Государственный комитет СССР
по народному образованию

ЧЕЛЯБИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

Ю.Г.Малиновский, А.С.Макаров

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов-заочников

Челябинск
1989

Государственный комитет СССР по народному образованию

Челябинский политехнический институт
имени Ленинского комсомола

Кафедра высшей математики № 2

Ю.Г.Малиновский, А.С.Макаров

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов-заочников

Одобрено объединенным научно-методическим советом по математике

Челябинск
1989

УДК 517.4(07)

Малиновский Ю.Г., Макаров А.С. Элементы операционного исчисления: Учебное пособие для студентов-заочников.- Челябинск: ЧПИ, 1989. - 35 с.

Пособие предназначено для студентов заочного факультета ЧПИ. Изложение теоретического материала иллюстрируется большим числом примеров и сопровождается набором задач для самостоятельного решения. Пособие может быть использовано при изучении данной темы и студентами других форм обучения.

Рецензенты: С.Г.Иванов, А.К.Брюханов.

Введение

Функции, с которыми приходится иметь дело инженеру, всегда служат решениями функциональных уравнений - дифференциальных, разностных и интегральных. Одним из методов, позволяющих упростить решение многих задач, является операционное исчисление. Значение операционного исчисления при решении прикладных задач настолько велико, что выдающийся советский ученый в области теории колебаний и автоматического управления А.А.Андронов назвал операционное исчисление азбукой современной автоматики и телемеханики.

Пусть, например, требуется найти функцию $x(t)$ действительного переменного t из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаками производных и интегралов. Операционный метод задачи сводится к следующим этапам:

1) от искомой функции $x(t)$ переходят к функции $X(P)$ комплексного переменного P, называемой изображением $x(t)$;

2) над изображением $X(P)$ производят операции, соответствующие заданным операциям над $x(t)$, получают новое уравнение относительно $X(P)$, называемое изображающим уравнением. При этом операции над изображением оказываются значительно более простыми;

3) полученное изображающее уравнение решают относительно $X(P)$, что обычно сводится к простым арифметическим действиям;

4) от найденного изображения $X(P)$ переходят к оригиналу $x(t)$, который и является искомой функцией.

Применение операционного метода можно сравнить с логарифмированием, когда 1) от чисел переходят к их логарифмам; 2) над логарифмами производят действия, соответствующие действиям над числами, причем умножению чисел соответствует более простая операция сложения логарифмов и т.д.; 3) от найденного логарифма снова возвращаются к числу.

§ 1. Интеграл Лапласа

Определение 1. Пусть $f(t)$ комплекснозначная ($f(t)=f_1(t)+if_2(t)$, где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - действительные функции) функция действительной переменной t. Интегралом Лапласа от этой функции будем называть несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-Pt} f(t)\,dt,$$

зависящий от комплексного параметра $P = x + iy$

Естественно, что не для всякой функции $f(t)$ интеграл Лапласа имеет смысл. Поэтому укажем класс функций, для которых интеграл Лапласа сходится по крайней мере для некоторых значений P.

Определение 2. Обозначим через H множество комплекснозначных функций $f(t)$, определенных для всех значений действительной переменной $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(t)=0$ при $t<0$;

2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна всюду, кроме отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число;

3) для каждой функции $f(t)$ существуют такие постоянные $M>0$ и $a \geq 0$, что для всех t $|f(t)| \leq Me^{at}$ (число a будем называть показателем роста функции $f(t)$).

Теорема. Пусть $f(t) \in H$. Тогда интеграл Лапласа для этой функции сходится при любом P из полуплоскости $R_e P > a$, где a - показатель роста $f(t)$.

Доказательство. Пусть $P = x + iy$ - любое комплексное число такое, что $R_e P = x > a$. Оценивая при этом P модуль подынтегральной функции интеграла Лапласа, получаем

$$\left|e^{-Pt} f(t)\right| = e^{-xt}\left|f(t)\right| \leq e^{-xt} M e^{at} = Me^{-(x-a)t}. \qquad (1.1)$$

Но так как $\int_0^{\infty} Me^{-(x-a)t}\,dt$ сходится, то интеграл Лапласа абсолютно сходится в силу теоремы сравнения для несобственных интегралов.

Замечание 1. Можно указать и более широкий, чем H, класс функций, для которых сходится интеграл Лапласа. Но мы ограничимся рассмотрением функций из множества H ввиду того, что большинство функций, встречающихся на практике, удовлетворяет условиям 1-3 (аргумент t чаще всего интерпретируется как время). Несколько искусственное, на первый взгляд, условие 1 оправдано тем, что для физики и техники безразлично, как ведут себя рассматриваемые функции до некоторого начального момента времени, который всегда можно принять за момент $t = 0$.

Замечание 2. Простейшей функцией, принадлежащей множеству H, является так называемая единичная функция

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, умножение функции $\varphi(t)$ на $\eta(t)$ обращает в нуль эту функцию при $t<0$. Поэтому, если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1, функция $\eta(t)\varphi(t)$ уже будет принадлежать множеству H. В дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами функции снабжены множителем $\eta(t)$, хотя сам этот множитель в написании будем опускать. Так, будем писать t^n, $\sin\omega t$ и т.д., подразумевая при этом соответственно $\eta(t)t^n$, $\eta(t)\sin\omega t$ и т.д.

§ 2. Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения

Определение. Пусть $f(t) \in H$ с показателем роста a. Тогда интеграл Лапласа для $f(t)$, сходящийся при любом P из полуплоскости $R_e P > a$ является функцией $F(P)$ комплексной переменной P, определенной в этой полуплоскости. Переход от функции $f(t)$ к функции $F(P)$, осуществляемый посредством интеграла Лапласа

$$F(P) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t)\,dt, \qquad (2.1)$$

будем называть преобразованием Лапласа.

Таким образом, преобразование Лапласа есть отображение, ставящее в соответствие каждой функции $f(t) \in H$ некоторую функцию $F(P)$ комплексной переменной P. Функцию $F(P)$, соответствующую функции $f(t)$, будем называть изображением $f(t)$, функцию $f(t)$ - оригиналом для этого изображения, множество H - пространством оригиналов. Тот факт, что $F(P)$ является изображением $f(t)$, будем записывать в виде:

$$F(P) \risingdotseq f(t) \quad \text{или} \quad f(t) \fallingdotseq F(P)$$

(стрелка всегда направлена от изображения к оригиналу). При этом условимся обозначать оригиналы малыми буквами, изображения - соответствующими прописными буквами).

В качестве примера найдем, воспользовавшись определением преобразования Лапласа, изображение функции e^{at}. При любом комплексном $\alpha e^{\alpha t} \in H$ и ввиду того, что

$$|e^{\alpha t}| = e^{Re\,\alpha t},$$

имеет показатель роста $a = Re\,\alpha$. Тогда изображение функции $e^{\alpha t}$ будет определено при любом комплексном $p = x + iy$ из полуплоскости $Re\,p > Re\,\alpha$. Для нахождения изображения вычислим интеграл Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким образом, мы получили формулу

$$e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}\ (Re\,p > Re\,\alpha). \qquad (2.2)$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем

$$\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\ (Re\,p > 0). \qquad (2.3)$$

Замечание I. Для любого оригинала $f(t)$ с показателем роста a его изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $Re\,p > a$. Основное свойство изображения заключается в том, что в этой полуплоскости оно является аналитической функцией комплексного переменного, т.е. его можно дифференцировать любое число раз. Производные от изображения $F(p)$ вычисляются путем дифференцирования под знаком интеграла Лапласа:

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t)\,dt.$$

Замечание 2. Пусть $f(t) \in H$ с показателем роста a. Тогда согласно соотношению (I.I) в полуплоскости $Re\,p = x > a$ выполняется неравенство

$$|F(p)| \leq \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)|\,dt \leq M \int_0^\infty e^{-(x-a)t}\,dt = \frac{M}{x-a}.$$

Отсюда следует еще одно свойство изображения: если точка p стремится к бесконечности так, что $Re\,p = x$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю, т.е. $\lim_{x \to +\infty} F(p) = 0$.

Замечание 3. Очевидно, что каждому оригиналу $f(t)$ соответствует одно единственное изображение $F(p)$, определяемое по формуле (2.I). При этом каждое изображение $F(p)$ может быть получено из бесконечно большого числа оригиналов $f(t)$. В самом деле, если мы изменим значение оригинала в конечном числе точек, то, поскольку такое изменение

не влияет на результат интегрирования, изображение не изменится. Таким образом, отображение, обратное преобразованию Лапласа, не является однозначным. Но можно показать, что если $F(p)$ служит изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то оригиналы совпадают друг с другом во всех точках, в которых они непрерывны, т.е. оригинал однозначно определяется своим изображением с точностью до своих значений в точках разрыва.

Упражнения

Воспользовавшись определением преобразования Лапласа, найти изображения функций:

I. $f(t) = t$; 2. $f(t) = t^2$

§ 3. Свойства преобразования Лапласа

Теорема линейности. Пусть $f_k(t) \in H$ и $f_k(t) \risingdotseq F_k(p)$. Тогда для любых комплексных постоянных C_k

$$C_1 f_1(t) + \ldots + C_n f_n(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + \ldots + C_n F_n(p).$$

Справедливость этой теоремы следует непосредственно из свойств интегралов.

Примеры. Найти изображение функции $\cos\omega t$.

Использовав формулу (2.2) и теорему линейности, получим

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}. \qquad (3.2)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}; \quad sh\,\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}; \quad ch\,\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}. \qquad (3.I)$$

Теорема подобия. Пусть $f(t) \in M$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда для любого постоянного $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что если $f(t) \in H$ то для любого $\alpha > 0$ $f(\alpha t) \in H$. Для нахождения изображения $f(\alpha t)$ преобразуем интеграл Лапласа этой функции заменой $\alpha t = \tau$:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p\tau}{\alpha}} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Замечание. Эта теорема часто используется при отыскании оригинала по известному изображению. Применяемая при этом формула

$$F(\beta p) \risingdotseq \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right)$$

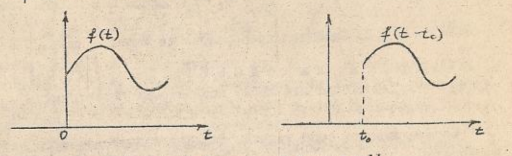
получается из выведенной нами заменой $\beta = \frac{1}{\alpha}$.

Теорема запаздывания. Пусть $f(t) \in H$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$. Тогда для любого $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p)$$

(запаздывание аргумента оригинала на t_0 приводит к умножению изображения на e^{-pt_0}).

Доказательство. Пусть $f(t) \in H$ и $t_0 > 0$ – любое число. Рассмотрим функцию $f(t - t_0)$. График этой функции получается из графика функции $f(t)$ сдвигом вправо на t.



Очевидно, что если $f(t) \in H$ то и $f(t - t_0) \in H$.

Учитывая, что $f(t - t_0) = 0$ при $t < t_0$, и преобразуя интеграл Лапласа заменой $t - t_0 = \tau$, получаем:

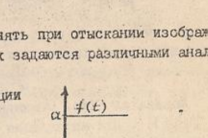
$$f(t-t_0) \risingdotseq \int_0^\infty f(t-t_0) e^{-pt}\,dt = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0) e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p(t_0+\tau)}\,d\tau = e^{-pt_0}\int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau = e^{-pt_0} F(p).$$

Теорему запаздывания удобно применять при отыскании изображений функций, которые на разных участках задаются различными аналитическими выражениями.

Примеры. I. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq b, \\ 0, & t \notin [0, b]. \end{cases}$$



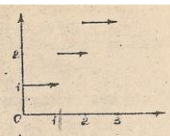
При помощи единичной функции $\eta(t)$ заданную функцию $f(t)$ можно записать формулой $f(t) = a[\eta(t) - \eta(t-b)]$.

Тогда в силу теорем линейности, запаздывания и формулы (2.3) имеем

$$f(t) \risingdotseq a\left[\frac{1}{p} - e^{-bp}\frac{1}{p}\right] = \frac{a}{p}(1 - e^{-bp}).$$

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n+1, & n \leq t \leq n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$



При помощи единичной функции $\eta(t)$ ступенчатую функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \eta(t) + \eta(t-1) + \eta(t-2) + \ldots + \eta(t-n) + \ldots.$$

Тогда

$$F(p) = \frac{1}{p} + e^{-p}\frac{1}{p} + e^{-2p}\frac{1}{p} + \ldots + e^{-np}\frac{1}{p} + \ldots$$

Учитывая, что изображение единичной функции $\eta(t)$ определено в полуплоскости $Re\,p > 0$, а при этих p $|e^{-p}| < 1$ правая часть последнего равенства является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Поэтому

$$F(p) = \frac{\frac{1}{p}}{1 - e^{-p}} = \frac{1}{p(1 - e^{-p})}.$$

3. В качестве еще одного примера применения теоремы запаздывания выведем формулу для изображения периодического оригинала.

Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом, равным T и $\eta(t) f(t) \in H$. Тогда

$$f(t) \risingdotseq F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Действительно, рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi(t) \in H$, а ее изображение $\Phi(p)$ определяется по формуле

$$\Phi(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Заданную функцию $f(t)$ представим в виде

$$f(t) = \varphi(t) + \varphi(t - T) + \varphi(t - 2T) + \ldots.$$

Тогда по теореме запаздывания получим

$$f(t) \risingdotseq \Phi(p) + e^{-Tp}\Phi(p) + e^{-2Tp}\Phi(p) + \ldots = \frac{1}{1 - e^{-Tp}}\Phi(p).$$

Т е о р е м а с м е щ е н и я. Пусть $f(t)\in H$ и $f(t)\div F(p)$. Тогда для любого комплексного p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \div F(p-p_0)$$

("смещение" изображения на p_0 равносильно умножению оригинала на $e^{p_0 t}$).

Доказательство. Очевидно, что если $f(t)\in H$, то для любого комплексного p_0 $e^{p_0 t}f(t)\in H$. Далее по определению изображения имеем

$$e^{p_0 t} f(t) \div \int_0^\infty e^{p_0 t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p-p_0).$$

Эта теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту. Например, использовав формулы (3.I), (3.2) и теорему смещения, получим

$$e^{-\alpha t}\sin\omega t \div \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}; \quad e^{-\alpha t}\cos\omega t \div \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}.$$

Кроме того, теорема смещения дает возможность находить оригиналы по заданным изображениям. А именно, если известен оригинал для изображения $F(p)$, то теорема смещения позволяет сразу же найти оригинал для изображения $F(p-p_0)$, "смещенного" на p_0.

Примеры. Найти оригиналы по их изображениям:

1. $F(p)=\dfrac{1}{p^2-2p}$; 2. $F(p)=\dfrac{5p-1}{p^2-6p+13}$.

В силу формул (3.I), (3.2) и теоремы смещения находим:

1. $\dfrac{1}{p^2-2p}=\dfrac{1}{(p-1)^2-1}\div e^t \operatorname{sh} t$;

2. $\dfrac{5p-1}{p^2-6p+13}=\dfrac{5p-1}{(p-3)^2+4}=\dfrac{5(p-3)+14}{(p-3)^2+4}=$

$=5\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}+7\dfrac{2}{(p-3)^2+4}\div 5e^{3t}\cos 2t+7e^{3t}\sin 2t.$

У п р а ж н е н и я

Найти изображения функций:

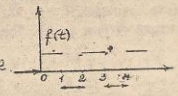
3. $3-5e^{4t}$. 4. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t+\cos t)$. 5. $\frac{1}{2}(\sin\alpha t-\operatorname{sh} 2t)$.

6. a^t. 7. $\cos^2\alpha t$. 8. $\cos\alpha t\cos\beta t$. 9. $\sin^3\alpha t$.

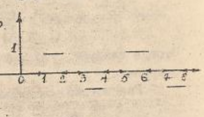
10. $f(t)=\begin{cases}0, & t<2,\\ 1-e^{-3(t-2)}, & t\geq 2.\end{cases}$ II. $f(t)=\begin{cases}0, & t<2 \text{ и } t>4,\\ 1, & 2\leq t<3,\\ -1, & 3\leq t\leq 4.\end{cases}$

I2. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ и } t>5,\\ 1, & 1\leq t\leq 2,\\ -2, & 2<t\leq 3,\\ 0, & 3<t<4,\\ 2, & 4\leq t\leq 5.\end{cases}$

I3. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 2n\leq t\leq 2n+1,\\ -1, & 2n+1<t<2n+2\\ & (n=0,1,2,\ldots).\end{cases}$



I4. $f(t)=\begin{cases}0, & 2n<t<2n+1,\ t<0,\\ 1, & 4n+1\leq t\leq 4n+2,\\ -1, & 4n+3\leq t\leq 4n+4.\\ & (n=0,1,2,\ldots)\end{cases}$



I5. $e^{-at}\operatorname{ch} bt$. I6. $e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$.

Найти оригиналы по данным изображениям:

I7. $\dfrac{1}{p^2-4p+20}$. I8. $\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$. I9. $\dfrac{3p+2}{p^2-25}$.

20. $\dfrac{p}{p^2-2p+5}$. 2I. $\dfrac{3p+19}{2p^2+8p+19}$. 22. $\dfrac{1}{p}(2-3e^{-p}+e^{-3p})$.

§ 4. Свертка функций. Теорема умножения

О п р е д е л е н и е. Сверткой двух функций действительного аргумента $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$

Свертка функций f_1 и f_2 обозначается символом f_1*f_2. Операция нахождения свертки называется свертыванием функции. Операция свертывания обладает свойством коммутативности: $f_1*f_2=f_2*f_1$, т.е.

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau.$$

В справедливости этого равенства нетрудно убедиться, выполнив в одном из интегралов замену переменной $t-\tau=z$.

Т е о р е м а у м н о ж е н и я. Пусть $f_1(t)\in H$, $f_2(t)\in H$ и $f_1(t)\div F_1(p)$, $f_2(t)\div F_2(p)$. Тогда $F_1(p)F_2(p)\div f_2*f_1$ (свертке двух функций соответствует произведение их изображений).

Доказательство. Покажем прежде всего, что если $f_1(t)\in H$ и $f_2(t)\in H$, то $f_1*f_2\in H$. Действительно, условия I и 2 определения оригинала очевидны. Пусть a_0 равно наибольшему из показателей роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда

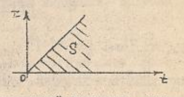
$$|(f_1*f_2)(t)|=\left|\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right|\leq\int_0^t|f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|d\tau<$$

$$<M\int_0^t e^{a_0\tau}e^{a_0(t-\tau)}d\tau=Me^{a_0t}\int_0^t d\tau=Mte^{a_0t}<Me^{(a_0+1)t}.$$

Отсюда следует, что для свертки выполняется условие 3 определения оригинала.

Рассмотрим изображение свертки f_1*f_2:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau.$$



Данный интеграл представляет собой двукратный интеграл, распространенный на сектор S плоскости (t,τ). Изменив порядок интегрирования, получим

$$F(p)=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt.$$

Произведем во внутреннем интеграле замену переменной $t-\tau=z$. Тогда

$$F(p)=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-p(\tau+z)}f_2(z)dz=$$

$$=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-p\tau}e^{-pz}f_2(z)dz=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau\cdot\int_0^\infty e^{-pz}f_2(z)dz=F_1(p)F_2(p).$$

Теорему умножения можно использовать для нахождения оригинала. Рассмотрим пример.

Пример. Найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Так как $\dfrac{1}{p^2+1}\div\sin t$, то по теореме умножения

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\div\int_0^t\sin\tau\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2\tau-t)-\cos t\right]d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2}-\tau\cos t\right]\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{\sin t}{2}-\frac{t}{2}\cos t.$$

У п р а ж н е н и я

23. Найти свертку функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и убедиться в справедливости равенства $f_1*f_2\div F_1(p)F_2(p)$, если

а) $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\cos t$;

б) $f_1(t)=\sin t$, $f_2(t)=\cos t$.

Воспользовавшись теоремой умножения, найти оригиналы, соответствующие данным изображениям:

24. $\dfrac{1}{(p+1)(p-2)}$; 25. $\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

26. $\dfrac{p}{(p-2)(p^2-1)}$; 27. $\dfrac{1}{p(p^2+6)}$.

§ 5. Дифференцирование и интегрирование изображений

Т е о р е м а I. Пусть $f(t)\in H$ и $f(t)\div F(p)$. Тогда для любого натурального n

$$t^n f(t)\div(-1)^n F^{(n)}(p).$$

Доказательство. Пусть $f(t)\in H$ и при $t>0$ допускает оценку $|f(t)|\leq Me^{at}$, n – любое натуральное число. Покажем, что функция $t^nf(t)$ удовлетворяет условиям I–3, налагаемым на оригиналы, т.е.

$$t^n f(t)\in H.$$

Справедливость условий I, 2 очевидна, а выполнение условия 3 следует из оценки

$$|f(t)t^n|=|e^{-\varepsilon t}t^n|\cdot|e^{\varepsilon t}f(t)|\leq M_1 Me^{(a+\varepsilon)t},$$

где $\varepsilon>0$ – любое число;

M_1 – наибольшее значение функции $e^{-\varepsilon t}t^n$ на положительной полуоси.

Как уже было отмечено, изображение $F(P)$ - аналитическая функция комплексного переменного в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > a$, и ее производные вычисляются по формуле

$$F^{(n)}(P) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Умножив обе части этого равенства на $(-1)^n$, получим

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(P).$$

С л е д с т в и е. (Правило дифференцирования изображений). Выведенную формулу можно записать в виде

$$F^{(n)}(P) \risingdotseq (-t)^n f(t),$$

т.е. дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $-t$.

Примеры. Найти изображения функций t^n; $t^n e^{\alpha t}$.

Использовав доказанную теорему и известную формулу изображения единичной функции $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{P}$, получим

$$t^n = t^n \eta(t) \risingdotseq (-1)^n \left(\frac{1}{P}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Теперь изображение функции $t^n e^{\alpha t}$ может быть сразу найдено по теореме смещения

$$e^{\alpha t} t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть $f(t) \in H$, $f(t) \risingdotseq F(P)$ и $\frac{f(t)}{t} \in H$. Тогда $\int_P^\infty F(P)\,dP$ по любой кривой, вдоль которой $\mathrm{Re}\,P$ неограниченно возрастает, сходится и

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_P^\infty F(P)\,dP.$$

Доказательство. Обозначим через $\Phi(P)$ изображение функции $\frac{f(t)}{t}$. Тогда по правилу дифференцирования изображений получим $f(t) \risingdotseq -\Phi'(P)$. Но функция $f(t)$ имеет единственное изображение, поэтому

$$F(P) = -\Phi'(P)$$

Интегрируем полученное равенство в пределах от P до q:

$$\int_P^q F(P)\,dP = -\int_P^q \Phi'(P)\,dP = \Phi(P) - \Phi(q).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\mathrm{Re}\,q \to +\infty$ и принимая во внимание, что при этом условии $\Phi(q) \to 0$ (замечание 2 § 2), получаем

$$\Phi(P) = \int_P^\infty F(P)\,dP.$$

В качестве примера найдем изображение функции $\frac{1}{t}\sin \omega t$.

Так как $\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, то

$$\frac{1}{t}\sin\omega t \risingdotseq \int_P^\infty \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,dP = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{P}{\omega} = \mathrm{arcctg}\frac{P}{\omega}.$$

У п р а ж н е н и я

Найти изображения функций:

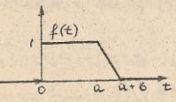
28. $t\cos\alpha t$; 29. $t\sin\alpha t$; 30. $t^2\cos\alpha t$;

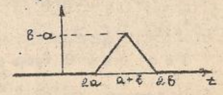
31. $\frac{\cos bt - \cos at}{t}$; 32. $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$; 33. $\frac{1-\cos t}{t} e^{-t}$;

34. $\frac{1-e^{at}}{te^t}$.

35. $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \text{ и } t \geq a+b, \\ 1, & 0 \leq t \leq a, \\ -\frac{1}{b}t + 1 + \frac{a}{b}, & a<t<a+b; \end{cases}$

36. $f(t) = \begin{cases} 0, & t<2a,\ t>2b, \\ t-2a, & 2a \leq t \leq a+b, \\ 2b-t, & a+b \leq t \leq 2b. \end{cases}$





§ 6. Дифференцирование и интегрирование оригиналов

Т е о р е м а I. Пусть функция $f(t) \in H$ непрерывна при $t \geq 0$ и обладает при $t > 0$ производной $f'(t) \in H$. Тогда

$$f'(t) \risingdotseq PF(P) - f(0).$$

Доказательство. Пусть a - показатель роста $f(t)$, а $p = x + iy$ - любое комплексное число из полуплоскости $\mathrm{Re}\,p = x > a$, в которой определено изображение $F(P)$. Проинтегрировав по частям интеграл Лапласа для $f'(t)$, получим

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-pt}\,dt = f(t) e^{-pt}\Big|_0^\infty + P\int_0^\infty f(t) e^{-pt}\,dt.$$

Но в рассматриваемой полуплоскости

$$|f(t) e^{-pt}| < Me^{-(x-a)t},$$

поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) e^{-pt} = 0$, а следовательно,

$$f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty = -f(0).$$

Таким образом,

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt}\,dt = PF(P) - f(0)$$

С л е д с т в и е. Пусть функция $f(t) \in H$ вместе со своими производными до n - порядка включительно и сама функция также, как и ее производные до $n-1$ порядка, непрерывны при $t \geq 0$. Тогда

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq P^n F(P) - P^{n-1} f(0) - P^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться n-кратным применением доказанной теоремы I. Так,

$$f''(t) = (f'(t))' \risingdotseq P[PF(P) - f(0)] - f'(0) = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0);$$
$$f'''(t) = (f''(t))' \risingdotseq P[P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)] - f''(0) = P^3F(P) - P^2 f(0) - Pf'(0) - f''(0).$$

Т е о р е м а 2. Пусть $f(t) \in H$ и $f(t) \risingdotseq F(P)$. Тогда

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \in H \quad \text{и} \quad \int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{P}F(P).$$

Доказательство. Учитывая, что

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t, \end{cases}$$

представим заданный интеграл от оригинала в виде

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\eta(t-\tau)\,d\tau = \eta * f.$$

Отсюда $\int_0^t f(\tau)\,d\tau \in H$ как свертка двух функций из H.

Далее, использовав теорему умножения и формулу $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{P}$, получим

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \eta * f \risingdotseq \frac{1}{P}F(P).$$

Теоремы I; 2, определяющие изображение интеграла и производной, играют важнейшую роль в операционном исчислении. Из них следует, что действиям анализа - дифференцирования и интегрирования оригиналов, соответствуют алгебраические действия умножения и деления изображений на P.

Пример. Найти изображение выражения

$$x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) + 3\int_0^t x(\tau)\,d\tau$$

при условиях $x(0) = 5$, $x'(0) = 1$.

Обозначим $x(t) \risingdotseq X(P)$, тогда по теоремам I, 2 настоящего параграфа будем иметь:

$$x'(t) \risingdotseq PX(P) - 5;$$
$$x''(t) \risingdotseq P^2X(P) - 5p - 1;$$
$$\int_0^t x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{P}X(P).$$

Отсюда по свойству линейности получим

$$x''(t) - 4x'(t) + 2x(t) + 3\int_0^t x(\tau)\,d\tau \risingdotseq (p^3 - 4p^2 + 2p + 3)\frac{X(P)}{P} - 5p + 19.$$

У п р а ж н е н и я

Найти изображение выражений:

37. $x''(t) + 2x'(t) - \int_0^{\alpha t} x(\tau)\,d\tau$;

38. $3x'''(t) - x'(t) + \int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau,$

если $x(0)=x_0$, $x'(0)=x_1$, $x''(0)=x_2$.

§ 7. Таблица основных свойств и формул преобразования Лапласа

Свойства преобразования Лапласа:

1) $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(P)$ (c_k – любые комплексные числа).

2) $f(\alpha t) \fallingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$.

3) $f(t-t_0) \fallingdotseq e^{-t_0 P} F(P)$ $(t_0 > 0)$.

4) $e^{P_0 t} f(t) \fallingdotseq F(P-P_0)$ (P_0 – любое комплексное число).

5) $(-1)^n t^n f(t) \fallingdotseq F^{(n)}(P)$. 6) $\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int_P^{\infty} F(P)\,dP$.

7) $f^{(n)}(t) \fallingdotseq P^n F(P) - P^{n-1} f(0) - P^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

8) $\int_0^t f(\tau)\,d\tau \fallingdotseq \frac{1}{P} F(P)$.

9) $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau \fallingdotseq F_1(P)\,F_2(P)$.

Формулы преобразования Лапласа:

1) $1 \fallingdotseq \frac{1}{P}$; 2) $t^n \fallingdotseq \frac{n!}{P^{n+1}}$; 3) $e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{P-\alpha}$;

4) $\sin\omega t \fallingdotseq \frac{\omega}{P^2+\omega^2}$; 5) $\cos\omega t \fallingdotseq \frac{P}{P^2+\omega^2}$;

6) $\operatorname{sh}\lambda t \fallingdotseq \frac{\lambda}{P^2-\lambda^2}$; 7) $\operatorname{ch}\lambda t \fallingdotseq \frac{P}{P^2-\lambda^2}$.

§ 8. Определение оригинала по изображению. Первая теорема разложения

В предшествующих параграфах были изучены свойства преобразования Лапласа, дающие возможность получать изображения для различных

оригиналов. Перейдем теперь к задаче нахождения оригинала по известному изображению. Рассмотрим некоторые приемы, позволяющие восстановить оригинал без использования общей методики, которая будет изложена ниже, в § 9.

Во-первых, отметим, что имеются различные таблицы изображений наиболее часто встречающихся в приложениях функций, так что при решении конкретных задач часто удается найти в соответствующем справочнике выражение оригинала для полученного изображения.

Во-вторых, выведенные нами свойства преобразования Лапласа во многих случаях позволяют решить задачу построения оригинала по заданному изображению. В первую очередь это относится к теорема смещения, умножения, к дифференцированию и интегрированию.

Некоторые примеры были рассмотрены ранее. В качестве еще одного примера найдем оригинал $f(t)$ для изображения

$$F(P) = \frac{1}{P^3-1}.$$

Разложим обычным методом неопределенных коэффициентов заданную правильную рациональную дробь на сумму простейших, получим

$$\frac{1}{p^3-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{p-1} - \frac{1}{3}\,\frac{p+2}{p^2+p+1}.$$

Вторую простейшую дробь преобразуем следующим образом:

$$\frac{p+2}{p^2+p+1} = \frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \sqrt{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Теперь, воспользовавшись теоремами линейности и смещения, получим

$$\frac{1}{p^3-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{p-1} - \frac{1}{3}\,\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \fallingdotseq \frac{1}{3}e^{t} -$$

$$- \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Замечание. Задача восстановления оригинала по заданному изображению, имеющему вид правильной рациональной дроби, очень часто встречается на практике. Поэтому ниже, в § 9, будет выведена общая формула, позволяющая найти оригинал для изображений этого типа.

Следующая теорема указывает еще один метод построения оригинала в виде суммы степенного ряда.

Первая теорема разложения. Если функция $F(P)$ может быть разложена в ряд

$$F(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{P^{n+1}}, \qquad (8.1)$$

абсолютно сходящийся при всех $|P| > R > 0$, то $F(P)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого степенным рядом

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n. \qquad (8.2)$$

Доказательство. Пусть $|P_0| > R > 0$, т.е. $\left|\frac{1}{P_0}\right| = \frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}$. Поскольку ряд (8.1) при $P = P_0$ абсолютно сходится, то по необходимому условию сходимости $\left|\frac{c_n}{P_0^{n+1}}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует такое число $A > 0$, что при любом n

$$\left|\frac{c_n}{P_0^{n+1}}\right| = \frac{|c_n|}{\rho^{n+1}} < A. \qquad (8.3)$$

Рассмотрим ряд (8.2) при $t > 0$. В силу неравенства (8.3)

$$|f(t)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{c_n}{n!} t^n\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A\rho^{n+1}}{n!} t^n =$$

$$= A\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho t)^n}{n!} = A\rho e^{\rho t} \qquad (8.4)$$

при всех $t > 0$. Таким образом, ряд (8.2) сходится при всех $t > 0$. Функция $f(t) \in H$. Действительно, условия 1 и 2 выполняются. Условие 3 следует из неравенства (8.4). Покажем теперь, что $f(t) \fallingdotseq F(P)$. Так как ряд (8.2) сходится равномерно, то, умножая его почленно на e^{-Pt} и почленно интегрируя, находим

$$f(t) \fallingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-Pt}}{n!}\,dt.$$

Так как $\int_0^{\infty} \frac{t^n e^{-Pt}}{n!}\,dt = \frac{1}{P^{n+1}}$,

то $f(t) \fallingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{P^{n+1}} = F(P)$.

Пример. Найти оригинал изображения $F(P) = \ln\left(1-\frac{1}{P}\right)$.

Воспользовавшись известным разложением в ряд функции $\ln(1-z)$, получим

$$F(P) = \ln\left(1-\frac{1}{P}\right) = -\frac{1}{P} - \frac{1}{2P^2} - \ldots - \frac{1}{(n+1)P^{n+1}} - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)P^{n+1}}.$$

Тогда в силу первой теоремы разложения

$$F(P) \fallingdotseq f(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!} = -\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1-e^t}{t}.$$

Упражнения

I. Использовав разложение дробей на элементарные, найти оригиналы следующих изображений:

39. $\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$; 40. $\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$; 41. $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

42. $\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; 43. $\frac{1}{(p^2+6p+3)(p^2+6p+10)}$.

II. Использовав первую теорему разложения, найти оригиналы следующих изображений:

44. $\frac{1}{p(1+p^4)}$; 45. $\frac{p^9}{p^{10}-1}$; 46. $\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$

§ 9. Общий метод определения оригинала по изображению. Вторая теорема разложения

Многие задачи приводят к изображениям, от которых с помощью перечисленных приемов не удается перейти к оригиналам. В общем случае задачу отыскания оригинала $f(t)$ по заданному его изображению $F(P)$ можно решить с помощью формулы

$$f(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-ia}^{x+ia} e^{tP} F(P)\,dP, \qquad (9.1)$$

где x – любая абсцисса из полуплоскости аналитичности изображения $F(P)$, а интегрирование ведется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $x+ia$ и $x-ia$.

Формула (9.1) называется формулой обращения Меллина.

Для непосредственного вычисления оригинала $f(t)$ формула Меллина мало пригодна, но, поскольку она представляет собой интеграл от аналитической функции, ее можно преобразовать, применяя для этого методы, известные из теории функции комплексного переменного, например, изменение пути интегрирования, вычисление вычетов и т.п.

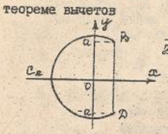
В качестве примера использования формулы Меллина выведем формулу, выражающую оригинал для любого изображения, имеющего вид правильной рациональной дроби.

В т о р а я т е о р е м а р а з л о ж е н и я. Если изображение $F(P)=\frac{F_1(P)}{F_2(P)}$ является правильной рациональной дробью и $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – полюсы функции $F(P)$, то

$$F(P) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} F(P_k)\, e^{P_k t}\right],$$

где $\operatorname{Res}\left[F(P_k)\, e^{P_k t}\right]$ – вычет функции $F(P)e^{Pt}$ в полюсе P_k.

Доказательство. Обозначим через γ замкнутый контур, состоящий из отрезка $\mathcal{D}\mathcal{B}$ и дуги окружности C_R, такой, что все полюсы функции $F(P)$ находятся внутри этого контура. Тогда по основной теореме вычетов



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{Pt}F(P)\,dP=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(P_k)\,e^{P_k t}\right]$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{Pt}F(P)\,dP=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{B}\mathcal{D}} e^{Pt}F(P)\,dP+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{Pt}F(P)\,dP$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{Pt}F(P)\,dP-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} e^{Pt}F(P)\,dP=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{B}\mathcal{D}} e^{Pt}F(P)\,dP. \tag{9.2}$$

Так как $F(P)$ – правильная дробь, то при достаточно больших $|P|$ $|F(P)|<\frac{c}{|P|}$. Тогда по лемме Жордана, доказываемой в курсе теории функций комплексного переменного:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{Pt}F(P)\,dP=0.$$

Переходя к пределу при $R\to+\infty$ в равенстве (9.2) (тогда и $a\to+\infty$), получаем

$$f(t)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0-ia}^{x_0+ia} e^{Pt}F(P)\,dP=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{Pt}F(P)\,dP=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[F(P_k)\,e^{P_k t}\right].$$

С л е д с т в и е. Если P_k, $k=1,2,\ldots,n$, полюсы функции $F(P)=\frac{F_1(P)}{F_2(P)}$ кратности m_k, то справедливо соотношение

$$\frac{F_1(P)}{F_2(P)}\fallingdotseq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{P\to P_k}\frac{d^{m_k-1}}{dP^{m_k-1}}\left[F(P)e^{Pt}(P-P_k)^{m_k}\right]. \tag{9.3}$$

В самом деле, достаточно использовать известную формулу для вычисления вычетов

$$\operatorname{Res}\left[F(P_k)e^{P_k t}\right]=\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{P\to P_k}\frac{d^{m_k-1}}{dP^{m_k-1}}\left[F(P)e^{Pt}(P-P_k)^{m_k}\right]$$

и применить вторую теорему разложения.

В частности, если все полюсы функции $F(P)$ однократные, то формула (9.3) принимает вид

$$\frac{F_1(P)}{F_2(P)}\fallingdotseq\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(P_k)}{F_2'(P_k)}\,e^{P_k t}. \tag{9.4}$$

Пример I. Найти оригинал изображения

$$F(P)=\frac{p^2+p-1}{(p-2)(p^2-p-20)}$$

Функция $F(P)$ имеет простые полюсы: $p_1=2$, $p_2=5$, $p_3=-4$.
Так как $F_1(P)=p^2+p+1$, $F_2(P)=(p-2)(p^2-p-20)$, $F_2'(P)=3p^2-6p-18$, то по формуле (9.4) запишем

$$F(P)=\frac{F_1(P)}{F_2(P)}\fallingdotseq\frac{F_1(2)}{F_2'(2)}e^{2t}+\frac{F_1(5)}{F_2'(5)}e^{5t}+\frac{F_1(-4)}{F_2'(-4)}e^{-4t}=$$

$$=\frac{5}{18}e^{2t}+\frac{29}{27}e^{5t}+\frac{11}{54}e^{-4t}=\frac{1}{54}\left(11e^{-4t}+58e^{5t}-15e^{2t}\right).$$

Пример 2. Найти оригинал изображения

$$F(P)=\frac{p^2}{(p-1)^2(p+1)^2}.$$

Функция $F(P)$ имеет двукратные полюсы: $p_1=1$ и $p_2=-1$. Оригинал для функции $F(P)$ найдем по формуле (9.3):

$$\operatorname{Res}\left[F(1)e^{t}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{p\to1}\frac{d}{dP}\left[\frac{p^2e^{pt}}{(p-1)^2(p+1)^2}(p-1)^2\right]=$$

$$=\lim_{p\to1}\frac{d}{dP}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to1}\left[\frac{2p}{(p+1)^3}e^{pt}+\frac{p^2}{(p+1)^2}te^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}te^{t}.$$

$$\operatorname{Res}\left[F(-1)e^{-t}\right]=\frac{1}{1!}\lim_{p\to-1}\frac{d}{dP}\left[\frac{p^2e^{pt}}{(p-1)^2(p+1)^2}(p+1)^2\right]=$$

$$=\lim_{p\to-1}\frac{d}{dP}\left[\frac{p^2}{(p-1)^2}e^{pt}\right]=\lim_{p\to-1}\left[\frac{2p}{(p-1)^3}e^{pt}+\frac{p^2}{(p-1)^2}te^{pt}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-t}t.$$

Итак,

$$f(t)=\frac{1}{4}\left(e^{t}-e^{-t}\right)+\frac{1}{4}t\left(e^{t}+e^{-t}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t+\frac{1}{2}t\operatorname{ch}t.$$

У п р а ж н е н и я

Использовав вторую теорему разложения, найти оригиналы следующих изображений:

47. $\frac{2p}{(p+3)(p^2+2p+5)}$; 48. $\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$;

49. $\frac{1}{(p+1)^3(p+3)}$; 50. $\frac{3p}{(p^2+1)^2}$.

§ 10. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим применение операционного метода к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t) \tag{10.1}$$

при начальных условиях:

$$x(0)=x_0,\; x'(0)=x_1,\ldots,\; x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \tag{10.2}$$

Предположим, что $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до n-го порядка являются оригиналами. Пусть

$$x(t)\fallingdotseq X(P);\quad f(t)\fallingdotseq F(P).$$

По теореме дифференцирования оригинала имеем:

$$x'(t)\fallingdotseq P X(P)-x_0;$$

$$x''(t)\fallingdotseq P^2X(P)-x_0P-x_2;$$

$$x^{(n)}(t)\fallingdotseq P^nX(P)-x_0P^{n-1}-x_1P^{n-2}-\ldots-x_{n-1}.$$

Поскольку равным оригиналам соответствуют равные изображения, то, используя теорему линейности, получаем для изображения $X(P)$ уравнение, соответствующее уравнению (10.1):

$$(p^n-a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(P)=F(P)+x_0(p^{n-1}+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1})+$$
$$+x_1(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2})+\ldots+x_{n-1}.$$

или

$$\varphi(P)X(P)=F(P)+\psi(P), \tag{10.3}$$

где $\varphi(P)$ и $\psi(P)$ – известные многочлены.
Из уравнения (10.3) определяем $X(P)$:

$$X(P)=\frac{F(P)+\psi(P)}{\varphi(P)}. \tag{10.4}$$

По найденному изображению $X(P)$ находим оригинал $x(t)$, который и является решением дифференциального уравнения (10.1), удовлетворяющим начальным условиям (10.2).

Замечание. Если решение уравнения (10.1) находится при нулевых начальных условиях, то в равенстве (10.3) многочлен $\psi(P)=0$ и равенство (10.4) принимает вид

$$X(P)=\frac{F(P)}{\varphi(P)}.$$

Операционный метод, в отличие от классического, позволяет сразу же отыскать частное решение, минуя общее. В то же время операционным методом можно найти и общее решение. Для этого достаточно начальные значения решения x_k ($k=0,1,\ldots,n-1$) в начальных условиях (10.2) считать произвольными постоянными. Тогда решение $x(t)$ будет содержать n произвольных постоянных, т.е. будет общим решением уравнения (10.1).

Еще одним важным преимуществом операционного метода по сравнению с классическим является возможность более просто проинтегрировать дифференциальное уравнение (I0.I), в правой части которого стоит некоторая кусочно-аналитическая функция, так как изображение такой функции с помощью теоремы запаздывания можно получить в виде единого аналитического выражения.

Пример I. Найти решение уравнения $x'' + x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<a, \\ 1, & a<t<b, \\ 0, & t>b, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$. Найдем изображающее уравнение.

Функцию $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b).$$

Поэтому по теореме запаздывания

$$f(t) \risingdotseq \frac{e^{-ap}}{p} - \frac{e^{-bp}}{p}.$$

С учетом начальных условий получим изображающее уравнение

$$p^2 X(p) - 2 + pX(p) = \frac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p},$$

из которого определим $X(p)$:

$$X(p) = \frac{e^{-ap} - e^{bp} + 2p}{p(p^2+p)}.$$

Найдем теперь соответствующий оригинал. Имеем

$$\frac{e^{-ap} - e^{-bp} + 2p}{p(p^2+p)} = \frac{e^{-ap}}{p^2(p+1)} - \frac{e^{-bp}}{p^2(p+1)} + \frac{2}{p(p+1)}.$$

Разложим дроби $\frac{1}{p^2(p+1)}$ и $\frac{1}{p(p+1)}$ на элементарные, использовав, например, метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}; \quad \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Тогда

$$X(p) = e^{-ap}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) - e^{-bp}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}\right) + 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$$

Поскольку

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \risingdotseq t - 1 + e^{-t},$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \risingdotseq 1 - e^{-t},$$

то, используя теорему смещения, получаем

$$x(t) = (t-a-1+e^{-(t-a)})\eta(t-a) - (t-b-1+e^{-(t-b)})\eta(t-b) + 2(1-e^{-t}).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x'' + 4x = 2\cos 2t.$$

Зададим произвольные начальные условия $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$ и построим изображающее уравнение

$$p^2 X(p) - x_0 p - x_1 + 4X(p) = \frac{2p}{p^2+4}.$$

Отсюда найдем

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+4)^2} - \frac{x_0 p}{p^2+4} - \frac{x_1}{p^2+4}.$$

Чтобы найти оригинал первого слагаемого $\frac{2p}{(p^2+4)^2}$ воспользуемся теоремой дифференцирования изображения. Так как $\frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin 2t$, то

$$-\frac{2p}{(p^2+4)} = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+4}\right) \risingdotseq -\frac{t}{2}\sin 2t \text{ или } \frac{2p}{(p^2+4)} \risingdotseq \frac{t}{2}\sin 2t.$$

Оригиналы второго и третьего слагаемого находятся непосредственно. Таким образом, решением уравнения является функция

$$x(t) = \frac{t}{2}\sin 2t - x_0\cos 2t - \frac{x_1}{2}\sin 2t$$

Обозначив $-x_0 = -C_1$, $-\frac{x_1}{2} = C_2$, получим функцию

$$x(t) = \frac{t}{2}\sin 2t + C_1\cos 2t + C_2\sin 2t,$$

которая и является общим решением.

Пример 3. К электрической цепи, в которую последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и емкость C с начальным током и зарядом, равными нулю, приложена электродвижущая сила, равная E_1 при $0<t<T$ и E_2 при $t>T$, где E_1 и E_2 и T - постоянные. Найти ток в цепи.

Обозначим через $i(t)$ ток и через $Q(t)$ заряд конденсатора. Используя известные из курса электротехники сведения, приходим к уравнению

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = f(t), \tag{I0.5}$$

где $f(t) = \begin{cases} E_1, & 0<t<T, \\ E_2, & t>T. \end{cases}$

Функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = [1-\eta(t-T)]E_1 + \eta(t-T)E_2.$$

Так как $\frac{dQ}{dt} = i$ и начальный заряд равен нулю, то $Q = \int_0^t i\,dt$. Тогда уравнение (I0.5) примет вид

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = [1-\eta(t-T)]E_1 + \eta(t-T)E_2.$$

Приняв $i(t) \risingdotseq J(p)$ найдем изображающее уравнение, использовав начальное условие $i(0) = 0$:

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)J(p) = \frac{E_1}{p} - \frac{E_1}{p}e^{-Tp} + \frac{E_2}{p}e^{-Tp}$$

Отсюда найдем

$$J(p) = \frac{\frac{E_1}{L} + \frac{E_2 - E_1}{L}e^{-Tp}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL}} = \frac{\frac{E_1}{L} + \frac{E_2 - E_1}{L}e^{-Tp}}{(p+k)^2 + n^2},$$

где $k = \frac{R}{2L}$, $n^2 = \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} > 0$.

По изображению находим ток

$$i(t) = \frac{E_1}{Ln}e^{-kt}\sin nt + \frac{E_2 - E_1}{Ln}\eta(t-T)e^{-k(t-T)}\sin(t-T).$$

Упражнения

I. Найти частные решения уравнений:

51. $x'' + 4x = 2\cos 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 4$;

52. $x'' + x = \cos t + \sin 2t$, $x(0) = 0$;

53. $x'' + 6x' + 5x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

54. $x'' + 2x' + x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<2, \\ 3, & t>2; \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

55. $x'' + x = f(t)$, где $f(t) = \begin{cases} t, & 0<t<1, \\ 2-t, & 1<t<2, \\ 0, & t>2. \end{cases}$ $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,

II. Найти общее решение уравнений:

56. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12t^2 e^{3t} - e^{2t}$;

57. $x^{IV} + x''' = \cos t$.

§ II. Интеграл Дюамеля

Важное значение при решении дифференциальных уравнений имеет интеграл Дюамеля.

Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала и теоремой умножения, получаем соотношение

$$pF_1(p)F_2(p) = f_1(0)F_2(p) + [pF_1(p) - f_1(0)]F_2(p) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{II.I}$$

которое и называется интегралом Дюамеля. На основании свойства коммутативности свертки интеграл Дюамеля можно записать в виде

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(0)f_2(t) + \int_0^t f_2(\tau)f_1'(t-\tau)\,d\tau.$$

Рассмотрим применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение (I0.I) при нулевых начальных условиях. Этому уравнению, как было показано, соответствует уравнение (I0.3)

$$\varphi(p)X(p) = F(p). \tag{II.2}$$

Предположим, что известно решение $x_1(t)$ уравнения (I0.I) с правой частью $f(t) = 1$, удовлетворяющее также нулевым начальным условиям. В этом случае (так как $f(t) = 1 \risingdotseq F(p) = \frac{1}{p}$) равенство (II.2) примет вид

$$\varphi(p)X_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Находя из этого уравнения $\varphi(p)$ и подставляя его в равенство (II.2), получаем

$$X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Отсюда по формуле Дюамеля (II.I), учитывая, что $x(0) = 0$, имеем

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)\,d\tau \tag{II.3}$$

или

$$x(t)=x_1(t)f(0)+\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$$

Таким образом, решение $x(t)$ может быть сразу записано с помощью интеграла Дюамеля, если известно решение уравнения (I0.I) с правой частью $f(t)=1$.

Пример I. Найти решение уравнения $x''+6x'+5x=f(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Найдем решение этого уравнения, использовав формулу (II.3). Для этого определим сначала решение $x_1(t)$ уравнения $x''+6x'+5x=1$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Составим изображающее уравнение

$$p^2X_1(p)+6pX_1(p)+5X_1(p)=\frac{1}{p}.$$

Отсюда

$$X_1(p)=\frac{1}{p(p^2+6p+5)}.$$

Разложим полученную дробь на элементарные дроби:

$$\frac{1}{p(p^2+6p+5)}=\frac{1}{p(p+1)(p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+5}.$$

Приведем справа слагаемые к общему знаменателю и приравняем числители:

$$A(p+1)(p+5)+Bp(p+5)+Cp(p+1)=1.$$

Приняв в этом равенстве последовательно, $p=0$, $p=-1$, $p=-5$, получим $A=\frac{1}{5}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{20}$. Итак,

$$X_1(p)=\frac{1}{5p}-\frac{1}{4(p+1)}+\frac{1}{20(p+5)}.$$

Следовательно, оригинал

$$x_1(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{20}e^{-5t}.$$

Теперь по формуле (II.3) получим искомое решение

$$x(t)=\frac{1}{4}\int_0^t f(\tau)\left(e^{-(t-\tau)}-e^{-5(t-\tau)}\right)d\tau.$$

или, использовав коммутативность свертки, запишем

$$x(t)=\frac{1}{4}\int_0^t \left(e^{-t}-e^{-5t}\right)f(t-\tau)d\tau.$$

§ I2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами поступают точно так же, как и при интегрировании одного уравнения. Отличие заключается в том, что вместо одного изображающего уравнения получают систему таких уравнений относительно изображений неизвестных функций. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример I. Найти решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'-2x-4y=\cos t, \\ y'+2y+x=\sin t, \quad x(0)=0,\ y(0)=0. \end{cases}$$

Пусть $x(t)\div X(p)$, $y(t)\div Y(p)$. Строим изображающие уравнения:

$$\begin{cases} pX(p)-2X(p)-4Y(p)=\frac{p}{p^2+1}, \\ pY(p)+2Y(p)+X(p)=\frac{1}{p^2+1}. \end{cases}$$

Из этой системы находим $X(p)$ и $Y(p)$:

$$X(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)};\quad Y(p)=\frac{-2}{p^2(p^2+1)}.$$

По найденным изображениям определим оригиналы, разложив полученные дроби на элементарные:

$$X(p)=\frac{p^2+2p+4}{p^2(p^2+1)}=\frac{4}{p^2}+\frac{2}{p}-\frac{2p+3}{p^2+1},\quad Y(p)=2\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2}\right).$$

Так как $t\div\frac{1}{p^2}$, $1\div\frac{1}{p}$ и $\frac{2p+3}{p^2+1}=2\frac{p}{p^2+1}+\frac{3}{p^2+1}\div 2\cos t+3\sin t$,

то $x(t)=4t+2-2\cos t-3\sin t$.

По изображению $Y(p)$ находим

$$y(t)=2\sin t-2t.$$

Пример 2. Две одинаковые электрические цепи, состоящие из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, соединенных последовательно, связаны взаимной индукцией M, причем имеется идеальная связь, при которой $M=L$. Начальные токи и заряды равны нулю. К одной из цепей в момент времени $t=0$ прилагается постоянное напряжение E_0. Найти токи в обеих цепях.

Вводя обозначения $i_1(t)$ и $i_2(t)$ для токов, $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ – для зарядов конденсаторов, получаем систему уравнений:

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_1+\frac{Q_1}{C}+L\frac{di_1}{dt}=E_0;$$

$$L\frac{di_2}{dt}+Ri_2+\frac{Q_2}{C}+L\frac{di_2}{dt}=0.$$

Так как $Q_1=\int_0^t i_1dt$, $Q_2=\int_0^t i_2dt$ и по условию $i_1(0)=i_2(0)=0$, то приходим к следующей изображающей системе:

$$\begin{cases} \left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)J_1(p)+LpJ_2(p)=\frac{E_0}{p}; \\ LpJ_1(p)+\left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)J_2(p)=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$J_1(p)=\frac{\frac{E_0}{2R}}{p+\frac{1}{RC}}+\frac{\frac{E_0}{4L}}{p^2+\frac{R}{2L}p+\frac{1}{2LC}};$$

$$J_2(p)=-\frac{\frac{E_0}{2R}}{p+\frac{1}{RC}}+\frac{\frac{E_0}{4L}}{p^2+\frac{R}{2L}p+\frac{1}{2LC}}.$$

Полагая, что $\frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=n^2>0$, находим токи в обеих цепях:

$$i_1(t)=\frac{E_0}{2R}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0}{4Ln}e^{-\frac{R}{4L}t}\sin nt;$$

$$i_2(t)=-\frac{E_0}{2R}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0}{4Lc}e^{-\frac{R}{4L}t}\sin nt.$$

Упражнения

Найти частные решения систем уравнений:

58. $\begin{cases} x'+x-3y=0, \\ y'-y-x=e^t, \end{cases}$ $x(0)=0,\ y(0)=0;$

59. $\begin{cases} x'+7x-y=0, \\ y'+2x+5y=0, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=1;$

60. $\begin{cases} x'=-x+y+z, \\ y'=x-y+z, \\ z'=x+y+z, \end{cases}$ $x(0)=1,\ y(0)=0,\ z(0)=0.$

Ответы

§ 2

I. $\frac{1}{p^2}$. 2. $\frac{2}{p^3}$.

§ 3

3. $-\frac{2p+12}{p^2-4p}$. 4. $\frac{p^3}{p^4-1}$. 5. $\frac{\alpha^3}{\alpha^4-p^4}$. 6. $\frac{1}{p-\ln a}$. 7. $\frac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$.

8. $\frac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}$. 9. $\frac{6\alpha^3}{(p^2+\alpha^2)(p^2+9\alpha^2)}$. I0. $\frac{3e^{-2p}}{p(p+3)}$.

II. $\frac{1}{p}(e^{-2p}-2e^{-3p}+e^{-4p})$. I2. $\frac{1}{p}(e^{-p}-3e^{-2p}+2e^{-3p}+2e^{-4p}-2e^{-5p})$.

I3. $\frac{1}{p}\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}$. I4. $\frac{1-e^{-p}}{p(e^{p}+e^{-p})}$. I5. $\frac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$.

I6. $\frac{1}{2}\left[\frac{5}{p^2+8p+41}+\frac{1}{p^2+8p+17}\right]$ I7. $\frac{1}{4}e^{2t}\sin 4t$ I8. $e^{-2t}\cos 3t$

I9. $3\operatorname{ch}5t+\frac{2}{5}\operatorname{sh}5t$. 20. $e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)$ 2I. $e^{-2t}\left(\cos\sqrt{\frac{11}{2}}+\frac{13}{\sqrt{22}}\sin\sqrt{\frac{11}{2}t}\right)$

22. $2-3\eta(t-1)+\eta(t-3)$.

§ 4, 5

24. $\frac{e^{2t}-e^{-t}}{3}$. 25. $\frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin t)$. 26. $\frac{2}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$.

27. $\frac{1-\cos\sqrt{6}t}{6}$. 28. $\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$. 29. $\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$. 30. $\frac{2p(p^2-3\alpha^2)}{(p^2+\alpha^2)^3}$.

31. $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$ 32. $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}$ 33. $\frac{1}{2}\ln\frac{(p+1)^2+1}{(p+1)^2}$ 34. $\ln\frac{p+1-a}{p+1}$.

35. $\frac{1}{p}-\frac{1}{b}\frac{e^{-ap}}{p^2}(1-e^{-bp})$. 36. $\left(\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}\right)$.

§ 6

37. $(p^2+2p)X(p)-px_0-x_1-2x_0-\frac{X(\frac{p}{2})}{p}$.

38. $\left(3p^3-p+\frac{1}{p^2+1}\right)\quad(p)-3p^2x_0-3px_1-3x_2+x_0$.

§ 8

39. $\frac{1}{2}(1-4e^{-t}+5e^{-2t})$. 40. $\frac{1}{12}(e^{-2t}+8e^{t}-6t-9)$.

41. $\frac{1}{2}t^2e^{2t}-4te^{2t}+6e^{-2t}-2te^{t}-6e^{t}$.

42. $\frac{1}{2}(2e^{t}-2e^{-t}\cos 2t+3e^{-t}\sin 2t)$. 43. $\frac{1}{6}e^{-3t}(2\sin t-\sin 2t)$.

44. $\frac{t^4}{4!}-\frac{t^8}{8!}+\frac{t^{12}}{12!}-\frac{t^{16}}{16!}+\ldots$. 45. $1+\frac{t^{10}}{10!}+\frac{t^{20}}{20!}+\frac{t^{30}}{30!}+\ldots$.

46. $1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\frac{t^4}{(4!)^2}-\ldots$.

§ 9

47. $-\frac{3}{4}e^{-3t}+\frac{e^{-t}}{4}(3\cos 2t+\sin 2t)$. 48. $\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$.

49. $\frac{1}{8}(2t^2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-3t})$. 50. $\frac{3}{2}t\sin t$.

§ I0

51. $x=2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$. 52. $x=\frac{1}{6}(3t\sin t+4\sin t-2\sin 2t)$

53. $x(t)=\frac{1}{4}\int\limits_0^t(e^{-\tau}-e^{-5\tau})f(t-\tau)d\tau$.

54. $x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}+2\left[1-e^{-(t-2)}-(t-2)e^{-(t-2)}\right]\eta(t-2)$.

55. $x(t)=t-2[(t-1)-\sin(t-1)]\eta(t-1)+[(t-2)-\sin(t-2)]\eta(t-2)$.

56. $x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}+te^{3t}+(2t^3-9t^2+21t)e^{3t}$.

57. $x(t)=C_1t^2+C_2t+C_3+C_4e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)$.

§ I2

58. $x(t)=\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{t}$;
$y(t)=\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{t}$.

59. $x(t)=e^{-6t}\cos t$;
$y(t)=e^{-6t}(\cos t-\sin t)$.

60. $x(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{2t}$;
$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{2t}$;
$z(t)=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тем. план I989 г., п. 46.

Юрий Григорьевич Малиновский,
Анатолий Семенович Макаров

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов-заочников

Редактор Л.В.Мальшева
Техн. редактор А.В.Миних

Редакционно-издательский отдел
Челябинского политехнического института
имени Ленинского комсомола

Подписано к печати 28.03.89. Формат 60Х90 I/I6. Печ. л. 2,25.
Уч.-изд. л. 2. Тираж 290 экз. Заказ I36/608. Цена II к.

УОП ЧПИ. 454080. Челябинск, пр. им. В.И.Ленина, 76.