ВЕСТНИК ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ХИМИЯ

ВЫПУСК 5

№ 2[42] 2005

УДК 517.9

ОБ УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

А.С. Макаров

В работе изучается абстрактное линейное дифференциальное уравнение соболевского типа с необратимым оператором при производной, относительная резольвента которого может иметь полиномиальный рост на бесконечности. Установлено существование разрешающей аналитической C-полугруппы этого уравнения и доказано существование и единственность решения задачи Коши при начальных данных из некоторого множества.

1. Пусть U и F – банаховы пространства, оператор $L:U\to F$ линейный и непрерывный, т.е. $L\in\mathcal{L}(U,F)$, а оператор $M:\mathrm{dom}M\to F$ замкнутый и линейный с областью определения $\mathrm{dom}M$ плотной в U.

Следуя [1], введем L-резольвентное множество оператора M $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbf{C}:\exists(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(F,U)\}$. Для $\mu\in\rho^L(M)$ определим правую и, соответственно, левую L-резольвенты оператора M $R_\mu^L(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M)=L(\mu L-M)^{-1}$. Правая и левая L-резольвенты являются аналитическими функциями на L-резольвентном множестве. Справедливы правое и, соответственно, левое L-резольвентные тождества [1]:

$$R_\mu^L(M)-R_\lambda^L(M)=(\lambda-\mu)\,R_\mu^L(M)\,R_\lambda^L(M) \tag{1}$$

$$L_\mu^L(M)-L_\lambda^L(M)=(\lambda-\mu)\,L_\mu^L(M)\,L_\lambda^L(M) \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует коммутируемость операторов $R_\mu^L(M)$, $R_\lambda^L(M)$, $L_\mu^L(M)$, $L_\lambda^L(M)$.

Рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu. \tag{3}$$

Уравнение (3) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\mu^L(M)\dot{u}=(\mu L-M)^{-1}Mu \tag{4}$$

и

$$L_\mu^L(M)\dot{u}=M(\mu L-M)^{-1}f, \tag{5}$$

рассматриваемых, соответственно, в пространствах U и F.

В случае существования обратного оператора L^{-1} уравнение (3) сводится к уравнению

$$\dot{u}=Su, \tag{6}$$

где $S=L^{-1}M$. Уравнение вида (6) при условии, что резольвента оператора S имеет не более, чем степенной рост на бесконечности, изучалось, например, в работах [2, 3]. В данной статье уравнение (3) рассматривается при предположении, что ядро $\ker L\neq\{0\}$ и L-резольвента оператора M имеет на бесконечности подстепенной рост.

2. Пусть $\theta\in(\frac{\pi}{2};\pi)$, $\sigma\in\boldsymbol{R}$ и сектор $S_{\theta,\sigma}=\{\mu\in\mathbf{C}:\ |\arg(\mu-\sigma)|<\theta,\mu\neq\sigma\}\subset\rho^L(M)$.

Рассмотрим однопараметрические семейства $\{U^t,t\geq0\}$ и $\{F^t,t\geq0\}$ линейных операторов, действующих в пространствах U и F соответственно, которые определяются равенствами

$$U^t=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\mu t}}{(\mu-a)^n}\,R_\mu^L(M)d\mu,\qquad F^t=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\mu t}}{(\mu-a)^n}\,L_\mu^L(M)d\mu. \tag{7}$$

Здесь $n\in\boldsymbol{N}$, контур

.

$$\Gamma = \{\mu \in \boldsymbol{C}: \quad \mu = \sigma_0 - |x| + ix\,\mathrm{tg}\,\theta, x \in \boldsymbol{R}\} \subset S_{\theta,\sigma},$$

$\sigma_0 > 0$, $\sigma_0 > \sigma$, $a > \sigma_0$, направление на Γ против часовой стрелки. Далее предполагается, что правая и левая L-резольвенты оператора M удовлетворяет условию

А). Существуют такие числа $R > 0$, $\varepsilon > 0$ и K>0, не зависящее от μ, что при $|\mu| > R$ $(\mu \in \rho^L(M))$

$$\max\left(\left\|\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n}\right\|, \left\|\frac{L_\mu^L(M)}{(\mu - a)^n}\right\|\right) \le \frac{K}{|\mu|^{1+\varepsilon}}.$$

При условии А) интегралы в (7) сходятся абсолютно и равномерно относительно $t \ge 0$, поэтому $U^t \in \mathcal{L}(U)$, $F^t \in \mathcal{L}(F)$. Семейства операторов $\{U^t, t \ge 0\}$ и $\{F^t, t \ge 0\}$ можно рассматривать как реализации семейства линейных ограниченных операторов $\{S^t, t \ge 0\}$ в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Обозначим $S^0 = C$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$.

Определение 1. Однопараметрическое семейство $\{S^t, t \ge 0\}$ линейных ограниченных операторов называется C-полугруппой, если

1) $S^t S^s = S^{t+s} C$, $s,t \ge 0$.

Если при этом выполняется еще условие

2) $\exists Q > 0$, $w \in \boldsymbol{R}$ такие, что $\forall t > 0$ $\|S^t\| \le Qe^{wt}$,

то C-полугруппа называется экспоненциально ограниченной.

В отличие от принятого определения C-полугруппы [4] здесь не требуется сильной непрерывности полугруппы, инъективности оператора C и плотности в $\mathcal{B}$ области значений im$C$ оператора C.

Из условия 1) определения 1 следует, что $S^t S^s = S^s S^t$, в частности $S^t C = C S^t$.

Теорема 1. Семейства $\{U^t, t \ge 0\}$ и $\{F^t, t \ge 0\}$ образуют экспоненциально ограниченные C-полугруппы.

Доказательство. Для проверки равенства 1) в определении 1 для U^t можно вместо контура Γ в интегралах (7) взять контур Γ', полученный параллельным переносом Γ вправо, но так, чтобы точка a оставалась правее Γ'. Тогда использовав равенство (1) и изменив порядок интегрирования, найдем:

$$U^s U^t = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} e^{\mu s} \frac{R_\lambda^L(M) R_\mu^L(M)}{(\lambda - a)^n (\mu - a)^n} d\mu d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - a)^n} R_\lambda^L(M) d\lambda \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s} d\mu}{(\mu - a)^n (\mu - \lambda)} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{(\mu - a)^n} R_\mu^L(M) d\mu \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{(\lambda - a)^n (\lambda - \mu)} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda(t+s)}}{(\lambda - a)^{2n}} R_\lambda^L(M) d\lambda,$$

т.к. по теореме о вычетах

$$\int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s} d\mu}{(\mu - a)^n (\mu - \lambda)} = \frac{2\pi i e^{\lambda s}}{(\lambda - a)^n}, \qquad \int_\Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{(\lambda - a)^n (\lambda - \mu)} = 0.$$

Так же можно показать, что

$$U^{s+t} U^0 = U^{s+t} C = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{e^{\lambda(t+s)}}{(\lambda - a)^{2n}} R_\lambda^L(M) d\lambda.$$

Поэтому условие 1) выполняется. Для доказательства неравенства в пункте 2) определения 1 заметим, что на контуре Γ Re $\mu < \sigma_0$. Поэтому, в силу абсолютной сходимости интегралов (7),

$$\|U^t\| \le e^{t\sigma_0} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\|R_\mu^L(M)\|}{|\mu - a|^n} |d\mu| = Qe^{t\sigma_0}.$$

Аналогично доказывается утверждение для F^t с использованием равенства (2).▲ [1]

[1] Знак ▲ обозначает завершение доказательства.

.

Для C-полугруппы U^t оператор $C = U^0$ будем обозначать C_U, для F^t – $C_F = F^0$, т. е.

$$C_U = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu, \qquad C_F = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{L_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu. \tag{8}$$

3. Уравнения (3), (4) и (5) можно рассматривать как конкретные интерпретации уравнения

$$G\dot{v} = Bv, \tag{9}$$

где $G \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, оператор $B: \mathrm{dom}B \subset \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ линеен, замкнут, плотно определен в $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ – банахово пространство.

Решением уравнения (9) назовем функцию $v \in C([0,+\infty); \mathcal{B}) \cap C^\infty((0,+\infty); \mathcal{B})$, удовлетворяющую этому уравнению.

Определение 2. Отображение $S^\bullet \in C^\infty((0,+\infty); \mathcal{L}(\mathcal{B}))$ называется разрешающей C-полугруппой уравнения (9), если:

1) $S^\bullet : (0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ – C-полугруппа;

2) $\forall x \in \mathcal{B}$ функция $x(t) = S^t x$ является решением уравнения (9).

C-полугруппа $S^\bullet : (0,+\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ называется аналитической, если она продолжима в некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную полуось.

Теорема 2. Существуют разрешающие аналитические экспоненциально ограниченные С-полугруппы уравнений (4) и (5).

Доказательство. Искомые C-полугруппы задаются равенствами (7). Интегралы (7) допускают аналитическое продолжение в сектор $\Sigma = \{\tau \in \boldsymbol{C}: |\arg\tau| < \theta - \frac{\pi}{2}\}$, т.к. при $\mu \in \Gamma$ и $\tau \in \Sigma$ $\cos(\arg\mu + \arg\tau) < 0$ и поэтому возможно дифференцирование по параметру под знаком интеграла. При любом $u_0 \in U$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ удовлетворяет уравнению (4):

$$R_\mu^L(M)\dot{u} - (\mu L - M)^{-1}Mu = (\mu L - M)^{-1}(L\dot{u} - Mu) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i}(\mu L - M)^{-1}\int_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda - a)^n}(\lambda L - M)(\lambda L - M)^{-1}Lu_0 d\lambda = 0.$$

Аналогично проверяется, что $f(t) = F^t f_0$ является решением уравнения (5) при любом $f_0 \in F$. ▲

Так же как для обычных резольвент [5], для правой и левой L-резольвенты оператора M имеют место равенства

$$(R_\mu^L(M))^{(k)} = (-1)^k k!(R_\mu^L(M))^{k+1}, \tag{10}$$

$$(L_\mu^L(M))^{(k)} = (-1)^k k!(L_\mu^L(M))^{k+1}. \tag{11}$$

Вычислим оператор C_U для C-полугруппы U^t. Для этого воспользуемся замкнутым контуром, состоящем из дуги l_r окружности с центром в точке a и радиуса $r > R$, где R – число, фигурирующее в условии А), и части Γ_r контура Γ, содержащейся внутри окружности. Тогда, в силу (10),

$$C_U = U^0 = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\left(\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r \cup l_r}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu - \lim_{r\to\infty}\int_{l_r}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}d\mu\right) =$$

.

$$= (-1)^{n+1} \operatorname*{Res}_{\mu=a} \frac{R^L_\mu(M)}{(\mu-a)^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}(R^L_a(M))^{(n-1)} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}(-1)^{n-1}(n-1)!(R^L_a(M))^n = (R^L_a(M))^n .$$

Здесь первый интеграл по $\Gamma_r \bigcup l_r$ вычислен с помощью вычетов с учетом направления по часовой стрелке на контуре, предел второго интеграла по l_r в силу условия А) равен нулю. Аналогично показывается, что $C_F = (L^L_a(M))^n$.

4. Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0 \tag{12}$$

для уравнения (9). Для уравнений (6) и (7) начальное условие (12) сводится, соответственно, к виду

$$u(0) = u_0, \tag{13}$$

$$f(0) = f_0. \tag{14}$$

Теорема 3. Для любого $u_0 \in \mathrm{im} C_U$ ($f_0 \in \mathrm{im} C_F$) задача Коши (13) ((14)) для уравнения (4) ((5)) разрешима.

Доказательство. Пусть $u_0 \in \mathrm{im} C_U$, т.е. $u_0 = C_U z_0$ для некоторого $z_0 \in U$. Тогда в силу теоремы 2, функция $u(t) = U^t z_0$ является решением уравнения (4). Условие (13) $u(0) = U^0 z_0 = C_U z_0 = u_0$ также выполняется. ▲

Так как C-полугруппы $U^\bullet$ и $F^\bullet$, определяемые равенствами (7), в силу теоремы 2 экспоненциально ограниченные, то можно вычислить их преобразования Лапласа. Вычислим преобразование Лапласа $\mathcal{L}_\mu(U)$ C-полугруппы $U^\bullet$. Изменив порядок интегрирования и применив теорему о вычетах, получим при $\operatorname{Re}\mu > a > \operatorname{Re}\lambda$

$$\mathcal{L}_\mu(U) = \int_0^\infty e^{-\mu t}U^t dt = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\lambda(M)\frac{d\lambda}{(\lambda-a)^n}\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}dt = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R^L_\lambda(M)d\lambda}{(\lambda-a)^n(\mu-\lambda)} =$$

$$= (-1)^n \operatorname*{Res}_{\lambda=a} \frac{R^L_\lambda(M)}{(\lambda-\mu)(\lambda-a)^n} + (-1)^n \operatorname*{Res}_{\lambda=\mu} \frac{R^L_\lambda(M)}{(\lambda-\mu)(\lambda-a)^n} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{R^L_\lambda(M)}{\lambda-\mu}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{\lambda=a} + (-1)^n\frac{R^L_\mu(M)}{(\mu-a)^n}. \tag{15}$$

Вычислим в (15) первое слагаемое:

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{R^L_\lambda(M)}{\lambda-\mu}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{\lambda=a} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}C^i_{n-1}((\lambda-\mu)^{-1})^{(n-1-i)}\Big|_{\lambda=a}(R^L_\lambda(M))^{(i)}\Big|_{\lambda=a} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{i=0}^{n-1}C^i_{n-1}(-1)^{n-1-i}(n-1-i)!(a-\mu)^{-(n-i)}(-1)^i i!(R^L_a(M))^{i+1} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(R^L_a(M))^{i+1}}{(a-\mu)^{n-i}} = -\frac{R^L_a(M)}{(a-\mu)^n}\sum_{i=0}^{n-1}(a-\mu)^i(R^L_a(M))^i. \tag{16}$$

Для вычисления последней суммы воспользуемся равенством:

$$(\mathrm{I}-(a-\mu)R^L_a(M))\sum_{i=0}^{n-1}(a-\mu)^i(R^L_a(M))^i = \mathrm{I}-(a-\mu)^n(R^L_a(M))^n. \tag{17}$$

Справедливо равенство $\mathrm{I}-(a-\mu)R^L_a(M) = (aL-M)^{-1}(\mu L-M)$, в котором оператор, стоящий справа, можно считать определенным на всем пространстве U в силу замкнутости M и плотности $\mathrm{dom}M$ в U.

Если $\mu \in \rho^L(M)$, то $\exists(\mu L-M)^{-1}$ и, следовательно, существует

$$(\mathrm{I}-(a-\mu)R^L_a(M))^{-1} = (\mu L-M)^{-1}(aL-M).$$

.

Тогда из (17) следует, что

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a-\mu)^i (R_a^L(M))^i = (\mu L - M)^{-1}(aL-M)(\mathrm{I}-(a-\mu)^n C_U). \tag{18}$$

Подставив (18) в (16), получим

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\left(\frac{R_\lambda^L(M)}{\lambda-\mu}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{\lambda=a} = -\frac{1}{(a-\mu)^n}\,(aL-M)^{-1}L(\mu L-M)^{-1}(aL-M)(\mathrm{I}-(a-\mu)^n C_U) =$$

$$= -\frac{1}{(a-\mu)^n}\,R_\mu^L(M)(\mathrm{I}-(a-\mu)^n\, C_U).$$

Из равенства (15) имеем окончательно: $\mathcal{L}_\mu(U) = C_U R_\mu^L(M)$. Аналогично можно получить равенство $\mathcal{L}_\mu(F) = C_F L_\mu^L(M)$, справедливое при $\mathrm{Re}\,\mu > a$.

Лемма 1. При $\mathrm{Re}\,\mu > a$ справедливо неравенство

$$\max(\|\mathcal{L}_\mu(U)\|, \|\mathcal{L}_\mu(F)\|) \le \frac{Q}{\mathrm{Re}\,\mu - \sigma_0}, \tag{19}$$

где постоянная Q не зависит от μ.

Доказательство. В силу теоремы 1 $\|U^t\| \le Q_1 e^{t\sigma_0}$, $\|F^t\| \le Q_2 e^{t\sigma_0}$. Тогда

$$\|\mathcal{L}_\mu(U)\| \le Q_1\int_0^\infty e^{-t\,\mathrm{Re}\,\mu}e^{t\sigma_0}dt = \frac{Q_1}{\mathrm{Re}\,\mu-\sigma_0}.$$

Аналогично $\|\mathcal{L}_\mu(F)\| \le \dfrac{Q_2}{\mathrm{Re}\,\mu-\sigma_0}$. Положив Q=max(Q_1, Q_2), получим неравенство (19). ▲

Вектор $\varphi_0 \in \ker L\setminus\{0\}$ будем называть собственным вектором оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ векторов из U называется цепочкой M-присоединенных векторов вектора φ_0, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0,1,\ldots$ и $\varphi_q \notin \ker L\setminus\{0\}$, $q = 1,2,\ldots$ [1]. Порядковый номер вектора в цепочке называется его высотой, а порядковый номер последнего вектора, в случае конечной цепочки, называется высотой этой цепочки. Линейная оболочка M-присоединенных векторов оператора L называется его M-корневым линеалом. В [6] доказано, что M-корневой линеал оператора L состоит только из M-присоединенных векторов оператора L и нуля.

Лемма 2. Если φ_q M-присоединенный вектор вектора φ_0 высоты не больше q, то $(-1)^q (R_a^L(M))^{q-1} R_\mu^L(M)\varphi_q = \varphi_0$. Вектор φ_q M-присоединенный вектор оператора L высоты не больше q точно тогда, когда $(R_a^L(M))^q R_\mu^L(M)\varphi_q = 0$.

Доказательство проводится почти так же, как доказательство аналогичного утверждения в [6].

Лемма 3. Длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом n.

Доказательство. Пусть φ_{n+1} – M-присоединенный вектор вектора φ_0 высоты $n+1$. Тогда в силу леммы 2

$$\varphi_0 = (-1)^{n+1}(R_\mu^L(M))^n R_\mu^L(M)\varphi_{n+1} = (-1)^{n+1}\,\mathcal{L}_\mu(U)\,\varphi_{n+1},$$

где $\varphi_0 \in \ker L\setminus\{0\}$. Отсюда. В силу (19), имеем:

$$\|\varphi_0\| \le \|\mathcal{L}_\mu(U)\|\cdot\|\varphi_{n+1}\| \le \frac{Q}{\mathrm{Re}\,\mu - a}\|\varphi_{n+1}\| \to 0$$

при $\mathrm{Re}\,\mu \to \infty$. Следовательно, $\varphi_0 = 0$. Что противоречит выбору φ_0. ▲

Лемма 4. Справедливы равенства

$$\ker\mathcal{L}_\mu(U)\cap\mathrm{im}\,\mathcal{L}_\mu(U) = \{0\}, \tag{20}$$

$$\ker\mathcal{L}_\mu(F)\cap\mathrm{im}\,\mathcal{L}_\mu(F) = \{0\}. \tag{21}$$

.

Доказательство. Пусть ненулевой вектор φ, принадлежит левой части равенства (20). Тогда $\exists \psi \in U$ такой, что $\varphi = (R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)\psi \in \ker \mathcal{L}_\mu(U)$. Следовательно, $(R_a^L(M))^{2n}(R_\mu^L(M))^2\psi = 0$. В силу леммы 2 это означает, что вектор ψ является M-присоединенным вектором оператора L высоты не больше $2n$+1. Но по лемме 3 его высота не больше n. Поэтому $\varphi = (R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)\psi = 0$.

Пусть f принадлежит теперь левой части равенства (21). Тогда $f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)g$, $g \in F$. Кроме того $(L_a^L(M))^n L_\mu^L(M) f = 0$. Следовательно, $(L_a^L(M))^{2n}(L_\mu^L(M))^2 g = 0$ или $(R_a^L(M))^{2n}(R_\mu^L(M))^2(aL-M)^{-1}g = 0,$ т.е. $(aL-M)^{-1}g \in \ker (R_a^L(M))^{2n}(R_\mu^L(M))^2$. Это означает согласно лемме 2, что вектор $(aL-M)^{-1}g$ является M-присоединенным высоты не больше $2n$+1. Но его высота не может быть больше n. Поэтому $(R_a^L(M))^n R_\mu^L(M)(aL-M)^{-1}g = 0$ или, применив к последнему равенству оператор L, $f = (L_a^L(M))^n L_\mu^L(M)g = 0$. ▲

Определение 3. Замкнутое множество $\Phi \subset \mathcal{B}$ называется фазовым пространством уравнения (9), если

1) любое решение v уравнения (9) лежит в Φ, т.е. $\forall t > 0 \ \ v(t) \in \Phi$;
2) для любого v_0 из некоторого плотного в Φ множества Φ_0 существует единственное решение задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (9).

Обозначим U^1 (F^1) замыкание $\operatorname{im}\mathcal{L}_\mu(U)$ $(\operatorname{im}\mathcal{L}_\mu(F))$.

Теорема 4. Пусть операторы L и M удовлетворяют условию А). Тогда U^1 (F^1) является фазовым пространством уравнения (4) ((5)).

Доказательство. Если u – решение уравнения (4), то, как показано в [7], $\forall \lambda \in \rho^L(M)$, $\forall k \in \mathbf{N}$

$$u = (R_\lambda^L(M))^k (\lambda - \frac{d}{dt})^k u.$$

Положив здесь $\lambda = a$, $k = n$ и использовав это равенство при $\lambda = \mu$ и $k = 1$, получим:

$$u = (R_a^L(M))^n (a - \frac{d}{dt})^n R_\mu^L(M)(\mu - \frac{d}{dt})u = (R_\lambda^L(M))^n R_\mu^L(M)(a - \frac{d}{dt})^n (\mu - \frac{d}{dt})u.$$

Отсюда следует, что $u \in \operatorname{im}\mathcal{L}_\mu(U) \subset U^1$. Пусть $u_0 \in \operatorname{im}\mathcal{L}_\mu(U)$, т.е. $u_0 = C_U R_\mu^L(M)x_0$, $x_0 \in U$. Тогда функция $u(t) = U^t R_\mu^L(M)x_0$ в силу теоремы 3 является решением задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (4). Докажем единственность этого решения. Пусть v – другое решение задачи Коши $v(0) = u_0$ для уравнения (4). Рассмотрим на $[0,t]$ функцию $w(s) = U^{t-s}R_\alpha^L(M)v(s)$. Найдем

$$w'(s) = R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu(t-s)}\frac{R_\mu^L(M)}{(\mu-a)^n}(v'(s) - \mu v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - \mu R_\mu^L(M)v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1}Mv(s) - v(s))d\mu =$$

$$= R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}(R_\mu^L(M)v'(s) - (\mu L - M)^{-1}Mv(s))d\mu - R_\alpha^L(M)\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\mu(t-s)}}{(\mu-a)^n}d\mu = 0.$$

Следовательно, $w(0) = w(t)$, т.е. $U^t R_\alpha^L(M)v(0) = C_U R_\alpha^L(M)v(t)$ или $U^t R_\alpha^L(M)C_U R_\mu^L(M)x_0 - C_U R_\alpha^L(M)v(t) = 0.$ Отсюда

$$C_U R_\alpha^L(M)(U^t R_\mu^L(M)x_0 - v(t)) = C_U R_\alpha^L(M)(u(t) - v(t)) = 0.$$

Поэтому $u(t)-v(t)\in \ker \mathcal{L}_\alpha(U)$. Кроме того, как показано выше, $u(t)-v(t)\in \operatorname{im}\mathcal{L}_\mu(U) = \operatorname{im}\mathcal{L}_\alpha(U)$. Тогда в силу равенства (20), $u(t)=v(t).$ Доказательство для уравнения (5) проводится аналогично. ▲

Литература

1. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // *УМН*.-1994.-Т.49.-Вып. 4(298).- С. 47 – 74.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. 275 с.
3. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Наука, 1999. 175 с.
4. Мельникова И.В., Филинков А.И. Интегрированные полугруппы и *C*-полугруппы. Корректность и регуляризация дифференциально-операторных задач // *УМН*.-1994.-Т. 49.-Вып. 6(300).- С. 11 – 150.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИИЛ. 1962.
6. Федоров В.Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами. Челябинск: ЧелГУ, 1988. 78 с.
7. Федоров В.Е. Исследование разрешающих полугрупп линейных уравнений типа Соболева. Дисс….канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1996.