Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, вып. 4. С. 412–419.

УДК 517.51

ОБОБЩЁННЫЕ НЕРАВЕНСТВА КОШИ — БУНЯКОВСКОГО ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Т. В. Ершова

Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск, Россия
ale10919@yandex.ru

Указан метод, с помощью которого можно получить последовательность неравенств, обобщающих хорошо известное неравенство Коши — Буняковского для линейных положительных функционалов. Приведены два неравенства этой последовательности, а также доказаны утверждения, являющиеся следствиями первого из них.

Ключевые слова: *линейный положительный функционал, неравенство Коши — Буняковского, центральный момент линейного положительного оператора.*

Введение

Пусть V — линейная алгебра вещественных функций, заданных на некотором множестве Y. Обозначим через Φ линейный положительный функционал, действующий из V в $\mathbb{R}$. Известно [1], что неравенство Коши — Буняковского для линейных положительных функционалов имеет вид

$$\Phi^2 f\varphi \leqslant \Phi f^2 \cdot \Phi\varphi^2, \tag{1}$$

где функции f, φ принадлежат V. В данной статье укажем метод, который позволяет получать неравенства, в некотором смысле обобщающие неравенство (1).

Основным результатом статьи является доказательство следующего неравенства

$$(\Phi f^2\Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2\Phi g^2 - \Phi^2 fg) \geqslant (\Phi f^2\Phi\varphi g - \Phi f\varphi\Phi fg)^2.$$

А предложение 2 представляет собой применение этого неравенства к исследованию свойств линейного положительного функционала, удовлетворяющего неравенству (11) из пункта 3.

Статья написана на материале депонированной работы [2].

1. Вычисление определителя

В первом пункте приведём необходимые сведения.

Согласно [3] определитель

$$D_n = D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \Phi{\varphi_1}^2 & \Phi\varphi_1\varphi_2 & \ldots & \Phi\varphi_1\varphi_n \\ \Phi\varphi_2\varphi_1 & \Phi\varphi_2^2 & \ldots & \Phi\varphi_2\varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi\varphi_n\varphi_1 & \Phi\varphi_n\varphi_2 & \ldots & \Phi\varphi_n^2 \end{vmatrix}$$

назовём определителем Грама системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$, соответствующим функционалу Φ. Отметим, что в этом определении функционал Φ дополнительными свойствами, например линейностью, не обладает.

Предложение 1. *Пусть дан определитель*

$$d_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

порядка m, $m \geqslant 3$. Тогда в случае $a_{11} \neq 0$ выполняется равенство

$$a_{11}^{m-2} d_m = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & \dots & a_{11}a_{2m} - a_{1m}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & \dots & a_{11}a_{3m} - a_{1m}a_{31} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}a_{m2} - a_{12}a_{m1} & a_{11}a_{m3} - a_{13}a_{m1} & \dots & a_{11}a_{mm} - a_{1m}a_{m1} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Доказательство. Равенство (2) легко получить, выполнив элементарные преобразования столбцов определителя d_m. $\square$

Сформулируем два следствия предложения 1. В случае симметричности матрицы, определитель которой есть d_3, имеем

$$a_{11} d_3 = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})^2. \tag{3}$$

Применив формулу (2) при $m = 4$, получим

$$a_{11}^2 d_4 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} & \dots & a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21} \\ a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & \dots & a_{11}a_{34} - a_{14}a_{31} \\ a_{11}a_{42} - a_{12}a_{41} & a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41} & \dots & a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41} \end{vmatrix}.$$

Обозначим элементы последнего определителя через a'_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. В силу (2) получаем

$$a'_{11} a_{11}^2 d_4 = \begin{vmatrix} a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} & a'_{11}a'_{23} - a'_{13}a'_{21} \\ a'_{11}a'_{32} - a'_{12}a'_{31} & a'_{11}a'_{33} - a'_{13}a'_{31} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Предполагая симметричность матрицы, соответствующей определителю d_4, и возвращаясь к переменным a_{ij}, из (4) выводим равенство

$$\begin{gathered} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) a_{11}^2 d_4 = \left[(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})^2\right] \times \\ \times \left[(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{44} - a_{14}^2) - (a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})^2\right] - \\ - \left[(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{34} - a_{13}a_{14}) - (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14})\right]^2. \end{gathered} \tag{5}$$

2. Доказательство неравенств

Благодаря предложению 1 установим неравенства, которые назовём обобщёнными неравенствами Коши — Буняковского для линейных положительных функционалов.

Из определения положительного функционала следует, что неотрицательной является квадратичная форма

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m)^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j \Phi f_i f_j, \tag{6}$$

где $\lambda_i \in \mathbb{R}$, функции $f_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Квадратичной форме (6) соответствует симметрическая матрица с неотрицательными главными минорами. Таким образом, для главных миноров второго порядка имеем неравенство

$$D_2 = \begin{vmatrix} \Phi f_i^2 & \Phi f_i f_j \\ \Phi f_j f_i & \Phi f_j^2 \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m,$$

которое приводит к неравенству (1).

Замечание 1. Если $\Phi f_i^2 = 0$, то из (1) получаем $\Phi f_i f_j = 0$ и $D_2 = 0$.

Рассмотрим случай главных миноров третьего порядка. Изменим обозначения функций f_i, f_j, f_k на f, φ, g. Будем иметь

$$D_3 = \begin{vmatrix} \Phi f^2 & \Phi f\varphi & \Phi fg \\ \Phi\varphi f & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi g \\ \Phi gf & \Phi g\varphi & \Phi g^2 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Полагаем, что в определителе D_3 число $\Phi f^2 \neq 0$. В противном случае вследствие замечания 1 $\Phi f\varphi = \Phi fg = 0$ и, значит, $D_3 = 0$.

Вычислим произведение $\Phi f^2 \cdot D_3$, которое является неотрицательным. Применяя (3), получаем

$$\Phi f^2 \cdot D_3 = (\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2 \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) \geqslant (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2. \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что разности $\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi$ при различных f и φ имеют один и тот же знак.

Теперь напишем определитель Грама четвёртого порядка для функций f, φ, g и h:

$$D_4 = \begin{vmatrix} \Phi f^2 & \Phi f\varphi & \Phi fg & \Phi fh \\ \Phi\varphi f & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi g & \Phi\varphi h \\ \Phi gf & \Phi g\varphi & \Phi g^2 & \Phi gh \\ \Phi hf & \Phi h\varphi & \Phi hg & \Phi h^2 \end{vmatrix}.$$

Из равенства (5) получаем

$$\begin{gathered} \big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi g^2 - \Phi^2 fg) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg)^2\big] \times \\ \times \big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi h^2 - \Phi^2 fh) - (\Phi f^2 \Phi\varphi h - \Phi f\varphi \Phi fh)^2\big] \geqslant \\ \geqslant \big[(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi gh - \Phi fg \Phi fh) - (\Phi f^2 \Phi\varphi g - \Phi f\varphi \Phi fg) \times \\ \times (\Phi f^2 \Phi\varphi h - \Phi f\varphi \Phi fh)\big]^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Подобным образом исследуются случаи миноров порядков, больших четырёх. Неравенства (7), (8) и аналогичные им будем называть обобщёнными неравенствами Коши — Буняковского. Ясно, что практический интерес представляют неравенства (1) и (7).

Рассмотрим частные случаи неравенства (7).

Случай 1. Пусть $g = 1$. Тогда согласно (7) имеем

$$(\Phi f^2 \Phi\varphi^2 - \Phi^2 f\varphi)(\Phi f^2 \Phi 1 - \Phi^2 f) \geqslant (\Phi f^2 \Phi\varphi - \Phi f\varphi \Phi f)^2.$$

Случай 2. Пусть $f = 1$. В силу (7) получаем

$$(\Phi 1 \Phi \varphi^2 - \Phi^2 \varphi)(\Phi 1 \Phi g^2 - \Phi^2 g) \geqslant (\Phi 1 \Phi \varphi g - \Phi \varphi \Phi g)^2. \tag{9}$$

При $\Phi 1 = 1$ неравенство (9) примет вид

$$(\Phi \varphi^2 - \Phi^2 \varphi)(\Phi g^2 - \Phi^2 g) \geqslant (\Phi \varphi g - \Phi \varphi \Phi g)^2. \tag{10}$$

Полагая в (8) $f = 1$ и $\Phi 1 = 1$, получаем неравенство

$$\begin{gathered}\big[(\Phi \varphi^2 - \Phi^2 \varphi)(\Phi g^2 - \Phi^2 g) - (\Phi \varphi g - \Phi \varphi \Phi g)^2\big] \times \\ \times \big[(\Phi \varphi^2 - \Phi^2 \varphi)(\Phi h^2 - \Phi^2 h) - (\Phi \varphi h - \Phi \varphi \Phi h)^2\big] \geqslant \\ \geqslant \big[(\Phi \varphi^2 - \Phi^2 \varphi)(\Phi g h - \Phi g \Phi h) - (\Phi \varphi g - \Phi \varphi \Phi g)(\Phi \varphi h - \Phi \varphi \Phi h)\big]^2,\end{gathered}$$

которое обобщает (10).

3. Следствия из неравенства

Выведем несколько следствий из неравенства (7).

Предложение 2. *Пусть для некоторой функции φ выполняется условие*

$$\Phi 1 \Phi \varphi^2 = \Phi^2 \varphi. \tag{11}$$

Тогда

$$\Phi 1 \Phi \varphi g = \Phi \varphi \Phi g \quad \forall g \in V, \tag{12}$$

$$\Phi^{k-1} 1 \Phi \varphi^k = \Phi^k \varphi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

$$|\Phi \varphi| = \Phi |\varphi|. \tag{14}$$

В равенстве (13) *для отрицательных значений k считаем, что $\varphi \neq 0$, $\Phi \varphi \neq 0$.*

Доказательство. Ясно, что при выполнении условия (11) из (9) следует (12). Докажем равенство (13). Оно очевидно при $k = 0$. Рассмотрим случай натуральных значений k. Применим индукцию. Предполагая (13) доказанным для k и применяя (12), для случая $k + 1$ получаем

$$\phi^k 1 \Phi \varphi^{k+1} = \Phi^{k-1} 1 (\Phi 1 \Phi \varphi \cdot \varphi^k) = \Phi^{k-1} 1 \Phi \varphi \Phi \varphi^k = \Phi \varphi (\Phi^{k-1} 1 \cdot \Phi \varphi^k) = \Phi \varphi \Phi^k \varphi = \Phi^{k+1} \varphi.$$

Теперь предположим, что k отрицательно. Тогда $\Phi \varphi \neq 0$ и, кроме того, $\Phi 1 \neq 0$. В противном случае, имеем $\Phi \varphi = 0$, что противоречит условию предложения для отрицательных значений k. Перепишем равенство (13) в виде

$$\Phi^{-k+1} 1 = \Phi^{-k} \varphi \Phi \varphi^k, \tag{15}$$

затем в (15) заменим k на $-k$, где k считаем натуральным. Будем доказывать равенство

$$\Phi^{k+1} 1 = \Phi^k \varphi \Phi \varphi^{-k} \tag{16}$$

индукцией по k. Пусть $k = 1$. Тогда

$$\Phi^2 1 = \Phi 1 \Phi \varphi \cdot \varphi^{-1} = \Phi \varphi \Phi \varphi^{-1}.$$

Считая (16) доказанным для k, рассмотрим случай $k+1$.

$$\Phi^{k+1}1 = \Phi 1 \Phi^{k+1}1 = \Phi 1(\Phi^k\varphi\Phi\varphi^{-k}) = \Phi^k\varphi(\Phi 1\Phi\varphi^{-k}) =$$

$$= \Phi^k\varphi(\Phi 1\Phi\varphi \cdot \varphi^{-k-1}) = \Phi^k\varphi(\Phi\varphi\Phi\varphi^{-k-1}) = \Phi^{k+1}\varphi\Phi\varphi^{-k-1}.$$

Теперь докажем равенство (14). Имеем

$$\Phi 1\Phi\varphi^2 = \Phi^2\varphi = |\Phi^2\varphi| = |\Phi\varphi|^2 \leqslant \Phi^2|\varphi| = \Phi|\varphi|^2\Phi 1 = \Phi\varphi^2\Phi 1.$$

Значит, $|\Phi\varphi|^2 = \Phi^2|\varphi|$ или $|\Phi\varphi| = \Phi|\varphi|$. □

Следствие 1. *Если имеет место равенство* (11)*, то*

$$\Phi 1\Phi|\varphi|g = \Phi|\varphi|\Phi g \quad \forall g \in V, \tag{17}$$

$$\Phi^{k-1}1\Phi|\varphi|^k = \Phi^k|\varphi|, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Доказательство. Применяя (14), запишем равенство (11) в виде

$$\Phi 1\Phi|\varphi|^2 = \Phi 1\Phi\varphi^2 = \Phi^2\varphi = |\Phi\varphi|^2 = \Phi^2|\varphi|,$$

откуда согласно (12), (13) следуют равенства (17) и (18). □

Замечание 2. Если $\Phi 1 = 1$, то из условия $\Phi\varphi^2 = \Phi^2\varphi$ будут следовать равенства

$$\Phi\varphi g = \Phi\varphi\Phi g, \quad \Phi|\varphi|g = \Phi|\varphi|\Phi g \quad \forall g \in V,$$

$$\Phi\varphi^k = \Phi^k\varphi, \quad \Phi|\varphi|^k = \Phi^k|\varphi|, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Приведём второй способ доказательства первого равенства в (19), также использующий метод математической индукции. Для функций 1, φ, φ^2 составим определитель Грама $D(1,\varphi,\varphi^2)$. Таким образом,

$$D(1,\varphi,\varphi^2) = \begin{vmatrix} \Phi 1 & \Phi\varphi & \Phi\varphi^2 \\ \Phi\varphi & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi^3 \\ \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi^3 & \Phi\varphi^4 \end{vmatrix}.$$

С учётом равенств $\Phi 1 = 1$ и $\Phi\varphi^2 = \Phi^2\varphi$ получаем

$$D(1,\varphi,\varphi^2) = \begin{vmatrix} 1 & \Phi\varphi & \Phi^2\varphi \\ 0 & 0 & \Phi\varphi^3 - \Phi^3\varphi \\ 0 & \Phi\varphi^3 - \Phi^3\varphi & \Phi\varphi^4 - \Phi^4\varphi \end{vmatrix} = -(\Phi\varphi^3 - \Phi^3\varphi)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, $\Phi\varphi^3 = \Phi^3\varphi$.

Предположим, что $\Phi\varphi^k = \Phi^k\varphi$. Для функций 1, φ, φ^k составим определитель $D(1,\varphi,\varphi^k)$ и вычислим его.

$$D(1,\varphi,\varphi^k) = \begin{vmatrix} \Phi 1 & \Phi\varphi & \Phi\varphi^k \\ \Phi\varphi & \Phi\varphi^2 & \Phi\varphi^{k+1} \\ \Phi\varphi^k & \Phi\varphi^{k+1} & \Phi\varphi^{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi 1 & \Phi\varphi & \Phi^k\varphi \\ \Phi\varphi & \Phi^2\varphi & \Phi\varphi^{k+1} \\ \Phi^k\varphi & \Phi\varphi^{k+1} & \Phi\varphi^{2k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \Phi\varphi & \Phi^k\varphi \\ 0 & 0 & \Phi\varphi^{k+1} - \Phi^{k+1}\varphi \\ 0 & \Phi\varphi^{k+1} - \Phi^{k+1}\varphi & \Phi\varphi^{2k} - \Phi^{2k}\varphi \end{vmatrix} = -(\Phi\varphi^{k+1} - \Phi^{k+1}\varphi)^2 \geqslant 0.$$

Значит, $\Phi\varphi^{k+1} = \Phi^{k+1}\varphi$.

В случае отрицательных значений k производим замену k на $-k$, где k натурально. Определитель Грама составляем для функций φ^k, 1, φ^{-k}. Имеем

$$D(\varphi^k, 1, \varphi^{-k}) = \begin{vmatrix} \Phi\varphi^{2k} & \Phi\varphi^k & \Phi 1 \\ \Phi\varphi^k & \Phi 1 & \Phi\varphi^{-k} \\ \Phi 1 & \Phi\varphi^{-k} & \Phi\varphi^{-2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi^{2k}\varphi & \Phi^k\varphi & 1 \\ \Phi^k\varphi & 1 & \Phi\varphi^{-k} \\ 1 & \Phi\varphi^{-k} & \Phi\varphi^{-2k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Phi^{2k}\varphi & \Phi^k\varphi & 1 \\ 0 & 0 & \Phi\varphi^{-k} - \Phi^{-k}\varphi \\ 0 & \Phi\varphi^{-k} - \Phi^{-k}\varphi & \Phi\varphi^{-2k} - \Phi^{-2k}\varphi \end{vmatrix} = -\Phi^{2k}\varphi(\Phi\varphi^{-k} - \Phi^{-k}\varphi)^2 \geqslant 0.$$

Следовательно, $\Phi\varphi^{-k} = \Phi^{-k}\varphi$ для любого k из $\mathbb{N}$.

4. Центральные моменты

Используя обобщённые неравенства Коши — Буняковского (7) и (8), установим неравенства для центральных моментов линейных положительных операторов.

Пусть L — линейный положительный оператор, заданный на пространстве ограниченных функций $M[0,1]$. Как известно, центральным моментом порядка k для оператора L называется функция $S_k(L,x) = L\big((t-x)^k, x\big)$, $x \in [0,1]$. Пусть x — фиксированная точка из сегмента $[0,1]$. Рассмотрим функционал Φ, определяемый равенством

$$\Phi\varphi = L(\varphi, x), \quad \varphi \in M[0,1].$$

Очевидно, что Φ является линейным положительным функционалом. Следовательно, для него выполняются все вышеприведённые утверждения. Например, в случае $\varphi(t) = t - x$ предложение 2 переформулируется следующим образом.

Предложение 2′. *Пусть* $S_0(L,x)S_2(L,x) = S_1^2(L,x)$. *Тогда*

$$S_0(L,x)L\big((t-x)g(t), x\big) = S_1(L,x)L(g,x) \quad \forall g \in M[0,1],$$

$$S_0^{k-1}(L,x)S_k(L,x) = S_1^k(L,x), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$|S_1(L,x)| = S_1^*(L,x),$$

где $S_k(L,x) = L\big((t-x)^k, x\big)$, $S_1^*(L,x) = L\big(|t-x|, x\big)$.

Далее, из (7) и (8) вытекают неравенства

$$(S_{2m}S_{2l} - S_{m+l}^2)(S_{2m}S_{2k} - S_{m+k}^2) \geqslant (S_{2m}S_{l+k} - S_{m+l}S_{m+k})^2, \tag{20}$$

$$\big(S_{2m}S_{2l} - (S_{m+l}^*)^2\big)\big(S_{2m}S_{2k} - (S_{m+k}^*)^2\big) \geqslant (S_{2m}S_{l+k}^* - S_{m+l}^*S_{m+k}^*)^2,$$

$$\begin{gathered} \big[(S_{2m} - S_m^2)(S_{2l} - S_l^2) - (S_{m+l} - S_mS_l)^2\big]\times \\ \times\big[(S_{2m} - S_m^2)(S_{2k} - S_k^2) - (S_{m+k} - S_mS_k)^2\big] \geqslant \\ \geqslant \big[(S_{2m} - S_m^2)(S_{l+k} - S_lS_k) - (S_{m+l} - S_mS_l)^2\big]^2. \end{gathered} \tag{21}$$

В (21) предполагаем, что $S_0(L,x) = 1$. Для удобства записи символы L и x опускаем.

Частным случаем неравенства (20) при $m = 0$ и $S_0(L,x) = 1$ является неравенство

$$(S_{2l} - S_l^2)(S_{2k} - S_k^2) \geqslant (S_{l+k} - S_lS_k)^2. \tag{22}$$

При $l = 2$, $k = 1$, $S_1(L,x) = 0$, $S_2(L,x) \neq 0$ из (22) следует неравенство

$$S_4 - S_2^2 \geqslant \frac{S_3^2}{S_2},$$

которое уточняет неравенство $S_4 \geqslant S_2^2$, полученное из (1).

Список литературы

1. **Виденский, В. С.** Линейные положительные операторы конечного ранга / В. С. Виденский. — Л. : Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, 1985. — 68 с.
2. **Ершова, Т. В.** Обобщённые неравенства Коши — Буняковского для линейных положительных функционалов / Т. В. Ершова. — Челябинск : Челяб. гос. пед. ун-т, 2002. — 10 с. — Деп. в ВИНИТИ 22.04.2002, № 734–В2002.
3. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. — М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. — 688 с.

Поступила в редакцию 08.10.2017
После переработки 03.11.2017

Сведения об авторе

Ершова Тамара Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск, Россия; e-mail: ale10919@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2017. Vol. 2, iss. 4. P. 412–419.

GENERALIZED CAUCHY — BUNYAKOVSKII INEQUALITIES FOR LINEAR POSITIVE FUNCTIONALS

T.V. Ershova

South Ural State Humanitarian-Pedagogical University, Chelyabinsk, Russia
ale10919@yandex.ru

The method is indicated which can be used to obtain a sequence of inequalities that generalize the well-known Cauchy — Bunyakovskii inequality for linear positive functionals. Two inequalities of this sequence are given, and statements that are consequences of the first of them are proved also.

Ключевые слова: *linear positive functional, the Cauchy — Bunyakovskii inequality, the central moment of linear positive operator.*

References

1. **Videnskiy V.S.** *Lineynye polozhitel'nye operatory konechnogo ranga* [Linear positive operators of finite rank]. Leningrad, Publishing Center of Leningrad State Pedagogical University, 1985. 68 p. (In Russ.).
2. **Ershova T.V.** *Obobshchennye neravenstva Koshi — Bunyakovskogo dlya lineynykh polozhitel'nykh funktsionalov* [Generalized Cauchy — Bunyakovskii inequalities for linear positive functionals]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State Pedagogical University, 2002. 10 p. Deposited in VINITI 22.04.2002, No. 734–B2002. (In Russ.).
3. **Natanson I.P.** *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1949. 688 p. (In Russ.).

Accepted article received 08.10.2017
Corrections received 03.11.2017