АКАДЕМИЯ НАУК СССР • СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Том 9 № 2 1970

НОВОСИБИРСК

Литература

1. J.C. SHEPHERDSON, Machine configuration and word problems of given degree of unsolvability, Zeitschrift f. Math. Logik und Grundlagen d. Math., 11, N 2 (1965), 149-175.

2. Б.А.ТРАХТЕНБРОТ, О сложности алгоритмов сведения в конструкциях Новикова - Буна, Алгебра и логика, 8, №1 (1969), 93-128.

3. Б.А.ТРАХТЕНБРОТ, Оптимальные вычисления и частотное явление Яблонского, Алгебра и логика, 4, № 5 (1965), 79-93.

Поступило 14 октября 1969 г.

Алгебра и логика, 9, № 2 (1970), 200-219.

УДК 519.44

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВОЛЮЦИЙ

В.М.СИТНИКОВ

Введение

Рассматриваются конечные группы, удовлетворяющие следующему централизаторному условию (*) : централизатор каждой инволюции или 2-разложим, или есть расширение гиперцентральной 2-группы с помощью группы Фробениуса, у которой дополнительный или инвариантный множитель является 2-группой.

Группу G, удовлетворяющую условию (*), назовем ради краткости *-группой. Доказывается следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА А. Конечная неабелева простая *-группа изоморфна одной из следующих групп:

(1) $PSL(2,q)$,

(2) $PSL(3,2^n)$,

(3) $PSU(3,2^{2n})$,

(4) $Sz(2^{2n+1})$,

(5) A_7.

Группа G называется C-группой, если централизатор каждой инволюции 2-замкнут. C-группы описаны М. Сузуки в работе [10]. Для *-групп справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА Б. Пусть G - конечная *-группа. Тогда фактор-группа $G/O_{2'}(G)$ одного из следующих типов:

(1) C-группа;

(2) $PSL(2,q)$, $PGL(2,q)$, $H(q)$, q - нечетно;

(3) A_7;

(4) $PSL^*(3,4)$.

Обозначения стандартны.

$PSL(n,q)$ – проективная специальная линейная группа степени n над полем из q элементов.

$PSU(n,q^2)$ – проективная специальная унитарная группа степени n над полем из q^2 -элементов.

$Sz(q)$ – группа Сузуки

A_7 – знакопеременная группа степени 7.

$H(q)$ (q – нечетно) – расширение $PSL(2,q)$ с помощью группы 2-го порядка такое, что его силовская 2-подгруппа полудиэдральна.

$O_p(G)$ – наибольшая инвариантная p -подгруппа в группе G .

$O_{p'}(G)$ – наибольшая инвариатная p' -подгруппа в группе G .

$N_G(M)$ – нормализатор комплекса M в группе G , иногда индекс будем опускать, если видно, о какой группе идет речь.

$C_G(M)$ – централизатор комплекса M в группе G .

G' – коммутант группы G .

$\Gamma(G)$ – гиперцентр группы G .

$Ц$ -группой будем называть группу, силовские p -подгруппы которой циклические.

V_{p^k} – элементарная абелева p -группа ранга k .

$m(G)$ – ранг группы G .

$F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G .

$Z(G)$ – центр группы G .

$A \leftthreetimes B$ – полупрямое произведение с инвариантным множителем A и неинвариантным B .

§ 1. Предварительные леммы

ЛЕММА 1.1. Ф а к т о р - г р у п п а $*$ - г р у п п ы G п о и н в а р и а н т н о й п о д г р у п п е N н е ч е т н о г о п о р я д к а с н о в а я в л я е т с я $*$ - г р у п п о й.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести индукцией по порядкам G и N. Из предположения индукции следует, что N – минимальная инвариантная подгруппа в G . Следовательно, N – элементарная абелева p -подгруппа. Обозначим через $\overline{\omega}$ произвольную инволюцию из факторгруппы $G/\mathcal{N}$. Достаточно доказать, что централизатор $C_{G/\mathcal{N}}(\overline{\omega})$ является $*$-группой. В силу предположения индукции можно считать, что $\overline{\omega}$ содержится в центре $G/\mathcal{N}$. Так как $p>2$, то среди прообразов $\overline{\omega}$ имеется инволюция ω, а $\mathcal{N}\leftthreetimes\{\omega\}$ -инвариантная подгруппа в G. По лемме Фраттини $G=\mathcal{N}\cdot C(\omega)$. Осталось заметить, что гомоморфный образ централизатора инволюции в $*$-группе снова является $*$-группой.

ЛЕММА 1.2. Если в $*$-группе G имеется инвариантная 2-подгруппа $\mathcal{N}\neq E$, то фактор-группа $G/O_{2'}(G)$ является C. -группой.

В силу леммы 1.1. Можно считать $O_{2'}(G)=E$. Предположим теперь, что в G существует инволюция τ с не 2-замкнутым централизатором $C(\tau)=A\leftthreetimes T$, где $A=O_{2'}(C(\tau))$. Если T содержится в силовской 2-подгруппе S из G, то подгруппа Фиттинга из $C(\tau)$ имеет нетривиальное пересечение с $Z=Z(S)\cap\mathcal{N}$. Поэтому без ограничения общности можно считать $\tau\in Z$. Так как $C(\mathcal{N})\leqslant C(\tau)$, то $C(\mathcal{N})$ $2'$-замкнут. С другой стороны, $O_{2'}(C(\mathcal{N}))\neq E$, так как $\mathcal{N}$ содержится в подгруппе Фиттинга из $C(\tau)$. Следовательно, $O_{2'}(G)\neq E$. Получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G - разрешимая $*$-группа. Тогда $G/O_{2'}(G)$ является C-группой.

ЛЕММА 1.3. Если централизатор инволюции σ из $*$-группы G не $2'$-замкнут, то центр гиперцентра централизатора $C(\sigma)$ содержится в центре силовской 2-подгруппы из $C(\sigma)$.

Пусть $C(\sigma)=S\leftthreetimes K$ не $2'$-замкнут, где S - силовская 2-подгруппа из $C(\sigma)$. Из централизаторного условия $(*)$ следует, что гиперцентр $\Gamma(C(\sigma))$ содержится в S. Пусть $Z=Z(\Gamma(C(\sigma)))$. Если $Z\nsubseteq Z(S)$, то $C(Z)=P\leftthreetimes K< C(\sigma)$. По лемме Фраттини $C(\sigma)=P\cdot\mathcal{N}_{C(\sigma)}(K)$. С другой стороны, $\mathcal{N}_{C(\sigma)}(K)=K\times\Gamma(C(\sigma))$ по централизаторному условию $(*)$. Так как $\Gamma(C(\sigma))\subseteq P$, то получили противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы Б будем вести индукцией по порядку группы. Предположим, что существуют $*$-группы, для которых утверждение теоремы Б неверно. Выберем среди таких групп группу G минимального порядка.

ЛЕММА 1.4. *Разрешимый радикал $S(G)$ группы G тривиален.*

Утверждение непосредственно следует из леммы 1.1 и леммы 1.2.

В силу теоремы М. Сузуки о C -группах [10] и предположения индукции можно считать, что в G существует инволюция с не 2-замкнутым централизатором.

Используя результат Горенштейна [6], можно показать, что в G существует инволюция с не $2'$-замкнутым централизатором. Это утверждение также следует из описания конечных групп, централизатор каждой инволюции которых или 2-разложим, или есть расширение гиперцентральной 2-группы с помощью группы Фробениуса, дополнительный множитель которой есть 2-группа, полученного автором до выхода работы Горенштейна [6]. Описание таких групп сформулировано в резюме сообщения на X Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме.

Поэтому в дальнейшем будем иметь в виду, что в группе G существуют инволюции с не 2-замкнутым и с не $2'$-замкнутым централизаторами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инволюцию τ будем называть центральной в группе G, если τ содержится в центре некоторой силовской 2-подгруппы из G.

ЛЕММА 1.5. *Если централизатор центральной инволюции 2-разложим, то он примарен.*

Пусть τ -центральная инволюция, а централизатор $C(\tau)=T\lambda \mathcal{N}$ 2-разложим и непримарен, где T есть силовская 2-подгруппа из G. Возьмем инволюцию σ такую, что $C(\sigma)=A\lambda S$ не 2-замкнут, $A=O_{2'}(C(\sigma))$, $S\leqslant T$. Такая инволюция всегда найдется. С другой стороны, $C(\sigma)$ содержит $\mathcal{N}$. Это противоречит централизаторному условию (*).

ЛЕММА 1.6. *Если централизатор каждой центральной инволюции 2-замкнут, то центр силовской 2- под-*

группы из G циклический.

Пусть T – силовская 2-подгруппа из G. Если $Z(T)$ нециклический, то он имеет нетривиальное пересечение с подгруппой Фиттинга из не 2-замкнутого централизатора инволюции $C(\sigma)=A\lambda S$, $A=O_{2'}(C(\sigma))$, $S\leq T$. Но тогда $Z(T)$ содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором. Получили противоречие с предположением леммы.

ЛЕММА 1.7. Силовская 2-подгруппа T из G не является группой максимального класса.

Если T является группой кватернионов, то по теореме Брауэра и Сузуки группа G содержит в центре инволюцию.

Пусть T – диэдральная или полудиэдральная группа. Так как группа автоморфизмов T является 2-группой, за исключением того случая, когда $T\simeq V_{2^2}$, то в силу централизаторного условия $(*)$ и леммы 1.5 централизатор инволюции из $Z(T)$ обладает абелевым 2-дополнением.

Если T – диэдральная группа, то по теореме Уолтера и Горенштейна [5] G изоморфна либо $PSL(2,q)$, $PGL(2,q)$ q – нечетно, либо A_7. Это противоречит выбору G.

Если T – полудиэдральная группа, то по теореме Уонга [12] группа G изоморфна $H(q)$, $SL(3,3)$, или M_{11}. Так как централизатор инволюции из $SL(3,3)$ и M_{11} изоморфен $SL(2,3)$, то $G\simeq H(q)$. Получили противоречие.

Из теоремы 1.1 из [1] и леммы 1.7 следует, что силовская 2-подгруппа T из G содержит инвариантную нециклическую подгруппу V_T порядка 4. Эта подгруппа определяется не однозначно. Дальнейшее доказательство разбивается на 2 случая.

§ 2. Централизатор каждой центральной инволюции 2-замкнут

ЛЕММА 2.1. Если централизатор каждой центральной инволюции 2-замкнут, то в силовской 2-подгруппе T из G существует инвариантная эле-

ментарная абелева подгруппа V_T *порядка 4, все инволюции которой центральные в* G .

Обозначим через $H(K)$ подгруппу, порожденную центральными инволюциями в G из комплекса K . Условимся в случае, когда в K нет центральных инволюций в G , считать $H(K)=E$. Докажем, что если T_1 и T_2 -различные силовские 2-подгруппы из G и $H(T_1 \cap T_2) \neq E$, то $H(T_1)=H(T_2)$.

Допустим противное. Тогда, как и в работе [7], можно показать, что в этом случае в семействе Сузуки ζ существует подгруппа $\mathfrak{D}$ такая, что $H(\mathfrak{D}) \neq E$ и $H(\mathfrak{D})$ не содержит $H(T)$ ни для одной силовской 2-подгруппы T из G . Среди таких подгрупп из ζ выберем максимальную в томпсоновском смысле. Пусть это будет группа $\mathfrak{D}$.

Рассмотрим нормализатор $\mathcal{N}(\mathfrak{D})=\mathcal{N}$. По лемме 1.2 $\mathcal{N}/O_{2'}(\mathcal{N})$ является C -группой. Покажем, что $O_{2'}(\mathcal{N})$ централизует силовскую 2-подгруппу S из $\mathcal{N}$. Предположим противное. Тогда $F=O_{2'}(\mathcal{N}) \leftthreetimes S$ не 2-замкнутая группа. Так как F не 2-замкнутая группа, то централизатор инволюции $\nu \in Z(S) \cap \mathfrak{D}$ также не 2-замкнут, а $\mathfrak{D} \leq F(C(\nu))$. Пусть $C(\nu)=A \leftthreetimes D$, $A=O_{2'}(C(\nu))$, а $D \leq T_1$ - силовской 2-подгруппе из G . Из предположения леммы инволюция τ_1 из $Z(T_1)$ не содержится в $F(C(\nu))$. Следовательно, $A \leftthreetimes \{\tau_1\}$ является группой Фробениуса. С другой стороны, если σ - центральная инволюция в G из $\mathfrak{D}$, то $C(\sigma) \geq A \leftthreetimes \{\tau_1\}$. Получили противоречие с тем, что централизатор каждой центральной инволюции 2-замкнут. Следовательно, $O_{2'}(\mathcal{N})$ централизует силовскую 2-подгруппу S из $\mathcal{N}$.

Докажем теперь, что $\mathcal{N}$ не содержит инволюций с не 2-замкнутыми централизаторами.

Так как $\mathcal{N}/O_{2'}(\mathcal{N})$ является C -группой, а $O_{2'}(\mathcal{N})$ централизует S , то по теореме из [10] все инволюции из $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{D}$ сопряжены.

Как и в работе [7 , стр. 330], можно показать, что $H(\mathfrak{D}) \neq H(\mathcal{N})$. Следовательно, все инволюции из $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{D}$ центральные в G .

Поэтому, если $\mathcal{N}$ содержит инволюцию σ с не 2-замкнутым централизатором, то $\sigma \in \mathfrak{D}$. Предположим, что $\mathfrak{D}$ содержит такую инволюцию σ . Так как $C(\mathfrak{D}) \leq O_{2'}(\mathcal{N}) \times \mathfrak{D}$, то $Z(\mathfrak{D})$

содержит центральную инволюцию в G. Поэтому $Z(\mathcal{D})$ нециклический и имеет нетривиальное пересечение с $F(C(\sigma))$.

Покажем теперь, что $Z(\mathcal{D})$ содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором. Обозначим через Z_0 нижний слой $Z(\mathcal{D})$. Пусть $C(\sigma)=A\lambda S$, где $S\leqslant T$ -силовской 2-подгруппе из G. Тогда централизатор инволюции из пересечения $Z(\mathcal{D})$ с подгруппой Фиттинга из $C(\sigma)$ содержит подгруппу $A\lambda\{\tau\}$, где τ - инволюция из $Z(T)$, следовательно, он должен быть не 2-замкнут. Поэтому без ограничения общности можно считать $\sigma\in Z(\mathcal{D})$. Пусть $V = Z_0\cap\Gamma(C(\sigma))$. Тогда $Z_0=V\times\{\tau\}$, где τ - центральная инволюция в G. Так как $A\lambda\{\tau\}$ является группой Фробениуса, то централизатор любой инволюции из V не 2-замкнут. Заметим, что $C(Z_0)$ является 2-группой. Поэтому $|Z_0|>4$, так как в противном случае τ была бы сопряжена с инволюцией из V. Предположим теперь, что в $Z_0\setminus V$ есть инволюция ν с не 2-замкнутым централизатором $C(\nu)$. Тогда из централизаторного условия $(*)$ следует $V\cap\Gamma(C(\nu))\neq E$. Это приводит к противоречию с тем, что $A\lambda\{\tau\}$ является группой Фробениуса. Следовательно, V инвариантна в $\mathcal{N}(Z_0)$.

Так как $O_{2'}(\mathcal{N}(Z_0))=E$, то $\mathcal{N}(Z_0)$ по лемме 1.2 является c-группой. Заметим, что $\mathcal{N}(Z_0)\geqslant\mathcal{N}(\mathcal{D})$. Следовательно, $\mathcal{N}(Z_0)$ не 2-замкнут. Из описания c-групп [10] следует, что $\mathcal{N}(Z_0)$ содержит не 2-замкнутую подгруппу $H=Z_0\lambda K\lambda\{\omega\}$, где K -$2'$-группа, ω - инволюция, которая нормализует, но не централизует группу K. Покажем, что H не является $*$-группой. Так как $V\lhd\mathcal{N}(Z_0)$, то по теореме Машке $H=[(V\lambda K)\times\{z\}]\lambda\{\omega\}$. С другой стороны, $C_V(K)=E$, так как $C(Z_0)$-2-группа. Поэтому $K\times\{z\}$ является $\{\omega\}$ допустимой группой. Легко видеть, что $C(Z)$ не удовлетворяет централизаторному условию $(*)$. Полученное противоречие доказывает, что централизатор любой инволюции из $\mathcal{N}$ 2-замкнут.

Следовательно, силовская 2-подгруппа из $\mathcal{N}$ не является силовской 2-подгруппой в группе G.

Пусть $\mathcal{D}$ содержится в силовской 2-подгруппе T из G. Тогда $\mathcal{N}(\mathcal{D})$ содержит каждую инвариантную элементарную абелеву подгруппу порядка 4 из T.

Если предположить теперь, что в T не существует инвариантной элементарной абелевой подгруппы V_T, все инволюции которой центральные в G, то $\mathcal{N}$ содержит нецентральные инволюции в G.

Пусть $\mathcal{D}_o$ – подгруппа, порожденная нецентральными инволюциями из $\mathcal{N}$. Так как все инволюции из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{D}$ центральные в G, то $\mathcal{D}_o \leqslant \mathcal{D}$. Обозначим через S_1 2-подгруппу из G, содержащую силовскую 2-подгруппу S из $\mathcal{N}$ в качестве собственной инвариантной подгруппы. Такая подгруппа существует, так как G, по предположению индукции, не C-группа, а централизаторы инволюций из $\mathcal{N}$ 2-замкнуты, по доказанному выше. Поэтому в семействе Сузуки ζ найдется подгруппа $\mathcal{D}_1$ такая, что $\mathcal{D}_1 \geqslant \mathcal{D}_o$ и $\mathcal{N}(\mathcal{D}_1) \geqslant \mathcal{N}(\mathcal{D}_o) > \mathcal{N}$. Ясно, что $\mathcal{D}_1$ больше $\mathcal{D}$ в томпсоновском смысле. Следовательно, по выбору $\mathcal{D}$ имеем $H(\mathcal{D}_1) = E$. С другой стороны, $\mathcal{D}_1 \geqslant \mathcal{D}_o$, которая, в свою очередь, содержит V_T. Поэтому $H(\mathcal{D}_1) \neq E$. Полученное противоречие доказывает, что если T_1 и T_2 – различные силовские 2-подгруппы из G и $H(T_1 \cap T_2) \neq E$, то $H(T_1) = H(T_2)$.

Покажем, что $H(T)$ – элементарная абелева подгруппа в T. Пусть τ – инволюция из $Z(T)$. Так как $Z(T)$ – циклический, то по теореме Глаубермана [4] следует, что в T существует центральная инволюция τ_1 из центра силовской 2-подгруппы $T_1 \neq T$. Следовательно, $H(T_1 \cap T) \neq E$, так как $C(\tau)$ 2-замкнут. Поэтому, по доказанному, $H(T) = H(T_1)$. Пусть τ_3 – произвольная центральная инволюция из T, содержащаяся в центре некоторой силовской 2-подгруппе из G. Как и выше, можно показать $H(T) = H(T_3)$. Следовательно, τ_3 и τ_1 перестановочны. Утверждение доказано.

Покажем теперь, что $H(T)$ не содержит инволюций с не 2-замкнутыми централизаторами. Предположим противное. Пусть централизатор инволюции $\sigma \in H(T)$ не 2-замкнут. Так как $F(C(\sigma))$ не содержит центральных инволюций, то $H(T) \nleqslant F(C(\sigma))$. Заметим также, что $\mathcal{N}(H(T))$ не 2-замкнут, а $O_{2'}(\mathcal{N}(H(T))) = E$. Если теперь применить все рассуждения к $\mathcal{N}(H(T))$, которые мы применяли к $\mathcal{N}(Z_o)$ в предыдущем случае, то получим, что $\mathcal{N}(H(T))$ содержит не $*$-группу. Следовательно, централизатор любой инволюции из $H(T)$ 2-замкнут.

Пусть централизатор инволюции $\nu \in T$ не 2-замкнут. Тогда $|C_{H(T)}(\nu)| = 2$, так как $F(C(\nu))$ не содержит в нашем случае инволюций с 2-замкнутыми централизаторами.

Поэтому в силу леммы из [3] $|H(T)| = 4$. Так как $H(T)$ содержит по крайней мере 2 инволюции, то в силу нецикличности $Z(T)$ следует утверждение леммы.

Обозначим через $V_T = \{\tau\}\times\{\tau_1\}$ инвариантную элементарную абелеву подгруппу порядка 4 в силовской 2-подгруппе T из G. В силу леммы 2.1 можно считать, что все инволюции из V_T центральные в G. Пусть τ и τ_1 – инволюции из центров силовских 2-подгрупп T и T_1 соответственно. Эти обозначения мы сохраним до конца параграфа.

ЛЕММА 2.2. Пусть централизатор каждой центральной инволюции в G примарен. Тогда $C_T(V_T) = C(V_T)$, централизатор каждой инволюции из $C_T(V_T)$ 2-замкнут. $N(C_T(V_T)) = C_T(V_T)\leftthreetimes\{b\}\leftthreetimes\{v\}$, $b^3 = e$, $v^2 = e$, $b^v = b^{-1}$, $C_T(V_T)\leftthreetimes\{b\}$ – группа Фробениуса. $C(v) = (A\times\{v\})\leftthreetimes P$, $A = O_{2'}(C(v))$. P содержит единственную инволюцию. Класс нильпотентности $C_T(V_T)$ не выше 2.

Так как $C(V_T) = C(\tau)\cap C(\tau_1)$, то первое утверждение очевидно. С другой стороны, $C(V_T) = T\cap T_1$ является максимальным пересечением силовских 2-подгрупп из G. Следовательно, $N = N(C(V_T))$ не 2-замкнутая группа. Так как $O_{2'}(N)$ централизует $C(V_T)$, то $O_{2'}(N) = E$, а $N(C(V_T)) = C(V_T)\leftthreetimes B\leftthreetimes\{v\}$ является C-группой, где $T = C(V_T)\leftthreetimes\{v\}$.

Централизатор каждой инволюции из $C(V_T)$ 2-замкнут, так как V_T содержится в любом таком централизаторе, а подгруппа Фиттинга из не 2-замкнутого централизатора инволюции не содержит в нашем случае инволюций с 2-замкнутыми централизаторами.

Следовательно, можно считать, что $C(v) = A\leftthreetimes S$ не 2-замкнут. Так как N является C-группой, то все инволюции из $N\setminus C(V_T)$ сопряжены. Без ограничения общности можно считать $S < T$. Так как централизатор любой инволюции из $C(V_T)$ 2-замкнут, то $S\cap C(V_T)$ содержит единственную инволюцию. По модулярному закону получаем $S = \{v\}\times(S\cap C(V_T)) = \{v\}\times P$, где P – циклическая группа, или группа кватернионов. Поэтому $C(v) = (A\times\{v\})\leftthreetimes P$, где $A\leftthreetimes P$ является группой Фробениуса.

Обозначим через Z_0 нижний слой центра $C(V_T)$. Так как

$|C_{Z_0}(v)| = 2$, то по лемме из [3] получаем $|Z_0| = 4$, следовательно, $Z_0 = V_T$. Так как $C(V_T)$ является 2-группой, то $V_T \lambda B$ будет группой Фробениуса. Следовательно, $|B| = 3$, пусть $B = \{b\}$. Можно считать $\{v\} \leq N(\{b\})$, $b^v = b^{-1}$.

Предположим, что $C(V_T) \lambda \{b\}$ не является группой Фробениуса. Тогда $L = C_{C(V_T)}(\{b\}) \neq E$. Так как $\{v\}$ нормализует $\{b\}$, то $\{v\}$ нормализует из $L \times \{b\}$. Легко видеть, что $M = (V_T \times L) \lambda \{b\} \lambda \{v\}$ не является $*$-группой. Полученное противоречие доказывает, что $C(V_T) \lambda \{b\}$ является группой Фробениуса, а $C(V_T)$ – класса нильпотентности не выше 2.

ЛЕММА 2.3. *Если централизатор каждой центральной инволюции в G примарен, то группа G имеет инвариантную подгруппу индекса 2.*

Для того, чтобы доказать существование в G инвариантной подгруппы индекса 2, достаточно в силу первой теоремы Грюна [11] доказать, что

$$T^* = (T \cap N(T)') \bigcup_{g \in G} (T \cap g^{-1} T' g) \leq C(V_T).$$

Нормализатор $N(T) = T$, так как $N(T) \leq C(\tau)$, где τ – инволюция из центра T. Следовательно, $T \cap N(T)' \leq C(V_T)$. Предположим, что для некоторого элемента $g \in G$ подгруппа $T \cap g^{-1} T' g \nleq C(V_T)$. Обозначим через $\mathfrak{D} = T \cap T^g$. Тогда $T = C(V_T) \cdot \mathfrak{D}$. Заметим, что $\mathfrak{D} = C_T(\tau^g)$, а τ^g – инволюция из центра силовской 2-подгруппы T^g.

Рассмотрим следующие два случая: $\tau^g \in T$ и $\tau^g \notin T$.

СЛУЧАЙ 1. $\tau^g \in T$.

Так как все инволюции из $T \setminus C(V_T)$ сопряжены и их централизаторы не 2-замкнуты, то $\tau^g \in C(V_T)$. Следовательно, $\mathfrak{D} = C_T(\tau^g)$ содержит центр $Z(C(V_T))$, а подгруппа $K = C(V_T) \cap \mathfrak{D} \lhd T$. Последнее утверждение следует из метабелевости $C(V_T)$.

Обозначим через Z_0 нижний слой центра K. Тогда в группе $L = Z_0 \lambda \{v\}$ порядок $|C_L(v)| = 4$. Поэтому $Z_0 = V_T$ и $\tau^g \in V_T$. Следовательно, $\mathfrak{D} = C_T(\tau^g) = C(V_T)$. Это противоречит выбору $\mathfrak{D}$.

СЛУЧАЙ 2. $\tau^g \notin T$.

В этом случае $[\tau, \tau^g] \neq e$, а группа $\mathfrak{D} = C(\{\tau, \tau^g\})$. Рассмотрим группу $M = \{\tau, \tau^g\} = \{\tau\tau^g\} \lambda \{\tau\}$. Предположим, что M непримарна. Тогда централизатор инволюции из $\mathfrak{D} \cap C(V_T)$ будет не 2-замкнут, что невозможно. Пересечение $\mathfrak{D} \cap C(V_T)$ нетривиально, так как $T \cap g^{-1}T'g \neq E$ по предположению. Следовательно, M –2-группа. Обозначим через ω инволюцию из центра M. Централизатор $C(\omega)$ содержит инволюцию τ. Следовательно, $\omega \in T$. Если $\omega \notin C(V_T)$, то $[\tau, \tau^g] = e$ и $\tau^g \in T$, так как $C(\omega) = (A \times \{\omega\}) \leftthreetimes P$, где P содержит единственную инволюцию, $A = O_{2'}(C(\omega))$. Поэтому $\omega \in C(V_T)$, и централизатор $C(\omega)$ 2-замкнут. Пусть $C(\omega) = S \leftthreetimes F$, где S – силовская 2-подгруппа из $C(\omega)$. Очевидно, что $T \cap S \supseteq \mathfrak{D}$. Пусть $S \leq T_1$, где T_1 – силовская 2-подгруппа из G, отличная от T, так как $\tau^g \notin T$. Обозначим через τ_1 инволюцию из центра T_1. Так как $\tau \in S$, то $\tau_1 \in C(\tau) = T$. С другой стороны, $T \cap T_1 \geqslant \mathfrak{D}$. Как в случае 1, можно показать, что $T \cap T_1 \leq C(V_T)$. Следовательно, $\mathfrak{D} \leq \leq C(V_T)$. Получили противоречие.

ЛЕММА 2.4. *Существует центральная инволюция в G с непримарным централизатором.*

Предположим противное. Тогда по лемме 2.3 группа G имеет инвариантную подгруппу G_0 индекса 2, содержащую $C_T(V_T)$ в качестве силовской 2-подгруппы. Заметим, что $S(G_0) = E$, так как в противном случае $S(G) \neq E$. Так как ранг центра $C(V_T)$ равен двум, а силовская 2-подгруппа из G не максимального класса, то по предположению индукции $G_0 \simeq PSL(3,4)$. Следовательно, $G_0 = G_0 \leftthreetimes \{\nu\}$, где $G_0 \simeq PSL(3,4)$. Так как $\{\nu\}$ есть подгруппа из группы внешних автоморфизмов группы $PSL(3,4)$, то $C_{G_0}(\nu) \sim PSL(3,2)$. Это противоречит централизаторному условию (*).

ЛЕММА 2.5. *В группе G существует центральная инволюция с не 2-замкнутым централизатором.*

Предположим противное. Тогда в силу леммы 1.5 и леммы 2.4 централизатор центральной инволюции τ не $2'$-замкнут. Пусть $C(\tau) = T \leftthreetimes K$, T –силовская 2-подгруппа из $C(\tau)$. Тогда

$$C(V_T) = C(\tau) \cap C(\tau_1) = (T \leftthreetimes K) \cap (T_1 \leftthreetimes K_1) = C_T(V_T) \leftthreetimes M.$$

Предположим, что для некоторой инволюции $\omega \in C_T(V_T)$ централизатор $C(\omega) = O_{2'}(C(\omega)) \leftthreetimes P$ не 2-замкнут. Ясно, что $C(\omega) \supset O_{2'}(C(\omega)) \leftthreetimes$

которая является в силу леммы 2.1 C -группой. Следовательно, по лемме Сузуки из [10] V_T централизует $O_{2'}(C(\omega))$. С другой стороны, если $P \leq T_2$ -силовской 2-подгруппе из G, то $C(V_T)$ содержит 2-замкнутую группу Фробениуса $O_{2'}(C(\omega)) \leftthreetimes \{\tau_2\}$, $\tau_2 \in Z(T_2)$. Полученное противоречие доказывает, что централизатор любой инволюции из $C(V_T)$ 2-замкнут. Следовательно, $T = C_T(V_T) \leftthreetimes \{v\}$, где $C(v)$ не 2-замкнут. Пусть $C(v) = O_{2'}(C(v)) \leftthreetimes S$. Без ограничения общности можно считать $S \leq T$.

Рассмотрим нормализатор $N(C(V_T)) = N$. Покажем, что $O_{2'}(N) = E$. Если $M = E$, то утверждение очевидно, так как $O_{2'}(N)$ централизует V_T. Пусть $M \neq E$. В этом случае из централизаторного условия (*) следует $M = K$, а $V_T \leq \Gamma(C(\tau))$. Так как $Z(\Gamma(C(\tau)))$ по лемме 1.3 содержится в $Z(T)$, то он циклический. Следовательно, $\Gamma(C(\tau)) \nleq C_T(V_T)$, откуда $T = C_T(V_T)\Gamma(C(\tau))$. По теореме о гомоморфизмах получаем $C(\tau)/\Gamma(C(\tau)) \simeq C_T(V_T)/\Gamma(C(\tau)) \cap C_T(V_T) \leftthreetimes K\Gamma(C(\tau))/\Gamma(C(\tau))$. Так как $C(\tau)/\Gamma(C(\tau))$ по централизаторному условию (*) является группой Фробениуса, то очевидно, $O_{2'}(N) = E$. Следовательно, по лемме 1.2 N является C -группой.

Так как $C_T(V_T)$ является максимальным пересечением силовских 2-подгрупп из G, то N не 2-замкнут. Пусть $N = C_T(V_T) \leftthreetimes L \leftthreetimes \{v\}$. Можно считать $\{v\} \leq N(L)$. По теореме из [10] все инволюции из $N \setminus C_T(V_T)$ сопряжены.

Если $\Gamma(C(\tau))$ содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором, то все такие инволюции из T содержатся в $\Gamma(C(\tau))$. В этом случае $K \leq O_{2'}(C(v))$. Поэтому из централизаторного условия (*) следует, что $\tau \in F(C(v))$. Но тогда $C(\tau)$ не 2-замкнут. Следовательно, централизатор любой инволюции из $\Gamma(C(\tau))$ 2-замкнут.

Пусть $k \neq e$ - произвольный элемент из K. Тогда $v^k \neq v$. Так как все инволюции из T, сопряженные с τ, содержатся в $T \setminus C_T(V_T)$ и сопряжены в N, то в T существует элемент t такой, что $v^k = v^t$. Следовательно, $kt^{-1} \in C(v) \cap N(T) = S$. Но тогда $k \in T$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

§ 3. Существует центральная инволюция с не 2-замкнутым централизатором

Пусть τ - инволюция из центра силовской 2-подгруппы T из G, а $C(\tau)=A\leftthreetimes T$ не 2-замкнут. Пусть $F(C(\tau))=A\times T_0$. Обозначим через $\mathcal{N}=\mathcal{N}(A)$. Эти обозначения сохраним до конца параграфа.

В силу централизаторного условия $(*)$ $C(\tau)/T_0$ является группой Фробениуса. Следовательно, T/T_0 - либо циклическая группа, либо группа кватернионов.

ЛЕММА 3.1. $O_{2'}(\mathcal{N})=A$.

Если $O_{2'}(\mathcal{N})>A$, то $O_{2'}(\mathcal{N})\leftthreetimes T_0$ является не 2-разложимой C-группой. Следовательно, по лемме 6 из [10] T_0 содержит единственную инволюцию. Так как T/T_0 также содержит единственную инволюцию, то T не имеет абелевых подгрупп ранга 3.

Пусть $C(\sigma)=S\leftthreetimes K$ не $2'$-замкнут для инволюции $\sigma\in T$, $S=O_2(C(\sigma))$. Можно без ограничения общности считать $S\leq T$. Так как $Z(S)$ нециклический, то из замечания, приведенного выше, следует, что S содержит точно три инволюции. Но тогда K централизует инволюцию τ. Следовательно, $C(\sigma)\leq C(\tau)$. С другой стороны, каждая подгруппа из $C(\tau)$ $2'$-замкнута. Получили противоречие.

ЛЕММА 3.2. $\mathcal{N}$ разрешим.

Предположим противное. Покажем, что в этом случае $C(A)$ неразрешим. Если $C(A)$ разрешим, то по предположению фактор-группа $\mathcal{N}/C(A)$ неразрешима. С другой стороны, силовская 2-подгруппа из $\mathcal{N}/C(A)$ изоморфна T/T_0, которая содержит единственную инволюцию. Так как $\mathcal{N}/C(A)$ неразрешима, то T/T_0 - нециклическая группа. Следовательно, по теореме Брауэра-Сузуки централизатор инволюции из $\mathcal{N}/C(A)$ неразрешим. С другой стороны, $\mathcal{N}<G$. Поэтому по индуктивному предположению $\mathcal{N}/O_{2'}(\mathcal{N})$ типа 1 или типа 2 из теоремы Б. Но в этих группах централизатор инволюции в любой фактор-группе разрешим. Получили противоречие.

Таким образом, $\mathcal{N}$ имеет инвариантную неразрешимую подгруппу чётного индекса. Поэтому по предположению индукции либо $\mathcal{N}/O_{2'}(\mathcal{N})$ изоморфна $PGL(2,q)$, $H(q)$, либо $\mathcal{N}/S(\mathcal{N})\simeq H(9)$, причём разрешимый радикал $S(\mathcal{N})$ чётного порядка. Так как по лемме 1.7 силовская 2-подгруппа из G не максимального класса, то получаем $\mathcal{N}/S(\mathcal{N})\simeq H(9)$.

Докажем, что в этом случае централизатор каждой инволюции из $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{N}$.

Прежде всего покажем, что все инволюции из $\mathcal{N}$ содержатся в

$C(A)$. Пусть v – произвольная инволюция из $\mathcal{N}$. Если $v \in S(\mathcal{N})$, то достаточно доказать, что любая силовская 2-подгруппа S из $S(\mathcal{N})$ содержится в $C(A)$. Предположим противное. Тогда в S найдется элемент s такой, что $\{s\} \not\leq C(A)$, но $\{s^2\} \leq C(A)$. Рассмотрим группу $L = C(A) \cdot \{s\}$. Имеем $[C(A), \{s\}] \leq C(A) \cap S(\mathcal{N}) = S(C(A))$. Следовательно, в фактор-группе $L/S(C(A))$ централизатор инволюции $\bar{s}$ будет неразрешим. Так как $L < G$, то это противоречит предположению индукции. Таким образом, все силовские 2-подгруппы из $S(\mathcal{N})$ содержатся в $S(C(A))$. Поэтому будем считать $v \notin S(\mathcal{N})$. Так как $C(A)$ неразрешим и имеет чётный индекс, то получаем $C(A)/S(C(A)) \simeq PSL(2,9)$. Следовательно, $\mathcal{N}/C(A) \simeq \overline{M} \wedge \{\overline{\omega}\}$, где $\overline{M}$ – 2-группа, а $\overline{\omega}^2 = e$. Таким образом, если $v \notin C(A)$, то можно считать, что среди прообразов $\overline{\omega}$ есть инволюция v. С другой стороны, в группе $H(9)$ все инволюции содержатся в инвариантной подгруппе $H_0 \simeq PSL(2,9)$, а фактор-группа $H/S(H) \simeq H(9)$, где H есть полный прообраз $\{\overline{\omega}\}$. Полученное противоречие доказывает, что все инволюции из $\mathcal{N}$ содержатся в $C(A)$.

Пусть v – произвольная инволюция из $\mathcal{N}$. Предположим, что $C(v) = B \wedge S$ $2'$-замкнут, $O_{2'}(C(v)) = B$. Заметим, что $A < C(v)$. Для того, чтобы доказать $C(v) \leq \mathcal{N}$, достаточно показать, что $A = B$. Без ограничения общности можно считать $v \in T_0$, так как T_0 является силовской 2-подгруппой в $C(A)$. Из централизаторного условия $(*)$ получаем $\tau \in F(C(v))$. Откуда вытекает равенство $A = B$.

Предположим теперь, что $C(v) = S \wedge B$ не $2'$-замкнут, $S = O_2(C(v)) \leq T_1$ – силовской 2-подгруппе из G. Из централизаторного условия $(*)$ следует $\tau \in \Gamma(C(v))$. Поэтому можно считать $B = A$. Осталось показать, что $S < \mathcal{N}$. Это следует из того, что $Z(T_1) < C(\tau) \leq \mathcal{N}$. Так как все инволюции из $Z(T_1)$ содержатся в $C(A)$, то $T_1 < \mathcal{N}$. Следовательно, централизатор любой инволюции из $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{N}$. Так как $R(G) = E$, то вне $\mathcal{N}$ найдется инволюция из G. По лемме 1 из [8] получаем, что в G единственный класс сопряженных инволюций. Это противоречит выбору G.

ЛЕММА 3.3. *Если $C(A)$ 2-замкнут, то централизатор любой инволюции из T_0 2-замкнут.*

Пусть $C(A) = T_0 \wedge F$ 2-замкнут. Предположим, что для инволюции

$\sigma \in T_0$ централизатор $C(\sigma)=S \leftthreetimes K$ не $2'$-замкнут, S - силовская 2-подгруппа из $C(\sigma)$. Так как $A \lhd C(\sigma)$, то из централизаторного условия (*) следует $\tau \in \Gamma(C(\sigma))$. Поэтому $A=K$. Из 2-замкнутости $C(A)$ следует $\Gamma(C(\sigma)) \leq T_0$. Следовательно, $\tau \in Z(\Gamma(C(\sigma))$. Так как по лемме 1.3 $Z(\Gamma(C(\sigma))) \leq Z(S)$, то $S < C(\tau)$. Откуда получаем $C(\sigma) \leq C(\tau)$. С другой стороны, все подгруппы из $C(\tau)$ $2'$-замкнуты. Получили противоречие.

ЛЕММА 3.4. Фактор-группа N/A не 2-замкнутая C-группа.

Предположим противное. Тогда по лемме Фраттини $N=A \cdot N_N(T)$. Так как $N_A(T)=E$, то $N=A \leftthreetimes N_N(T)$, $N_N(T)=T \leftthreetimes F$. Заметим, что в этом случае выполняются условия леммы 3.3.

Предположим, что $F=E$. Тогда $N=A \leftthreetimes T$. Пусть $C(\sigma) = S \leftthreetimes K$ для инволюции $\sigma \in T$ не $2'$-замкнут, S -силовская 2-подгруппа из $C(\sigma)$. Можно без ограничения общности считать $S \leq T$. Обозначим через B абелеву подгруппу из S ранга 3. Такая подгруппа в S существует, так как $Z(S)$ нециклический, а S содержит более трех инволюций. Если бы S содержала точно три инволюции, то K централизовала бы эти инволюции. Но тогда $K < C(\tau)$. Откуда $\sigma \in T_0$. Это противоречит лемме 3.3. Пусть $C=T_0 \cap B$ Так как T/T_0 содержит единственную инволюцию, то $m(C) \geq 2$. Поэтому для $k \neq e$, $k \in K$ в группе C найдется инволюция ν такая что $\nu^k \in T_0$ .. По лемме 3.3 централизатор любой инволюции из T_0 $2'$-замкнут. Следовательно, $C(\nu)^k = C(\nu^k) = A \leftthreetimes P_1$, откуда $k \in N_{C(\tau)}(S)$. С другой стороны, $N_{C(\tau)}(S) \leq T$, так как $\sigma \notin T_0$ по лемме 3.3. Полученное противоречие доказывает $F \neq E$.

Покажем теперь, что централизатор любой инволюции из N содержится в N. Для этого достаточно проверить централизаторы инволюций из силовской 2-подгруппы T.

Если ν - произвольная инволюция из T_0, то по лемме 3.3 $C(\nu)$ $2'$-замкнут. Из централизаторного условия (*) следует $A = O_{2'}(C(\nu))$. Откуда вытекает $C(\nu) \leq N$.

Пусть теперь инволюция $\nu \in T \setminus T_0$. Так как по предположению $C(A)$ 2-замкнут, то $T_0 \lhd N$. Из леммы 3.3 и централизаторного условия (*) следует, что $T_0 \leftthreetimes F$ является группой Фробениуса. В силу этого $Z(T) \cap T_0$ - нециклическая группа.

Предположим, что $C(v)=O_{2'}(C(v))\lambda S$ не 2-замкнут. Так как $Z(T)\cap T_0$ – нециклическая группа, то из централизаторного условия (*) получаем $F(C(v))\cap Z(T)\cap T_0\neq E$. Следовательно, $O_{2'}(C(v)) = A$. Но тогда $v\in T_0$ в силу 2-замкнутости $C(A)$. Полученное противоречие доказывает, что $C(v)$ 2-замкнут.

Пусть $C(v)=S\lambda K$, $S=O_2(C(v))\leq T_1$ – силовской 2-подгруппе из G. Так как $C(v)\geq\{Z(T),Z(T_1)\}$, то $Z(T_1)<C(\tau)$. В силу нецикличности $Z(T_1)$ имеем $T_0\cap Z(T_1)\neq E$. В силу леммы 3.3 получаем $T_1\angle N$. Осталось показать, что $K<N$. Так как T и T_1 сопряжены в N, то без ограничения общности можно считать $S\leq T$. Пусть k -произвольный элемент из K. Обозначим через $C=T_0\cap Z(T)$. Так как C – нециклическая группа и $C\leq S$, то в C найдется инволюция ω такая, что $\omega^k\in T_0$. Но тогда

$$C(\omega)^k=(A\lambda P)^k=C(\omega^k)=A\lambda P_1 .$$

Следовательно, $k\in N$.

Таким образом, доказано, что централизатор любой инволюции из N содержится в N. Теперь, как и в лемме 3.2, получаем противоречие.

ЛЕММА 3.5. Если централизатор некоторой центральной инволюции в G не 2-замкнут, то группа G имеет инвариантную подгруппу индекса 2.

По лемме 3.4 фактор-группа N/A не 2-замкнутая C -группа. Пусть $O_{2',2}(N)=A\lambda L$, где $L\leq T$. Заметим, что $T=L\lambda B$, где B – либо группа кватернионов, либо циклическая группа. Это следует из описания разрешимых C -групп [10].

Покажем, что $L=T_0$. Если $T_0\leq L$, то утверждение очевидно, так как T/T_0 содержит единственную инволюцию.

Предположим $T_0\nleq L$. Из централизаторного условия (*) следует, что в $C(A)$ централизатор любой инволюции 2-разложим. Аналогично, как и в лемме 1.2, можно показать, что в этом случае в фактор-группе $C(A)/O_{2'}(C(A))$ централизатор любой инволюции примарен. Так как $T_0\nleq L$, то $C(A)/A$ не 2-замкнутая C/T -группа. Следовательно, $C(A)=D\lambda F\lambda\{\alpha\}$, где $T_0=D\lambda\{\alpha\}$, F – $2'$-группа в $C(A)$. Это вытекает из описания разрешимых C/T -групп

[9] . Можно считать $P = L \cap T_0$. Поэтому в $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ существует инволюция из T_0 . Так как $\mathcal{N}/O_{2'}(\mathcal{N})$ является C -группой, то по теореме из [10] все инволюции из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ сопряжены в $\mathcal{N}$.

Покажем, что при нашем предположении централизатор любой инволюции из $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{N}$.

Пусть инволюция $v \in \mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$. Так как все инволюции из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ сопряжены уже в $\mathcal{N}$, то без ограничения общности можно считать $v \in T_0$. Если $C(v)$ $2'$-замкнут, то утверждение очевидно, так как $O_{2'}(C(v)) = A$. Пусть $C(v) = S \lambda K$ не $2'$-замкнут, $S = O_2(C(v)) \leq T_1$ -силовской 2-подгруппе из G . Так как $\tau \in S$, то $Z(T_1) < C(\tau)$. Следовательно, $Z(T_1) < \mathcal{N}(A)$. Так как $A < C(v)$, то из централизаторного условия $(*)$ вытекает $\tau \in \Gamma(C(v))$. Поэтому можно считать $K = A$. Но тогда $[Z(T_1), A] \leq A \cap S = E$. Откуда $Z(T_1) \leq Z(\Gamma(C(v)))$. Так как $C(v)$ не $2'$-замкнут, то централизатор каждой инволюции из $Z(T_1)$ также будет не $2'$-замкнут. Это противоречит условию леммы. Таким образом, мы показали, что централизатор каждой инволюции из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ содержится в $\mathcal{N}$.

Пусть теперь инволюция $v \in O_{2',2}(\mathcal{N})$. Можно без ограничения общности считать $v \in L$. Рассмотрим $C(v)$. Предварительно заметим, что $Z = Z(L) \cap C(A)$ – нециклическая группа, так как $Z \lhd C(A)$, а $P \lambda F/A$ – группа Фробениуса, где $P \lambda F = O_{2,2'}(C(A))$.

Предположим, что $C(v) = Q \lambda S$ не 2-замкнут, $Q = O_{2'}(C(v))$. Тогда в силу нецикличности Z имеем $Z \cap F(C(v)) \neq E$. Пусть инволюция $\omega \in Z \cap O_{2'}(C(v))$. Тогда $C(\omega) \geq \{A, Q, \tau\}$. Из централизаторного условия $(*)$ и того, что τ централизует A следует $A = Q$. Тем самым показано, что $C(v) \leq \mathcal{N}$.

Пусть теперь $C(v) = S \lambda Q$ не $2'$-замкнут, $S = O_2(C(v)) \leq T_1$ -силовской 2-подгруппе из G . Так как $S \supseteq \{Z(L), Z(T_1)\}$, то $Z(L) < C(\tau_1) = M \lambda T_1$, где $C(\tau)$ не 2-замкнут. С другой стороны, $Z \cap F(C(\tau_1)) \neq E$. Поэтому из централизаторного условия $(*)$ вытекает $M = A$. Следовательно, $S \leq T_1 \subset \mathcal{N}$. Так как T и T_1 сопряжены в $\mathcal{N}$, то для удобства можно считать $S < T$.

Осталось показать $Q < \mathcal{N}$. Пусть t – произвольный элемент из Q , отличный от e . Обозначим через $S_0 = \Gamma(C(v))$. Если $S_0 \cap T_0 \neq E$, то из централизаторного условия $(*)$ следует $Q = A$.

Поэтому будем считать $S_0 \cap T_0 = E$. Следовательно, S_0 содержит единственную инволюцию. Поэтому $Z(S) \leftthreetimes Q = \{a\} \times (Z_1 \leftthreetimes Q)$, где $Z_1 \leftthreetimes Q$ является группой Фробениуса. Откуда следует $m(Z(S) \cap T_0) \geq 2$. Но тогда в $Z(S) \cap T_0$ найдется инволюция δ такая, что $\delta^{\tau} \in T_0$.

Если $C(\delta)$ $2'$-замкнут, то $O_{2'}(C(\delta)) = A$. Откуда следует $\tau \in \mathcal{N}$. Пусть теперь $C(\delta) = R \leftthreetimes \mathcal{D}$ не $2'$-замкнут, $R = O_2(C(\delta)) \leq T_2$ -силовской 2-подгруппе из G . Так как $A \times \{\tau\} \leq C(\delta)$, то из централизаторного условия $(*)$ следует $\mathcal{D} = A$. Как и выше, можно показать $T_2 \leq \mathcal{N}$. Но тогда $[R, A] \leq R \cap A = E$. Получили противоречие с тем, что $C(\delta)$ не $2'$-замкнут. Полученное противоречие доказывает, что централизатор любой инволюции из $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{N}$. Но это невозможно, как было уже показано в лемме 3.2. Следовательно, $T_0 \leq O_{2',2}(\mathcal{N})$.

Так как T/T_0 содержит единственную инволюцию, то получаем $O_{2',2}(\mathcal{N}) = A \times T_0$. Заметим, что выполняются условия леммы 3.3. Следовательно, централизаторы инволюций из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ не $2'$-замкнуты. Более того, из этой же леммы вытекает, что ни одна инволюция из $O_{2',2}(\mathcal{N})$ не сопряжена ни с одной инволюцией из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$. Заметим далее, что все инволюции из $\mathcal{N} \setminus O_{2',2}(\mathcal{N})$ сопряжены уже в $\mathcal{N}$.

Теперь мы сможем показать, что

$$T^* = (T \cap \mathcal{N}(T)') \bigcup_{g \in G} (T \cap g^{-1} T' g) \leq T_0.$$

Пусть $\mathcal{N}(T) = T \leftthreetimes F$. Так как T_0 содержит абелеву подгруппу ранга 2, то, как и в лемме 3.4, можно показать $F \leq \mathcal{N}$. Следовательно, $T \cap \mathcal{N}(T)' \leq T_0$.

Пусть $T \cap g^{-1} T' g \neq E$. Тогда из замечания, приведенного выше, вытекает $T_0 \cap g^{-1} T' g \neq E$, так как $T' \leq T_0$. Поэтому в T_0 существует инволюция ω такая, что $\omega^g \in T_0$. С другой стороны, выполняются условия леммы 3.3. Поэтому легко показать, что $g \in \mathcal{N}$. Но тогда $T \cap g^{-1} T' g \leq T_0$. Утверждение леммы теперь следует из теоремы Холла-Грюна [11] .

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы Б. Ясно, что для централизаторов центральных инволюций возможны только два случая, которые мы рассмотрели в § 2 и в § 3. По лемме 2.5 в группе обязательно существует центральная инволюция с не 2-замкнутым централизатором. В этом случае по лемме 3.5 группа G имеет инвариантную подгруппу G_0 , индекс которой есть степень 2. Из леммы 3.5 в силу централизаторного условия (✱) видно, что централизатор каждой инволюции в G_0 2-разложим и непримарен. Следовательно, по теореме Сузуки из [9] $S(G_0) \neq E$. Но тогда $S(G) \neq E$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Б.

В качестве непосредственного следствия из теоремы Б и теоремы Сузуки [10] получаем теорему А. Заметим, что все перечисленные простые группы в теореме А удовлетворяют централизаторному условию (✱) .

В заключение автор выражает благодарность А.И.Старостину за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. N.BLACKBURN, Generalization of certain elementary theorems on p -groups, Proc. London Math. Soc. (3), 11, N 41 (1961), 1-22.

2. R.BRAUER and M.SUZUKI, On finite groups whose 2-Sylow group is a generalized quaternion group, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1959), 1757-1759.

3. В.М.БУСАРКИН, А.И.СТАРОСТИН, Конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают нильпотентным расщеплением, Изв. АН СССР, сер.матем., 29 (1965), 87-108.

4. G.GLAUBERMAN, Central Elements in Core-Free Groups, J. Algebra, 4, N 3 (1966), 403-420.

5. D.GORENSTEIN and J.H.WALTER, On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, Illinois. J. Math., 6, N 4 (1962), 553-593.

6. D.GORENSTEIN, Finite groups the centralizers of whose involutions have normal 2-complement, Canad. J. of Math. vol XXI, N 2 (1969), 335-357.

7. А.И.СТАРОСТИН, Конечные группы с централизаторным условием, Изв. АН СССР, сер.матем., 31(1967), 305-334.

8. M.SUZUKI, Two characteristic properties of (ZT) - Groups, Osaka Math. J. 15, N 1 (1963), 143-150.

9. M.SUZUKI, Finite groups with nilpotent centralizers, Trans. Amer. Math. Soc., 99, N 3 (1961), 425-470.

10. M.SUZUKI, Finite groups in which centralizers of any element of order 2 is 2-closed, Annals of Math., vol 82, N 2 (1965), 191-212.

11. М.ХОЛЛ, Теория групп, М., ИЛ, 1962.

12. W.J.WONG, On finite groups whose 2-Sylow subgroups have cyclic subgroups of index 2, J. Austral. Math. Soc., 4, N 1 (1964), 90-112.

Поступило 15 октября 1969 г.

Алгебра и логика, 9, № 2 (1970), 220-248.

УДК 519.45

О ПРОБЛЕМЕ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.П.ШУНКОВ

Говорят, что группа G удовлетворяет условию минимальности д[illegible] подгрупп (или просто условию минимальности), если в G любая убы- вающая цепочка подгрупп $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$ обрывается н[illegible] конечном номере. Очевидно, группа с условием минимальности являет- ся периодической.

Группы с условием минимальности, как правило, изучались при не- которых дополнительных ограничениях. Наиболее важным из таких ог- раничений является локальная разрешимость группы, которая позволил[illegible] построить весьма содержательную теорию локально разрешимых групп с условием минимальности. В этом решающая роль принадлежит С.Н. Черникову и его школе.

Группы с условием минимальности изучались также при других ограничениях, более общих, чем локальная разрешимость. Однако мето- ды, созданные для локально разрешимого случая, являлись определяю- щими в такого рода обобщениях.

Дальнейшее продвижение в теории групп с условием минимальнос- ти было приостановлено трудностями, которые возникли при попытках обобщить известную теорему Черникова [1, 2, 3] на произвольные группы с условием минимальности. В связи с этим С.Н.Черниковым [illegible] 1940 г. была поставлена проблема, получившая название проблемы ми- нимальности, которую автор позволит себе сформулировать в следую- щей форме:

Будет ли бесконечная группа с условием минимальности (в част- ности, локально конечная группа с условием минимальности [4]) ко- нечным расширением прямого произведения конечного числа квазицик-