МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика обучения действиям с комплексными числами в условиях профильной дифференциации

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
64 % авторского текста
Работа рекомен к защите
« 25 » мая 2020 г.
И.о. завкафедрой МиМОМ
_________ Шумакова Екатерина Олеговна

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513-086-5-1
Прыткова Анастасия Алексеевна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Вагина Мария Юрьевна

Челябинск
2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………………… 4
Глава I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ……………….. 7
1.1. Этапы развития профильного обучения в рамках удовлетворения современного социального заказа……………………………………… 7
1.2. Становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС……………………………………………...……………........ 13
1.2.1. Формирование УУД у обучающихся в условиях профильной дифференциации…………………………………………………… 13
1.2.2. Обзор профилей по ФГОС……………………………………... 17
1.3. Методические особенности изучения раздела «Комплексные числа» в курсе алгебры 10-11 класса………………………………… 18
1.3.1. Психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста……………………………………… 18
1.3.2. Исторический аспект развития раздела «Комплексные числа» и подходы к введению понятия комплексного числа …………………… 21
Выводы по I главе……………………………………………………... 25
Глава II. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ РАБОТА ПО ФОРМИРОВАНИЮ НАВЫКОВ РАБОТЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ…………………………………………………………….. 27
2.1. Методика изучения раздела «Комплексные числа» в курсе алгебры 10-11 класс………………………………………………… 27
2.1.1. Анализ учебно-методических комплексов по алгебре и началам анализа в аспекте изучения раздела «Комплексные числа»…………... 27
2.1.2. Методические особенности изучения раздела «Комплексные числа» на примере УМК Г.К. Муравина и О.В. Муравиной………….. 29
2.2. Типы заданий, способствующих развитию навыков работы с комплексными числами…………………..……………………….. 35

2.3. Опытная работа по формированию навыков работы с комплексными числами……………………………………………............. 41
2.3.1. Методические материалы к разделу «Комплексные числа»…… 41
2.3.2. Апробация разработанных методических материалов и комплекса заданий……………………………………………………….. 52
Выводы по II главе……………………………………………………….. 55
Заключение……………………………………………………………….. 57
Список литературы………………………………………………………. 59
ПРИЛОЖЕНИЕ 1…………………………………………………………. 63
ПРИЛОЖЕНИЕ 2…………………………………………………………. 67

ВВЕДЕНИЕ

Математика является частью общечеловеческой культуры. Целью обучения математике в школе является развитие культуры каждого ребенка, его познавательных и творческих способностей, интеллекта. Изучая математику, обучающиеся вооружаются конкретными математическими знаниями, которые необходимы для изучения смежных дисциплин, а также в практической деятельности. Изучение математики способствует развитию личности ребенка, становлению его гуманитарной культуры. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования дает обучающимся возможность самостоятельного выбора уровня и направления математической подготовки.

Модель профильного обучения ставит перед педагогами целый ряд проблем, решение которых требует новых теоретических и прикладных исследований. Остро актуальной является проблема отбора содержания обучения для курса математики профильного уровня, курсов по выбору и разработка соответствующего методического обеспечения.

Изучением раздела «Комплексные числа» завершается одна из основных содержательных линий школьного курса математики - развитие понятия числа, весомость этого раздела в математической культуре учащихся является неоспоримой. Целостное, завершенное представление о числе является важным шагом в процессе формирования научного мировоззрения учащихся. Широкий круг применений комплексных чисел открывает значительные дидактические возможности для развития математических интересов учащихся. Наличие в арсенале обучающихся комплексных чисел обогащает их представления о методах познания, расширяет их возможности при решении задач, усиливает прикладную функцию математики.

Целью дипломной работы является изучение методики преподавания комплексных чисел в старших классах средней школы и разработать комплекс задач, направленных на обучение действиям с комплексными числами.

Объектом исследования является процесс обучения математике в старшей школе.

Предмет исследования: методика изучения действий с комплексными числами в курсе алгебры 10-11 класса средней школы.

Гипотеза исследования: изучение действий с комплексными числами, будет способствовать эффективности обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями продолжения образования.

Поставленная цель определяет следующие **задачи:**

– изучить состояние и перспективы системы профильного обучения учащихся 10-11 классов;

– изучить становление профильного обучения в условиях реализации ФГОС;

– проанализировать психолого-педагогическую, учебную, методическую литературу, связанную с проблемой изучения действий с комплексными числами;

– рассмотреть методические особенности изучения раздела, провести анализ учебно-методических комплексов по алгебре и началам анализа в аспекте изучения раздела «Комплексные числа»;

– представить типы заданий, способствующих формированию навыков работы с комплексными числами;

– рассмотрев методические особенности изучения действий с комплексными числами в старшей школе, представить методические материалы, комплекс заданий и конспект урока алгебры для классов с углубленным изучением математики.

Методы исследования: наблюдение, сравнение, анализ, обобщение, описание.

Структура исследования: работа состоит из двух глав, первая глава содержит три параграфа и раскрывает психолого-педагогические основы профильной дифференциации обучения, вторая глава содержит три параграфа и раскрывает практико-ориентированную работу по формированию навыков работы с комплексными числами.

ГЛАВА I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОФИЛЬНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ОБУЧЕНИЯ

1.1 Этапы развития профильного обучения в рамках удовлетворения современного социального заказа

Этапы и содержание перехода всей системы общеобразовательной школы в школу с профильным обучением в старших классах были сформулированы в Концепции модернизации российского образования. В Концепции образование названо фактором формирования нового качества экономики и общества в целом [12, с. 14]. Основными понятиями являются «профильное обучение» и «профильная школа», для полноты картины следует их разграничить между собой. Профильное обучение является средством дифференциации и индивидуализации обучения, оно позволяет за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профильными интересами и намерениями в отношении продолжения образования [2, с. 29]. Основной формой реализации обозначенных целей является профильная школа, однако, перспективными в отдельных случаях могут стать иные формы организации профильного обучения, в том числе выводящие реализацию соответствующих образовательных стандартов и программ вне отдельного общеобразовательного учреждения [2, с. 30].

Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, при этом расширяются возможности индивидуальной образовательной траектории. В «Концепции модернизации российского образования» одним из приоритетных направлений образовательной политики заявлено создание системы профильного обучения в старших классах общеобразовательной школы и обозначены следующие цели введения профильного обучения:

1) обеспечение углубленного изучения отдельных учебных предметов по программам среднего (полного) общего образования;

2) создание условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ;

3) установление равного доступа к полноценному образованию разным категориям учащихся в соответствии с их способностями, индивидуальными склонностями и потребностями;

4) расширение возможностей социализации учащихся, обеспечение преемственности между общим и профессиональным образованием, более эффективной подготовки выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования [23].

Основная идея обновления старшей ступени общего образования в том, что образование здесь должно стать более индивидуализированным, функциональным и эффективным.

«На современном этапе образовательная политика ставит новые задачи по обеспечению ее соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства. Развитие образования теснейшим образом связано с основными направлениями социально-экономической политики Правительства Российской Федерации на долгосрочную перспективу» [2, с. 32].

Наше время характеризуют динамичные преобразования в теории и практике отечественного образования, а также, в экономическом, социальном и культурном развитии общества. В основе процесса профилизации значительную роль играет формирование профессиональной компетентности специалиста, что в свою очередь невозможно без создания системы непрерывного образования. В современных условиях идет перспективное реформирование общего среднего образования на социальное воспроизводство трудовых, в первую очередь интеллектуальных, ресурсов России. Образование должно реагировать уже сейчас на потребности общества, которые проявятся через несколько лет [11, с. 10]. В концепции подчеркивается, что роль образования на современном этапе развития России определяется задачами ее перехода к демократическому и правовому государству, к рыночной экономике, необходимостью преодоления опасности отставания страны от мировых тенденций экономического и общественного развития [23].

Профильное обучение рассматривается как многостороннее комплексное средство повышения качества, эффективности и доступности общего образования. Оно позволяет за счет изменений в структуре, содержании, организации образовательного процесса и дифференциации в большей мере учитывать интересы, склонности и способности обучающихся, создавать возможности для ориентации образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования. В соответствии с вышеизложенным, существенно расширяются возможности построения обучающимися индивидуальной образовательной траектории, обеспечивается более высокий уровень его подготовки для продолжения обучения в выбранном направлении. Новизна представленного в Концепции подхода состоит в том, что профильная (однопрофильная, многопрофильная) школа рассматривается лишь как одна из форм реализации профильного обучения. В качестве наиболее перспективных обозначены новые формы организации профильного обучения: обучение по индивидуальному учебному плану и сетевые формы взаимодействия образовательных учреждений, выводящие реализацию образовательных стандартов и программ за рамки отдельного общеобразовательного учреждения [12, с. 20].

Наряду с новизной возникли проблемы в связи с введением профильного обучения:

- возникла потребность в новом экономическом механизме работы школы и новой системе оплаты труда педагогов;
- появилась необходимость обновления механизмов управления школой, с расширением общественного участия в определении путей развития профильного обучения для каждого конкретного общеобразовательного учреждения и всей муниципальной образовательной сети;
- возникла необходимость совершенствования методик преподавания предметов, изучаемых на базовом и профильном уровнях;
- возникла необходимость создания дополнительных элективных курсов и разработки методик их преподавания, обеспечение учебной и методической литературой [8, с. 31].

Министерство образования и науки Российской Федерации выдвинуло требования к учебным изданиям для профильного обучения, в том числе: соответствие требованиям образовательных стандартов. Однако есть ряд проблем сопутствующие этим требованиям, во-первых, отсутствие финансирования — в большинстве школ старшеклассникам приходится приобретать учебники за собственный счет, во - вторых, учителя, особенно с большим стажем работы, привыкли к конкретному учебно-методическому комплексу [8, с. 35]. Профильное обучение сегодня находится между поставленными целями и реальной практикой. Кроме проблем практического характера, существует важная проблема, в недостаточном количестве научных исследований и методических разработок по вопросам профильного обучения в его современной трактовке, как комплексной организационно - педагогической инновации. Публикации по вопросам профильного обучения и профильной ориентации старшеклассников, конца 90-х годов вместе с Концепцией профильного обучения на старшей ступени общего образования, составляют научно-теоретический базис для дальнейшего развития теории и практики профильного обучения. «Теоретико-методологические и методические положения современной концепции профильного обучения заложены, обоснованы и развиты в работах Баранникова А. В., Болотова В. А., Блинова В. И., Каспржака А. Г., Капустняка А. Г., Кузнецова А. А., Колисниченко И. И., Митрофанова К. Г., Новиковой Т. Г., Пинской М. А., Пинского А. А., Рачевского Е. Л., Рыжакова М. В., Суматохина С. В., Филиппова В. М., Фрумин И. Д., Чечель И. Д.» [25].

Современный мир не мыслим без нанотехнологий и наноматериалов, технологий искусственного интеллекта и программной инженерии, космических технологий. Востребованы будут мультиязычность и мультикультурность — свободное владение английским и знание второго иностранного языка, понимание национального и культурного контекста стран-партнеров и специфики работы в других странах. Конкурентным преимуществом станет готовность и умение работать в режиме высокой неопределенности: быстро принимать решения, реагировать на изменение условий, распределять ресурсы и управлять своим временем.

Внедрение профильного обучения в школах ведется с 1 сентября 2003 г., и сегодня мы можем видеть положительные результаты введения профильного обучения:

1) старшеклассники в профильной школе приобретают опыт выстраивания своей образовательной и профессиональной перспективы, осуществляют профессиональные пробы, что позволяет им успешнее самоопределяться в современных социально-экономических условиях;

2) выпускники школы, прошедшие обучение в профильных классах, не только поступают в высшие учебные заведения, но, как правило, быстрее адаптируются в новых условиях, уверенно чувствуют себя на экзаменах и занятиях в вузах [13, с. 37].

Резкое сокращение числа выпускников технических специальностей привело к тому, что квалифицированные специалисты высшего эшелона отдельных отраслей производства вплотную подошли к пенсионному возрасту, низовые должности (рабочие профессии) молодежь мало интересуют, а на уровне среднего руководящего состава вообще образовался вакуум. Возникла опасность того, что в ближайшие годы сектора экономики региона, дающие основные бюджетные поступления, могут попросту остаться без кадров [24, с. 26]. Сложившаяся ситуация переросла в проблему, которая требует скорейшего разрешения. Проблема будет решена, когда спрос на специалистов различных сфер экономики будет равен предложениям, поступающим от образовательных организаций, в связи с трудоустройством своих выпускников. Следовательно, образовательным организациям необходимо изучать такие специальности, которые будут востребованы на рынке труда. В свою очередь, люди, поступающие в образовательные организации, должны иметь возможность после завершения обучения работать по специальности. Безусловно, одним из приоритетных направлений изучения в данном контексте является математика, прикладные знания по математике будут служить отличной базой для развития специалистов технической сферы, что позволит свести проблему к минимуму.

Однако, получая соответствующее образование, обучающиеся должны не только связывать с будущей профессией (специальностью) свои профессиональные планы, но и реализовывать их, а непросто повышать свой культурный уровень в процессе обучения в образовательной организации.

В данной ситуации открытие специальностей, напрямую связанных с математикой, и увеличение плана набора на них не решит в полной мере обозначенную проблему, поскольку открываемые специальности могут оказаться невостребованными со стороны обучающихся и их законных представителей.

Согласно Концепции профориентационной работы образовательных организаций Челябинской области, разработанной Челябинским институтом развития профессионального образования, проблема может быть разрешена:

- если система профориентационной работы Челябинской области будет обеспечивать условия для профессионального самоопределения личности с последующей ее самореализацией в условиях территориального проживания;
- если общеобразовательная школа будет ориентирована на формирование социально грамотной и социально мобильной личности, ясно понимающей ценность образования для своего личностного и профессионального развития и четко представляющей спектр имеющихся на сегодняшний день возможностей и ресурсов;
- если в результате образовательного процесса, построенного сообразно динамике возрастного развития, учащийся будет обладать соответствующими компетентностями, определенным социальным опытом, умениями делать осознанный выбор (на уровне имеющейся информации и опыта) и нести ответственность за него, успешно реализовать избранную позицию в том или ином социальном пространстве;
- если выпускник школы будет уметь учиться и овладевать новыми смежными профессиями в зависимости от конъюнктуры рынка труда [13, с. 12].

Для того чтобы повысить интерес к данного рода специальностям и способствовать решению обозначенной проблемы необходимо повысить интерес в целом к математической науке, открыть для обучающихся новые грани изучаемого предмета. Профильная дифференциация позволяет углубить знания обучающихся, что, в дальнейшем, позволяет способным ученикам легче пройти через ситуацию профессионального выбора.

1.2 Становление профильного обучения в условиях ФГОС

1.2.1 Формирование УУД у обучающихся в условиях профильной дифференциации

Основываясь на принципах преемственности образовательных программ начального общего, основного общего, среднего (полного) общего, профессионального образования, новые стандарты определяют формирование нового содержания профильного образования. В качестве ориентиров профильной школы выступают отдельные положения ФГОС. «Основой стандарта является системно-деятельностный подход, который обеспечивает формирование готовности учащихся к саморазвитию и самообразованию. В условиях нового профильного образования ученик – личность индивидуальная, самостоятельная в проектировании жизненных и профессиональных задач» [22, с. 12].

Требования к результатам освоения основной образовательной программы определяют значимые направления подготовки педагогов к реализации работы в классах с углубленным изучением предмета. Важным для педагогов является знание концептуальных основ и владение технологиями формирования универсальных учебных действий (УУД) в профессиональном самоопределении школьников [19].

Личностные результаты в профессиональном самоопределении школьников:

- ✓ выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов;
- ✓ отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем.

Метапредметные результаты в профессиональном самоопределении школьников:

- ✓ умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности;
- ✓ самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность;

- ✓ использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности;
- ✓ выбирать успешные стратегии в различных ситуациях.

Велика роль формирования у учащихся универсальных учебных действий (УУД) для профессионального самоопределения школьников [15].

Личностные УУД обеспечивают ценностно-смысловую ориентацию учащихся (знание моральных норм и умение видеть нравственный аспект поведения, умение соотносить поступки и события с принятыми этическими принципами), а также ориентацию в социальных ролях и межличностных отношениях.

Регулятивные УУД обеспечивают организацию учащимся своей учебной деятельности (целеполагание, планирование, составление плана и последовательности действий, прогнозирование, контроль, коррекция, оценка, способность к выбору, саморегуляция) и являются важными качествами успешного специалиста в любой профессиональной сфере.

Познавательные УУД включают общеучебные, логические действия, а также действия постановки решения проблем, что немаловажно для каждого профессионала.

Коммуникативные УУД обеспечивают социальную компетентность и учет позиции других людей, партнера по общению или деятельности, умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, интегрироваться в группу сверстников и строить продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми.

Таким образом, универсальные учебные действия выступают как показатели гармоничного развития личности. Поэтапное и целенаправленное развитие УУД у учащихся на каждой ступени обучения определяет характеристики будущего профессионала:

- жизненное и личностное самоопределение;
- социальная и профессиональная мобильность;

- умение общаться и строить продуктивное сотрудничество.

Выбор содержания образования может делать каждый учащийся в зависимости от его интересов, познавательных способностей, их последующих профессиональных намерений. «Стандартом предусмотрена внеурочная деятельность для успешной профилизации учащихся на основе вариативной составляющей базисного учебного плана: экскурсии, кружки, секции, круглые столы, конференции, диспуты, КВН, школьные научные общества, олимпиады, соревнования, проектные, поисковые и научные исследования и т. д. В рамках внеурочной деятельности ученик может знакомиться с миром профессий, их содержанием, осуществлять профессиональные пробы, приобретать необходимые личностные и профессионально значимые качества» [22, с. 16]. Следовательно, учителям необходимы практико-ориентированные формы повышения квалификации по разработке программ внеурочной деятельности по математике, программ воспитания и социализации обучающихся, включающих описание методов и форм профессиональной ориентации в образовательном учреждении.

Для развития широкого спектра познавательных и профессиональных интересов, в том числе интереса к математике в целом, а также ключевых компетенций школьников, обеспечивающих успешность в их будущей профессиональной деятельности учитель должен владеть эффективными формами профориентационной работы, учитель должен уметь:

- находить условия для мотивации к успешной деятельности, а также самомотивирования обучающихся;
- выполнять поиск и анализ информации с помощью современных информационно-поисковых технологий;
- организовывать исследовательскую и проектную деятельность учащихся, выполнение индивидуального проекта;
- давать комплексную оценку способностей учащихся;
- решать учебно-практические и познавательные задачи.

Используя вариативные, диалоговые, эвристические, индивидуализированные технологии учитель актуализирует своё профессиональное мастерство и обеспечивает выполнение требований ФГОС [19].

1.2.2 Обзор профилей подготовки по ФГОС

Школа, осуществляя образовательную деятельность, должна обеспечить реализацию одного или нескольких учебных профилей. Образовательная организация часто выявляет предпочтения обучающихся и использует этот анализ для планирования того, какие именно профили будут реализовываться. Профильными общеобразовательными предметами являются курсы повышенного уровня, углубляющие знания базовых общеобразовательных предметов. Деятельность и учителей, и учеников, по освоению профильных предметов, направлена на овладение знаниями и умениями, определенными в федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования.

Перечень профилей, согласно ФГОС среднего общего образования, которые может предложить школа обучающимся на среднем уровне образования представлен в Таблице 1.

Таблица 1 — Перечень профилей по ФГОС

№	Профиль	Профильные предметы
1.	Естественно-научный	математика и начала математического анализа, геометрия, химия, биология
2.	Гуманитарный	русский язык и литература, иностранный язык, обществознание, история, право
3.	Социально-экономический	математика и начала математического анализа, экономика, право, география, геометрия
4.	Технологический профиль	алгебра и начала математического анализа, геометрия, физика, информатика
5.	Универсальный	базовые предметы, не исключая углубленное изучение предметов

Универсальный профиль ориентирован на тех обучающихся, кто еще не определились с выбором дальнейшей профессии, и область интересов ребенка не находит отражение в других профилях подготовки, именно поэтому требования ФГОС среднего общего образования выбрать 3–4 предмета для углубленного изучения не распространяются на данный профиль. Универсальный профиль позволяет ученику ограничиться изучением основных предметов, не исключая углубленного изучения каких-либо дисциплин.

Учебный план профиля обучения или индивидуальный учебный план должны содержать одиннадцать или двенадцать учебных предметов и предполагать изучение не менее одного учебного предмета из каждой предметной области. Обязательными для включения во все учебные планы являются: русский язык, литература, математика, история, иностранный язык, физическая культура, основы безопасности жизнедеятельности и астрономия.

Также учебный план профиля обучения (кроме универсального) должен содержать не менее 3/4 учебных предметов на углубленном уровне изучения из соответствующей профилю обучения предметной области или смежной с ней предметной области.

1.3 Методические особенности изучения раздела «Комплексные числа» в курсе алгебры 10-11 класса

1.3.1 Психолого-педагогические и возрастные особенности детей старшего школьного возраста

Старший школьный возраст является начальным этапом физической зрелости и в то же время стадией завершения полового развития. Переход от детства к взрослой жизни предполагает не только физическое созревание, но и приобщение к культурному наследию, овладение определенной системой знаний, норм и навыков, благодаря которым человек может трудиться, выполнять общественные функции и нести социальную ответственность.

Однако процесс личностного образования школьников этого возраста не проходит гладко, у него есть свои противоречия и трудности, которые, несомненно, формируют особенности образовательного процесса.

На более высокий уровень поднимается развитие нервной системы и приводит к ряду специфических особенностей познавательной деятельности и эмоционально-чувственной сферы. Абстрактное мышление, стремление лучше понять природу и причинно-следственные связи изучаемых объектов и явлений становятся преобладающими в деятельности обучающихся.

Дети старшего школьного возраста осознают, что изучение фактов и примеров полезно как материал для дальнейших размышлений, для теоретических обобщений. Следовательно, аналитико-синтетическая деятельность и стремление к сравнению преобладают в мышлении обучающихся старших классов. Категоричность суждений отходит на второй план и уступает место гипотетическим предположениям, учащиеся начинают видеть содержание изучаемых явлений, видят их нередкую противоречивость и взаимосвязи между ними.

Особенности мышления и познавательной деятельности формируются под влиянием окружающей действительности, в том числе и процесса обучения и воспитания. Одним из важнейших аспектов работы является возможность уделить должное внимание развитию мыслительных способностей обучающихся, поскольку упущение данного аспекта, может повлечь тенденцию к полумеханическому запоминанию изучаемого материала.

Определенной чертой большинства обучающихся старшего школьного возраста является наличие устойчивых познавательных интересов, прежде всего это относится к хорошо успевающим школьникам. Наиболее распространенным является интерес к изучению предметов естественного цикла: математики, физики, экономики, информатики. В этом сказывается понимание их роли и значения в научно-техническом прогрессе. Однако если мы говорим о средне- и слабоуспевающих учащихся, то многие из них не имеют четко выраженных познавательных интересов, некоторые обучающиеся нередко вообще учатся без достаточной мотивации. Психологически это объясняется тем, что трудности и отсутствие успехов в овладении знаниями отрицательно сказываются на их эмоциональной и мотивационной сфере, что в конечном итоге и снижает активность их учебной деятельности. Преодолеть этот недочет можно только при условии оказания им своевременной и действенной помощи в учебе и повышении качества успеваемости.

Социальные переживания и эмоции оказывают огромное влияние на нравственное воспитание старшеклассников. В этот период на основе моральных знаний и имеющегося жизненного опыта вырабатываются определенные нравственные взгляды и убеждения, которыми руководствуются юноши и девушки в своем поведении в течение последующей жизни. Именно поэтому очень важно, чтобы гражданское и нравственное воспитание реализовалось в школе на должном уровне, необходимо чтобы обучающиеся вовлекались в активную общественную деятельность.

Сенсорные области развития и сознания учащихся старших классов в значительной степени подвержены влиянию внешних факторов, в процессе их формирования решающее значение принадлежит обдумыванию своих намерений и поведения. Замечено, что, если учащийся поставил перед собой определенную цель в учебной или общественной работе, или же четко определил свои жизненные планы с учетом имеющихся интересов и склонностей, он, как правило, проявляет высокую целеустремленность и энергию в работе, а также настойчивость в преодолении встречающихся трудностей. С этим связана и другая особенность старшеклассников, относящаяся к работе над своим самовоспитанием. Если подростки в большинстве своем отличаются повышенной требовательностью к другим и недостаточно требовательны к себе, то в юношеском возрасте положение изменяется. Они становятся более требовательными к себе и своей работе, стремятся вырабатывать у себя те черты и качества поведения, которые в наибольшей мере способствуют осуществлению намеченных планов. Все это показывает, какое большое значение имеют внутренние факторы (цели, мотивы, установки и идеалы) в развитии личностных качеств старшеклассников.

Одной из основных особенностей детей старшего школьного возраста является напряженность их сознания и чувств в связи с предстоящим самоопределением в жизни и выборе профессии. Все более значимым становится вопрос о том, с какой именно профессией связать свою жизнь, и он не решается без трудностей, колебаний и внутренних переживаний. Определенно точно обучение в школе делает более привычным для обучающихся умственный труд, под влиянием этого многие юноши и девушки хотят связать свою жизнь и сферу профессиональных интересов с интеллектуальной деятельностью.

На данном этапе особую роль играет профильная дифференциация обучения в старших классах, поскольку она позволяет обучающимся углубить знания в той или иной области, определиться с дальнейшим самоопределением.

1.3.2 Исторический аспект развития раздела «Комплексные числа и подходы к введению понятия комплексного числа

Одно из основных понятий школьного курса математики — понятие числа. Без преувеличения можно сказать что понятие числа является стержнем, фундаментом школьного курса математики. Особенность заключается в том, что оно находится в постоянном развитии, формируется у учащихся постепенно. В течение всего обучения в школе, понятие числа обогащается по содержанию, включая в себя все новые классы чисел и качественно изменяется вместе с сознанием обучающихся, приобретая новые черты и поднимаясь на все более высокие ступени логической мысли. Последним этапом развития понятия числа в курсе математики школ, в частности классов с углубленным изучением предмета является знакомство с множеством комплексных чисел.

Раздел «Комплексные числа» имеет немаловажное идейно-научное значение, он предоставляет большие возможности для развития математических способностей, в нем завершающим образом раскрывается понятие числа, изломавшееся в различное время в течение предшествующих лет обучения, обучающиеся в свою очередь получают представление о современных алгебраических понятиях, знакомятся с двумерной алгеброй и рядом основных положений теории многочленов алгебраических уравнений. Аппарат комплексных чисел дает большие возможности для установления связи алгебры и геометрии, единства математики как науки. Основным недостатком в знаниях учащихся по этой теме является непонимание реального смысла комплексных чисел и отсутствие представлений об их практическом применении.

Методические особенности изучения комплексных чисел в школе раскрыты в статьях многих математиков и методистов (И. Я. Баркова, Н. Я. Виленкина, Е. Г. Гаркави, М. В. Гиршовича, Г. В. Дорофеева, М. Е. Драбкиной, А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича, С. И. Новоселова, А. И. Фетисова и др.). В них предлагаются различные подходы к введению этого понятия, анализируются вопросы, связанные с изучением свойств новых чисел, правил действий над ними.

Из истории методики математики известно, что раздел «Комплексные числа» периодически включался в программу математики базовой школы и исключался из нее, переносился на самостоятельное изучение или факультативные занятия.

Существует ряд причин, по которым обращение к этому разделу становится необходимым и чрезвычайно полезным, например, следующие факты элементарной математики напрямую связаны с комплексными числами:

- тригонометрические формулы кратных аргументов;
- идея расширения числовых множеств;
- основная теорема алгебры.

Кроме того, общеизвестно большое прикладное значение теории функций комплексной переменной, что особенно важно для тех учеников, чье дальнейшее обучение и профессиональная деятельность будут связаны с приложениями математики.

Существуют различные подходы к введению понятия комплексного числа:

- комплексное число — упорядоченная пара действительных чисел, которой на плоскости соответствует точка;
- выражение вида $a + bi,$ где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ, для которого по определению выполняется равенство $i^2 = -1$;
- вектор, соединяющий точку плоскости с началом координат и характеризующийся длиной и углом.

Содержание учебного материала раздела традиционно содержит: определение комплексного числа, операции с комплексными числами, различные формы записи комплексного числа, и приложения.

Понятие комплексного числа чаще всего вводят как пару действительных чисел, дав геометрическую интерпретацию, что делает естественным появление мнимых чисел и восприятие действительного числа как комплексного, на этой основе вводятся аргумент и модуль комплексного числа, появляется мнимая единица. После этого вводятся операции, и появляется алгебраическая форма комплексного числа, далее используется именно алгебраическая форма при введении сопряженных чисел, действий вычитания, деления, преобразовании выражений. Завершающим этапом представления теоретического материала является тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра, извлечение корней и в некоторых случаях показательная форма записи комплексного числа и тождество Эйлера. При изучении действительных чисел с детьми, изучающими математику на базовом уровне, следует познакомить обучающихся с понятием комплексного числа, иллюстрируя идею расширения числовых множеств.

На современном этапе важно отметить что комплексные числа не входят в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике, поэтому чаще всего раздел «Комплексные числа» или оставляют на самостоятельное изучение, или не рассматривают совсем. Если комплексные числа не изучаются на должном уровне, то у учащихся может возникнуть проблема при решении квадратных уравнений, а именно корректная запись ответа на поставленную задачу, при этом учащиеся заучивают шаблонную фразу «нет действительных корней», не задумываясь, какое значение она имеет. Этого можно избежать, если, например, в рамках темы «Квадратные уравнения» показать, что из отрицательного числа можно извлечь корень и получить мнимое число, изучение которого будет происходить в старших классах. В таком случае будет понятно, что у каждого уравнения есть корни, но в число рассматриваемых и ранее изученных они могут и не входить.

Изучение комплексных чисел и работа с ними способствует развитию у учащихся абстрактного мышления, позволяет полностью увидеть структуру всех изученных ранее числовых множеств и операций с ними. Множество комплексных чисел принципиально отличается от всех числовых систем, являющихся подсистемами действительных чисел: комплексные числа нельзя отобразить на одной координатной прямой с другими числами, их нельзя упорядочить. Кроме того, комплексные числа — это тот редкий раздел математики, который объединяет в себе алгебру, геометрию и тригонометрию; показывает возможность привлечения смежных областей науки для решения конкретной задачи, реализуя тем самым интеграционные связи математики — как ближние, так и дальние [10]. Сама идея того, что из отрицательного числа можно извлечь корень, побуждает обучающихся посмотреть на ранее известные вещи с другой точки зрения.

Выводы по I главе

Изменения, происходящие в системе образования, напрямую связанны с изменениями в обществе. В центре всей учебно-воспитательной работы становится личность школьника, его индивидуальные способности, познавательные интересы. Профильное обучение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, при расширении возможности индивидуальной образовательной траектории. Современная школа имеет возможность предоставить обучающимся разнообразные программы, определенную индивидуализацию и дифференциацию обучения через профильное обучение, поскольку оно обладает потенциалом для создания условий обучения старшеклассников в соответствии с их профильными интересами и намерениями в отношении продолжения образования.

Важным для педагогов является знание концептуальных основ и владение технологиями формирования универсальных учебных действий в профессиональном самоопределении школьников. ФГОС, в свою очередь, определяет следующие профили подготовки: естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический и универсальный.

Определенной чертой большинства обучающихся старшего школьного возраста является наличие устойчивых познавательных интересов, прежде всего это относится к хорошо успевающим школьникам.

Наибольший интерес вызывает изучение предметов естественного цикла: математики, физики, экономики, информатики, на это влияет понимание их роли и значения для научно-технического прогресса.

В условиях профильной дифференциации обучения, на наш взгляд, следует уделить достаточное внимание работе с комплексными числами на занятиях естественно-научного и других профилей с углубленным изучением математики, поскольку изучение комплексных чисел способствует развитию у учащихся абстрактного мышления, позволяет полностью увидеть структуру всех изученных ранее числовых множеств. Работа с комплексными числами побуждает обучающихся посмотреть на ранее известные факты с другой стороны.

ГЛАВА II. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ РАБОТА ПО ФООРМИРОВАНИЮ НАВЫКОВ РАБОТЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

2.1 Методика изучения раздела «Комплексные числа» в курсе алгебры 10-11 класса

2.1.1 Анализ учебно-методических комплексов по алгебре и началам анализа в аспекте изучения раздела «Комплексные числа»

Нами был рассмотрен ряд учебников по алгебре и началам математического анализа для 11 класса, входящих в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации образовательных программ среднего общего образования на 2019–2020 учебный год [18]. Среди них учебники базового уровня (Г. К. Муравин и О. В. Муравина), углубленного уровня (Г. К. Муравин и О. В. Муравина; М.Я Пратусевич и др.) и базового и углубленного уровней (С. М. Никольский, М. К. Потапов и др.).

Анализ перечисленных выше учебников показал, что авторы стремятся изложить определенные сведения о множестве комплексных чисел в средней школе: во всех учебниках приводится исторический материал, рассматриваются алгебраическая, геометрическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел, формула корней кубического уравнения. В учебниках углубленного уровня приводится показательная форма записи комплексного числа, рассматриваются операции возведения в степень и извлечение корня из комплексного числа. Материал учебников поможет сформировать представление о комплексных числах даже при самостоятельном изучении.

Знакомство с темой можно начать с повторения сведений об известных числовых множествах и выяснения причин, по которым было необходимо их расширение. При изучении формулы корней кубического уравнения уместно будет рассказать об истории ее появления, а также об отношении к такого рода числам во все времена, начиная с неприязни к отрицательным числам. Определенный интерес у учащихся также может вызвать объяснение записи мнимых чисел, определение различных подходов к введению комплексных чисел и решение квадратных уравнений, с которыми учащиеся уже сталкивались.

Важно показать различные формы записи комплексного числа и переходы от одних форм к другим; в каких случаях используется та или иная форма записи комплексного числа. Так, например, в учебнике С. М. Никольского приведена показательная форма комплексного числа и подчеркиваются ее преимущества: короткая запись числа и удобство при умножении, делении или возведении в степень. Также говорится о применении такого типа записи в физике. Г. К. Муравин и О. В. Муравина в учебниках и для базового, и для профильного уровней ограничиваются лишь тождеством Эйлера, а М. Я. Пратусевич и Ю. М. Колягин приводят только алгебраическую и тригонометрическую формы записи.

При изучении операций сложения, умножения и сопряжения комплексных чисел можно предложить учащимся самим вывести формулы, основываясь на алгоритме приведения подобных слагаемых и сложения и умножения многочленов, безусловно совместный вывод теоретического материала может облегчить восприятие темы.

Анализируя методические рекомендации к учебникам, можно сделать следующий вывод: все рассмотренные авторы сделали тему «Комплексные числа» последней темой курса алгебры и начал анализа 11 класса. В частности, Г. К. Муравин и О. В. Муравина отмечают: «рассмотрение материала главы во многих классах можно проводить на ознакомительном уровне, что высвободит запланированное на изучение комплексных чисел время для повторения востребованного на экзамене материала» [18]. В рассматриваемых нами методических рекомендациях авторы выделяют от 10 до 19 часов на изучение комплексных чисел при углубленном изучении математики и 6 часов при изучении математики на базовом уровне. Такой размах обусловлен различным объемом материала и количеством часов в неделю для конкретного учебника.

Изучение комплексных чисел в школе в первую очередь способствует развитию абстрактного мышления обучающихся: расширяются границы, выполняются операции, ранее считавшиеся невыполнимыми, содержательно-методическая линия числа приобретает завершенный характер. При изучении комплексных чисел происходит знакомство с историей развития числа и теми проблемами, которые привели к появлению комплексных чисел, что позволяет расширить исторический кругозор и повышает культурный уровень обучающихся.

2.1.2 Методические особенности изучения раздела «Комплексные числа» на примере УМК Г.К. Муравина и О.В. Муравиной

Учебник «Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс», ориентирован на учащихся, которые не собираются продолжать изучение математики в высших учебных заведениях.

Учебник «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс», адресован учащимся, которые собираются продолжать изучение математики в высших учебных заведениях. Вместе с подготовкой школьников к продолжению математического образования в высших учебных заведениях, в данном профиле предусматривается закрепление у них устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие математических способностей, ориентация на профессии, которые требуют достаточно высокой математической культуры.

При разработке учебников авторы дополнительно ставили перед собой следующие цели:

- ✓ развитие личности школьника средствами математики;

- ✓ подготовка его к продолжению обучения и к самореализации в современном обществе.

Системно-деятельностный подход и принципы обучения, образуют собой *методическую концепцию.*

Системно-деятельностный подход предполагает ориентацию на достижение цели и основного результата образования — развитие личности обучающегося на основе освоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира, активной учебно-познавательной деятельности, формирование его готовности к саморазвитию и непрерывному образованию.

Принципы обучения:

- ✓ разделения трудностей;
- ✓ укрупнения дидактических единиц;
- ✓ опережающего формирования ориентировочной основы действия;
- ✓ позитивной педагогики.

Технология обучения строится на базе двух основных форм организации работы с классом: *фронтальная беседа*, которая используется в основном при изучении нового материала и при работе с нестандартными заданиями и *самостоятельная письменная работа*, которая применяется, как правило, для формирования навыка решения стандартных задач.

Особенности построения учебно-методического комплекса (УМК) обеспечивают достижение выпускниками старшей школы следующих личностных, метапредметных и предметных результатов.

В *личностных* результатах сформированность: целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки математики и общественной практики ее применения; основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности с применением методов математики; готовности и способности к образованию, в том числе самообразованию на протяжении всей жизни; сознательного отношения к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности на основе развитой мотивации учебной деятельности и личностного смысла изучения математики, заинтересованности в приобретении и расширении математических знаний и способов действий, осознанности в построении индивидуальной образовательной траектории; осознанного выбора будущей профессии, ориентированной на применение математических методов и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем; логического мышления: критичности (умение распознавать логически некорректные высказывания), креативности (собственная аргументация, опровержения, постановка задач, формулировка проблем, работа над исследовательским проектом и др.).

В *метапредметных* результатах сформированность: способности самостоятельно ставить цели учебной, исследовательской и проектной деятельности, планировать, осуществлять, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения; умения самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; умения находить необходимую информацию, критически оценивать и интерпретировать информацию в различных источниках (в справочниках, литературе, Интернете), представлять информацию в различной форме (словесной, табличной, графической, символической), обрабатывать, хранить и передавать информацию в соответствии с познавательными или коммуникативными задачами; навыков осуществления познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыков разрешения проблем; способности и готовности к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания; умения продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты; владения языковыми средствами — умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства; владения навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

В *предметных* результатах сформированность: представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира; представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; умений применения методов доказательств и алгоритмов решения; умения их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; стандартных приемов решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использования готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств; представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа; представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; навыков использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Изучение числовой и алгебраической линий школьного курса завершается седьмой главой «Комплексные числа», в которой обучающиеся знакомятся с алгебраической и тригонометрической формами записи комплексных чисел и с арифметическими действиями над ними.

Методическое пособие к учебнику «Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс» выделяет на главу «Комплексные числа» 6 часов (Таблица 2).

Таблица 2 — Тематическое планирование 11 класс базовый уровень

Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
Формула корней кубического уравнения Решение уравнений высших степеней. Формула Кардано для решения кубических уравнений.	1	Решать кубические уравнения по формуле Кардано
Действия с комплексными числами Понятие комплексного числа. Мнимая и действительная части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Равенство комплексных чисел. Арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме. Основная теорема алгебры. Неразрешимость уравнений выше пятой степени в радикалах.	4	Формулировать определение комплексного числа и равенства комплексных чисел. Формулировать основную теорему алгебры. Находить комплексные корни квадратных уравнений. Показывать выполнимость теоремы Виета для комплексных корней квадратного уравнения. Выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме
Итоговая контрольная работа	1	Контролировать и оценивать свою работу Ставить цели на следующий этап

Методическое пособие к учебнику «Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс» выделяет на главу «Комплексные числа» 11 часов (Таблица 3).

Таблица 3 — Тематическое планирование 11 класс углубленный уровень

Содержание материала	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
Формула корней кубического уравнения Формула Кардано для решения кубических уравнений.	1	Решать кубические уравнения по формуле Кардано
Алгебраическая форма комплексного числа Понятие комплексного числа. Мнимая и действительная части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Равенство комплексных чисел. Арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме. Основная теорема алгебры. Неразрешимость уравнений выше пятой степени в радикалах.	4	Обосновывать необходимость расширения числового множества действительных чисел до множества комплексных чисел в связи с развитием алгебры (решение уравнений, основная теорема алгебры) Формулировать определение комплексного числа и равенства комплексных чисел. Находить комплексные корни квадратных уравнений Показывать выполнимость теоремы Виета для комплексных корней квадратного уравнения Выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме
Геометрическое представление комплексного числа Модуль комплексного числа. Графическое решение уравнений, неравенств и систем уравнений.	3	Выполнять действия с комплексными числами, заданными в геометрической форме Графически решать уравнения, неравенства и системы уравнений Строить графики функций с применением компьютерных программ
Тригонометрическая форма записи комплексного числа Тригонометрическая форма комплексного числа. Перевод комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно. Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корней из комплексного числа в тригонометрической форме записи. Формула Муавра. Показательная форма записи комплексного числа. Тождества Эйлера.	3	Выполнять действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме Переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно Выполнять умножение, деление, возведение в степень и извлечение корней из комплексного числа Выводить формулу Муавра Показывать связи между тригонометрической и показательной формами комплексного числа

Анализируя УМК Г.К. Муравина и О.В. Муравиной можно сделать следующие выводы:

- раздел «Комплексные числа» является последней темой курса алгебры и начал анализа 11 класса;
- базовый уровень выделяет 6 часов на освоение данного раздела, углубленный предусматривает 11 часов подготовки и содержит формулу корней кубического уравнения, алгебраическую и тригонометрическую форму записи комплексного числа, геометрическое представление комплексного числа.

2.2 Типы заданий, способствующих развитию навыков работы с комплексными числами

I. Задания, содержащие формальное определение комплексных чисел, арифметические операции над комплексными числами, понятия мнимой единицы и мнимого числа, действительной и мнимой частей комплексного числа, понятия противоположного и обратного числа для данного комплексного числа, понятие алгебраической формы комплексного числа.

1. Разложите на множители $x^2 + 1$.

Решение: $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i)$.

2. Для какого действительного числа x выражение $(3 + xi)^2 - (4x + 2)i$ является: а) действительным числом; б) мнимым числом?

Решение:

Преобразуем данное выражение:

$(3 + xi)^2 - (4x + 2)i = 9 + 6xi - x^2 - 4xi - 2i = (9 - x^2) + (2x - 2)i$.

а) Данное выражение является действительным числом, если его мнимая часть равна нулю: $2x - 2 = 0$, т.е. при $x = 1$.

б) Данное выражение является мнимым числом, если его действительная часть равна нулю: $9 - x^2 = 0$, т.е. при $x = -3$ и при $x = 3$.

3. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие двум условиям: $z^2 = -15 + 8i$ и $Im\, z > 0$.

Решение:

Пусть $z = a + bi$. Тогда $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. По условию задачи числа $a^2 - b^2 + 2abi$ и $-15 + 8i$ равны и $b > 0$. Следовательно, пара чисел a и b является решением системы:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -15; \\ 2ab = 8; \\ b > 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что $a = 1, b = 4$. Следовательно, $z = 1 + 4i$.

II. Задания, содержащие понятия числа, сопряженного с данным комплексным числом, основные свойства, связанные с сопряженными комплексными числами.

1. Найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие условию $z\,Re\,z + \bar{z}\,Im\,z = 3 - 2i$.

Решение:

Пусть $z = a + bi$. Тогда $z\,Re\,z + \bar{z}\,Im\,z = (a + bi)a + (a - bi)b = = a^2 + ab + (ab - b^2)i$. По условию задачи $a^2 + ab + (ab - b^2)i = 3 - 2i$. Следовательно, пара чисел a и b является решением системы:

$$\begin{cases} a^2 + ab = 3; \\ ab - b^2 = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим, что она имеет четыре решения: $a = 1, b = 2; a = -1, b = -2; a = \frac{3\sqrt{2}}{2}, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}; a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют четыре числа: $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 1 - 2i; z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; z_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

III. Задания, содержащие понятия геометрической интерпретации комплексных чисел с помощью точек комплексной плоскости и модуля комплексного числа, геометрическое истолкование суммы и модуля разности комплексных чисел.

1. Найдите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z - 4| = |z + 4i|$.

Решение:

Пусть $z = x + yi$. Тогда условие задачи означает, что верно равенство $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$.

Решив это уравнение, получим, что $y = x$. Получаем, что исходному условию удовлетворяют лишь точки прямой $y = x$ комплексной плоскости xOy (рисунок 1).

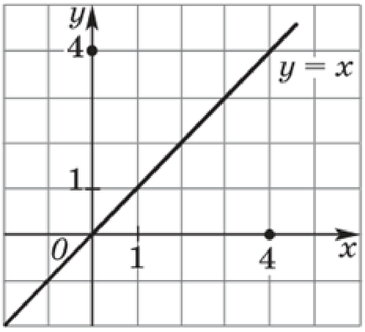

Рисунок 1

Из геометрических соображений также можно достичь этого результата, выражения $|z - 4|$ и $|z + 4i|$ задают расстояние от точки $(x; y)$ комплексной плоскости, соответствующей комплексному числу $z = x + yi$, до точек $(4; 0)$ и $(0; 4)$, соответствующих комплексным числам $z_1 = 4 + 0i$ и $z_2 = 0 + 4i$.

Поэтому множество всех точек $(x; y)$ комплексной плоскости, одинаково удаленных от точек $(4; 0)$ и $(0; 4)$, есть серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки, т.е. прямая $y = x$.

2. Найдите комплексное число z, удовлетворяющее условию $zi = 5 - 2i$, и соответствующую ему точку комплексной плоскости.

Решение:

Пусть $z = x + yi$, из условия задачи следует, что верно равенство $-y + xi = 5 - 2i$. Это равенство справедливо при условии $x = -2, y = -5$, т.е. $z = -2 - 5i$. Числу z соответствует точка $(-2; -5)$ комплексной плоскости.

IV. Задания, содержащие понятие главного аргумента комплексного числа z, тригонометрической формы комплексного числа. Задания, решаемые с использованием теоремы о умножении и делении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, формулы Муавра о возведении в целую степень комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.

1. Запишите в тригонометрической форме комплексное число z, укажите его главный аргумент:

а) $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$;

Решение: $z = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

б) $z = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

Решение: $z = -3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -3\left(-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - -i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$; $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

в) $z = \sqrt{3} + i$;

Решение: т.к. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, то $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

г) $z = \sqrt{3} - i$;

Решение: т.к. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, то $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$; $\arg z = \frac{11\pi}{6}$.

д) $z = 3 + 4i$;

Решение: т.к. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то $z = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos\arccos 0{,}6 + i\sin\arccos 0{,}6)$; $\arg z = \arccos 0{,}6$.

е) $z = 3 - 4i$;

Решение: т.к. $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, то $z = 5\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos(2\pi - \arccos 0{,}6) + i\sin(2\pi - \arccos 0{,}6))$; $\arg z = 2\pi - \arccos 0{,}6$.

2. Выполните умножение комплексных чисел

$\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Решение: каждое из чисел $z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ и $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ записано в тригонометрической форме, имеет модуль 1, поэтому

$$\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\cos\frac{5\pi+\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi+\pi}{3}=$$
$$\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=1.$$

Если в данном выражении раскрыть скобки с помощью распределительного закона умножения и применить формулы косинуса суммы двух углов и синуса суммы двух углов, можно получить такой же результат.

3. Возведите в степень с показателем $n=1,2,3,4,5,6,7$ комплексное число $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ и найдите на комплексной плоскости точки, соответствующие полученным числам.

Решение: т.к. $z^1=z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ и $|z|=1$, то по формуле Муавра получим

$$z^2=\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z^3=\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i;$$

$$z^4=\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$z^5=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$z^6=\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$z^7=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ (рисунок 2).

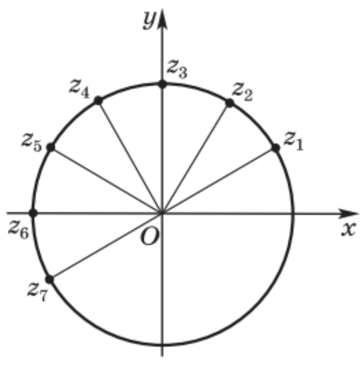

Рисунок 2

4. Выразите $\sin 4x$ и $\cos 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Решение: по формуле Муавра имеем $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$.

Применяя формулу бинома Ньютона и основное тригонометрическое тождество, имеем $(\cos x + i\sin x)^4 = cos^4 x + 4\,cos^3 x(i\sin x) + 6\,cos^2 x(i\sin x)^2 + 4\cos x(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4 = (cos^4 x - 6cos^2 x\, sin^2 x + sin^4 x) + i\,(4\,cos^3 x\sin x - 4\cos x\, sin^3 x) = (cos^4 x - 6cos^2 x(1 - cos^2 x) + (1 - cos^2 x)^2) + i\,(4\,cos^3 x\sin x - 4\cos x\, sin^3 x) = (8\,cos^4 x - 8\,cos^2 x + 1) + i\,(4\,cos^3 x\sin x - 4\cos x\, sin^3 x)$.

По правилу равенства комплексных чисел имеем

$\cos 4x = 8\,cos^4 x - 8\,cos^2 x + 1$;

$\sin 4x = 4\,cos^3 x\sin x - 4\cos x\, sin^3 x$.

5. Выполните действия:

$\frac{16i\left(\sin\frac{\pi}{3} - i\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^4}$.

Решение: $\frac{16i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right)^2}{\left(3+2i\sqrt{3}-1\right)^2} = \frac{4i\,\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{4\,\left(1+i\sqrt{3}\right)^2} = \frac{i\,(2-2i\sqrt{3})}{-2+2i\sqrt{3}} = -i$.

V. Задания, решаемые с использованием теоремы о существовании n различных корней степени n из любого комплексного числа, отличного от нуля.

1. Найдите корни степени 2 из комплексного числа $4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение: для числа $z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ имеем $r = 4$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, поэтому

$\varepsilon_k = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)$, где $k = 0, 1$, т.е. $\varepsilon_0 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,

$\varepsilon_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.

2. Найдите корни степени 3 из комплексного числа $1+i$ и найдите на комплексной плоскости точки, их изображающие.

Решение: для числа $z=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ имеем $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$, поэтому $\varepsilon_k=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)$, где $k=0,1,2$, т.е.

$$\varepsilon_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$\varepsilon_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\varepsilon_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$ (рисунок 3).

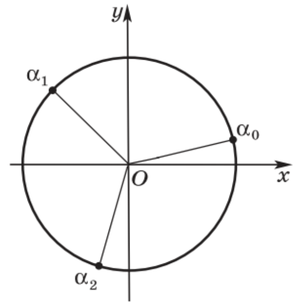

Рисунок 3

2.3 Опытная работа по формированию навыков работы с комплексными числами

2.3.1 Методические материалы к разделу «Комплексные числа»

Определение комплексного числа

В связи с изучением кубических уравнений в XVI веке появилась необходимость извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В известном труде «Великое искусство или об алгебраических правилах» Джероламо Кардано впервые были описаны мнимые величины.

Символ i предложил Леонард Эйлер в 1774 году, взявший для этого первую букву слова imaginarius, что означает «мнимый».

Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где $x\in$ R, $y\in$ R, а i — мнимая единица.

Основное свойство числа i состоит в том, что $i^2=1$, или $\sqrt{-1}=i$.

Множество комплексных чисел обозначается латинской буквой C.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x=Re\,z$ (от лат. realus–«действительный»), а y —мнимой частью z, и обозначается $y=Im\,z$ (от лат. imaginarius –«мнимый»).

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$, отличающихся лишь знаком называют комплексно-сопряженными, или просто сопряженными.

Примеры комплексных чисел:

а) $z = 2 + 5i$;

б) $z = -0{,}7i$;

в) $z = 4 + i$ и $\bar{z} = 4 - i$ – это комплексно-сопряженные числа.

Сложение и вычитание комплексных чисел

Суммой двух комплексный чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется комплексное число, определяемое равенством

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$

Сложение комплексных чисел обладает переместительным (коммутативным) и сочетательным (ассоциативным) законами:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$

Примеры сложения комплексных чисел:

а) $(-2 + 7i) + (6 - 4i) = 4 + 3i$;

б) $(9 + 0i) + (3 + 0i) = 12 + 0i = 12$;

в) $(0 + 3i) + (0 - i) = 0 + 2i = 2i$;

г) $(4 - 5i) + (1 + 5i) = 5$.

Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое, будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т.е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

Если $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$, получаем $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$.

Примеры вычитания комплексных чисел:

а) $(-1+3i)-(5-i)=-6+2i$;

б) $(2-i)-(9-4i)=-7+3i$;

в) $(2+3i)-(-2+3i)=4+0i=4$;

г) $(9+7i)-(9+3i)=0+4i=4i$.

Умножение комплексных чисел

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i.$

Равенство $i^2=-1$ до установления правила умножения носило характер требования, теперь оно логично вытекает из определения.

Действительно, $i^2=ii=(0+1i)(0+1i)=(0-1)+(0+0)i=-1.$

Произведение $z\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$ показывает, что произведение комплексно-сопряженных чисел есть действительно число, притом положительное (при $z\neq0$).

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным (дистрибутивным) свойствами:

$z_1z_2=z_2z_1$,

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$,

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Пример 1. Найти все корни уравнения и проверить найденные решения подстановкой в исходное уравнение: $x^2-2x+10=0$.

Решение: $x^2-2x+10=0$

$D=b^2-4ac=4-40=-36=(6i)^2$;

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{2+6i}{2}=1+3i$;

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{2-6i}{2}=1-3i$.

Проверка:

а) $x_1^2-2x_1+10=(1+3i)^2-2(1+3i)+10=1+6i-9-2-6i+10=0$;

б) $x_2^2 - 2x_2 + 10 = (1-3i)^2 - 2(1-3i) + 10 = 1 - 6i - 9 - 2 + 6i + 10 = 0$;

Ответ: $x_{1,2} = 1 \pm 3i$.

Пример 2. Найдите действительные x,y, удовлетворяющие условию:

$x - 9i + (y-8)i = 1$.

Решение: преобразуем правую часть выражения $x - 9i + yi - 8i = 1$;

$x + yi - 17i = 1$;

$x + (y-17)i = 1$.

Используя условие равенства комплексных чисел, имеем $x = 1, y = 17$.

Ответ: $x = 1, y = 17$.

Деление комплексных чисел

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т.е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $zz_2 = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i \neq 0$, $z = x + yi$, то из равенства $(x+yi)(x_2+y_2 i) = x_1 + y_1 i$ следует

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1; \\ xy_2 + yx_2 = y_1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ и $y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Таким образом, $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Примеры деления комплексных чисел:

1) Даны комплексные числа $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 8 - 3i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение: составим частное $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{8-3i}$. Деление осуществляется *методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение*. Вспоминаем формулу сокращенного умножения

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и изучаем знаменатель дроби $8-3i$, сопряженным выражением в данном случае будет $8+3i$.

Согласно правилу, знаменатель умножаем на $8+3i$ и, чтобы ничего не изменилось, необходимо домножить на $8+3i$ числитель дроби. Получаем $\frac{z_1}{z_2}=\frac{(5+i)(8+3i)}{(8-3i)(8+3i)}$.

Далее в числителе раскрываем скобки по правилам умножения двух комплексных чисел, в знаменателе используем формулу сокращенного умножения, помним что $i^2=-1$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(5+i)(8+3i)}{(8-3i)(8+3i)}=\frac{40+15i+8i+3i^2}{8^2-(3i)^2}=\frac{37+23i}{64+9}=\frac{37+23i}{73}.$$

2) Дано комплексное число $z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$, выполнить деление. Выполняем умножение знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение, так как знаменатель $\sqrt{3}+i$, сопряженное ему $\sqrt{3}-i$. Получаем

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-i^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i.$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ комплексной плоскости Oxy, такой, что $x=Re\,z$, $y=Im\,z$. И наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$.

Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости* (рисунок 4).

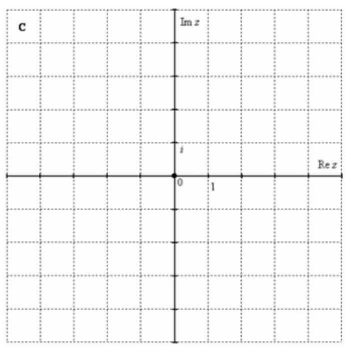

Рисунок 4

Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z = x + i0 = x$. Ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.

Правила оформления чертежа: по осям задается масштаб, отмечается ноль, единица по действительной оси и мнимая единица по мнимой оси.

Рассмотрим следующие комплексные числа $z_1 = 0;\ z_2 = -3;\ z_3 = 2$.

Очевидно, что это обыкновенные действительные числа, так как множество действительных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел C.

Действительная ось $Re\,z$ обозначает в точности множество действительных чисел R, и на этой оси находятся все числа с которыми мы были знакомы ранее.

Числа $z_1 = 0;\ z_2 = -3;\ z_3 = 2$ – комплексные числа *с нулевой мнимой частью*.

Числа $z_4 = i;\ z_5 = -\sqrt{3}i;\ z_6 = 4i$ – наоборот, *чисто мнимые числа*, т.е. числа *с нулевой действительной частью*. Они располагаются строго на оси $Im\,z$.

В числах $z_7 = 2 + 3i;\ z_8 = -4 + i;\ z_9 = -3 - 3i;\ z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю, такие числа обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат.

Отметим следующие комплексные числа на плоскости: $z_1 = 0;\ z_2 = -3;\ z_3 = 2;\ z_4 = i;\ z_5 = -\sqrt{3}i;\ z_6 = 4i; z_7 = 2 + 3i;\ z_8 = -4 + i;\ z_9 = -3 - 3i;\ z_{10} = \sqrt{2} - i$ (рисунок 5).

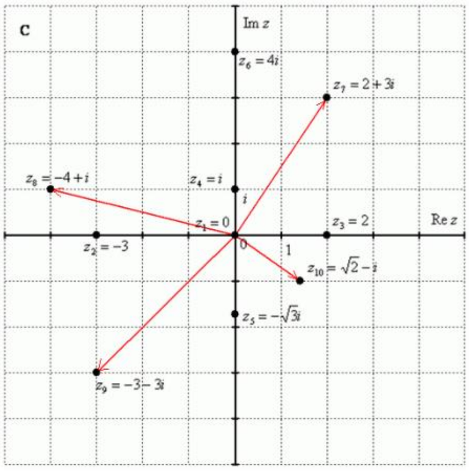

Рисунок 5

Модуль комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ можно задать с помощью радиус-вектора $r = OM = (x; y)$. Длина вектора r, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Модуль r однозначно определяется по формуле: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Примеры:

1) Найдите модуль комплексного числа $z = 3 + 4i$.

Решение: $r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

2) Построить множество точек $z = x + iy$, определяемое условием $|z - 2i| = 1$.

Решение: если $z = x + iy$, то $|z - 2i| = |x + yi - 2i| = |x + (y - 2)i| = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 1$.

Возводим обе части в квадрат, получаем $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ – уравнение окружности с центром в точке $(0; 2)$ и радиусом 1.

Замечание: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия модуля действительного числа, как расстояния от точки до начала координат.

Аргумент комплексного числа

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором r, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа, обозначается $Arg\ z$ или φ.

Аргумент φ определяется по формулам: $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен, аргумент числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0;\ \pm1;\ \pm2 \dots)$:

$Arg\ z = \arg z + 2\pi k,$ где $\arg z$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$ (в некоторых учебниках в качестве главное значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0; 2\pi)$).

Пример: Найдите аргумент числа $z = 3 - 3i$.

Решение: выделим действительную и мнимую части числа $z = 3 - 3i$, $x = Re\, z = 3$, $y = Im\, z = -3$. Тогда по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{-3} = -1$, следовательно $\varphi = arctg(-1) = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Формы записи комплексных чисел

Запись числа z в виде $z = x + iy$, называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$ можно рассматривать как числа, однозначно его определяющие.

Из геометрии известно, что вектор определенный длины r и углом φ относительно выбранной оси имеет *полярные координаты*. Получаем, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, или $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – такая запись комплексного числа называется *тригонометрической формой*.

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической форме необходимо найти модуль числа и определить главное значение аргумента комплексного числа z, т.е. выбрать в качестве значения $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$\arg z = arctg\ \frac{y}{x}$ – для внутренних точек I, IV четвертей;

$\arg z = arctg\ \frac{y}{x} + \pi$ – для внутренних точек II четверти;

$\arg z = arctg\ \frac{y}{x} - \pi$ – для внутренних точек III четверти.

Следует отметить, что в математике введено понятие «степень числа с комплексным показателем».

Частным случаем является *формула Эйлера*: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Используя эту формулу, комплексное число $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой *показательной (или экспоненциальной) форме*: $z = r \cdot e^{i\varphi}$, где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, а $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа.

Примеры:

1) Представьте в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Решение: найдем модель и аргумент числа $z = 1 - \sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, так как $a > 0$ (случай 1), то $\arg z = arctg\ \frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$, таким образом $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – комплексное число z в тригонометрической форме.

2) Для числа $z = -2 + 4i$ найдем модуль и аргумент: $|z| = 2\sqrt{5}$, $\arg z = \pi - arctg\ 2$. Тогда данное число в показательной форме будет выглядеть следующим образом: $z = 2\sqrt{5} \cdot e^{i(\pi - arctg\ 2)}$.

Другие примеры комплексных чисел в показательной форме:

1) $z = 1 - \sqrt{3}i \ = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$;

2) $z = 3 + \sqrt{3}i \ = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

Замечание: показатель экспоненты необходимо оставить без изменений.

Комплексное число в показательной форме записывается по форме: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

Возведение комплексных чисел в степень

Рассмотрим возведение комплексного числа в квадрат на примере числа $z = 2 + 3i$, есть две идеи решения. Первая – это переписать степень как произведение множителей $z^2 = (2+3i)^2 = (2+3i)(2+3i)$ и перемножить числа по правилу умножения многочленов.

Вторая состоит в применении известной школьной формулы сокращенного умножения $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $z^2 = (2+3i)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

Для квадрата комплексного числа легко вывести формулу сокращенного умножения: $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$, аналогично для квадрата разности, куба суммы и разности.

Возникают трудности, если комплексное число необходимо возвести в более высокую степень, эти трудности разрешает *формула Муавра* для тригонометрической формы записи комплексного числа.

Если комплексное число представлено в тригонометрической форме $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то при его возведении в натуральную степень n справедлива формула: $z^n = |z|^n\,(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Данная формула исходит из правила умножения комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме: чтобы найти произведение чисел $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ нужно перемножить их модули и сложить аргументы: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Аналогично для показательной формы: если $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$, то $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Пример: Для комплексного числа $z = 3 + \sqrt{3}i$ найти z^{20}.

1) Представим данное число в тригонометрической форме: $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

2) Применим формулу Муавра: $z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20} \cdot \left(\cos\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(20 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^{20} \cdot \left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$.

3) Избавляемся от лишних оборотов, один оборот составляет 2π радиан или $360°$: в аргументе $\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi$ (перевели в неправильную дробь) видим, что можно убрать один оборот $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}$, очевидно что $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ – один и тот же угол.

Таким образом, ответ запишем следующим образом: $z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$, можно переписать ответ в стандартном виде (значение аргумента в стандартном виде), убавив еще один оборот: $z^{20} = \left(2\sqrt{3}\right)^{20} \cdot \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Отдельно рассмотрим возведение в степень чисто мнимых чисел, рассмотрим следующие примеры: $i^{10}, i^{33}, (-i)^{21}$.

Если мнимая единица возводится в четную степень, то схема решения такова: $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$.

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отделяем» одно i и получаем четную степень: $i^{33} = i \cdot i^{32} = i \cdot (i^2)^{16} = i \cdot (-1)^{16} = i$.

Если перед i стоит минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить: $(-i)^{21} = (-1)^{21} \cdot i^{21} = -i \cdot i^{20} = -i \cdot (i^2)^{10} == -i \cdot (-1)^{10} = -i$.

Извлечение корней из комплексных чисел и квадратные уравнения с комплексными корнями

Рассмотрим пример $z = \sqrt{-4}$, если речь идет о действительных числах, то корень извлечь нельзя, однако в комплексных числах корень извлечь можно и их будет два: $z_1 = -2i$ и $z_2 = 2i$ (для краткости записи можно записать следующим образом: $z_{1,2} = \pm 2i$).

Выполним проверку:

$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4;$

$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4.$

Такие корни называются *сопряженными комплексными корнями*.

Рассмотрим примеры извлечения корней из отрицательных чисел: $\sqrt{-1} = \pm i$; $\sqrt{-9} = \pm 3i$; $\sqrt{-36} = \pm 6i$; $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$ и т.д.

Рассмотрим квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$, вычисляем дискриминант $D = 36 - 136 = -100$, поскольку он отрицателен и в действительных числах уравнение корней не имеет, однако оно имеет корни в комплексных числах, поскольку $\sqrt{D} = \pm 10i$.

Таким образом, получаем $z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$, $z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни.

2.3.2 Апробация разработанных методических материалов и комплекса заданий по формированию навыков работы с комплексными числами

Для оценки эффективности предложенных методических материалов и разработанного комплекса заданий, направленного на формирование навыков работы с комплексными числами, была проведена апробация, осуществляемая в три этапа: подготовка, проведение апробации и подведение итогов.

Исследование проводилось на базе МАОУ «Лицей № 142 г. Челябинска», в апробации принимали участие 12 обучающихся 10 класса физико-математического профиля подготовки.

I этап – подготовка: на основе разработанных методических материалов, были созданы конспект и технологическая карта факультативного занятия по математике (Приложение 1).

II этап – проведение апробации: заключается в проведении занятий, направленных на формирование навыков работы с комплексными числами.

III этап – подведение итогов апробации в форме итоговой диагностическая работы для 10 класса (в рамках факультативного занятия).

Ход проведения диагностической работы №1

Учащимся было предложено 6 заданий, для выполнения которых было отведено 45 минут (Приложение 2). Форма проведения работы – фронтальная. Во время выполнения работы учитель следит за тем, чтобы каждый обучающийся работал самостоятельно.

После выполнения данной работы был проведён анализ, подсчитано общее количество обучающихся, правильно ответивших на каждое из заданий, за каждое верно выполненное задание ставится один балл, выявлены характерные ошибки, сделаны выводы, результаты представлены в Таблице 4.

Таблица 4 — Результаты итоговой диагностической работы № 1

№ задания	**Умение, диагностика которого производится конкретным заданием**	**Количество учащихся правильно выполнивших задание**	**% выполнения задания**
1-1	умение складывать комплексные числа в алгебраической форме	12	100
1-2	умение вычитать комплексные числа в алгебраической форме	11	92
1-3	умение умножать комплексные числа	10	83
1-4	умение делить комплексные числа	8	67
2-1	умение вычислять выражения, содержащие комплексные числа	9	75

Продолжение таблицы 4

2-2	умение вычислять выражения, содержащие комплексные числа	7	58
3-1	умение переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую	11	92
3-2	умение переводить комплексные числа из алгебраической формы в тригонометрическую	9	75
4-1	умение решать неполное квадратное уравнение на множестве комплексных чисел	11	92
4-2	умение решать квадратное уравнение на множестве комплексных чисел	10	83
5	умение изображать множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих определенному условию	8	67
6	умение переводить комплексные числа из тригонометрической формы в алгебраическую	7	58

Для анализа индивидуальных результатов обучающихся данные десятиклассников сравнили по оценочной шкале, что позволяет определить средний уровень развития навыков работы с комплексными числами.

Оценочная шкала приведена в Таблице 5.

Таблица 5 — Оценочная шкала

Уровень	**Количество баллов**
Низкий	0 – 4
Средний	5 – 8
Высокий	9 – 12

Итоговая диагностическая работа №1 показала, что большинство обучающихся справились с заданиями, оценивающими умения складывать, вычитать комплексные числа, умения решать неполные квадратные уравнения на множестве комплексных чисел.

Основные трудности у обучающихся возникли в заданиях, оценивающих умения вычислять выражения, содержащие комплексные числа, и умения переводить комплексные числа из тригонометрической формы в алгебраическую.

В результате апробации были получены следующие результаты:

– 8 % обучающихся (1 человек) – низкий уровень развития навыков работы с комплексными числами;

– 42 % (5 человек) достигли среднего уровня развития навыков работы с комплексными числами;

– 50 % обучающихся (6 человек) достигли высокого уровня развития навыков работы с комплексными числами.

Выводы по II главе

Анализ перечисленных выше учебников показал, что авторы стремятся изложить определенные сведения о множестве комплексных чисел в средней школе: во всех учебниках приводится исторический материал, рассматриваются алгебраическая, геометрическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел, формула корней кубического уравнения. В учебниках углубленного уровня приводится показательная форма записи комплексного числа, рассматриваются операции возведения в степень и извлечение корня из комплексного числа.

Анализируя методические рекомендации к учебникам, можно сделать следующий вывод: все рассмотренные авторы сделали тему «Комплексные числа» последней темой курса алгебры и начал анализа 11 класса.

В частности, Г. К. Муравин и О. В. Муравина выделяют 6 часов, в базовом уровне, на освоение данного раздела, углубленный предусматривает 11 часов подготовки и содержит формулу корней кубического уравнения, алгебраическую и тригонометрическую форму записи комплексного числа, геометрическое представление комплексного числа.

Рассмотренные типы заданий и УМК различных авторов, позволили выявить методические особенности для создания методических материалов, на основе которых была создана технологическая карта и конспект факультативного занятия по математике.

Апробация, предложенных методических материалов и комплекса задач показала, что большая часть обучающихся десятых классов освоили навыки работы с комплексными числами на среднем (42%) или высоком (50%) уровне развития, что говорит о то, что раздел «Комплексные числа» можно преподавать в рамках факультативных занятий, что позволит углубить знания обучающихся во многих разделах математики, вооружит их инструментом для решения различных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Профильное обучение позволяет обеспечить полноценное образование детей старшего школьного возраста в соответствии с их индивидуальными способностями. Углубленное обучение по профильным предметам становится инструментом для дальнейшего профессионального определения обучающегося, это происходит благодаря индивидуализации образования, создания возможностей для построения гибких образовательных траекторий, в соответствии со способностями и предпочтениями ребёнка. Одна из главных проблем, которую решает профильное обучение, заключается в том, что обучающиеся получают более глубокие знания в той области и по тем дисциплинам, которые ребенок сможет применить в рамках продолжения обучения или дальнейшей профессиональной деятельности.

Важным для педагогов является знание концептуальных основ и владение технологиями формирования универсальных учебных действий в профессиональном самоопределении школьников. ФГОС, в свою очередь, определяет следующие профили подготовки: естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический и универсальный.

В условиях профильной дифференциации обучения, на наш взгляд, следует уделить достаточное внимание работе с комплексными числами на занятиях естественно-научного и других профилей с углубленным изучением математики, поскольку изучение комплексных чисел способствует развитию у учащихся абстрактного мышления.

Анализ учебников базового уровня (Г. К. Муравин и О. В. Муравина), углубленного уровня (Г. К. Муравин и О. В. Муравина; М.Я Пратусевич и др.) и базового и углубленного уровней (С. М. Никольский, М. К. Потапов и др.). показал, что авторы стремятся изложить определенные сведения о множестве комплексных чисел: исторический материал, алгебраическая, геометрическая и тригонометрическая формы записи комплексных чисел, формула корней кубического уравнения.

В учебниках углубленного уровня приводится показательная форма записи комплексного числа, рассматриваются операции возведения в степень и извлечение корня из комплексного числа.

Анализируя методические рекомендации к учебникам, можно сделать следующий вывод: все рассмотренные авторы сделали тему «Комплексные числа» последней темой курса алгебры и начал анализа 11 класса. В частности, Г. К. Муравин и О. В. Муравина выделяют 6 часов, в базовом уровне, на освоение данного раздела, углубленный предусматривает 11 часов подготовки и содержит формулу корней кубического уравнения, алгебраическую и тригонометрическую форму записи комплексного числа, геометрическое представление комплексного числа.

Рассмотренные типы заданий и УМК различных авторов, позволили выявить методические особенности изучения комплексных чисел в курсе алгебры 10-11 класса.

На основе изученного нами были созданы методические материалы и комплекс заданий, направленных на формирование навыков работы с комплексными числами, предложен конспект и технологическая карта факультативного занятия.

Апробация, предложенных методических материалов и комплекса задач показала, что большая часть обучающихся десятых классов освоили навыки работы с комплексными числами на среднем (42%) или высоком (50%) уровне развития, что говорит о то, что раздел «Комплексные числа» можно преподавать в рамках уроков или факультативных занятий по математике, что позволит углубить знания обучающихся во многих разделах математики, вооружит их инструментом для решения различных задач и будет способствовать эффективности обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями продолжения образования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абатурова, В. В. Сборник нормативных документов и методических материалов по предпрофильной подготовке и профильному обучению / В. В. Абатурова, С. С. Кравцов – М. : Вентана-Граф, 2017. — 224 с.

2. Артюхова, И. С. Проблема выбора профиля обучения в старшей школе / И. С. Артюхова // Педагогика. — 2016. — № 2. — С. 28–34.

3. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10–11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [сост. Т. А. Бурмистрова]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2018. — 143 с.

4. Асмолов, А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская., И. А. Володарская О. А. Карабанова, Н. Г. Салмина, С. В. Молчанов — М. : Просвещение, 2017. — 159 с.

5. Афанасьева, Т. Н. Проектирование внеурочной деятельности учащихся общеобразовательной школы / Т. Н. Афанасьева // — Научно-методический электронный журнал «Концепт». — 2015. — Т. 26. — С. 51–55. — URL http://e-koncept.ru (дата обращения: 17.02.2020). — Текст : электронный.

6. Болотов, В. А. Перспективы перехода школы на профильное обучение / В. А. Болотов // Воспитание школьников. — 2015. — № 1. — С. 2–8.

7. Егорова, А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе // Теория и практика образования в современном мире : материалы Междунар. науч. конф. февраль 2015 г. / СПб. : Реноме, 2015. — С. 173–179.

8. Егоров, О. Г. Профильное образование : проблемы и перспективы / О. Г. Егоров // Народное образование. — 2016. — № 5. — С. 32–36.

9. Жмурова, И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе / И. Ю. Жмурова, С. В. Баринова // Молодой ученый. — 2020. — №5. — С. 312-314. — URL: https://moluch.ru/archive/295/67123/ (дата обращения: 14.03.2020). — Текст : электронный.

10. Жмурова, И. Ю. Интеграционные связи и их оценка учителями математики и бакалаврами педагогико-математического образования / И. Ю. Жмурова, Т. С. Полякова, Е. В. Лялина // Методический поиск : проблемы и решения. — 2015. — № 1 (18). — С. 66–72.

11. Зверева, И. П. Внедрение профильного обучения в современной школе: опыт и проблемы / И. П. Зверева, И. А. Веревкин. // Молодежный научный форум : Гуманитарные науки: электр. сб. ст. по мат. XI междунар. студ. науч.–практ. конф. — 2014. — № 4. — С. 1–11.

12. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования / Официальные документы в образовании. — 2002. — № 27. — С. 13–33.

13. Концепция профориентационной работы образовательных организаций Челябинской области: проект / Челябинский институт развития профессионального образования / — Челябинск, 2013. — 40 с.

14. Локаткова, О. Н. Период старшего школьного возраста как этап планирования и подготовки к профессиональной деятельности / О. Н. Локаткова. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2013. — № 10 (57). — С. 481-484. — URL: https://moluch.ru/archive/57/7834/ (дата обращения: 08.06.2020). — Текст : электронный.

15. Менеджер образования. Портал информационной поддержки руководителей образования. — МЦФЭР, 2018. — . — URL: https://www.menobr.ru/article/60155-qqe-16-m9profilnoe-obuchenie-v-shkole-

v-kontekste-realizatsii-fgos — Профильное обучение в школе в контексте реализации ФГОС среднего общего образования (дата обращения: 21.01.2020). — Текст : электронный.

16. Муравин, Г. К., Муравина, О. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс, Углубленный уровень: методическое пособие к учебнику. — М. : Дрофа, 2015. — 272 с

17. Петров, А. В. Развитие познавательной самостоятельности и активности учащихся средней школы / А. В. Петров // Мир науки, культуры, образования. № 2 (39), апрель 2015. — URL: http://www.bibliorossica.com (дата обращения: 11.03.2020). — Текст : электронный.

18. Приказ Минпросвещения России «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, сформированный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 28 декабря 2018 г. N 345" от 22.11.2019 № 623 // Российская газета. 25.11.2019 г. № 8023.

19. Российская государственная библиотека / Н. А. Криволапова // Становление и развитие системы профильного обучения школьников. — Москва, 2017. — 43 с. — URL: https://dlib.rsl.ru (дата обращения:15.02.2020). — Текст : электронный.

20. Российская государственная библиотека / С.В. Студилин // Педагогические условия проектирования правовых элективных курсов в системе профильного обучения. — Москва, 2014. – 165 с. — URL: https://dlib.rsl.ru (дата обращения: 05.03.2020). — Текст : электронный.

21. Российская педагогическая академия — Учебное пособие / Настоящие методические рекомендации по вопросам организации профильного обучения в общеобразовательных учреждениях, разработаны Институтом управления образования. — URL:

https://pedagogicheskaya.academic.ru (дата обращения: 17.02.2020). — Текст : электронный.

22. Сабельникова–Бегашвили, Н. Н. Предпрофильная подготовка и профильное обучение как факторы обеспечения качественного доступного образования (Методические материалы) / Н. Н. Сабельникова – Бегашвили // — Ставрополь: ГБОУ ДПО СК И РО ПК и ПРО, 2015. — 176 с.

23. Сайт Казанского федерального университета КФУ / Концепция модернизации российского образования. — URL: http://old.kpfu.ru (дата обращения: 05.03.2020). — Текст : электронный.

24. Чистякова, С. Н. Педагогическое сопровождение самоопределения школьников / С. Н. Чистякова — М.: Академия, 2018. — 128 с.

25. Электронная библиотека диссертаций / С. С. Кравцов // Теория и практика организации профильного обучения в школах Российской Федерации. — Москва, 2017. — . — URL: http://www.dissercat.com (дата обращения: 15.02.2020). — Текст : электронный.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

План-конспект факультативного занятия по математике

Дата: 19.11.2019

Класс: 10/1, МАОУ Лицей № 142 г. Челябинска

Тема занятия: «Геометрическая интерпретация комплексного числа»

Тип занятия: урок изучения нового материала

Цели занятия:

- ✓ ввести понятие «комплексная плоскость»;
- ✓ рассмотреть изображение комплексного числа на плоскости точками;
- ✓ рассмотреть изображение комплексного числа на плоскости векторами.

Формируемые результаты:

– Предметные: формировать умение изображать комплексные числа на комплексной плоскости;

– Личностные: формировать умение контролировать процесс и результат учебной деятельности;

– Метапредметные: развивать понимание сущности выполнения предписаний и умение действовать в соответствии с предложенной моделью.

Планируемые результаты: обучающиеся научатся решать задачи на изображение комплексных чисел на комплексной плоскости.

Основные понятия: комплексное число, модуль комплексного числа, комплексная плоскость.

Структура занятия (Таблица 6)

Таблица 6 — Структура занятия

Этапы проведения урока	Время
Организационный этап	2 мин.

Продолжение таблицы 6

Актуализация знаний	7 мин.
Изучение нового материала	23 мин.
Первичное закрепление изученного материала	8 мин.
Рефлексия	3 мин.
Постановка домашнего задания	2 мин.
Итого:	45 мин.

Ход занятия

1. Организационный этап.

Приветствие обучающихся, проверка готовности класса к началу урока, выявление отсутствующих, концентрация внимания и обеспечение рабочей обстановки.

2. Актуализация знаний.

Комплексное число $z = x + iy$ можно задать с помощью радиус-вектора $r = OM = (x; y)$. Длина вектора r, изображающего комплексное число z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Модуль r однозначно определяется по формуле: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задание: найдите модуль комплексного числа $z = 3 + 4i$.

Решение: $r = |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

3. Изучение нового материала.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ комплексной плоскости Oxy, такой, что $x = Re\, z$, $y = Im\, z$. И наоборот, каждую точку $M(x; y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$.

Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости* (рисунок 6).

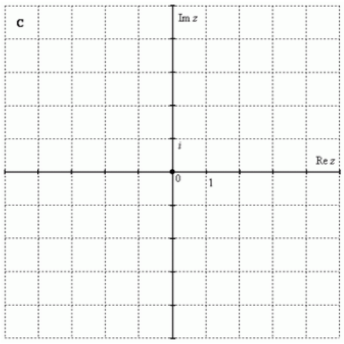

Рисунок 6

Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней лежат действительные числа $z = x + i0 = x$. Ось ординат называется *мнимой осью*, на ней лежат чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + iy$.

Правила оформления чертежа: по осям задается масштаб, отмечается ноль, единица по действительной оси и мнимая единица по мнимой оси.

Рассмотрим следующие комплексные числа $z_1 = 0;\ z_2 = -3;\ z_3 = 2$.

Очевидно, что это обыкновенные действительные числа, так как множество действительных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел C.

Действительная ось $Re\, z$ обозначает в точности множество действительных чисел R, и на этой оси находятся все числа с которыми мы были знакомы ранее.

Числа $z_1 = 0;\ z_2 = -3;\ z_3 = 2$ – комплексные числа *с нулевой мнимой частью*.

Числа $z_4 = i;\ z_5 = -\sqrt{3}i;\ z_6 = 4i$ – наоборот, *чисто мнимые числа*, т.е. числа *с нулевой действительной частью*. Они располагаются строго на оси $Im\, z$.

В числах $z_7 = 2 + 3i;\ z_8 = -4 + i;\ z_9 = -3 - 3i;\ z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю, такие числа обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат.

4. Первичное закрепление изученного материала.

Отметим следующие комплексные числа на плоскости: $z_1 = 0$; $z_2 = -3$; $z_3 = 2$; $z_4 = i$; $z_5 = -\sqrt{3}i$; $z_6 = 4i$; $z_7 = 2 + 3i$; $z_8 = -4 + i$; $z_9 = -3 - 3i$; $z_{10} = \sqrt{2} - i$ (рисунок 7).

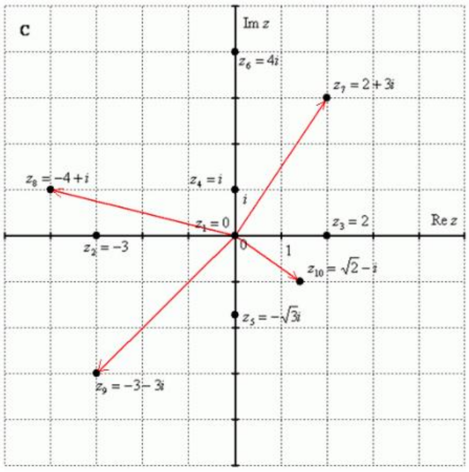

Рисунок 7

5. Рефлексия.

Продолжите фразу «Сегодня я научился (лась)…» или «Самым легким/сложным для меня было…»

6. Постановка домашнего задания.

Учитель раздаёт листочки с индивидуальными задачами на изображение комплексных чисел на плоскости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Диагностическая работа №1

1. Выполнить действия:

1) $(3+i)+(5-2i)$;

2) $(6-i)-(2+3i)$;

3) $(7+i)(10-i)$;

4) $\frac{5-2i}{7+3i}$.

2. Вычислить:

1) $\frac{2+5i}{2-5i}+\frac{2-5i}{2+5i}$;

2) $\left(\frac{1+i^{11}}{2-i^{7}}\right)^{2}$.

3. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $-1+i\sqrt{3}$;

2) $\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$.

4. Решить уравнение:

1) $z^2+5=0$;

2) $z^2-10z+34=0$.

5. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z|=3$.

6. Записать в алгебраической форме комплексное число:

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.