый процент $p\%$.

1 тип: Находим процент от числа (число, составляющие $p\%$ от $A$):

$$\frac{p}{100}=A$$

2 тип: Находим число по его проценту (число, p% от которого есть

А): $\frac{100}{p} = A$

3 тип: Увеличиваем число на процент (число, превосходящие А на р%): $\left(1 + \frac{p}{100}\right)A$

4 тип: Уменьшаем число на процент (число, меньшее чем А, на р%): $\left(1 - \frac{p}{100}\right)A$

5 тип: Находим процентное отношение двух чисел (сколько процентов составляет А от В): $\frac{A}{B} \cdot 100\%$

6 тип: Задачи на простые проценты.

Простые проценты начисляются многократно, но всякий раз к исходной сумме. Если обозначить исходную сумму за $a$, сумму, которая наращивается – $S$, процентную ставку – $x\%$ и количество периодов начисления процента – $y$, то получим следующую формулу: $S = a \cdot \left(1 + y + \frac{x}{100}\right)$

7 тип: Задачи на сложные проценты.

Сложные проценты начисляются не к исходной сумме, а к сумме с уже начисленными раньше процентами. Пусть $S$ – наращиваемая сумма, $a$ – исходная, $x\%$ - процентная ставка, $y$ – количество периодов начисления процента. Получим следующую формулу: $S = a \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)y$

Также при решении задач на проценты нужно знать:

Один процент – это, по определению, одна сотая часть: $1\% = \frac{1}{100}$. Соответственно, $p\% = \frac{p}{100}$

Один процент от числа $A$ – это одна сотая часть числа А: 1% от $A$ равен $\frac{1}{100} \cdot A$. Соответственно, $p\%$ от $A$ равен $\frac{p}{100} \cdot A$, где $p$– безразмерное число.

Чтобы найти на сколько процентов $A$ больше, чем $B$, нужно воспользоваться формулой: $\frac{A-B}{B} \cdot 100\%$.

Чтобы найти на сколько процентов А меньше, чем В, нужно воспользоваться формулой: $\frac{B-A}{B} \cdot 100\%$.

Рассмотри подробный пример решения задачи «на проценты»:

Для офиса решили купить 4 телефона и 3 факса на сумму 1470 долларов. Удалось снизить цену на телефон на 20%, и в результате за ту же покупку уплатили 1326 долларов. Найдите цену факса.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче идет речь о процентах. Из условия задачи известно, что 4 телефона и 3 факса стоят 1470 долларов, а после снижения цены телефона на 20% стоимость сократилась лор 1326 долларов. В задаче требуется найти цену факса. Оформим краткую запись в виде таблицы:

| Наименование товара | Ед. товара | цена | Цена всего |
|---|---|---|---|
| Факс | 3 | ? | 1470 |
| Телефон | 4 | ? | |

| Наименование товара | Ед. товара | цена | Цена всего |
|---|---|---|---|
| Факс | 3 | ? | 1326 |
| Телефон | 4 | ? | |

*2. Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти цену факса. Поэтому обозначим за $x$– стоимость факса и за $y$– стоимость телефона. Тогда цена за 3 факса=$3x$, цена за 4 телефона= $4y$. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$ и $y$ соответственно.

| Наименование товара | Ед. товара | цена | Цена всего |
|---|---|---|---|
| Факс | 3 | $x$ | 1470 |
| Телефон | 4 | $y$ | |

По условию, получим уравнение: $3x+4y=1470$.

Так как цену на телефон снизили на 20%, то телефон стал стоить 80% от первоначальной цены, то есть 0,8у – стоимость телефона после снижения.

| Наименование товара | Ед. товара | цена | Цена всего |
|---|---|---|---|
| Факс | 3 | $3x$ | 1326 |
| Телефон | 4 | $4\cdot0{,}8y$ | |

По условию, получим уравнение: $3x+4\cdot0{,}8y=1326$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+4y=1470 \\ 3x+4\cdot0{,}8y=1326 \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решаем систему уравнений. Второе уравнение умножим на 5, выразим из первого уравнения 4у и подставим его значение во второе уравнение.

$15x+4(1470-3x)=6630$;

$x=250$–цена факса.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти цену факса. Получили 250 долларов, подставим и в первое и второе уравнение системы:

$3\cdot250+4y=1470 \quad => y=180$

$3\cdot250+4\cdot0{,}8y=1326 \quad => y=180$

Значит, задача решена верно.

Итак, ответ: факс стоит 250 долларов.

## Задачи на смеси, сплавы и растворы

В первую очередь введем основные понятия. Говоря о смесях, растворах и сплавах, будем употреблять термин «смесь» независимо от ее вида (твердая, жидкая, газообразная, сыпучая и т. д.). Смесь (раствор, сплав) состоит из «основного вещества» («чистого вещества») и «примеси». Что есть «чистое вещество», определяется в каждой задаче отдельно, однако при этом все остальные вещества, составляющие смесь, относят к примеси.

Решение задач на смеси, сплавы и растворы связано с использованием таких понятий как «концентрация» и «процентное содержание».

Долей (концентрацией, процентным содержанием) $\alpha$ основного вещества в смеси будем называть величину $\alpha = \frac{m}{M}$, где $m -$ масса основного вещества, $M -$ масса смеси. Тогда процентным содержанием назовем величину $\alpha = \frac{m}{M} \cdot 100\%$.

Бывает, что в задачах на смеси указаны не массы входящих в них веществ, а их объёмы. В этом случае используется формула: $\alpha = \frac{V_1}{V} \cdot 100\%$, где $V_1$ −обьем основного вещества, $V$ −объем всей смеси.

При решении данных задач используются некоторые допущения:

а) все получающиеся смеси и сплавы однородны;

б) при слиянии двух растворов, имеющих объемы $v_1$ и $v_2$, получается смесь, объем которой равен $v_1 + v_2$, т.е. $v_0 = v_1 + v_2$.

в) объемы растворов и массы сплавов не могут быть отрицательными.

г) Если $\alpha$ - доля чистого вещества, то *(1−α)*− доля примеси.

Классификация типов задач " на смеси, сплавы и растворы ":

− Задачи на повышение и понижение концентрации;
− Задачи на «высушивание»;
− Задачи на смешивание растворов разных концентраций;
− Задачи на переливание.

Рассмотри подробный пример решения задачи «на смеси, сплавы и растворы»:

Первый сплав содержит 5% меди, второй − 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о сплавах. Из условия задачи, известно, процентное содержание меди в двух сплавах и что масса второго сплава больше первого на 4кг. В задаче требуется найти массу третьего сплава, содержащего 30% меди.

Краткую запись задачи удобно оформить в виде таблицы с отдельными столбцами для процентного содержания вещества, общей массе сплава, массе вещества и с отдельными строками для первого, второго и третьего получившегося сплавов.

| Наименование сплава | % содержание меди | Общая масса сплава, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Первый сплав | 5%=0,05 | ? | 0,15·? |
| Второй сплав | 13%=0,13 | ?+4 | (?+4)·0,13 |
| Третий сплав | 10%=0,1 | ?+(?+4) | (?+(?+4))·0,1 |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того, чтобы решить задачу, нужно составить уравнение, поэтому введем переменную. В задаче требуется найти массу получившегося сплава. Обозначим за $x$ (кг)– масса первого сплава, отсюда ($x$+4) кг – масса второго сплава, тогда (2$x$+4) кг – масса третьего сплава. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| | % содержание меди | Общая масса сплава, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Первый сплав | 0,05 | $x$ | $0{,}15\cdot x$ |
| Второй сплав | 0,13 | $x+4$ | $(x+4)\cdot 0{,}13$ |
| Третий сплав | 0,1 | $x+(?+4)$ | $(2x+4)\cdot 0{,}1$ |

Получим уравнение: $0{,}15\cdot x + (x+4)\cdot 0{,}13 = (2x+4)\cdot 0{,}1$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение и решим его.

$0{,}15\cdot x + (x+4)\cdot 0{,}13 = (2x+4)\cdot 0{,}1$;

$0{,}02x = 0{,}12$;

$x = 6$.

Итак, масса третьего сплава 6(кг).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти массу третьего сплава. Получили 6 (кг). При подстановке 6 в исходное уравнение, получим верное равенство:

Итак, ответ: 6(кг) – масса третьего сплава.

## ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Решение сюжетных задач занимает огромное место в обучении школьников математике, является необходимым условием повышения качества обучения обучающихся в целом.

В первой главе работы рассмотрены:

1) Понятие «сюжетной задачи», ее значение в обучении математике;

2) Основные способы и этапы решения задач;

3) Методические особенности обучения школьников решению основных видов сюжетных задач в курсе алгебры основной школы;

4) Типизация сюжетных задач и основные методы их решения.

# ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА РАБОТУ И ДВИЖЕНИЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

## 2.1 Анализ учебников и задач ОГЭ по теме исследования

### **Анализ учебников**

Рассмотрим, какое место занимают текстовые задачи в учебниках Г.В Дорофеева [5], Ш.А. Алимова [1], Ю.Н. Макарычева [10], А.Г. Мордковича [15] для 9 классов.

Данные учебники входят в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях [14].

1) Алгебра 9 Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова [5].

В теме «Дробные уравнения» 28 текстовых задач: 20 задач на движение, 7 задач на работу и 1 задача на проценты. Разобран один пример на движение по воде. В теме «Системы уравнений с двумя переменными» 8 задач: 4 задачи на движение, 2 задачи на работу, 2 на славы, смеси. Имеются 12 текстовых задач в дополнение к главе: 10 задач на движение и 2 задачи на проценты.

2) Алгебра 9 класс Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева [1].

В теме «Решение задач с помощью систем уравнений» 3 задачи на работу, одна из которых разобрана в примере. Есть еще 3 задачи в дополнение к главе: на работу, на проценты и на смеси и сплавы. В упражнениях на повторение 18 задач: 13 задач на движение, 2 задачи на работу, 2 задачи на проценты, и 1 задача на смеси и сплавы. В задачах для внеклассной работы представлены 20 задач: 17 задач на движение, 1 задача на работу и 2 задачи на смеси и сплавы.

3) Алгебра 9 класс Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [10].

В теме «Решение задач с помощью систем уравнений второй степени» 12 текстовых задач: 5 задач на движение, 3 задачи на работу, 1 задача на проценты, и 3 задачи на смеси и сплавы. В задачах на дополнение к главе 5 задач: 2 задачи на работу и 3 задачи на движение. В упражнениях на повторение представлены 29 задач: 13 задач на движение, 7 задачи на работу, 2 задачи на проценты, и 7 задач на смеси и сплавы.

4) Алгебра 9 класс А.Г. Мордкович, П.В. Семенов [15].

В теме «Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций» 34 текстовых задачи: 15 задач на движение, 13 задачи на работу, 3 задачи на проценты, и 3 задачи на смеси и сплавы. Разобраны 1 задача на движение и 1 задача на работу по трем этапам. В упражнениях на повторение также представлены 34 задачи: 7 задач на движение, 6 задач на работу, 16 задач на проценты, и 5 задач на смеси и сплавы.

Таким образом, проанализировав учебники, мы можем сказать, что у всех авторов, перечисленных учебников, встречаются подобные задачи из ОГЭ, но их крайне мало. Чаще всего встречаются сюжетные задачи на движение, что недостаточно и это может сказаться при сдаче учащимися ОГЭ.

**Анализ сюжетных задач ОГЭ**

В сборнике аналитических материалов по Челябинской области за 2014 год [11] представлена таблица распределение баллов за выполнение заданий части 2 экзаменационной работы за 2014 учебный год. За 2015 и 2016 учебные года данные взяты из сборников [7], [8] с образовательного портала Челябинска «Комитет по делам образования города Челябинска».

Таблица №1

Процент выполнения сюжетной задачи в ОГЭ

| | **2014** | **2015** | **2016** |
|---|---|---|---|
| **0 б (не решена)** | 84,84% | 95,82% | 83,05% |
| **Решена полностью** | 13,3% | 3,91% | 15,42% |

Сюжетная задача расположена в части 2 модуля «Алгебра» под номером 22. В 2014 и 2015 годах максимальное количество баллов, которые можно получить полностью, решив задачу составляло 3 балла. В 2016 году система оценивания задания 22 скорректирована и максимальный балл, который можно получить составляет 2 балла.

Анализ показывает, что у выпускников фактический результат выполнения задания 22 по модулю «Алгебра» (4,44%) ниже планируемого разработчиками КИМов (15-30%). [8]

Таким образом, можно констатировать, что решаемость сюжетной задачи оказалась низкой. Это говорит о том, что сюжетные задачи с трудом поддаются решению у учеников 9 классов.

Также были проанализированы демонстрационные варианты ОГЭ и пробники за 2010– 2018 года, которые находятся в общем доступе в сети Интернет [29] и в банке заданий ФИПИ [17].

Задачи на движение встречаются примерно в 55% вариантов ОГЭ и среди них чаще всего это задачи в одном направлении и навстречу друг другу. Задачи на работу встречаются в 25% вариантах. Классификация задач на проценты включает задачи на процентное содержание, концентрацию и процентный раствор– данные задачи встречаются в 15% вариантах. Другие задачи составляют 5%.

Рассмотрим 2 задачи на движение за 2014 и 2017 год и сравним их.

| 2014 | 2017 |
| --- | --- |
| Два автомобиля одновременно отправляются в 810-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 36 км/ч больше, чем второй, и прибывает к финишу на 6 часов раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля. | Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. |

Мы видим, что и в одной и другой задаче у нас объекты отправляются одновременно, движение в одном направлении и нужно найти скорость первого автомобиля в первой задаче, и велосипедиста во второй.

Решим данные задачи:

| 2014 | 2017 |
| --- | --- |
| Введем переменную x км/ч – скорость второго автомобиля, тогда ($x$+36) км/ч– скорость первого автомобиля. Используя формулу $t=\frac{S}{v}$, найдем: $\frac{810}{x+36}$–время, затраченное на весь путь первым автомобилем, $\frac{810}{x}$ – время, | Введем переменную x км/ч – скорость второго велосипедиста, тогда ($x$+10) км/ч– скорость первого велосипедиста. Используя формулу $t=\frac{S}{v}$, найдем: $\frac{60}{x+10}$–время, затраченное на весь путь первым велосипедистом, $\frac{60}{x}$ – время, |

затраченное на весь путь вторым автомобилем.

| № авто | $v$, км/ч | $t$, ч | $s$,км |
|---|---|---|---|
| 1 авто | $x+36$ | $\frac{810}{x+36}$ | 810 |
| 2 авто | $x$ | $\frac{810}{x}$ | 810 |

По условию задачи первый автомобилист прибывает к финишу на 6 часов раньше второго, поэтому получаем уравнение:

$\frac{810}{x} - \frac{810}{x+36}=6$

$x_1$ =54(км/ч) −скорость 2ого автомобиля

$x_2$ =−90 (не уд. усл. Зад.)

2) 54+36=90(км/ч) скорость первого автомобиля.

Ответ: 90(км/ч)

затраченное на весь путь вторым велосипедистом.

| № вел. | $v$, км/ч | $t$, ч | $s$,км |
|---|---|---|---|
| 1 вел. | $x+10$ | $\frac{60}{(x+10)}$ | 60 |
| 2 вел. | $x$ | $\frac{60}{x}$ | 60 |

По условию задачи нужно найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым и т.к первый прибывает к финишу на 3 часа раньше второго, поэтому получаем уравнение:

$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10}=3$

$x_1$ =10 (км/ч) −скорость 2ого велосипедиста.

$x_2$ =−20 (не уд. усл. Зад.)

Ответ: 10(км/ч)

Рассмотрим 2 задачи на работу за 2014 и 2017 год и сравним их.

| 2014 | 2017 |
|---|---|
| Первая труба пропускает на 10 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 60 литров она заполняет на 3 минуты дольше, чем вторая труба? | Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 112 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий? |

Обе задачи с известным объёмом работы. За переменную берется производительность и используя формулу $t=\frac{A}{P}$, находится время. По условиям задачи составляется уравнение и решается.

<table>
<tr><th>2014</th><th>2017</th></tr>
<tr>
<td>
Введем переменную $x$ – пропускная способность первой трубы в минуту, тогда ($x$+10)– пропускная способность второй трубы. Используя формулу $t=\frac{A}{P}$, найдем: $\frac{60}{x}$ – время, заполнения объема в 60 литров первой трубой, $\frac{60}{x+10}$ – время, заполнения того же объема второй трубой.
<table>
<tr><th></th><th>$p$</th><th>$t$, ч</th><th>$A$</th></tr>
<tr><td>1 труба</td><td>$x$</td><td>$\frac{60}{x}$</td><td>60</td></tr>
<tr><td>2 труба</td><td>$x$+10</td><td>$\frac{60}{x+10}$</td><td>60</td></tr>
</table>
По условию задачи первая труба заполняет резервуар на 3 минуты дольше, поэтому получаем уравнение:<br>
$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}$=3;<br>
$x_1$ =10 (л) – пропускная способность первой трубы<br>
$x_2$ = –20 (не уд. усл. зад.)<br>
Ответ: 10 литров.
</td>
<td>
Введем переменную $x$– число деталей, изготовляемых первым рабочим за час, тогда ($x$–9)– число деталей, изготовляемое вторым рабочим за час.<br>
Используя формулу $t=\frac{A}{P}$, найдем: $\frac{112}{x}$ –время, затраченное на изготовление 112 деталей первым рабочим, $\frac{112}{x-9}$ – время, затраченное на изготовление 112 деталей вторым рабочим.
<table>
<tr><th></th><th>$p$</th><th>$t$, ч</th><th>$A$</th></tr>
<tr><td>1 рабочий</td><td>$x$</td><td>$\frac{112}{x}$</td><td>112</td></tr>
<tr><td>2 рабочий</td><td>$x$–9</td><td>$\frac{112}{x-9}$</td><td>112</td></tr>
</table>
По условию задачи первый рабочий выполняет заказ на 4 часа быстрее, поэтому получаем уравнение:<br>
$\frac{112}{x-9}+\frac{112}{x}=4$;<br>
$x_1$=–12 (не уд. усл. зад.)<br>
$x_2$=21– число деталей, изготовляемых первым рабочим.<br>
Тогда (21–9) =12– число деталей, изготовляемых вторым рабочим.<br>
Ответ: 12 деталей.
</td>
</tr>
</table>

Рассмотрим 2 задачи на сплавы за 2011 и 2017 год и сравним их.

| 2011 | 2017 |
|---|---|
| Имеется два сплава с разным содержанием золота. В первом сплаве содержится 35% золота, а во втором – 60%. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 40% золота? | Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго |

Обе задачи на нахождение третьего сплава, полученного из двух других сплавов с разным процентным содержание основного вещества. За переменную берется масса основного вещества и используя формулу $\alpha = \frac{m}{M}$ находится общая масса. По условиям задачи составляется уравнение и решается.

<table>
<tr><th>2011</th><th>2017</th></tr>
<tr>
<td>
Введем переменную $x$ кг– масса первого сплава, в котором 35% золота, т.е. 0,35$x$ кг. Массу второго сплава обозначим за $y$ кг, в нем 60% золота, т.е. 0,6$y$ кг. Масса этих двух сплавов ($x$ +$y$)кг.
<table>
<tr><td>сплав</td><td>$\alpha$</td><td>$M$,кг</td><td>$m$,кг</td></tr>
<tr><td>1-ый сплав</td><td>35%=0,35</td><td>0,35$x$</td><td>$x$</td></tr>
<tr><td>2-ой сплав</td><td>60%=0,6</td><td>0,6 $y$</td><td>$y$</td></tr>
<tr><td>3-й спла</td><td>40%=0,4</td><td>($x$+$y$)·0,</td><td>$x$+$y$</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Введем переменную $x$ кг – масса первого сплава, в котором 10% никеля, т.е. масса никеля в этом сплаве 0,1$x$ кг. Масса второго сплава (200–$x$) кг, в котором 30% никеля, т.е. 0,3$x$ кг.
<table>
<tr><td>сплав</td><td>$\alpha$</td><td>$M$,кг</td><td>$m$,кг</td></tr>
<tr><td>1-ый сплав</td><td>10%=0,1</td><td>0,1$x$</td><td>$x$</td></tr>
<tr><td>2-ой сплав</td><td>30%=0,3</td><td>0,3(200–$x$)</td><td>200–$x$</td></tr>
<tr><td>3-й</td><td>25%=0,2</td><td>50</td><td>200</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table><tr><td>в</td><td></td><td>4</td><td></td></tr></table>
По условию задачи новый сплав должен содержать 40% золота, т.е. 0,4($x+y$) золота. Следовательно, можно составить уравнение:
$0{,}35x + 0{,}6\,y = (x+y)\cdot 0{,}4$;
$x = 4\,y$;
Следовательно, отношение, в котором нужно взять сплавы:<br>$\frac{x}{y} = \frac{4}{1}$<br>Ответ: $\frac{4}{1}$
</td>
<td>
<table><tr><td>спла<br>в</td><td>5</td><td></td><td></td></tr></table>
Третий сплав, равный сумме двух первых сплавов, содержит 200 кг с содержанием никеля 25%,<br>т.е. 0,25·200=50. В результате получаем уравнение:
$0{,}1x + 0{,}3\cdot(200 - x) = 50$;
Масса первого сплава равна 50 кг. Масса второго сплава<br>равна 200−50=150 кг. Разница в весе между этими сплавами
150−50=100 кг.
Ответ: 100 кг
</td>
</tr>
</table>

Проанализировав задачи из ОГЭ за 2014 и 2017 год можно сказать, что задачи равнозначны. Но по результатам сдачи экзамена, можем заметить, что сюжетные задачи с трудом поддаются решению у учеников 9 классов. Таким образом, проанализировав учебники, мы можем сказать, что для успешной сдачи ОГЭ необходимо больше времени уделять для решения и разбора сюжетных задач. В связи с этим был разработан факультативный курс для учащихся 8-9 классов «Решение сюжетных задач при подготовке к ОГЭ».

## 2.2 Факультативный курс «Решение сюжетных задач при подготовке к ОГЭ»

**Пояснительная записка**

В течение обучения с 1 по 9 класс формируются знания, необходимые для решения всех типов сюжетных задач. Представленный факультатив «Решение сюжетных задач при подготовке к ОГЭ» рассчитан для учащихся

8-9 классов для углубленного изучения предмета и успешного прохождения ОГЭ. В факультативе представлена система упражнений для каждого вида задач– по принципу от простого к сложному. Данный курс рассчитан на 20 часов. Разработка курса содержит в себе тематическое планирование и подбор задач к каждому занятию, который будет способствовать достижению поставленных целей. Планируемые формы организации работы – лекции, практикумы по решению задач и коллективная работа учащихся.

**Цели факультативного курса:** систематизировать имеющиеся знания о типах и способах решения сюжетных задач и повысить уровень решения сюжетных задач.

**Задачи факультативного курса:**

1. Повысить интерес обучающихся к математике;
2. Расширить и углубить знания учащихся по теоретическим вопросам;
3. Формировать у обучающихся умения самостоятельно приобретать и применять знания;
4. Формировать математические знания, необходимые для применения в практической деятельности;
5. Подготовить учащихся к ОГЭ.

Таблица №2

**Учебно-тематическое планирование**

| п/п | Содержание учебного материала | Кол-во часов | Форма организ. занятий |
|---|---|---|---|
| 1 | Входная контрольная работа | 1 | Контрольная работа |
| 2 | Сюжетные задачи и техника их решения | 1 | Лекция |
| 3 | Задачи на движение | 3 | Практикум |
| 4 | Задачи на движение по воде | 3 | Практикум |
| 5 | Задачи на работу | 3 | Практикум |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | Задачи на смеси, сплавы, концентрацию | 3 | Практикум |
| 7 | Задачи на проценты | 3 | Практикум |
| 8 | Решение задач из ОГЭ | 2 | Практикум, коллективная работа |
| 9 | Итоговая контрольная работа | 1 | Контрольная работа |
| **Итого** | | **20** | |

**Методические рекомендации**

Представленный факультативный курс содержит 7 тем. На первом занятии следует провести входную контрольную работу, чтобы оценить, имеющиеся знания школьников по решению сюжетных задач. Первая тема вводная «Сюжетные задачи и техника их решения». При ее раскрытии акцентируется выделение основных этапов решения текстовых задач и их назначение. Следующие темы: «Задачи на движение», «Задачи на движение по воде», «Задачи на работу», «Задачи на смеси и сплавы», «Задачи на проценты», и так же «Задачи из ОГЭ» − закрепляют и дополняют знания учащихся, полученные на уроках. На уроках необходимо предоставить ученикам систематизированную теоретическую часть, после чего приступать к решению задач. На последнем занятии провести итоговую контрольную работу и сравнить результаты с входной контрольной работой для оценки уровня знаний, обучающихся по пройденному материалу.

Ожидаемые результаты факультатива, т.е чему должны научиться обучающиеся:

1. уметь определять тип сюжетной задачи, знать особенности методики ее решения;

2. уметь применять полученные математические знания при решении задач;

3. использовать дополнительную математическую литературу с целью углубления материала основного курса.

**1)Задачи на движение**

Задача 1.

Скорый и пассажирский поезда идут навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 710 км. Скорый поезд вышел на час раньше пассажирского и идет со скоростью 110 км/ч. Через, сколько часов после своего отправления он встретиться с пассажирским поездом, если скорость пассажирского поезда равна 90 км/ч?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении, которое характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Движутся навстречу друг другу два поезда. Известны скорости поездов (скорого−110 км/ч, пассажирского−90 км/ч), расстояние между станциями (710 км). Также известно, что скорый поезд был в пути на час больше, чем пассажирский. В задаче требуется найти время, через которое поезда встретятся. Причем отсчет времени необходимо вести от начала движения скорого поезда.

Оформим краткую запись текста задачи в виде таблицы. Удобно в таблице выделить отдельные столбцы для скорости поездов, времени в пути до их встречи и расстояния, которое пройдут поезда до встречи. Так как в движении участвуют два поезда, то выделим также две строчки.

| Поезд | Скорость, км/ч | Время в пути до встречи, ч | Расстояние до встречи, км |
|---|---|---|---|
| Скорый | 110 | ? | ? |
| Пассажирский | 90 | ? | ? |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того чтобы решить задачу, нужно составить уравнение. Для этого необходимо ввести переменную. Часто за *х* принимают искомую величину.

Обозначим за $x$ (в часах) время после отправления скорого поезда до встречи с пассажирским. Из условия известно, что скорый был в пути на час больше. Тогда время от начала движения пассажирского поезда до встречи со скорым равно ($x$−1) ч. Выразим через переменную $x$ расстояние, которое пройдут два поезда до встречи. Для этого воспользуемся зависимостью между скоростью, временем и расстоянием: $S=v\cdot t$. Итак, расстояние, которое прошел скорый поезд до встречи, равно 110$x$ (км), а пассажирский прошел до встречи – $90\cdot(x-1)$ (км). Получим следующую таблицу:

| Поезд | Скорость, км/ч | Время в пути до встречи, ч | Расстояние до встречи, км |
|---|---|---|---|
| Скорый | 110 | $x$ | $110x$ |
| Пассажирский | 90 | $x-1$ | $90\cdot(x-1)$ |

Теперь с помощью имеющихся данных составим уравнение. Из условия известно, что расстояние между станциями составляет 710 км. Учтем еще один момент, который поможет нам составить уравнение: сумма расстояний, пройденных поездами до встречи, равно расстояние между станциями. Итак, получим искомое уравнение:

$$110x+90(x-1)=710.$$

*3. Реализация плана решения задачи.*

Решим уравнение.

Преобразуя это выражение, доведем его до привычного нам линейного уравнения.

$110x+90(x-1)=710$;  Раскроем скобки в левой части уравнения.

$110x+90x-90=710$;  Приводим подобные слагаемые.

$200x=800$;  Разделим обе части уравнения на 200.

$x=\frac{800}{200}$;

$x$=4 (ч).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти время движения скорого поезда до встречи с пассажирским поездом: t=4(ч)>0. При подстановке в исходные уравнения получим верное числовое равенство:

110·4+90(4–1)=710;

440+270=710;

710=710.

Итак, ответ: через 4 часа после начала движения скорый поезд встретится с пассажирским.

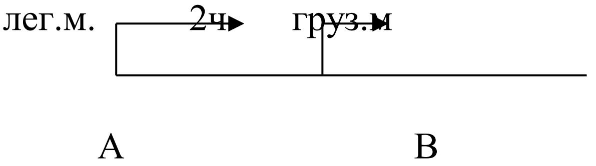
Задача 2.

Из пункта А вышла грузовая машина со скоростью 60 км/ч. Через 2ч вслед за ней из пункта А вышла легковая машина со скоростью 90км/ч. На каком расстоянии от пункта А легковая машина догонит грузовую?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении, которое характеризуется тремя величинами: скоростью машин, временем в пути и расстоянием до встречи. Движутся в одном направлении грузовая и легковая машина. Из условия задачи известно, что скорость грузовой машины 60 км/ч, скорость легковой машины 90 км/ч; грузовая в пути была на 2 часа больше, чем легковая. В задаче требуется найти на каком расстоянии от пункта А легковая машина догонит грузовую. С учетом данных получим чертеж:




На чертеже разная длина стрелок показывает, что скорости машин разные.

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того чтобы решить задачу, нужно составить уравнение, поэтому введем переменную. Удобно за $x$ (ч) принять– время, через которое легковая машина догонит грузовую. Тогда легковая пройдет до встречи $90x$ (км). Учитывая, что грузовая уже была в пути 2 часа, то она прошла 60·2=120 км от пункта А. Значит грузовая до встречи пройдет ($120+60x$) км. Получаем уравнение: $90x=(120+60x)$.

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим уравнение.

$90x=(120+60x)$;

$90x-120-60x=0$;

$30x=120$;

$x=4$ (ч) легковая машина догонит грузовую.

Скорость легковой машины 90 км/ч, расстояние, которое она пройдет за 4 часа: 90·4=360 (км).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти на каком расстоянии от пункта А легковая машина догонит грузовую: 360(км).

Для проверки решим задачу другим способом:

1)60·2=120(км) –расстояние между машинами на момент выезда легковой.

2)90−60=30 (км/ч) –скорость сближения.

3)120:30=4( ч ) –понадобится легковой, чтобы догнать грузовую.

4) 4·90=360 (км) – расстоянии от пункта А, на котором легковая машина догонит грузовую.

Итак, ответ: 360(км) – расстоянии от пункта А, на котором легковая машина догонит грузовую.

Задача 3.

Из пункта А в пункт Б вышел поезд. Первые 450км пути он шел медленнее, чем требовалось по расписанию, на 10км/ч. На оставшемся участке пути протяженностью 750км поезд шел быстрее на 8 км/ч, чем надо было по расписанию, и в результате в пункт Б прибыл вовремя. Какова скорость поезда по расписанию?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении поезда, который выехал из пункта А в пункт В. Из условия задачи известно, что первые 450 км/ч он шел со скоростью на 10 км/ч меньше запланированной, на пути в 750 км шел быстрее на 8 км/ч больше. (следовательно, весь путь поезда составляет 1200 км). Поезд прибыл в пункт В вовремя. В задаче требуется найти скорость поезда по расписанию.

В задачах «на движение с изменениями в режиме движения» краткую запись удобно оформлять в виде таблицы со столбцами, отведенными для скорости, времени и расстоянии, и со строчками для участков движения: по расписанию и участков движения, на которых режимы движения изменены.

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| По расписанию | ? | $\frac{1200}{?}$ | 1200 |
| Первые 450 км | (?–10) | $\frac{450}{?-10}$ | 450 |
| Последние 750 км | (?+8) | $\frac{750}{?+8}$ | 750 |

*2.Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти запланированную скорость. Поэтому именно ее мы и обозначим за $x$– скорость поезда по расписанию. Тогда скорость поезда в первые 450 км равна ($x$–10) км/ч, а на последнем участке 750 км– ($x$+8) км/ч. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| По расписанию | $x$ | $\frac{1200}{x}$ | 1200 |
| Первые 450 км | ($x$–10) | $\frac{450}{x-10}$ | 450 |
| Последние 750 км | ($x$+8) | $\frac{750}{x+8}$ | 750 |

Теперь, чтобы найти $x$, нужно составить уравнение. По условию, несмотря на изменения в режиме движения, поезд прибыл в пункт В вовремя. Следовательно, время, за которое поезд проехал первые 450 км и последние 750 км, равно времени, которое поезд должен затратить по расписанию. Составляем уравнение:

$$\frac{450}{x-10}+\frac{750}{x+8}=\frac{1200}{x}.$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение в линейное и решим его.

$$\frac{450}{x-10}+\frac{750}{x+8}=\frac{1200}{x};$$

$$\frac{450x+3600+750x-7500}{x^2-2x-80}=\frac{1200}{x};$$

$$\frac{1200x-3900}{x^2-2x-80}=\frac{1200}{x};$$

$1200x^2$–3900x = $1200x^2$–2400x–96000;

$1500x$=96000;

$x$=64 (км/ч) – запланированная скорость поезда.

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти запланированную скорость поезд. Получили 64 км/ч (>0). При подстановке в исходное уравнение, получим верное числовое равенство:

$$\frac{450}{64-10}+\frac{750}{64+8}=\frac{1200}{64} => \frac{75}{4}=\frac{75}{4}.$$

Итак, ответ: запланированная скорость поезда равна 64 км/ч.

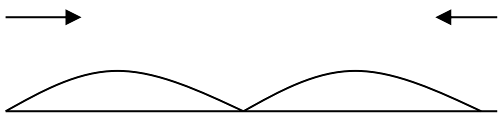
Задача 4.

Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 30 км, выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист выехал на 40 минут позже велосипедиста. Встретились они на середине пути. Скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении, которое характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Движутся навстречу друг велосипедист и мотоциклист. Из условия задачи известно: скорость мотоциклиста на 30 км/ч больше скорости велосипедиста; расстояние между пунктами равно 30 км; велосипедист был в пути на 40 мин дольше мотоциклиста; встретились велосипедист и мотоциклист на середине пути. В задаче требуется найти скорости велосипедиста и мотоциклиста. Для оформления краткой записи задачи достаточно выполнить чертеж.



А 15км 15км В

На чертеже видно, что и велосипедист, и мотоциклист до встречи прошли 15 км.

*2. Составление плана решения задачи.*

Обозначим за х км/ч скорость велосипедиста, тогда скорость мотоциклиста ($x$+30) км/ч. Пользуясь формулой $t=\frac{S}{v}$, найдем:

$\frac{15}{x+30}$ч– время в пути мотоциклиста, $\frac{15}{x}$ч– время в пути велосипедиста.

По условию задачи известно, что велосипедист находился в пути до встречи на 40 мин больше($\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$) чем мотоциклист. Составляем уравнение:

$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+30}=\frac{2}{3}$.

*3.Реализация плана решения задачи.*

Приведем полученное выражение к квадратному уравнению и решим его.

$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+30}=\frac{2}{3}$;

$\frac{15x+450-15x}{x^2+30x}=\frac{2}{3}$;

$2x^2$–60 $x$ =1350;

$x^2$+30$x$=675;

$x^2$+30$x$–675=0;

$D$=900+2700=3600(>0);

$x=\frac{-30\pm60}{2}$;

$x_1$=15; $x_2$= –45 (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому его рассматривать не будем).

Если скорость велосипедиста 15 км/ч, то скорость мотоциклиста 45км/ч.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти скорости велосипедиста и мотоциклиста. Получили 15 км/ч – скорость велосипедиста и 4км/ч – скорость мотоциклиста. Ответ удовлетворяют условию задачи.

Задача 5.

Два мотоциклиста выезжают одновременно в город из пункта, отстоящего от него на 160 км. Скорость первого мотоциклиста на 8 км/ч больше скорости второго, поэтому он приезжает к месту назначения на 40 мин раньше. Найдите скорость второго мотоциклиста.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

Из условия задачи известно: два мотоциклиста начали движение одновременно; расстояние между городами 160км; скорость первого мотоциклиста больше скорости другого на 8 км/ч и он был в пути на 40 мин меньше. В задаче требуется найти скорость второго мотоциклиста.

Краткая запись задачи:

S=160км.

1 мотоциклист – на 8 км/ч > на 40мин < был в пути

2 мотоциклист – ? км/ч

*2. Составление плана решения задачи.*

Введем переменную $x$ км/ч – скорость второго мотоциклиста, тогда ($x$+8) км/ч– скорость первого мотоциклста. Используя формулу $t=\frac{S}{v}$, найдем: $\frac{160}{x+8}$ – время, затраченное на весь путь первым мотоциклистом, $\frac{160}{x}$ – время, затраченное на весь путь вторым мотоциклистом.

Получаем таблицу:

| № мотоциклиста | Скорость, км/ч | Время, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| первый | $x$+8 | $\frac{160}{x+8}$ | 160 |
| второй | $x$ | $\frac{160}{x}$ | 160 |

По условию задачи первый мотоциклист был в пути на 40 мин ($\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$) меньше, поэтому получаем уравнение:

$\frac{160}{x}-\frac{160}{x+8}=\frac{2}{3}$;

$\frac{160x+1280-160x}{x^2+8x}=\frac{2}{3}$;

$2x^2+16x=3840;$

$x^2+8x-1920;$

D=64+7680=7744 (>0);

$x=\frac{-8\pm 88}{2};$

$x_1$=40 (км/ч) – скорость второго мотоциклиста;

$x_2$=–48 ( не удовлетворяет условию задачи);

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

$\frac{160}{40}-\frac{160}{40+8}=\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$

Итак, ответ 40 (км/ч) – скорость второго мотоциклиста.

Задача 6.

Электропоезд вышел со станции А по направлению к станции В. Пройдя 450 км, что составило 75% всего пути АВ, поезд остановился из-за заноса. Через 30 мин путь был расчищен, и машинист, увеличив скорость электропоезда на 15км/ч, привел его на станцию В без опоздания. Найти начальную скорость поезда.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении с задержкой в пути по технической неисправности. Из условия задачи известно, что поезд прошел 450 км–75% пути, а затем задержался на 30 мин, поэтому скорость была увеличена, а 15 км/ч, чтобы прибыть к пункту назначенному сроку. В задаче требуется найти начальную скорость поезда.

В задачах «на движение с задержкой в пути» краткую запись удобно оформлять в виде таблицы со столбцами, отведенными для скорости, времени и расстоянии, и со строчками для участков движения: до остановки и после остановки.

Так как, 450 км– 75%, то весь путь 600 км. Значит, после остановки поезду нужно пройти 150 км.

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| До остановки | ? | $\frac{450}{?}$ | 450 |
| После остановки | ?+15 | $\frac{150}{?+15}$ | 150 |

*2. Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти начальную скорость поезда. Несмотря, на задержку в пути поезд пришел вовремя. Если бы не задержка, то это расстояние поезд прошел бы за $\frac{150}{?}$(ч), а прошел за $\frac{150}{?+15}$(ч). Введем переменную $x$ км/ч– начальная скорость поезда. Тогда скорость поезда после остановки равна ($x$+15) км/ч. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| До остановки | $x$ | $\frac{450}{x}$ | 450 |
| После остановки | $x$+15 | $\frac{150}{x+15}$ | 150 |

Теперь, чтобы найти x, нужно составить уравнение. Зная, что разница между $\frac{150}{x}$ и $\frac{150}{x+15}$ – составляет 30 мин ($\frac{30}{60}$=$\frac{1}{2}$ч). Составим уравнение:

$$\frac{150}{x} = \frac{150}{x+15} + \frac{1}{2}.$$

*3. Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение в квадратное и решим через дискриминант.

$\frac{150}{x} = \frac{150}{x+15} + \frac{1}{2}$;

$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+15} = \frac{1}{2}$;

$\frac{150x+2250-150x}{x^2+15x} = \frac{1}{2}$;

$\frac{2250}{x^2+15x} = \frac{1}{2}$;

$x^2 + 15x$=4500;

$x^2 + 15x$–4500=0;

$D$=225+18000=18225 (>0);

$x = \frac{-15 \pm 135}{2}$;

$x_1 = -75$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому его рассматривать не будем)

$x_2$=60 (км/ч)– начальная скорость поезда.

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти начальную скорость поезда. Получили 60 км/ч (>0). При подстановке в исходное уравнение, получим верное числовое равенство:

$\frac{150}{60} - \frac{150}{60+15} = \frac{1}{2}$; $\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Итак, ответ: 60 км/ч– начальная скорость поезда.

Задача 7.

Увеличив скорость на 10 км/ч, поезд сократил на 1 ч время, затрачиваемое им на прохождение пути в 720 км. Найдите первоначальную скорость поезда.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении поезда. Из условия задачи известно, что поезд прошел путь в 720 км со скоростью, превышающей запланированную на 10 км/ч, позволило сэкономить 1 час времени. В задаче требуется найти запланированную скорость поезда.

Оформим краткую запись в виде таблицы:

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| По расписанию | ? | $\frac{720}{?}$ | 720 |
| На самом деле | ?+10 | $\frac{720}{?+10}$ | 720 |

*2.Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти запланированную скорость. Поэтому именно ее мы и обозначим за $x$ –скорость поезда по расписанию. Тогда скорость поезда на самом деле равна ($x$+10) км/ч. Заполним таблицу, заменив знак «?» на x.

| | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| По расписанию | $x$ | $\frac{720}{x}$ | 720 |
| На самом деле | $x$+10 | $\frac{720}{x+10}$ | 720 |

Теперь, чтобы найти x, нужно составить уравнение. По условию, поезд сэкономил время в пути на 1 час. По формуле $\frac{S}{x} - \frac{720}{x+a} = t$, (где $x$– скорость поезда по расписанию, ($x$+$a$)– скорость поезда на самом деле) составляем уравнение:

$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+10}$ =1.

*3.Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение в квадратное и решим через дискриминант.

$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+10}$ =1;

$\frac{720x+7200-720x}{x^2+10x}$ =1;

$x^2$+10$x$=7200;

$x^2$+10$x$–7200=0;

$D$=100+28800=28900 (>0);

$x$=$\frac{-10\pm170}{2}$;

$x_1$= –90 (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому его рассматривать не будем);

$x_2$=80 (км/ч)– запланированная скорость поезда.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти запланированную скорость поезда. Получили 80 км/ч. При подстановке числа в исходное уравнение, получим верное равенство:

$\frac{720}{80} - \frac{720}{80+10}$ =1 => 1=1.

Итак, ответ: запланированная скорость поезда 80 км/ч.

Задача 8.

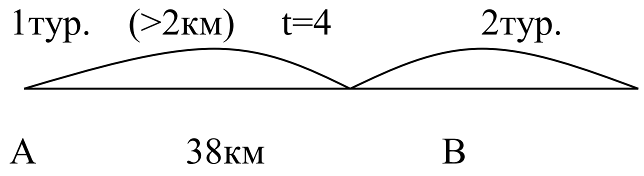
Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 38км, и встретились через 4часа. С какой скоростью шел каждый турист, если известно, что первый прошел до встречи на 2км больше второго?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении, которое характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Движутся навстречу друг другу два туриста. Из условия задачи известно: расстояние между городами

38км; встреча произошла через 4 часа после отправления; первый турист до встречи прошел на 2км больше второго туриста. В задаче требуется найти скорости туристов. Для оформления краткой записи задачи выполним чертеж:




*2. Составление плана решения задачи.*

Введем переменную: $x$ км/ч – скорость первого туриста; $y$ км/ч – скорость второго туриста. Так как расстояние равно 38км, время встречи через 4 часа, $\frac{38}{4}$ =9,5 км/ч – общая скорость туристов (скорость сближения). Тогда $x+y=9,5$ – первое уравнение системы. Так как каждый турист пробыл в пути 4 часа, то 4х км– прошел первый турист, $4y$ км – прошел второй турист. А также первый турист прошел на 2 км больше, чем второй. Получим: $4x–4y=2$ –второе уравнение системы.

Составляем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x–4y=2 \\ x+y=9,5 \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений. Выразим х через у и подставим его в другое уравнение.

$x=9,5–y$; => $4(9,5–y) –4y–2=0$; => $y=4,5$, тогда $x=9,5–y=9,5–4,5=5$.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти скорости туристов:

$x=5$ км/ч – скорость первого туриста, $y=4,5$ км/ч скорость второго туриста. Пара положительных чисел (5; 4,5) является решением системы уравнений:

4·5–4·4,5–2=0 $\rightarrow$ 0=0.

5+4,5=9,5 $\rightarrow$ 9,5=9,5.

Итак, полученный ответ не противоречит условиям задачи, поэтому запишем ответ: 5 км/ч – скорость первого туриста; 4,5 км/ч скорость второго.

Задача 9.

Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

Из условия задачи известно: в одном направлении с разными скоростями движутся два бегуна, стартовавшие с интервалом в 2 минуты; первая встреча произошла в километре от места старта; когда второй бегун пробежал 5 км от старта, произошла вторая через 20 минут ($\frac{1}{3}$ч) после старта первого бегуна. В задаче требуется найти скорость второго бегуна.

*2. Составление плана решения задачи.*

Удобнее сначала ввести переменную, затем по условию заполнить таблицу. Пусть $x$ км/ч– скорость первого бегуна, $y$ км/ч– скорость второго бегуна. Для первой части задачи получим таблицу:

| № бегуна | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| первый | $x$ | $\frac{1}{x}$ | 1 |
| второй | $y$ | $\frac{1}{y}$ | 1 |

Известно, что второй бегун тратит на пробег 1 км на 2 минуты ($\frac{1}{30}$ч) меньше первого. Следовательно, получаем уравнение:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}$.

По условию, вторая встреча произошла через 20 минут ($\frac{1}{3}$ч) после старта первого бегуна. Значит, $\frac{1}{3}x$ –расстояние, которое пробежал первый бегун до встречи. С другой стороны, вторая встреча произошла через 18 минут ($\frac{3}{10}$ч) после старта второго бегуна. Значит, $\frac{3}{10}y$– расстояние, которое пробежал второй бегун до второй встречи.

По условию, расстояние до второй встречи, которое пробежал второй бегун, складывается из расстояния от места старта до места, где бегун повернул обратно, (=5 км) и расстояние от места старта до места, где бегун повернул обратно, без расстояния, пройденного первым бегуном до второй встречи ($5 - \frac{1}{3}x$) км: $\frac{3}{10}y = (5 - \frac{1}{3}x)$ или $10x+9y-300=0$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30} \\ 10x+9y-300=0 \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения.*

Решим систему уравнений. Так как нужно узнать скорость второго бегуна, то есть $y$, то необходимо из одного уравнения выразить $x$ и подставить его значение в другое уравнение.

$x=\frac{300-9y}{10}$; => $\frac{10}{300-9y} - \frac{1}{y} - \frac{1}{30} = 0$;

$\frac{10y-300+9y}{300y-9y^2} = \frac{1}{30}$;

$570y-9000=300y-9y^2$;

$9y^2+570y-300y-9000=0$;

$y^2$+30$y$–1000=0;

$D$=900+4000=4900 (>0);

$y=\frac{-30\pm70}{2}$;

$y_1$= –50 (отрицательный корень не удовлетворят условию задачи, поэтому его рассматривать не будем).

$y_2$=20(км/ч) – скорость второго бегуна.

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти скорость второго бегуна: 20 км/ч(>0). По условию второй бегун в пути догнал первого бегуна, значит его скорость больше, чем у первого: 20 км/ч> $x$=12 км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

Задача 10.

Путь от поселка до станции идет сначала в гору, а потом под гору, при этом длина всей дороги равно 9 км. Пешеход на подъеме идет со скоростью на 3 км/ч меньшей, чем на спуске. Путь от поселка до станции занимает у него 2 часа, а обратный путь 2 часа 30 минут. Определите длину подъема со стороны поселка и скорость пешехода на подъеме и на спуске.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении пешехода. Из условия задачи известно, что путь от поселка до станции представляет собой сначала подъем, потом спуск и равен 9 км. При спуске скорость пешехода на 3 км /ч больше, чем при подъеме. Путь от поселка до станции занимает 2 часа, а обратно 2,5 часа. В задаче требуется найти длину подъема со стороны поселка и скорость пешехода на подъеме и спуске. Оформим краткую запись в виде таблицы:

| Путь от поселка до станции | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| Подъем | ? | 2 | 9 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Спуск | ?+3 | | |

| Путь от станции до поселка | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| Подъем | ? | 2,5 | 9 |
| Спуск | ?+3 | | |

*2. Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти длину подъема со стороны поселка и скорость пешехода на подъеме и спуске. Поэтому обозначим за $x$ км/ч – скорость пешехода на подъеме и за $y$ км/ч– длину подъема со стороны поселка. Тогда скорость пешехода при спуске равна ($x$+3) км/ч, а длина спуска со стороны поселка равна (9–$y$) км. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| Путь от поселка до станции | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| Подъем | $x$ | $\frac{y}{x}$ | y |
| Спуск | $x$+3 | $\frac{9-y}{x+3}$ | 9–у |

| Путь от станции до поселка | Скорость, км/ч | Время, ч | Путь, км |
|---|---|---|---|
| Подъем | $x$ | $\frac{9-y}{x}$ | 9–$y$ |
| Спуск | $x$+3 | $\frac{y}{x+3}$ | $y$ |

Теперь, чтобы найти x, нужно составить уравнение. По условию, на путь от поселка до станции пешеход затратил 2 часа, а на путь от станции до поселка 2,5 часа. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{9-y}{x+3} = 2 \\ \frac{9-y}{x} + \frac{y}{x+3} = 2{,}5 \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решаем систему уравнений. Выразим из первого уравнения y и подставим его значение во второе уравнение.

$\frac{xy+3y+9x-xy}{x^2+3x} = 2;$

$\frac{3y+9x}{x^2+3x} = 2;$

$2x^2+6x = 3y+9x;$

$2x^2 - 3x = 3y;$

$y=\frac{2x^2-3x}{3};$ => $\frac{9-\frac{2x^2-3x}{3}}{x} + \frac{\frac{2x^2-3x}{3}}{x+3} = \frac{5}{2}$

$\frac{27-2x^2+3x}{3x} + \frac{2x^2}{3x+9} = \frac{5}{2};$

$\frac{-18x^2+108x+243}{9x^2+27x} = \frac{5}{2};$

$81x^2 - 81x - 486 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0;$

$D=1\pm 24=25;$

$x=\frac{1\pm 5}{2};$

$x_1 = -2$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, поэтому его рассматривать не будем);

$x_2 = 3$ (км/ч)– скорость пешехода на подъем, тогда 6 км/ч – скорость пешехода на спуске.

Найдем длину подъема со стороны поселка:

$y = \frac{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3}{3}$;

$y$=3 (км).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти длину подъема со стороны поселка и скорость пешехода на подъеме и спуске. Получили 3 км, 3км/ч, 6 км/ч (>0). При подстановке чисел х и у в систему уравнений, получим верные числовые равенства:

$\frac{3}{3} + \frac{9-3}{3+3}$ =2;   1+1=2;   2=2.

$\frac{9-3}{3} + \frac{3}{3+3}$=2,5;  2+0,5=2,5; 2=2.

По условию, скорость при движении в гору была меьше скорости при движении с горы: 3 км/ч < 6 км/ч.

Итак, ответ: длина подъема со стороны поселка – 3 км;

скорость пешехода на подъеме – 3 км/ч;

скорость пешехода при спуске – 6 км/ч.

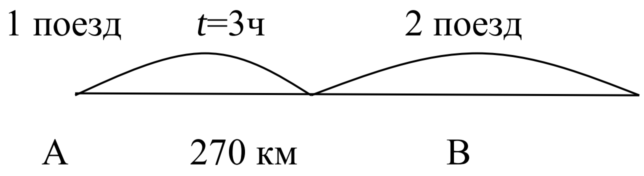
Задача 11.

Из двух городов, расстояние между которыми равно 270 км, одновременно выходят два поезда и встречаются через 3 часа. На весь путь первый поезд тратит на 1ч21мин больше, чем другой. Найдите скорость каждого поезда.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении, которое характеризуется тремя величинами: скоростью, временем и расстоянием. Из условия известно, что: движутся два поезда навстречу друг другу; встреча происходит через 3 часа после отправления; расстояние между городами рано 270 км; первый поезд на весь путь тратит на 1 час 21 мин больше времени, чем второй. В задаче требуется найти скорости каждого поезда. Краткую запись достаточно оформить в виде чертежа:




*2.Составление плана решения задачи.*

Ведем переменную: $x$ км/ч – скорость первого поезда, $y$ км/ч – скорость второго поезда. Тогда (по чертежу) $3x$ км–расстояние, пройденное первым поездом до встречи, $3y$ км– расстояние, пройденное вторым поездом до встречи.

Сумма расстояний от пунктов отправления до встречи равно расстоянию между городами (270 км). Составляем первое уравнение:

$$3x+3y=270.$$

По условию, на весь путь первый поезд тратит на 1 ч 21 мин ($1\frac{21}{60}=\frac{27}{20}$ч) больше, чем другой.

Составляем второе уравнение: $\frac{270}{\text{x}}-\frac{270}{y}=\frac{22}{20}$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+3y=27 \\ \frac{270}{x}-\frac{270}{\text{y}}=\frac{27}{20}. \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений:

Упростим первое уравнение, разделив обе части на 3, и выразим х:

$3x+3y=27 \longrightarrow x+y=90 \longrightarrow x=90-y$.

Полученное х подставляем во второе уравнение системы и приведем уравнение к квадратному виду:

$$\frac{270}{90-y}-\frac{270}{\text{y}}=\frac{27}{20};$$

$$\frac{270y+270y-24300}{90y-y^2}=\frac{27}{20};$$

$\frac{540y-24300}{90y-y^2}=\frac{27}{20}$;

$\frac{27(20y-900)}{90y-y^2}=\frac{27}{20}$;

$\frac{(20y-900)}{90y-y^2}=\frac{1}{20}$;

90y$-y^2$=400y$-$1800;

$y^2$+310y$-$1800=0;

$D$=96100+7200=268100; (>0)

$y=\frac{(-310+410)}{2}$;

$y$=50 (км/ч);

$x$= 90$-$ 50=40 (км/ч).

*4. Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти скорости каждого поезда. Пара положительных чисел (40,50)$-$решение системы уравнений:

3·40+3·50$-$270=0;    0=0.

$\frac{270}{40}-\frac{270}{50}-\frac{27}{20}=0$;        0=0.

Полученный результат не противоречит условиям задач, поэтому запишем ответ: 40 км/ч и 50 км/ч$-$скорости поездов.

Задача 12.

Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на две секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 секунд. За какое время каждое тело проходит окружность.

Решение.

1.Анализ текста задачи.

В задаче речь идет о движении по окружности. Движутся в одном направлении два тела. Из условия задачи известно, что первое тело проходит окружность на две секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 секунд. В задаче требуется найти время, за которое каждое тело проходит окружность.

В задачах «на движении по окружности в одном направлении» краткую запись удобно оформлять в виде таблицы со столбцами, отведенными для времени между встречами и временем прохождения окружности, и со строчками для объектов движения.

| Объект движения | Время между встречами, с | Время прохождения окружности, с |
|---|---|---|
| Первое тело | 12 | ? |
| Второе тело | | ? |

*2. Составление плана решения задачи.*

Обозначим за $x$ (с) искомую величину– время, за которое первое тело проходит окружность, за $y$ (с)– время прохождения окружности вторым телом.

Получаем следующую таблицу:

| Объект движения | Время между встречами, с | Время прохождения окружности, с |
|---|---|---|
| Первое тело | 12 | $x$ |
| Второе тело | | $y$ |

По условию, первое тело делает оборот на 2 (с) быстрее второго тела, то есть $x<y$ на 2, поэтому получаем первое уравнение: $y–x=2$.

Известно, что тела встречаются каждые 12 сек. Тогда по формуле $\frac{1}{t}=\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}$ получим второе уравнение: $\frac{1}{12}=\frac{1}{\mathrm{x}}-\frac{1}{\mathrm{y}}$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 2. \\ \frac{1}{12} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений.

Из первого уравнения находим $y=2+x$. Подставляя это значение во второе уравнение, получим квадратное уравнение:

$x^2+2x-24=0$;

$D=4+96=100$ (>0);

$x=\frac{-2\pm10}{2}$;

$x_1=-6$ (отрицательный корень не удовлетворяет условию задачи, поэму его рассматривать не будем).

$x_2=4$ (с)– время прохождения окружности первым телом.

$y=4+2=6$ (с) – время прохождения окружности вторым телом.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти время, за которое каждое тело проходит окружность. Получили: 4 (с) и 6 (с) (>0). Выполняется условие: первое тело проходит окружность на две секунды быстрее второго. (6>4 на 2). Ответы удовлетворяют условию задачи.

Итак, ответ: время прохождения окружности первым телом–4 (с), время прохождения окружности вторым телом–6 (с).

Задача 13.

По сигналу дрессировщика два пони одновременно и не торопясь побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5м больше, чем второй. Продолжая пробег, первый пони подбежал к дрессировщику, оставшемуся на том же месте, от которого начали бежать пони, через 9сек после встречи со вторым пони, а второй — через 16сек после их встречи. Каков диаметр арены?

Решение.

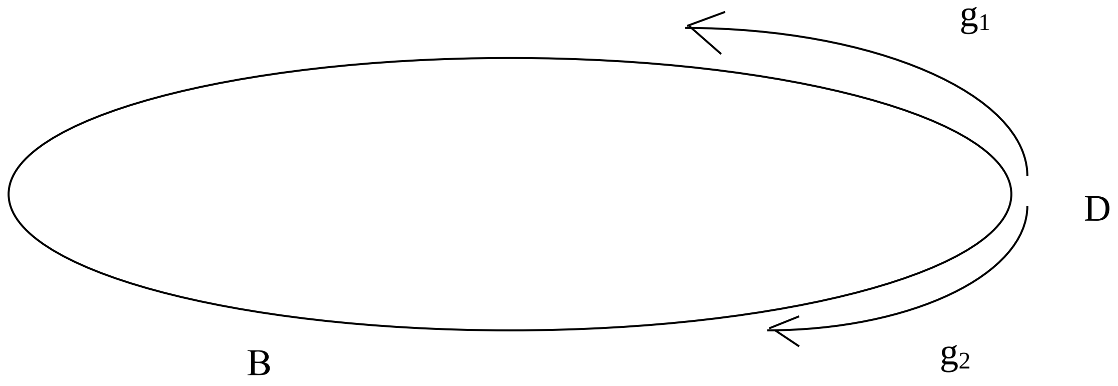
*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении по окружности. Движутся в противоположных направлениях два пони. Из условия задачи известно: скорость первого пои больше, чем у второго; первый пони к моменту встречи пробежал на 5 метров больше; после встреч первый пони закончил бы через 9 с, а второй – через 16 с. В задаче требуется найти диаметр арены.

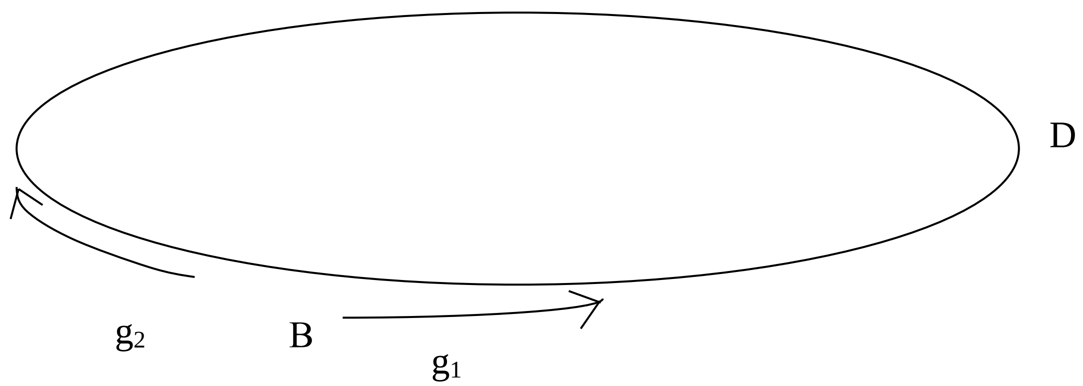
Краткую запись задачи оформим в виде чертежей.

*D*– дрессировщик, В– встреча, $g_1$– скорость первого пони, $g_2$– скорость второго пони.

1.До встречи:




2.До встречи:




*2.Составление плана решения задачи.*

Пусть *x*– длина окружности арены, *t*– время до встречи в пункте В. По условию задачи расстояние DВ (от дрессировщика до места встречи) первый пробежал за время *t*, а второй это же расстояние (от места встречи до дрессировщика)– за 16 с, поэтому составим уравнение: $g_1 \cdot t = g_2 \cdot 16$.

Найдем: $\frac{g_1}{g_2} = \frac{16}{t}$.

Аналогично, второй пони пробежал до встречи $g_2 t$ – такое же расстояние, как первый после встречи за 9 с, поэтому составим уравнение: $g_2 t = g_1 * 9$. Найдем: $\frac{g_1}{g_2} = \frac{t}{9}$. Имеем: $\frac{16}{t} = \frac{t}{9}$ и тогда $t$= 12 с – время до встречи в пункте В.

Получаем: $\frac{g_1}{g_2} = \frac{16}{12}$, то есть $\frac{g_1}{g_2} = \frac{4}{3}$ или $g_1 = \frac{4}{3} g_2$.

По условию задачи расстояние, пройденное первым пони до встречи, больше расстояния, пройденное вторым пони, на 5 м, то есть $g_1 \cdot 12 > g_2 \cdot 12$ на 5 м, поэтому составим уравнение: $g_1 \cdot 12 - 5 = g_2 \cdot 12$. Получаем: $g_1 - g_2 = \frac{15}{12}$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} g_1 = \frac{4}{3} g_2 \\ g_1 - g_2 = \frac{15}{12}. \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений.

$g_1 = \frac{4}{3} g_2 \Rightarrow \frac{4g_2}{3} - g_2 = \frac{15}{12} \Rightarrow g_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow g_1 = \frac{5}{3}$;

По условию задачи пони, двигаясь в разных направлениях, встречаются через 12 с, поэтому составим уравнение: $\frac{x}{g1 - g2} = 12$.

Решаем уравнение: $\frac{x}{\frac{5}{3} + \frac{15}{12}} = 12$.

Итак, $x$=35 (м)– длина окружности, тогда диаметр $d = \frac{x}{3,14}$ =11(м).

4.Анализ и проверка правильности решения задачи.

В задаче требуется найти диаметр арены. Получили: 11 м (>0). Ответ удовлетворяет условиям задачи.

Итак, ответ: диаметр арены–11 метров.

**2) Задачи на движение по воде**

Задача 14.

Моторная лодка прошла 7 часов по течению реки и 6 часов против течения. Определите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч и за всё путешествие лодка прошла 132 км.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении по воде. Движется моторная лодка. Из условия задачи известно, что по течению лодка проплыла за 7 часов, а против течения 6 часов. Известна скорость лодки в стоячей воде– 10 км/ч; всего лодка прошла 132 км. В задаче требуется найти скорость течения реки.

Оформим краткую запись текста задачи в виде таблицы. Удобно в таблице выделить отдельные столбцы для скорости лодки, времени в пути и расстояния. Так как в задаче речь идет о движении по течению реки и против течения, то выделим также две строчки.

| | Скорость, км/ч | Время в пути, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| По течению | ? | 7 | ? |
| Против течения | ? | 6 | ? |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того, чтобы решить задачу, нужно составить уравнение. Для этого необходимо ввести переменную. Обозначим за $x$ (км/ч) скорость течения реки, то есть то, что требуется найти в задаче. Тогда скорость лодки по течению $(10 + x)$ км/ч, а против течения $(10 - x)$ км/ч.

Используя формулу зависимости между расстоянием, скоростью и временем ($S = vt$), найдем расстояние, пройденное лодкой по течению реки: $7 \cdot (10 + x)$ км; и расстояние против течения реки: $6 \cdot (10 - x)$ км.

Получаем следующую таблицу:

| | Скорость, км/ч | Время в пути, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| По течению | $(10 + x)$ | 7 | $7 \cdot (10 + x)$ |
| Против течения | $(10 - x)$ | 6 | $6 \cdot (10 - x)$ |

Теперь с помощью имеющихся данных составим уравнение. Из условия задачи известно, что весь путь, пройденный лодкой равен 132 км. Итак, получаем искомое линейное уравнение:

$$7 \cdot (10 + x) + 6(10 - x) = 132.$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим уравнение:

$7\cdot(10+x)+6\cdot(10-x)=132$;

$70+7x+60-6x=132$;

$x=2$.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти скорость течения реки: 2 км/ч (>0).При подстановке числа в исходное уравнение получим верное числовое равенство:

$7\cdot(10+2)+6\cdot(10-2)=132$;

$132=132$.

Следовательно, число 2 – корень уравнения. Итак, ответ: скорость течения реки 2 км/ч.

Задача 15.

Моторная лодка прошла 28 км по течению реки и против 25 км, затратив на весь путь, столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождение 54 км в стоячей воде. Определить скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о движении по воде. Движется лодка. Из условия задачи известно, что по течению лодка прошла 28 км, а протии 25 км; Известна скорость течения реки – 2км/ч. Лодка затратила на весь путь столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождении 54 км в стоячей воде. В задаче требуется найти скорость течения лодки.

Оформи краткую запись в виде таблицы. Удобно в таблице выделить отдельные столбы скорости лодки, времени в пути и расстояние. Так как в задаче речь идет о движении по течению, против течения и в стоячей воде, то выделим также строчки.

| | Скорость, км/ч | Время в пути, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| По течению | ? | ? | 28 |
| Против течения | ? | ? | 25 |
| В стоячей воде | ? | ? | 54 |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того чтобы решить задачу, нужно составить уравнении. Для этого необходимо ввести переменную. Обозначим за *x* (км/ч) собственную скорость лодки, то есть то, что требуется найти. Тогда скорость лодки по течению будет равна ($x$+2) км/ч, а против течения ($x$–2) км/ч.

Используя формулу зависимости между расстоянием, скоростью и временем($S=vt$), найдем время, за которое лодка проходит по течению реки: $t=\frac{\mathbf{28}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}$ (ч); время, против течения реки $t=\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{x-2}}$ (ч); время в стоячей воде $t=\frac{\mathbf{54}}{\boldsymbol{x}}$

Получаем следующую таблицу:

| | Скорость, км/ч | Время в пути, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| По течению | $x$+2 | $\frac{\mathbf{28}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}$ | 28 |
| Против течения | $x$–2 | $\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{x-2}}$ | 25 |
| В стоячей воде | $x$ | $\frac{\mathbf{54}}{\boldsymbol{x}}$ | 54 |

Теперь с помощью имеющихся данных составим уравнение. Из условия задачи известно, что лодка затратила на весь путь столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождении 54 км в стоячей воде. Итак, получаем искомое уравнение:

$$\frac{\mathbf{28}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}+\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{x-2}}=\frac{\mathbf{54}}{\boldsymbol{x}}.$$

3.Реализация плана решения задачи.

$\frac{\mathbf{28}}{(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})}+\frac{\mathbf{25}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}=\frac{\mathbf{54}}{\boldsymbol{x}};$

$\frac{(28x-56+25x+50)}{(x^2-4)}=\frac{54}{x}$;

(53x–6)x=54($x^2-4$);

53$x^2$–6x=54$x^2$–216;

$x^2$+6x–216=0;

*D*=36+864=900 (>);

*x*=$\frac{-6\pm 30}{2}$;

$x_1$= –18 (получили посторонний корень, так как скорость не может быть отрицательным числом).

$x_2$ = 12 (км/ч)– искомая скорость лодки в стоячей воде.

*4.Анализ и проверка правильности решения.*

В задаче требовалось найти скорость лодки в стоячей воде (т.е собственную скорость лодки): 12 км/ч (>0). При подстановке числа в исходное уравнение получим верное числовое равенство:

$\frac{28}{(12+2)}+\frac{25}{12-2}=\frac{54}{12}$;

4,5=4,5.

Следовательно, число 12– корень уравнения. Итак, ответ: скорость лодки в стоячей воде равна 12 км/ч.

Задача 16.

Человек в лодке начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 мин лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув её, он перестал грести, и, пока отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и первые 4 мин и прошла относительно берега еще 40 м. В целом после разворота лодки прошло 100 секунд. Какова скорость течения?

Решение.

1.Анализ текста задачи.

В задаче речь идет о движении по воде. Движется лодка. Из условия задачи известно, что через 4 минуты гребли против течения реки лодку, отнесло на 80 м ниже по течению, без гребли лодку отнесло еще на 40 м и при гребле по течению реки лодку снова отнесло на 40 м; после разворота лодки прошло 100 секунд. В задаче требуется найти скорость течения.

Оформим краткую запись текста задачи в виде таблицы. Удобно в таблице выделить отдельные столбцы для скорости лодки, времени в пути и расстояния, на которое лодку сносит по течению. Так как в задаче речь идет о гребле против течения, о движении без гребли и гребли по течению, то выделим три строчки.

| | Скорость, м/мин | Время в пути, мин | Расстояние, м |
|---|---|---|---|
| Гребля против течения | Собст. $v$– $v$ теч.р | 4 | 80 |
| Без гребли | $v$ теч. | ? | 40 |
| Гребля по течению реки | Собст. $v$+ $v$ теч.р | ? | 40 |

*2.Составление плана решения задачи.*

Обозначим за х (м/мин) искомую величину–скорость течения, за у (м/мин)– скорость движения лодки в стоячей воде. Так как лодку сносит, когда человек гребет против течения, то $x>y$. Значит, когда человек гребет против течения, лодка движется вниз по течению со скоростью ($x$–$y$) м/мин и за 4 минуты проходит путь равный 4($x$–$y$) м. После разворота, когда человек отдыхал, лодка прошла 40 м со скоростью течения реки х (м/мин) за время $\frac{40}{x}$ мин. Когда человек греб по течению, то он прошел 40 м за время $\frac{40}{x+y}$.

Получаем следующую таблицу:

| | Скорость, м/мин | Время в пути, мин | Расстояние, м |
|---|---|---|---|
| Гребля против течения | $x–y$ | 4 | 80 |
| Без гребли | $x$ | $\frac{40}{x}$ | 40 |
| Гребля по течению реки | $x+y$ | $\frac{40}{x+\text{y}}$ | 40 |

Используя условие задачи и полученную таблицу, найдем уравнение системы:

$$\begin{cases} 4\cdot(x–y) = 80 \\ \frac{40}{x} + \frac{40}{x+\text{y}} = \frac{100}{60}. \end{cases}$$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений.

Из первого уравнения находим $y=x–20$. Подставляя это значение во второе уравнение, получим квадратное уравнение:

$\text{x}^2–46x+240=0$;

$D$=2116–960=1156 (>0);

$x_1$=40; $x_2$=6.

*4.Анализ и проверка текста задачи.*

В задаче требовалось найти скорость течения. Получили два корня: 40 м/мин 6 м/мин. По условию ($x$>$y$) и из первого уравнения ($x$=$y$+20) следует, что $x$>20. Этому условию удовлетворяет лишь один корень: 40 м/мин.

Итак, ответ: скорость течения равна 40 м/мин.

**3)Задачи на работу**

Задача 17.

Водонапорный бак наполняется с помощью двух труб за 2 ч 55 мин. Первая труба может наполнить его на 2 ч быстрее, чем вторая. За какое время каждая труба в отдельности может наполнить бак?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о работе. Из условия задачи, известно, что, с помощью двух труб за 2 ч 55 мин наполняется водопроводный бак. Первая труба наполняет его на 2 ч быстрее, чем вторая. В задаче требуется найти время, за которое каждая труба в отдельности наполнит бак.

Краткую запись задачи удобно оформить в виде таблицы с отдельными столбцами для производительности труда, времени работы и объема работы и с отдельными строками для работы в отдельности и совместной работы.

| Работа в отдельности | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $\frac{1}{?-2}$ | ?–2 | 1 |
| Вторая труба | $\frac{1}{?}$ | ? | 1 |
| Совместная работа | $\left(\frac{1}{?-2}+\frac{1}{?}\right)$ | $2\frac{11}{12}$ | $\left(\frac{1}{?-2}+\frac{1}{?}\right) * 2\frac{11}{12}$ |

*2.Составление плана решения задачи.*

Для того, чтобы решить задачу, нужно составить уравнение, поэтому введем переменную. В задаче требуется найти время, за которое каждая труба в отдельности наполнит бак. Обозначим за $x$ (ч)– время, за которое вторая труба наполнит бак. Тогда ($x$–2) ч – время, за которое первая труба наполнит бак. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| Работа в отдельности | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $\frac{1}{x-2}$ | $x$–2 | 1 |
| Вторая труба | $\frac{1}{x}$ | $x$ | 1 |
| Совместная работа | $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right)$ | $2\frac{11}{12}$ | $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right)\cdot 2\frac{11}{12}$ |

По формуле A=pt получим уравнение:

$\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right)\cdot 2\frac{11}{12}=1.$

*3.Реализация плана решения задачи.*

Преобразуем полученное уравнение в квадратное и решим его через дискриминант.

$\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right)\cdot 2\frac{11}{12}=1;$

$\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right)=\frac{12}{35};$

$35\cdot(2x-2)=12(x^2-2x);$

$6x^2-47x+35=0;$

$D=2209-840=1369;$

$x=\frac{47\pm 37}{12};$

$x_1=\frac{5}{6};$

$x_2=7$

По условию, первая труба отдельно выполнит работу за ($x$–2) ч, то есть $x$–2>0 => $x$>2. Поэтому $\frac{5}{6}$ рассматривать не будем. Итак, вторая труба наполнит бак за 7 (ч), а первая за 5 (ч).

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти время, за которое каждая труба в отдельности наполнит бак. Получили 7 (ч) и 5 (ч) (>0). При подстановке 7 в исходное уравнение, получим верное равенство:

$\left(\frac{1}{7-2}+\frac{1}{7}\right)\cdot 2\frac{11}{12}$=1; => 1=1.

По условию, две трубы вместе, выполнят работу за 2 ч 55 мин :

1:( $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$)=1: $\frac{12}{35}$ = $\frac{35}{12}$ = 2ч 55мин.

Итак, ответ: первая труба наполнит бак за 5 часов, а вторая труба за 7 часов.

Задача 18.

Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила на 1 час позже первой. Через 3 часа после того, как первая начала работу, им оставалось выполнить ещё $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о работе. Работают две машинистки. Из условия задачи известно, что вторая машинистка начала работу на 1 ч позднее первой. Через 3 часа после начала работы первой машинистки было выполнено $\frac{11}{20}$ работы. В итоге каждая машинистка выполнила половину всей работы. В итоге каждая машинистка выполнила половину всей работы.

Объем работы неизвестен, поэтому понадобиться каждой машинистке для выполнения работы в отдельности.

Для оформления краткой записи составим таблиц. Отведем отдельно строки для режимов работы: через 3 часа и по окончании работы. Через 3 часа работы первая машинистка отработала 3 часа, а вторая – 2 часа, так как начала работу на 1 час позднее. Производительности машинисток остаются неизменными до окончания работы.

| Через 3 часа | | | |
|---|---|---|---|
| | Производительность труду | Время работы, д | Объем работы |
| 1 машинистка | $\frac{1}{?}$ | 3 | $\frac{11}{20}$ |
| 2 машинистка | $\frac{1}{*}$ | 2 | |
| По окончанию работы | | | |
| 1 машинистка | $\frac{1}{2?}$ | ? | $\frac{1}{2}$ |
| 2 машинистка | $\frac{1}{2*}$ | * | $\frac{1}{2}$ |

*2.Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти время, которое понадобится каждой машинистке для выполнения работы по отдельности. По условию, вторая машинистка начала работу на 1 ч позднее, то есть машинистка работали, разное количество времени, поэтому необходимо ввести две переменные. Обозначим за x (в часах) время выполнения всей работы первой машинисткой, за $y$ (в часах) время выполнения всей работы второй машинисткой. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$, а знак «*» на у.

| Через 3 часа | | | |
|---|---|---|---|
| | Производительность труду | Время работы, д | Объем работы |
| 1 машинистка | $\frac{1}{x}$ | 3 | $\frac{11}{20}$ |
| 2 машинистка | $\frac{1}{y}$ | 2 | |
| По окончанию работы | | | |
| 1 машинистка | $\frac{1}{2x}$ | $x$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2 машинистка | $\frac{1}{2у}$ | $y$ | $\frac{1}{2}$ |

Известно, что через 3 часа работы обе машинистки выполнили $\frac{11}{20}$ всей работы. Поэтому составим первое уравнение: $3 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{у} = \frac{11}{20}$. По условию, для выполнения половины работы первой машинистке потребовалось на 1 час больше времени, чем второй, получаем второе уравнение:

$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + 1$ => $y$+2=$x$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y+2=x \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20} \end{cases}$$

*3. Реализация плана решения задачи.*

Решим систему уравнений.

$\frac{3}{y+2}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}$;

$\frac{5y+4}{y^2+2y}=\frac{11}{20}$;

$11y^2+22y=100y+80$;

$11y^2-78y-80=0$;

$D=6084+3520=9604$; (>0)

$y=\frac{78\pm98}{22}$;

$y_1=-\frac{10}{11}$ (отрицательный результат не удовлетворяет условию задачи, поэтому его рассматривать не будем);

$y_2=8$ (ч)– время выполнения всей работы второй машинисткой, тогда $x=8+2=10$(ч)– время выполнения всей работы первой машинисткой.

*4.Анализ и проверка правильности решения задачи.*

В задаче требовалось найти время, которое понадобится каждой машинистке для выполнения работы по отдельности. Получили 10 ч и 8 ч (>). При подстановке чисел 10 и 8 в систему уравнений, получили верные числовые равенства:

$\frac{3}{10}+\frac{2}{8}=\frac{11}{20}$; => $\frac{11}{20}=\frac{11}{20}$.

8+2=10 => 10=10.

По условию, машинистки вместе выполнила всю работу:

$10\cdot\frac{1}{20}+8\cdot\frac{1}{16}=1$.

Итак, ответ: 10 ч– время выполнения всей работы первой машинисткой.

8 ч– время выполнения всей работы второй машинисткой.

Задача 19.

Одна тракторная бригада должна вспахать 240 га, а другая на 35% больше, чем первая. Первая бригада, вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй, закончила работу на 2 дня раньше, чем вторая бригада. Сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно?

Решение.

*1.Анализ текста задачи.*

В задаче речь идет о работе. Работают две тракторные бригады. Из условия задачи известен объем работы для первой бригады– 240 (га), а для второй на 35% больше. Так же известно, что первая бригада, вспахивая ежедневно на 3 га меньше второй, закончила работу на два дня раньше. В задаче требуется найти, сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно.

Краткую запись удобно оформить в виде таблицы с отдельными столбцами для производительности труда, времени работы и объема работы и с отдельными строками для первой и второй бригад.

Объем работы второй бригады:

$\frac{135 \cdot 240}{100}$ = 324 (га).

| | Производительность труда, (га/д) | Время работы, (д) | Объем работы, (га) |
|---|---|---|---|
| Первая бригада | ? | $\frac{240}{?}$ | 240 |
| Вторая бригада | ?+3 | $\frac{324}{?+3}$ | 324 |

Для того чтобы решить задачу, нужно составить уравнение, поэтому введем переменную. В задаче требуется найти, сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно. Обозначим за $x$ (га/д)– производительность первой бригады. По условию вторая бригада вспахивает на 3 га больше: ($x$+3) (га/д)– производительность второй бригады. Заполним таблицу, заменив знак «?» на $x$.

| | Производительность труда, (га/д) | Время работы, (д) | Объем работы, (га) |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| Первая бригада | $x$ | $\frac{240}{x}$ | 240 |
| Вторая бригада | $x$+3 | $\frac{324}{x+3}$ | 324 |

В задаче известно, что первая бригада закончила работу на 2 дня раньше.

Составим уравнение: $\frac{324}{x+3}-\frac{240}{x}$ =2.

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим уравнение.

$\frac{324}{x+3}-\frac{240}{x}$ =2;

$\frac{324x-240x-720}{x^2+3x}$ =2;

$324x–240x–720=2x^2+6x$;

$2x^2–78x+720=0$;

$x^2–39x+360=0$;

$D$=1521–1440=81;

$x=\frac{39\pm9}{2}$;

$x_1$=24, $x_2$=15.

24 (га/д)– производительность первой бригады => 24+3=27 (га/д)– производительность второй бригады.

15 (га/д)– производительность первой бригады => 15+3=18 (га/д) – производительность второй бригады.

*4.Анализ и проверка правильности решения.*

В задаче требовалось найти, сколько гектаров вспахивала каждая бригада ежедневно. Получили 24 (га/д) и 27 (га/д); 15 (га/д) и 18 (га/д).

Подставим x=24 в исходное уравнение и получим верное равенство:

$\frac{324}{24+3}-\frac{240}{24}$ =2 => 2=2.

Подставим x=24 в исходное уравнение и получим верное равенство:

$\frac{324}{15+3} - \frac{240}{15}$ =2 => 2=2.

Итак, ответ: 24 га в день вспахивает первая бригада, 27 га в день вспахивает вторая бригада; 15 га в день вспахивает первая бригада, 18 га в день вспахивает вторая бригада.

Задача 20

По плану колхоза бригада должна была к определенному сроку собрать урожай. Начав работу на 2 дня позже, бригада перевыполнила дневную норму на 2 га и уже за 1 день до срока собрала урожай с площади 49 га, что составило 98% задания. Какой срок был установлен бригаде для сбора урожая?

Решение. 1.Анализ текста задачи.

В задаче речь идет о работе. Работает колхозная бригада, которая должна к определенному сроку собрать урожай. Из условия задачи известно, что бригада начала работу на 2 дня позже и закончила на 1 день раньше, перевыполняя дневную норму на 2 га. (Следовательно, работала бригада на самом деле на 3 дня меньше запланированного). В задаче требуется найти срок, который был установлен бригаде для сбора урожая.

Краткую запись оформим в виде таблицы, где укажем режимы работы: запланировано и на самом деле. Причем, так как 49 га составляют 98% объема работы, тогда весь объем работы будет равен $\frac{\mathbf{49 \cdot 100}}{\mathbf{98}}$ =50 (га).

| | Производительность, га/д | Время, д | Объем работы, га |
|---|---|---|---|
| Запланировано | ? | $\frac{\mathbf{50}}{?}$ | 50 |
| На самом деле | ?+2 | $\frac{\mathbf{50}}{? + \mathbf{2}}$ | 49 |

*2. Составление плана решения задачи.*

В задаче требуется найти срок, который был установлен бригада для сбора урожая. Удобно за переменную принять производительность по плану, а потом по формуле $\frac{A}{p}$ $=t$ (где $A$– объем работы по плану, $p$– производительность по плану, $t$– время работы по плану) найти время, которое было установлено бригаде для сбора урожая. Обозначим за $x$– запланированную производительность, тогда производительность на самом деле –($x$+2) га/д. Заполним таблицу, заменив знак «?» на x.

| | Производительность, га/д | Время, д | Объем работы, га |
|---|---|---|---|
| Запланировано | $x$ | $\boldsymbol{\frac{50}{x}}$ | 50 |
| На самом деле | $x$+2 | $\boldsymbol{\frac{50}{x+2}}$ | 49 |

По условию, запланированное время больше затраченного на 3 дня, поэтому получаем уравнение: $\frac{50}{x} - \frac{50}{x+2} = 3$.

*3.Реализация плана решения задачи.*

Решим уравнение.

$\frac{50}{x} - \frac{50}{x+2} = 3$;

$\frac{50x+100-49}{x^2+2x} = 3$;

$\frac{x+100}{\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}} = 3$;

$3x^2+6x=x+100$;

$3x^2+5x-100=0$;

$D= 25+1200=1225(>0)$;

$x=\frac{-5\pm 35}{6}$;

$x_1= -6\frac{2}{3}$; (не подходит по условию задачи)

$x_2= 5$ (га/д) – запланированная производительность, тогда 7 (га/д)–

производительность на самом деле.

$\frac{50}{5}$=10 (дней) – время, которое было установлено бригаде для сбора урожая.

*4.Анализ и проверка правильности решения.*

В задаче требовалось найти срок, который был установлен бригаде для сбора урожая. Получили 10 дней (>0).

Известно, что запланированное время превосходит затраченное на самом деле время на 3 дня:

10 (дней)– запланировано;

$\frac{49}{5+2}$ = 7(дней)– затрачено на самом деле.

10–7=3 (дня)–разница между запланированы временем и затраченным на самом деле.

Итак, ответ: 10 дней было установлено бригаде для сбора урожая.

# ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1) Проведен анализ учебников по алгебре за 9 класс по теме исследования.

2) Проанализированы сюжетные задачи, взятые из демонстрационных вариантов ОГЭ и пробников за 2010 − 2018 года.

2) Разработан факультативный курс по основным типам сюжетных задач для подготовки учащихся к сдаче экзамена за 9 класс в форме ОГЭ. В факультативном курсе представлена система задач различных типов, которая направлена на расширение и углубление знаний по предмету, а также успешной сдаче экзамена.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квалификационная работа посвящена методике изучения сюжетных задач в основной школе.

Цель данной квалификационной работы заключалась в том, чтобы рассмотреть и раскрыть ключевые моменты методики решения сюжетных задач, разработать план факультатива и систему задач по данной теме для подготовки к ОГЭ.

Работа состояла из двух глав и приложения.

Первая глава посвящена теоретическим основам формирования методики обучения решению сюжетных задач в основной школе.

Во второй главе рассмотрена методика работы с текстовой задачей на конкретных примерах.

Результаты данной дипломной работы:

– проанализирована психолого-педагогическая и учебно-методическая литература;

– раскрыто понятие сюжетной задачи;

– определено значение сюжетных задач в обучении математике;

– раскрыты основные способы и этапы решения задач;

– разобраны методические особенности обучения школьников решению основных видов задач в курсе алгебры основной школы;

− представлена типизация сюжетных задач, раскрыты основные методы их решения;

– проведен анализ учебников по алгебре за 9 класс по теме исследования, таких авторов, как Г.В. Дорофеев, Ш.А. Алимов, Ю.Н. Макарычев, А.Г. Мордкович;

– проанализированы сюжетные задачи, взятые из демонстрационных вариантов ОГЭ и пробников за 2010 − 2018 года.

В процессе выполнения квалификационной работы был разработан факультативный курс для обучающихся в 8-9 классов, в котором представлена система упражнений для каждого вида задач− по принципу от простого к сложному. Итоговым результатом данного курса является приобретение знаний, о типах и способах решения сюжетных задач, повышение уровня решения сюжетных задач, а также успешная сдача экзаменов.

Таким образом, можно подтвердить выдвинутую гипотезу о том, то применение разработанного в данной работе факультативного курса при подготовке обучающихся к экзамену в форме ОГЭ будет способствовать повышению эффективности обучения решению сюжетных задач.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. Алгебра: учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений/ Алимов Ш.А., Ю.М. Колягин и др. – М.: Просвещение, 2012.

2. Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. «Методика преподавания математики в начальных классах» М.: Просвещение, 1984. −333с.

3. Виноградова Е.П., Математика Часть III. –М.: ОГТИ, 2014. −116 с.

4. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. Пособие/ Л.В. Виноградова. –М.: Феникс, 2005. – 49−51, 55, 57 с.

5. Дорофеев Г.В. Алгебра: учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений/ Г.В.Дорофеев, С.Б.Суворова и др. – М.: Просвещение, 2012.

6. Зайцева Г.И. «Роль задач в обучении математике» [Электронный ресурс].− Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/518010/.

7. Итоги 2014/2015 учебного года. Часть 2 / под ред. Н. Г. Кутеповой, Е. Н. Рузаковой. – Челябинск : МБОУ ДПО УМЦ, 2015. – 300 с.

8. Итоги 2015/2016 учебного года. Часть 2 / под ред. Т. А. Мельниковой, Е. Н. Рузаковой. – Челябинск : МБУ ДПО УМЦ, 2016. – 240 с.

9. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. М.: Просвещение, 1977. – 110 с.

10. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 12-е изд., испр.- М.: Мнемозина, 2012. – 383 с.

11. Математика: Сборник аналитических материалов / Под ред. А.И.Кузнецова. Сост.: Е.А. Коузова, В.Н. Кеспиков, Е.А. Тюрина, Ю.Г. Ваганова – Челябинск, 2014. – 111 с.

12. Методика начального обучения математике. /под ред. А.А. Столяра, В. Л. Дрозда. М.: 2009. − 231 с.

13. Методика обучения решению задач на движение. Мир знаний. Электронный журнал для учителей [Электронный ресурс]. − Режим

доступа: http://mirznanii.com/info/obuchenie-shkolnikov-resheniyu-sostavnykhzadach_174853.

14. Министерство образования и науки РФ [Электронный ресурс]. − Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/2873.

15. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г., Семенов П.В. - М.: Мнемозина, 2010.

16. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. − Режим доступа: https://oge.sdamgia.ru.

17. Открытый банк заданий ФИПИ [Электронный ресурс]. − Режим доступа: http://www.fipi.ru/.

18. Решение старинных задач / Малых А., Мусихина И. // Математика: Прил. к газ. "Первое сентября". − 2002. − N 27-28. −С. 31-34.

19. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 1995. −17 с.

20. Скворцова, С.С. Урок на тему «Составные задачи» / С.С. Скворцова // Начальная школа. –2008. – №8. – С.52–54.

21. Стойлова Л.П. Математика: Учеб. Пособие для студ. Высш. Пед. Учеб. Заведений/ Л.П. Стойлова – 2-е издание, стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 424 с.

22. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики М.: Просвещение, 1988. −320 с.

23. Титова Е. И., Чапрасова А. В. Различные трактовки понятия «задача» и методика их решения // Молодой ученый. — 2014. — №6. — С.760-762. − Режим доступа: http://moluch.ru/archive/65/10503/.

24. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. − Режим доступа: https://минобрнауки.рф/документы/938.

25. Фридман Л.М. Психолого – педагогические основы обучения математике в школе [Текст]: Кн. для учителей. М.: Просвещение,1983. – 192

с.

26. Фридман Л.М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи [Текст]: пособие для учащихся. − 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Просвещение, 1984.

27. Шарыгин И.Ф., Бузинер М.А., Гордин Р.К. и лр. Информационно-поисковая система по учебным задачам// Математика в школе. – 1993-№2

28. Шикова, Р.Н. Методика обучения решению задач, связанных с движением тел // Начальная школа. – 2000. – №5. – С.64–69.

29. Ягубов РФ. Сайт учителя математики [Электронный ресурс]. − Режим доступа: https://yagubov.ru.

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Входная контрольная работа**

| Вариант 1 | Вариант 2 |
|---|---|
| Два мотоциклиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расположенных на расстоянии 100 км. Скорость мотоциклистов 40 км/ч и 50 км/ч. Через сколько минут они встретятся? | Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. |
| На изготовление 231 детали ученик тратит на 11 часов больше, чем мастер на изготовление 462 таких же деталей. Известно, что ученик за час делает на 4 детали меньше, чем мастер. Сколько деталей в час делает ученик? | Чтобы накачать в бак 117 л воды, требуется на 5 минут больше времени, чем на то, чтобы выкачать из него 96 л воды. За одну минуту можно выкачать на 3 л воды больше, чем накачать. Сколько литров воды накачивается в бак за минуту? |
| В сосуд содержащий 2 кг 80 % -го водного раствора уксуса добавили 3 кг воды. Найдите концентрацию получившегося раствора уксусной кислоты. | Сколько нужно добавить воды в сосуд, содержащий 200 г 70 % -го раствора уксусной кислоты, чтобы получить 8 % раствор уксусной кислоты? |
| На счет в банке, доход по которому составляет 15% годовых, внесли 24 тыс. р. Сколько тысяч рублей будет на этом счете через год, если никаких операций со счетом | Какая сумма (в рублях) будет проставлена в кассовом чеке, если стоимость товара 520 р., и покупатель оплачивает его по дисконтной карте с 5%-ной |

| | |
|---|---|
| проводиться не будет? | скидкой? |

**4) Задачи на смеси, сплавы, концентрацию**

Задача 21.

Сироп содержит 18% сахара. Сколько килограммов воды нужно добавить к 40 кг сиропа. Чтобы содержание сахара составило 15%?

Решение: Пусть надо добавить х кг воды. Заполним таблицу.

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Было | 18%=0,18 | 40 | $0{,}18\cdot 40$ |
| Стало | 15%=0,15 | $40+x$ | $(40+x)\cdot 0{,}15$ |

Так как масса сахара не изменилась. То составим и решим уравнение:

$0{,}15\cdot (40 + x) = 7{,}2$;

$0{,}15\cdot x = 1{,}2$, откуда $x = 8$.

Ответ: 8 кг.

Задача 22.

Собрали 8 кг свежих цветов ромашки. Влажность которых 85%. После того как цветки высушили, их влажность составила 20%. Чему равна масса цветков ромашки после сушки?

| | Общая масса | Влажность | Сухого вещества |
|---|---|---|---|
| Свежие цветы | 8 | 85% | 100−85=15 |
| Высушенные цветы | ? | 20% | 100−20=80 |

1) $0.15 \cdot 8 = 1{,}2$ кг — масса сухого вещества в 8 кг.

2) 1,2 кг сухого вещества — это 80% массы высушенных цветов.

Значит, масса высушенных цветов равна 1.2: 0.8 = 1.5

Ответ: 1,5.

Задача 23.

При смешивании 5%-го и 40%-го растворов кислоты получили 140г 30%-го раствора кислоты. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение: Пусть взяли $x$ г 5%-го раствора кислоты. Заполним таблицу:

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| 5% раствор кислоты | 5%=0,05 | $x$ | $0,05\cdot x$ |
| 40% раствор кислоты | 40%=0,4 | $(140-x)$ | $0,4\cdot(140-x)$ |
| Смесь | 30%=0,3 | 140 | $0,3\cdot140$ |

Составим уравнение:

$0,05\cdot x + 0,4\cdot (140 - x) = 0,3 \cdot 140;$

$0,35\cdot x = 14;$

$x = 40.$

Ответ: 40 г 5% -го и 100г 40%-го.

Задача 24.

Сплав массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько меди нужно добавить, чтобы новый сплав содержал 60% меди?

Решение: 45% − это 0,45, тогда 36 · 0,45 = 16.2 кг меди в сплаве.

Пусть масса меди равна $x$ кг, тогда $(36 + x)$ кг — масса сплава после добавления. А масса меди в новом сплаве $(16,2 + x)$ кг. Зная, что медь в новом сплаве составила 60%, то $16,2 + x = (36+x) \cdot 0,6$. В результате $x = 13,5$

Ответ: 13.5 кг.

Задача 25.

Слили два раствора серной кислоты и получили смесь массой 10 кг.

Определите массу каждого раствора, вошедшего в смесь. Если в первом растворе содержалось 800г серной кислоты, а во втором − 600 г. концентрация первого раствора была на 10% больше, чем концентрация второго раствора.

Решение: заполним таблицу:

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Первый раствор | $\frac{0,8}{x}$·100% | 0,8 | $x$ |
| Второй раствор | $\frac{0,6}{y}$·100% | 0,6 | $y$ |
| Смесь | | 1,4 | 10 |

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{80}{x} - \frac{60}{y} = 10 \end{cases}$$

Решая и получим:

$x^2 - 24x + 80 = 0$

$x_1 = 4$;

$x_2 = 20$ − не удовлетворяет условию задачи ($x$ <0)

Тогда масса второго раствора 10−4=6(кг).

Ответ: 4 кг и 6 кг.

**5) Задачи на проценты**

Задача 26.

После снижения цен на 5% стоимость одного метра ткани стала равна 380 рублей. Сколько стоил один метр ткани до снижения цены?

Решение: Эту задачу удобно решить, составив пропорцию:

$x$ руб - 100%

380 руб - 95%

$x = \frac{100 \cdot 380}{95}$

$x$ = 400.

Ответ: До снижения цена 1 метра ткани составляла 400 рублей.

Задача 27.

Магазин закупил на складе футболки и стал продавать их по цене на 60% больше закупочной. В конце года цена была снижена на 40%. Какая цена меньше: та, по которой магазин закупил футболки, или их цена в конце года – и на сколько процентов?

Пусть купили футболки по $x$ рублей, тогда продавали сначала по (100%+60%=160%=1,6) 1,6·$x$ рублей, а в конце года по (160%-40%=120%=1,2) 1,2·$x$ рублей. Рассуждаем дальше: 1,2·$x$−$x$=0,2·$x$ рублей разница в ценах.

Ответ: цена закупки на 20% ниже цены футболки в конце года.

Задача 28.

Фрукты подорожали на 15%. Сколько фруктов можно теперь купить на те же деньги, на которые раньше покупали 2,3кг?

$x$ (руб/кг)− цена до, тогда 1,15·$x$(руб/кг)− цена после

$p$ − искомый вес

(2,3· $x$)– тратилось денег, тогда (1,15$x \cdot p$) − будет тратиться денег.

Получаем $p = \frac{2,3}{1,15}$= 2 (кг).

Ответ: 2 (кг).

Задача 29.

Фирма изготавливает и продает бумажные пакеты с логотипом заказчика. Стоимость заказа из 100 пакетов составляет 61 р., а заказа из 300 пакетов – 123 р. На сколько процентов стоимость одного пакета при заказе 300 пакетов меньше, чем при заказе 100 пакетов? Ответ округлите до целых процентов.

Решение:

1) 100:61=0,61 (руб.) - стоит 1 пакет из первого заказа.

2) 123:300=0,41 (руб.) - стоит 1 пакет из второго заказа.

3) Составим пропорцию: 0,61 р − 100%

0,41 р − $x$%

$x = \frac{0,41 \cdot 100}{0,61} \approx 67\%$

100%−67%=33%

Ответ: на 33%

**6) Задачи из ОГЭ**

Задача 30.

В данный момент расстояние между двумя таксистами 345 км. На каком расстоянии будут находиться таксисты через два часа, если скорость одного 72 км/ч., а другого −68 км/ч., и они выезжают навстречу друг другу одновременно?

Решение.

1) 72+68=140 (км /ч.) – скорость сближения таксистов.

2) 140·2=280 (км) – на такое расстояние таксисты приблизятся друг к другу за 2 часа.

3) 345−280=145 (км) – на таком расстоянии будут таксисты через 2 часа.

Ответ: 145 км.

Задача 31.

Расстояние между городами А и В 720км. Из А в В вышел скорый поезд со скоростью 80 км /ч. Через 2 часа навстречу ему из В в А вышел пассажирский поезд со скоростью 60 км /ч. Через сколько часов после выхода пассажирского поезда эти поезда встретятся?

Решение.

1) 80·2=160 (км) −прошёл скорый поезд за 2 часа.

2) 720−160=560 (км) −осталось пройти поездам.

3) 80+60=140 (км/ч) −скорость сближения 2 поездов.

4) 560:140=4 (ч) −был в пути пассажирский поезд.

Ответ: 4 (ч).

Задача 32.

Машина и автобус выехали из двух городов, находящихся на расстоянии 740 км навстречу друг другу со скоростями 70 км/ч и 50 км/ч. Какое расстояние будет между машинами через 5 часов?

Решение.

1) 50·5=250 (км) – проедет машина до встречи.

2) 70·5=350 (км) – проедет автобус до встречи.

3) 250+350=600 (км) − на такое расстояние они приблизятся друг к другу.

4) 740−600=140 (км) − такое расстояние будет между ними через 5 часов.

Ответ: 140 км.

Задача 33.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 141 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 6 км/ч, за 12 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение.

1) 141−6=135 (км/ч) − скорость обгона пешехода поездом.

2) С этой скоростью поезд обгонял пешехода в течении 12 секунд, то есть в течении $\frac{12}{3600} = \frac{1}{300}$ часа.

3) $l = v \cdot t = \frac{135}{300} = 0{,}45$ (км)− длина поезда, что составляет 450 метров.

Ответ: 450 (метров).

Задача 34.

Лодка шла по течению реки 2,4 ч и против течения 3,2 ч. Путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, пройденного против течения. Найти скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3,5 км/ч.

Возьмем скорость лодки в стоячей воде за $x$. Заполним таблицу:

| | Скорость, км/ч | Время в пути, ч | Расстояние, км |
|---|---|---|---|
| По течению | $x$ +3,5 | 2,4 | 2,4·( $x$ +3,5) |
| Против течения | $x$−3,5 | 3,2 | 3,2·( $x$−3,5) |

Так как путь, пройденный лодкой по течению, оказался на 13,2 км длиннее пути, получим уравнение:

2,4·($x$ +3,5)− 3,2·( $x$−3,5)=13,2

$x$=8 (км/ч) – скорость лодки в стоячей воде.

Ответ: 8 (км/ч)

**Ответ:** 16.

Задача 35.

Заказ на 100 деталей первый рабочий выполняет на 1час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1деталь больше?

Решение.

Примем время работы второго рабочего за $x$. Заполним таблицу:

| | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|
| Первый рабочий | $\frac{110}{x+1}$ | $x$ +1 | 110 |
| Второй рабочий | $\frac{110}{x}$ | $x$ | 110 |

Первый рабочий выполнил заказ на час быстрее, тогда получим уравнение:

$\frac{110}{x+1} = \frac{110}{x} - 1$;

$x^2 + x - 110 = 0$;

$x_1$=10,

$x_2$=–11 (не подходит к условиям задачи)

Ответ: 10

Задача 36.

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

Примем производительность первой трубы за x. Заполним таблицу:

| | Производительность труда | Время работы, ч | Объем работы |
|---|---|---|---|
| Первая труба | $x$ | $\frac{110}{x}$ | 110 |
| Вторая труба | $x$ +1 | $\frac{99}{x+1}$ | 99 |

Первая труба заполняет резервуар на две минуты дольше, чем вторая, тогда получим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2;$$

$x$=10 (литров) в минуту пропуская первая труба.

Ответ: 10 (литров)

Задача 37.

Сколько граммов воды нужно добавить к 5%-й йодной настойке массой 100 г, чтобы концентрация йода уменьшилось до 1%?

Пусть надо добавить x г воды. Заполним таблицу:

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Исходный | 5%=0,05 | 100 | 0,05·100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| раствор | | | |
| Вода | 0%=0 | $x$ | |
| Полученный раствор | 1%=0,01 | 100+ $x$ | $(100+x)\cdot 0{,}01$ |

Так как масса йода не изменилась, то составляем уравнение:

$0{,}01\cdot (x + 100) = 5$;

$0{,}01\cdot x = 4$; откуда $x = 400$ г.

Ответ: 400 г.

Задача 38.

Сколько килограммов 5% - го раствора соли надо добавить к 15 кг 10%-го раствора той же соли, чтобы получить ее 8% - ный раствор?

Решение: Пусть добавили x кг 5%-го раствора соли. Заполним таблицу:

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| 10% раствор соли | 10%=0,1 | 15 | $0{,}1\cdot 15$ |
| 5% раствор соли | 5%=0,05 | x | 0,05 x |
| 8% раствор соли | 8%=0,08 | 15+ x | 1,5+0,05 x |

Составим и решим уравнение:

$1{,}5 + 0{,}05\, x = 0{,}08\cdot (15 + x)$;

$0{,}03x = 0.3$;

откуда $x = 10$

Ответ: 10 (г)

Задача 39.

Имеется 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды. После выпаривания получили массу, содержащую 25% целлюлозы. Сколько кг воды было выпарено?

Решение: Пусть выпарили x кг воды. Заполним таблицу:

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| Было | 100−85 | 500 | 0,15·500 |
| Стало | 25 | 500−$x$ | (500-$x$)·25 |

Составим и решим уравнение: $500 \cdot 0{,}15 = (500 - x)0{,}25$

$0{,}25x = 50$, откуда $x = 200$.

Ответ: 200г

Задача 40.

Смешали 30% и 10% растворы соляной кислоты и получили 600 г 15% раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение: Пусть взяли $x$ г 30% раствора и $y$ г —10% раствора.

| | % содержание | Общая масса, кг | масса вещества, кг |
|---|---|---|---|
| 30% раствор кислоты | 30%=0,3 | $x$ | 0,3· $x$ |
| 10% раствор кислоты | 10%=0,1 | $y$ | 0.1· $y$ |
| Смесь | 15%=0,15 | 600 | 0,15·600 |

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 600 \\ 0{,}3x + 0{,}1y = 0{,}15 \cdot 600 \end{cases}$$

Получим: $\begin{cases} x = 150 \\ y = 450 \end{cases}$

Ответ: 150г и 450 г.

**Итоговая контрольная работа**

| Вариант 1 | Вариант 2 |
|---|---|
| Расстояние между пристанями A и B равно 80 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 2 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 22 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч. | Моторная лодка прошла 36 км по течению реки и вернулась обратно, потратив на весь путь 5 часов. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки в неподвижной воде. |
| Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 130 литров она заполняет на 4 минуты быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 136 литров? | Три бригады вместе изготовили 114 карданных валов. Известно, что вторая бригада изготовила карданных валов в 3 раза больше, чем первая, и на 16 карданных валов меньше, чем третья. На сколько карданных валов больше изготовила третья бригада, чем первая? |
| Первый сплав содержит 5% меди, второй − 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего | Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 40% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, |

| | |
|---|---|
| сплава. | то полученный раствор будет содержать 37% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе? |
| В понедельник некоторый товар поступил в продажу по цене 1000 р. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена товара в течение недели остается неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 20% от предыдущей цены. Сколько рублей будет стоить товар на девятый день после поступления в продажу? | В период распродажи магазин снижал цены дважды: в первый раз на 30%, во второй – на 50%. Сколько рублей стал стоить чайник после второго снижения цен, если до начала распродажи он стоил 700 р.? |