МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности изучения темы «тригонометрические уравнения» в средней школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Яковлева Екатерина Викторовна

Проверка на объем заимствований:
68,8 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 4 » 04 2017 г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике,
Суховиенко Елена Альбертовна

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике,
Коржакова Светлана Васильевна

Челябинск
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методические особенности изучения темы «тригонометрические уравнения» в средней школе

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Экономика»

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/086-5-1
Яковлева Екатерина Викторовна

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Научный руководитель:
канд. пед. наук, доцент кафедры математики и методики обучения математике,
Коржакова Светлана Васильевна

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике,
Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск
2017

Оглавление

Введение

Термин «тригонометрия» впервые появился в 1595 году как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, архитектуре и геодезии.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, акустика, оптика. А также анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование(УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

В отечественных школах долгое время существовал отдельный курс тригонометрии, обеспеченный специализированными учебниками и задачниками. Но вскоре произошло распределение тригонометрического материала между курсами алгебры, геометрии, алгебры и начал анализа.

На современном этапе развития общеобразовательной школы большое внимание приобретает поиск путей совершенствования содержания образования, приведение в соответствие ему методов, приемов и организационных форм обучения.

Одним из аспектов проблемы совершенствования общего среднего образования является формирование полноценной учебной деятельности: обучение школьников умению учиться в процессе овладения знаниями и умениями по тому или иному предмету.

Процесс решения тригонометрических уравнений учениками в школе или дома часто не является эффективным. Нередко главное внимание задач такого типа направлено только на то, чтобы как можно быстрее найти ответ на поставленный вопрос. Следовательно, упускаются важные для обучения методы решения уравнений. Как самостоятельно найти решение тригонометрического уравнения? Что для этого нужно сделать? Какие существуют пути и способы поиска решения уравнения? Такие вопросы становятся основополагающими.

Процесс формирования учебной деятельности обучающихся при обучении математике проходит стихийно, хотя большинство учителей считают необходимым такое обучение, при котором специально формируются приемы учебной деятельности обучающихся. Вопросы систематизации учебного материала не рассматриваются учителем как необходимое условие повышения качества знаний школьников по решению тригонометрических уравнений и как условие формирования приемов учебной деятельности.

В настоящее время тригонометрия встречается в выпускных экзаменационных материалах школьников. Из-за недостатка знаний, не все обучающиеся способны выполнить данные задания.

Трудности при изучении тригонометрических уравнений связаны со следующими особенностями:

1) обилие формул и методов, используемых при решении уравнений;
2) возможность решения одного и того же уравнения различными методами;

3) разнообразие типов тригонометрических уравнений.

Формированию приемов работы над тригонометрическим уравнением способствует определенная схематизация решения, представление в виде совокупности действий и правил. Это обеспечивает высокий уровень формирования знаний и умений по математике.

Школьный курс тригонометрии с изучением тригонометрических уравнений связывает решение уравнений, решение систем уравнений и доказательство неравенств. И как показал анализ содержания школьного математического образования, возможности решения тригонометрических уравнений достаточно широки.

Обучающиеся должны знать и уметь применять различные приемы при решении уравнений, представленных в тригонометрической форме. В этом состоит актуальность исследования.

Объект исследования – содержание раздела «Тригонометрические уравнения» в школьном курсе математики.

Предмет исследования – особенности методики обучения решению тригонометрических уравнений в средней школе.

Цель исследования – выявление методических особенностей по теме «Тригонометрические уравнения».

Задачи:

1. Провести анализ психолого-педагогической, учебной и методической литературы по проблеме исследования;
2. Выделить приемы формирования умений, необходимых для решения тригонометрических уравнений;

3. Выделить типы и методы решения тригонометрических уравнений;

4. Систематизировать методы решения и показать алгоритм решения уравнений;

5. Разработать тест по типу ЕГЭ и факультативный курс для обучающихся 10 – 11 классов по теме «Тригонометрические уравнения»;

6. Провести экспериментальное исследование рассмотренных приемов на упражнениях из единого государственного экзамена 2011 – 2017 годов;

Теоретическая значимость дипломной работы заключается в систематизации теории решения тригонометрических уравнений.

Практическая значимость дипломной работы состоит в том, что результаты могут быть использованы при подготовке факультативных или элективных курсов для школьников старших классов.

Структура исследовательской работы обусловлена объектом, предметом, целью и задачами исследования. Работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложения.

В первой главе рассматриваются теоретические сведения, связанные с тригонометрическими уравнениями. Рассмотрены подходы и методы их решения.

Вторая глава посвящена разработке и апробации факультативного курса на тему «Тригонометрические уравнения».

В приложении собран материал из единого государственного экзамена 2011 – 2016 годов. В том числе представлены комментарии и решения предложенных задач и конспекты уроков.

Глава 1. Теоретические основы решения тригонометрических уравнений.

§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения и их решения.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся уравнения вида cos x = a, sin x = a, tg x = a, ctg x = a.

Рассмотрим уравнения вида cos x = a. Известно, что $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$. Значит, если $|a| > 1$, то уравнение cos α = a не имеет корней.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

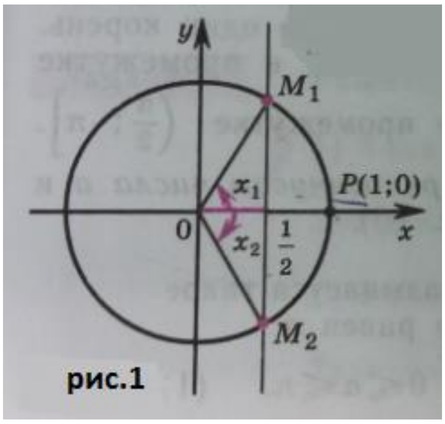
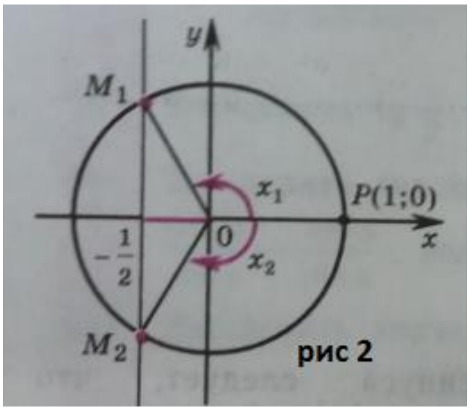


рис.1

cos x – абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1; 0) вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют 2 точки окружности M_1 и M_2 (рис. 1). Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Точка M_2 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Получается, что все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$ [3].

Пример 2. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.



Абсциссу, равную $-\frac{1}{2}$, имеют 2 точки окружности M_1 и M_2 (рис. 2). Так как $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, то угол $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ и $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$. следовательно, все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$ [3].

Значит, корни уравнения $\cos x = a$, $|a| \leq 1$ можно находить по формуле $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

Частные случаи: $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$,

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$,

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $\cos\frac{x}{3} = -1$.

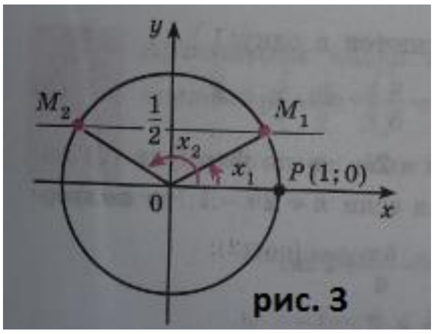
$\frac{x}{3} = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$,

$x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$.

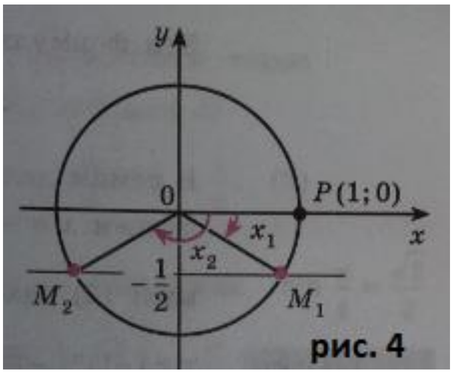
Ответ: $x = 3\pi + 6\pi n$, $n \in Z$.

Рассмотрим уравнения вида sin x = a. Известно, что $-1 \le \sin\alpha \le 1$. Значит, если $|a| > 1$, то уравнение $\sin\alpha = a$ не имеет корней.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.



sin x – ордината точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1; 0) вокруг начала координат на угол x. Ординату, равную $\frac{1}{2}$, имеют 2 точки окружности M_1 и M_2 (рис. 3). Так как $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то точка M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Точка M_2 получается из точки P (1; 0) поворотом на угол $x_2 = \frac{5\pi}{6}$, а также на углы $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, т.е. на углы $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. все корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.



Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ [3].

Пример 5. Решить уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Ординату, равную $-\frac{1}{2}$, имеют 2 точки окружности M_1 и M_2 (рис. 4), где $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Корни уравнения $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. Все корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ можно найти по формуле $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n \in Z$ [3].

Значит, корни уравнения sin x = a, |a| ≤ 1 выражаются по формуле $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Частные случаи: $\sin x = 0, x = \pi n, n \in Z$,

$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$,

$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение sin 2x = 1.

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$,

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Рассмотрим уравнения вида tg x = a. Известно, что tg x может принимать любое действительное значение. Поэтому tg x = a имеет корни при любом значении a.

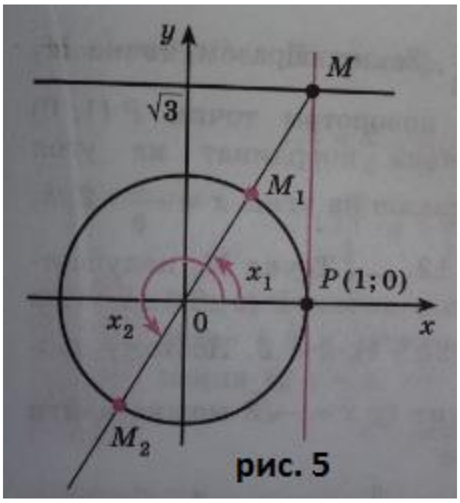


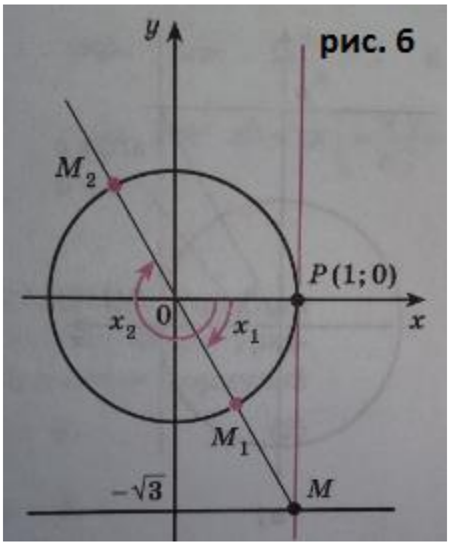
рис. 5

Пример 7. Решить уравнение $\text{tg } x = \sqrt{3}$.

Постоим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведем через точку P (рис. 5)прямую, перпендикулярную PO, и отложим отрезок $PM = \sqrt{3}$. Через точки M и O проведем прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2 . Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \text{tg } x_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом точка M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$, а также на углы x = $\frac{\pi}{3}$ + 2πk, k = ±1, ± 2, … . Тогда точка M_2 получается поворотом точки P (1; 0) на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы x = $\frac{\pi}{3}$ + π + 2πk, k = ±1, ± 2, … . Значит, корни уравнения можно найти по формуле x = $\frac{\pi}{3}$ + πk, k є Z.

Ответ: x = $\frac{\pi}{3}$ + πk, k є Z [3].

Пример 8. Решить уравнение tg x = – $\sqrt{3}$.



Углы, тангенсы которых равны – $\sqrt{3}$, указаны на рис. 6, где PM ⊥ PO, PM = $\sqrt{3}$.Из прямоугольного треугольника POM находим угол POM = $\frac{\pi}{3}$, т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом точка M_1 получается из точки P (1; 0) поворотом вокруг начала координат на угол $-\frac{\pi}{3}$, а также на углы x = $-\frac{\pi}{3}$ + 2πk, k = ±1, ± 2, … . Точка M_2 получается поворотом точки P (1; 0) на углы x = $-\frac{\pi}{3}$ + π + 2πk, k = ±1, ± 2, … . Значит, корни уравнения можно найти по формуле x = $-\frac{\pi}{3}$ + πk, k є Z.

Ответ: x = $-\frac{\pi}{3}$ + πk, k є Z [3].

Значит, корни уравнения tg x = a, a є R выражаются по формуле x = arctg a + πn, n є Z. arctg (– a) = – arctg a

Корни уравнения ctg x = a, a є R выражаются по формуле x = arcctg a + πn, n є Z. arctg (– a) = π – arctg a.

Пример 9. Найти корни уравнения ctg 4x = – 13.

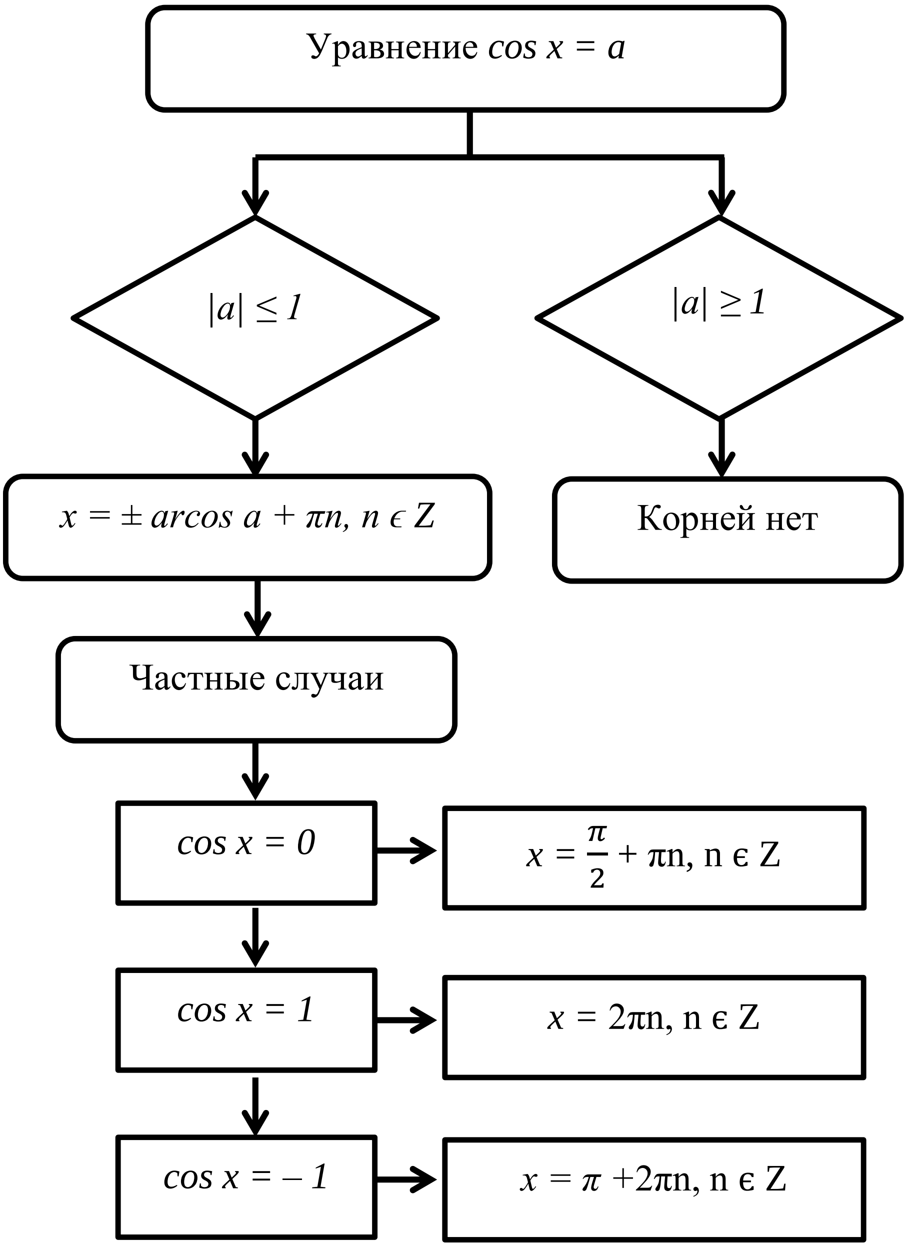
ctg 4x = – 13

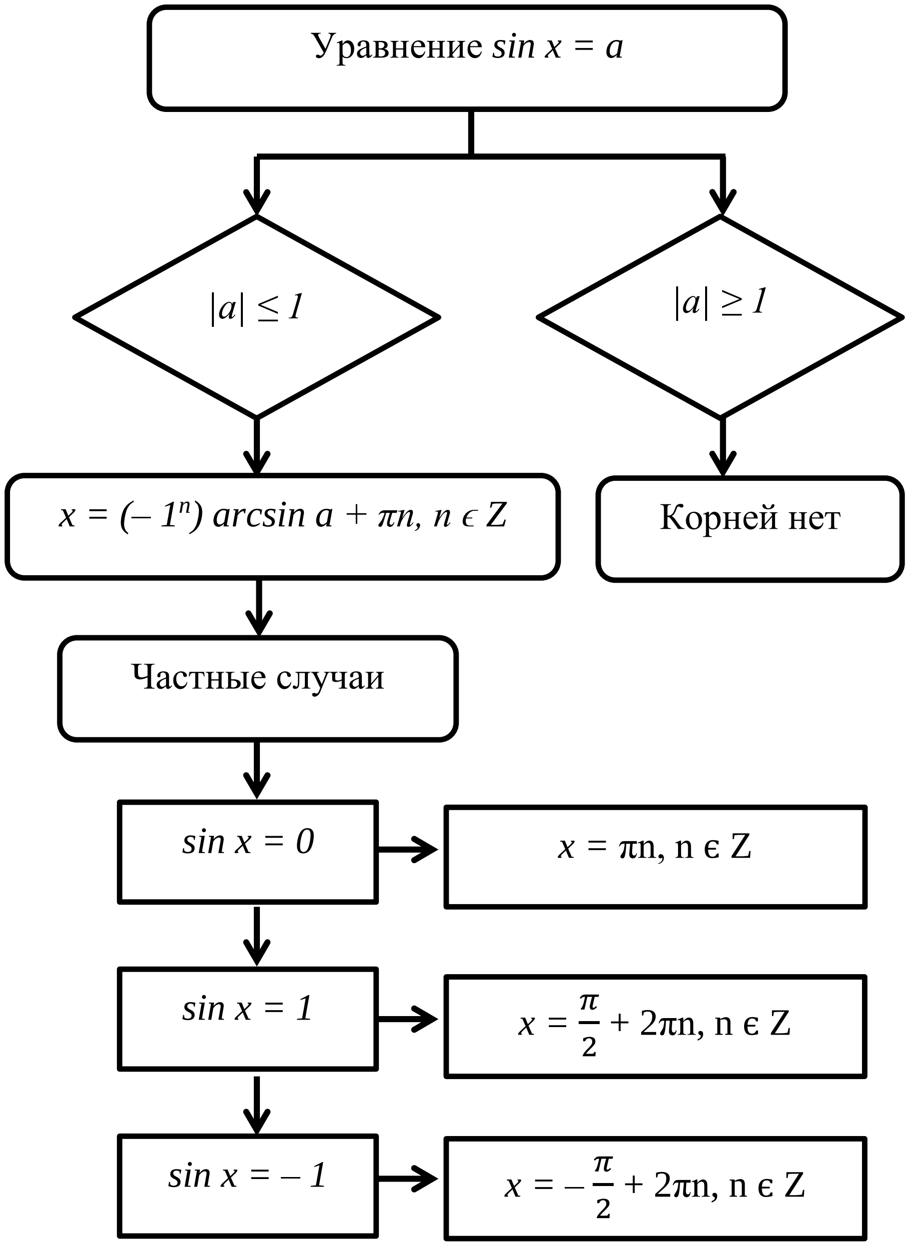
4x = π – arcctg 13 + 2 πn, n є Z

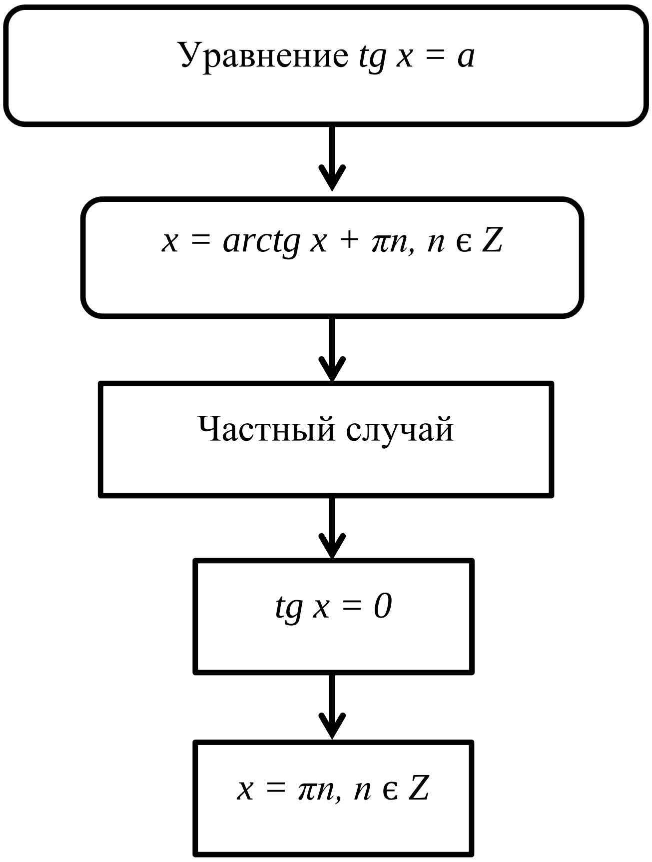
x = $\frac{\pi}{4}$ – $\frac{1}{4}$ arctg 13 + $\frac{\pi n}{2}$, n є Z

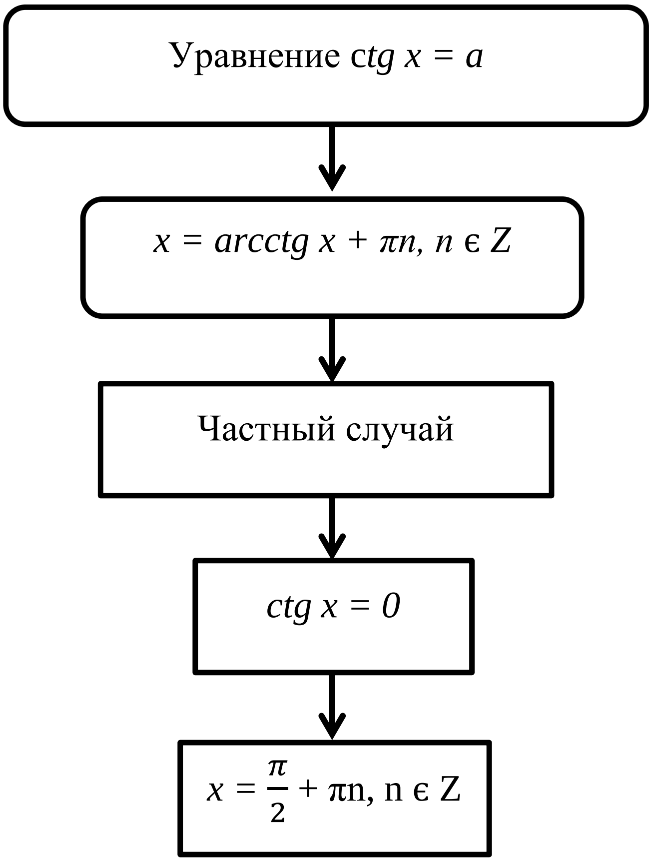
Ответ: $\frac{\pi}{4}$ – $\frac{1}{4}$ arctg 13 + $\frac{\pi n}{2}$, n є Z

Решение простейших тригонометрических уравнений можно представить в виде схем.


Уравнение $cos\ x = a$
$|a| \leq 1$
$|a| \geq 1$
$x = \pm\ arcos\ a + \pi n,\ n \epsilon Z$
Корней нет
Частные случаи
$cos\ x = 0$
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \epsilon Z$
$cos\ x = 1$
$x = 2\pi n,\ n \epsilon Z$
$cos\ x = -1$
$x = \pi + 2\pi n,\ n \epsilon Z$


Уравнение $sin\ x = a$
$|a| \leq 1$
$|a| \geq 1$
$x = (-1^n)\ arcsin\ a + \pi n,\ n \in Z$
Корней нет
Частные случаи
$sin\ x = 0$
$x = \pi n,\ n \in Z$
$sin\ x = 1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$sin\ x = -1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$


Уравнение *tg x = a*
x = arctg x + πn, n є *Z*
Частный случай
tg x = 0
x = πn, n є *Z*


Уравнение c*tg x = a*
x = arcctg x + πn, n є *Z*
Частный случай
ctg x = 0
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

§ 2. Типология тригонометрических уравнений и методов их решения.

Основными методами решения уравнений являются: метод разложения на множители, метод замены переменной, различные способы решения однородных уравнений и уравнений, сводящиеся к ним, в том числе введение вспомогательного угла, применение универсальной подстановки, а также формул двойного угла и формул понижения степени.

Большинство тригонометрических уравнений сводится к решению простейших тригонометрических уравнений.

2.1. Метод разложения на множители

При решении уравнений этого вида, нужно пользоваться всеми известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Это вынесение за скобки общего множителя, группировка применения формул сокращенного умножения и искусственные приемы.

Чаще всего нужно преобразовать сумму или разность тригонометрических выражений в произведение с помощью известных формул.

После разложения выражения на множители необходимо воспользоваться правилом: произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Если решением уравнения является несколько серий корней, то их нужно объединить и записать все в ответ.

Пример 1. Решить уравнение sin 7x + sin 3x = 3cos 2x.

$2\sin 5x \cos 2x = 3 \cos 2x,$ $\quad$ $2\sin 5x \cos 2x - 3\cos 2x = 0$

$\cos 2x\,(\sin 5x - \frac{3}{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 5x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Пример 2. Найти корни уравнения sin 4x sin 2x + cos 2x cos 4x = cos 2x sin 2x.

$\sin 4x \sin 2x + \cos 2x \cos 4x = \cos 2x \sin 2x$

$\cos (4x - 2x) = \cos 2x \sin 2x$

$\cos 2x = \cos 2x \sin 2x$

$\cos 2x - \cos 2x \sin 2x = 0$

$\cos 2x\,(1 - \sin 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ 1 - \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Пример 3. Найти все значения x, при которых имеет смысл уравнение sin 2x + sin 3x + sin 4x + sin 5x = 0.

$\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$

$(\sin 2x + \sin 3x) + (\sin 4x + \sin 5x) = 0.$

$2\sin\frac{2x+3x}{2}\cos\frac{2x-3x}{2} + 2\sin\frac{4x+5x}{2}\cos\frac{4x-5x}{2} = 0$

$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$

$\cos\frac{x}{2}(2\sin\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{9x}{2}) = 0$

$2\cos\frac{x}{2}(2\sin\frac{\frac{5x}{2}+\frac{9x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{5x}{2}-\frac{9x}{2}}{2}) = 0$

$4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{7x}{2}\cos x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{7x}{2} = 0, \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \frac{7x}{2} = \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi r, r \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{2}{7}\pi k, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi r, r \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n;\ \frac{2}{7}\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi r, n, k, r \in Z.$

Пример 4. Решите уравнение $\frac{1-\cos 2x+\sqrt{3}\cos(\frac{9\pi}{2}+x)}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}} = 0.$

$\frac{1-\cos 2x+\sqrt{3}\cos(\frac{9\pi}{2}+x)}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}} = 0$

$1 - \cos 2x = 1 - 1 + 2\sin^2 x = 2\sin^2 x$ и $\cos(\frac{9\pi}{2} + x) = -\sin x$

$\frac{2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x - \sqrt{3} \neq 0 \end{array}\right. \quad => \quad \left[\begin{array}{l} \sin x\,(2\sin x - \sqrt{3}) = 0, \\ \operatorname{tg} x \neq \sqrt{3} \end{array}\right. \quad =>$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 4\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{array}\right., \\ x \neq \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

$$=> \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \end{array}\right., \\ x \neq \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^r \dfrac{\pi}{3} + \pi r, r \in Z \end{array}\right., \\ x \neq \dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: πk; $-\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in Z$.

2.2. Метод замены переменной

Это универсальный метод. Применяется в любых уравнениях – степенных, показательных, логарифмических и том числе тригонометрических.

Данный метод заключается в следующем: в искомом уравнении одну из тригонометрических функций или целое выражение заменяют на *t* и сводят к алгебраическому уравнению.

Однако замена не всегда сразу видна, и уравнение нужно сначала преобразовать.

Пример 1. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Замена: $\sin x = t$, $|t| \leq 1$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$t = 2$ – не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$

$t = \frac{1}{2}$

Вернемся к замене: $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $tg\frac{x}{2} + 3ctg\frac{x}{2} = 4$.

$tg\frac{x}{2} + 3ctg\frac{x}{2} = 4$

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0 \end{cases} => \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi s, s \in Z, \\ x \neq \pi g, g \in Z \end{cases}$

Замена: $ctg\frac{x}{2} = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}$, $tg\frac{x}{2} = t$

$t + \frac{3}{t} = 4$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$t = 1,\ t = 3$

$tg\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = arctg\ 1 + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $\notin$ ОДЗ

$tg\frac{x}{2} = 3$, $\frac{x}{2} = arctg\ 3 + \pi n,\ n \in Z$ $\in$ ОДЗ

Ответ: $\frac{x}{2} = arctg\ 3 + \pi n,\ n \in Z$.

Пример 3. Решить уравнение $2 + 2\cos x = 3\sin x \cos x + 2\sin x$.

$2 + 2\cos x = 3\sin x \cos x + 2\sin x$

$2 + 2(\cos x - \sin x) - 3\sin x \cos x = 0,$

Замена: $\cos x - \sin x = t,$ $(\cos x - \sin x)^2 = t^2,$

$\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = t^2$

$1 - 2\cos x \sin x = t^2$

$\cos x \sin x = \frac{1 - t^2}{2}$ – подставим в уравнение

$2 + 2t - 3 * \frac{1 - t^2}{2} = 0 \quad | * 2$

$4 + 4t - 3 + 3t^2 = 0$

$3t^2 + 4t + 1 = 0$

$t = -1,\ t = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x - \sin x = -1, \quad \cos x - \sin x = -\frac{1}{3}$

Применим формулу $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1\\ \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c}x + \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z\\ x + \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \arccos - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c}x = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z\\ x = \pm\left(\pi - \arccos - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$ $x = \pm\left(\pi - \arccos - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

2.3. Однородные уравнения первого и второго порядка и сводящиеся к ним.

Однородными уравнениями порядка n называются уравнения вида:

$a \sin^n x + b \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + c \sin x \cos^{n-1} x + d \cos^n x = 0,$

в которых сумма показателей степени у *sin x* и *cos x* (степень уравнения) во всех членах уравнения одинакова.

Для того чтобы решить такое уравнение необходимо перенести все его члены в левую часть, привести подобные слагаемые и разделить обе части уравнения на $\sin^n x$ или $\cos^n x$. Таким образом, однородное уравнение сводится к алгебраическому относительно $t = tg\, x$ или $t = ctg\, x$.

Делить уравнение на $\sin^n x \neq 0$ или $\cos^n x \neq 0$ можно и нужно, при этом деление не будет вести к потере корней. Если предположить, что $\cos^n x = 0$, то в силу исходного уравнения и $\sin^n x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Значит, любое решение данного типа уравнений удовлетворяет условию $\cos^n x \neq 0$ (или $\sin^n x \neq 0$) и можем выполнить деление обеих частей уравнения на этот член.

Однородные уравнения 1-й степени

При решении уравнений вида $a \sin x + b \cos x = 0$, необходимо поделить его на *sin x* или *cos x*. Тогда уравнение будет иметь вид $a + b\, ctg\, x = 0$ или $a\, tg\, x + b = 0$. Следовательно, уравнение сводится к простейшему.

Пример 1. Решить уравнение 2 sin x – 3 cos x = 0.

$2 \sin x - 3 \cos x = 0 \ \ | : \cos x$

$2\, tg\, x - 3 = 0,$

$tg\, x = \frac{3}{2}$

$x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 2. Найдите корни уравнения tg x + ctg x = 2.

$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x = 2$

$\frac{1}{\mathrm{ctg}\, x} + \mathrm{ctg}\, x = 2 \quad | * \mathrm{ctg}\, x$

$\mathrm{ctg}^2\, x – 2\mathrm{ctg}\, x + 1 = 0$

замена: ctg x = y

$y^2 – 2y + 1 = 0$

$(y – 1)^2 = 0$

$y = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

Однородные уравнения 2-й степени.

Уравнения вида $a\ sin^2\ x + b\ sin\ x\ cos\ x + c\ cos^2\ x = 0$ – однородные уравнения 2-й степени. Если $a \neq 0$, то $cos\ x \neq 0$. Тогда $\frac{a\,sin^2 x}{cos^2 x} + \frac{b\,sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} + \frac{c\,cos^2 x}{cos^2 x} = 0$, следовательно, $a\ tg^2\ x + b\ tg\ x + c = 0$. Это уравнение решаем методом подстановки. Если $a = 0$ или $c = 0$, то уравнение решается методом разложения на множители.

Пример 3. Решить уравнение $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

$\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$

$tg^2 x - 3\, tg\, x + 2 = 0$

замена: $tg\, x = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad t_1 = 1, t_2 = 2$

$tg\, x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$

$tg\, x = 2, \quad x = arctg\, 2 + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, arctg\, 2 + \pi k, k \in Z.$

Пример 4. При каких значениях переменной уравнение $\sin^2 x + \sin x \sin (\frac{3\pi}{2} - x) - \cos 2x = 1$ имеет смысл?

$\sin^2 x + \sin x \sin (\frac{3\pi}{2} - x) - \cos 2x = 1$

$\sin^2 x - \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

$\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$

$tg^2 x - tg\, x - 2 = 0$

замена: $tg\, x = y$

$y^2 - y - 2 = 0$

$y = 2, \quad y = -1$

$$\left[\begin{array}{l} tg\, x = 2, \\ tg\, x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = arctg\, 2 + \pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2 + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in Z.$

Однородные уравнения более высоких степеней.

Пример 5. Найти корни уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1$

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 + \cos^4 x$

$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 + \cos^4 x - \sin^4 x - \cos^4 x = 0$

$2\sin^2 x \cos^2 x = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin^2 x = 0,\\ \cos^2 x = 0\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = 0\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}x = \pi k, k \in Z\ ,\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi k, n, k \in Z$

Пример 6. Решить уравнение $2\sin^3 x = \cos x$.

$2\sin^3 x = \cos x$

$2\sin^3 x = \cos x * 1$

$2\sin^3 x = \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$2\sin^3 x = \cos x \sin^2 x + \cos^3 x$

$2\sin^3 x - \cos x \sin^2 x - \cos^3 x = 0 \quad | : \cos^3 x$

$2\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$

Замена: $\operatorname{tg} x = t$

$2t^3 - t^2 - 1 = 0$

$(t - 1)(2t^2 + t + 1) = 0$

$t = 1$

$2t^2 + t + 1 > 0$

$tg\ x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

2.4. Введение вспомогательного угла.

Чтобы умело пользоваться методом введения вспомогательного угла, необходимо вспомнить основные формулы, которые здесь будут применяться:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\beta \sin\alpha;$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta.$$

Для того чтобы решить уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$, нужно разделить обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Введем вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Такое число φ существует, так как $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$. Значит, уравнение можно записать в виде $\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то есть сводится к простейшему.

Пример 1. Решить уравнение 4 sin x + 3 cos x = 5.

$4 \sin x + 3 \cos x = 5$

$a = 4,\ b = 3,\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

$4 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad | : \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1$

$\cos \varphi = \frac{4}{5},\ \sin \varphi = \frac{3}{5}$

$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1$

$\sin (x + \varphi) = 1$

$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \varphi = \arccos \frac{4}{5}$

$x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Пример 2. Найти корни уравнения cos 2x = $\sqrt{3}$ sin 2x – 1.

$\cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x - 1$

$\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1$

$a = \sqrt{3},\ b = -1,\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

$\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1 \quad | : 2$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2}$

$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin \varphi = \frac{1}{2} \quad => \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x - \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \quad => \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \quad =$

$>$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \quad => \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

2.5. Применение универсальной подстановки $tg\,\frac{x}{2} = t$.

Так как $sin\ x$, $cos\ x$, $tg\ x$ и $ctg\ x$ можно выразить через $tg\ \frac{x}{2}$, то уравнение подстановкой $tg\ \frac{x}{2} = t$ можно свести к алгебраическому уравнению.

$$sin\ x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos\ x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

При этом следует иметь ввиду, что замена $sin\ x$ на $\frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$ и $cos\ x$ на $\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}$ ведет к сужению области определения уравнения, поскольку из рассмотрения исключается значения x, при которых $cos\ x = 0$, т. е. $x = \pi + 2\pi n$. Поэтому при применении универсальной тригонометрической подстановки необходимо дополнительно выяснить, являются или нет исключаемые из рассмотрения значения x корнями исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\text{tg } x + 1 = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

ОДЗ: $\cos x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$\text{tg } x + 1 = -2\cos 2x$

Применим универсальную подстановку: $\cos 2x = \frac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$

Получили уравнение:

$\text{tg } x + 1 = -2\,\frac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$

Введем новую переменную $\text{tg } x = t,\ t \in R$.

$t + 1 = -2\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\frac{(1+t^2)(t+1)+2(1-t^2)}{1+t^2} = 0,\ 1 + t^2 \neq 0$ для любых t.

$(1+t^2)(t+1) + 2(1-t)(1+t) = 0$

$(t + 1)(t^2 - 2t + 3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t + 1 = 0 \\ t^2 - 2t + 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ \text{нет корней} \end{array}\right. \Rightarrow t = -1$

$\text{tg } x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Проверка: подставим $x = -\frac{\pi}{4}$ в исходное уравнение

$\text{tg}\,(-\frac{\pi}{4}) + 1 = 2\sin\,(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$

$-1 + 1 = 2\sin\pi$

$0 = 0$ – верно

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Пример 2. Найти корни уравнения $3\sin x - 4\cos x = 5$.

$3\sin x - 4\cos x = 5$

Замена:

$\sin x = \frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$

$3*\frac{2t}{1+t^2} - 4*\frac{1-t^2}{1+t^2} = 5$

$1 + t^2 \neq 0,\ t \in R$

$6t - 4 + 4t^2 = 5 + 5t^2$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$(t-3)^2 = 0$

$t = 3$

Вернемся к замене:

$\text{tg}\,\frac{x}{2} = 3$

$\frac{x}{2} = \text{arctg } 3 + \pi n, n \in Z$

$x = 2\text{arctg } 3 + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $2\text{arctg } 3 + 2\pi n, n \in Z$

Пример 3. Решить уравнение $4\text{tg } 2x + \frac{3}{\cos 2x} = \frac{4}{3} \text{ ctg } x + 1.$

$4\text{tg } 2x + \frac{3}{\cos 2x} = \frac{4}{3} \text{ ctg } x + 1.$

ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$, $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, $x \neq \frac{\pi}{4} + \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Замена:

$\sin 2x = \frac{2\text{tg } x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos 2x = \frac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\text{tg } x = t$

$4*\frac{2t}{1-t^2} + 3*\frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{4}{3t} - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} 1 - t2 \neq 0 \\ t \neq 0 \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l} t \neq \pm 1 \\ t \neq 0 \end{array}\right.$

$24t^2 + 9t + 9t^3 - 4 + 4t^2 - 3t + 3t^3 = 0$

$12t^3 + 28t^2 + 6t - 4 = 0$

$6(t^3 + 8) + 14(t^2 - 4) + 3(t + 2) = 0$

$(t + 2)(6t^2 + 2t - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t+2=0, \\ 6t2\ +\ 2t - \ 1=0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=\frac{-1+\sqrt{7}}{6} \\ t=\frac{-1-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right.$$

$6t^2 + 2t – 1 = 0$

$D = 4 – 4*6*(– 1) = 28$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{-2+\sqrt{28}}{12}, \\ t=\frac{-2-\sqrt{28}}{12} \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} t=\frac{-2+2\sqrt{7}}{12}, \\ t=\frac{-2-2\sqrt{7}}{12} \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} t=\frac{-1+\sqrt{7}}{6}, \\ t=\frac{-1-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right.$$

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=-2, \\ \operatorname{tg} x=\frac{-1+\sqrt{7}}{6} \\ \operatorname{tg} x=\frac{-1-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x=-\operatorname{arctg}2+\pi n, n \in Z, \\ x=\operatorname{arctg}\frac{-1+\sqrt{7}}{6}+\pi r, r \in Z, \\ x=\operatorname{arctg}\frac{-1-\sqrt{7}}{6}+\pi m, m \in Z \end{array}\right.$$

При применении универсальной подстановки произошло сужение области определения за счет того, что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$. Проверим, являются ли числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$ корнями данного уравнения:

$$4\operatorname{tg}(\pi + 2\pi l) + \frac{3}{\cos(\pi+2\pi l)} = \frac{4}{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi l\right) + 1, l \in Z$$

$– 3 = 1$ – неверно

Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$ не входит в число корней данного уравнения.

Ответ: $-\operatorname{arctg}2+\pi n; \operatorname{arctg}\frac{-1+\sqrt{7}}{6}+\pi r; \operatorname{arctg}\frac{-1-\sqrt{7}}{6}+\pi m, n, r, m \in Z$

2.6. Применение формул двойного угла и формул понижения степени.

Чтобы пользоваться этим методом, необходимо знать основные формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$tg^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Пример 1. Решить уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

Применяем формулы двойных аргументов.

Правую часть уравнения представим в виде:

$$2 = 2*1 = 2*(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}).$$

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad | : \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$3\, tg^2 \frac{x}{2} - 4\, tg \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$tg \frac{x}{2} = y$$

$$3y^2 - 4y + 1 = 0,\ y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$$

1) $tg \frac{x}{2} = 1,\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$

2) $\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \text{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2\text{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, $x = 2\text{arctg}\,\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

Воспользуемся формулами половинного аргумента.

$\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$

$\sin 2x = (\cos^2\frac{x}{2})^2 - (\sin^2\frac{x}{2})^2$

$\sin 2x = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^2$

$\sin 2x = \frac{1+2\cos x + \cos^2 x - 1 + 2\cos x - \cos^2 x}{4}$

$\sin 2x = \frac{4\cos x}{4}$

$2\sin x \cos x = \cos x$

$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in Z, k \in Z$

§ 3. Анализ школьных учебников по изложению темы «Тригонометрические уравнения» в школе.

Тригонометрические уравнения занимают в школьном курсе математики значительное место. Рассмотрим несколько школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Тригонометрические уравнения». Проведем анализ школьной литературы по изложению данного раздела.

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, Просвещение, 18-е издание, 2012 г.
2. Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И., «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, просвещение, 2011 г.
3. Шабунин М. И., Прокофьев А. А., «Математика. Алгебра. Начала математического анализа», учебник для 10 класса, Москва, БИНОМ, 2013 г.
4. Мордкович А. Г., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, Мнемозина, 2014 г.

Анализ школьных учебников будем проводить по следующим критериям:

1. Структура учебника.
2. Место изучения тригонометрических уравнений в курсе математики.
3. Методика изложения материала по данной теме.

Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов

Структура учебника.

Данный учебник содержит в себе десять глав, после каждой из которых автор дает упражнения на повторение изученного материала и задания для самостоятельного решения. Все представленные задания делятся на 3 части: базовые задачи, дополнительные и более сложные задачи, трудные задачи. В конце основного материала учебника имеются упражнения для итогового повторения курса алгебры и начал анализа, задачи для внеклассной работы и краткие теоретические ведения по данному курсу.

Место изучения тригонометрических уравнений в курсе математики.

Алимов Ш. А. на тригонометрию отводит три главы. Тема «Тригонометрические уравнения» представлена в главе с таким же названием. Весь материал изложен в пяти параграфах.

Глава «Тригонометрические уравнения» вводится после изучения темы «Тригонометрические формулы», но перед изучением темы «Тригонометрические функции».

Автор рассматривает единичную окружность, вводит понятие поворота точки вокруг начала координат на некоторый угол α, затем дает определение синуса, косинуса и тангенса угла. Также предлагаются к изучению формулы приведения, формулы двойного угла, суммы и разности синусов и косинусов, на основе чего вводится тема «Тригонометрические уравнения».

Методика изложения материала по теме «Тригонометрические уравнения».

Изложение темы начинается с решения простейших тригонометрических уравнений по определению (с помощью единичной окружности), на которые отводятся три параграфа, после каждого из которых, приведена система упражнений. Автор вводит понятие арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа. Позже предлагаются общие формулы для нахождения корней тригонометрических уравнений.

Дальше рассматриваются методы решения трех видов тригонометрических уравнений: уравнения, сводящиеся к квадратным, уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ (включающие однородные уравнения как частный вид) и уравнения, решаемые разложением левой части на множители. Приведены методы решения уравнений такие, как метод разложения на множители, метод введения вспомогательного аргумента.

Вывод: в учебнике Алимова Ш. А. рассмотрено небольшое количество методов решения тригонометрических уравнений. Не дается понятие однородных уравнений, рассматриваются однородные уравнения только первой степени. Приведен только один способ решения уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ (введение вспомогательного аргумента). Однако, несмотря на небольшое количество методов решения тригонометрических уравнений, приведенных в учебнике, система упражнений содержит большое количество уравнений.

Колмогоров А. Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю. П., Ивлев Б. М., Швацбурд С. И., «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов.

Структура учебника

Учебник состоит из пяти глав. Главы разбиты на параграфы, параграфы – на пункты. После каждого пункта приведена двухуровневая система упражнений. Первый уровень – обязательный, необходим для получения удовлетворительной оценки. Второй – для получения оценки «хорошо» и «отлично». В конце каждой главы помещены сведения из истории и задачи на повторение изученного материала, причем шестая глава содержит задачи повышенной трудности.

Место изучения тригонометрических уравнений в курсе математики.

В данном издании первая глава посвящена тригонометрии, решение тригонометрических уравнений рассматривается в третьем параграфе «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» этой главы. Весь материал по данной теме изложен в четырех пунктах.

Тригонометрические уравнения рассматриваются после изучения тригонометрических функций числового аргумента и их основных свойств.

Колмогоров А. Н. не дает определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, а лишь напоминает, что они были изучены ранее в курсе алгебры и геометрии. Далее рассматриваются формулы: основные тригонометрические тождества, формулы сложения и вычитания аргументов функций, формулы приведения, формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение, формулы двойного и половинного аргумента. После рассматриваются тригонометрические функции, их графики и основные свойства, и, наконец, на базе изученного вводится тема «Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

Методика изложения материала по данной теме.

Изучение темы начинается с повторения радианной меры угла, основных формул тригонометрии. Далее изучаются тригонометрические функции, их графики и свойства. Завершается первая глава решением тригонометрических уравнений и неравенств. Здесь вводятся определения аркфункций числа при помощи графиков тригонометрических функций, затем с помощью единичной окружности выводятся формулы корней для решения простейших тригонометрических уравнений.

В одиннадцатом пункте автор знакомит с основными идеями решения тригонометрических уравнений и систем, приводя несколько примеров их решения. При этом, не называя приемов, использует метод введения новой переменной, метод разложения на множители, способ решения однородных уравнений первой, второй и высших степеней, метод подстановки для решения систем уравнения.

Колмогоров А. Н. не дает определения однородных уравнений, не систематизирует методы решения тригонометрических уравнений. Автором не рассматриваются способы решения уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$. Уравнения такого вида встречаются лишь в задачах повышенной трудности шестой главы. По нашему мнению, система упражнений, предложенных в данном учебнике, содержит недостаточное количество примеров для самостоятельного решения.

Вывод: несмотря на то, что в этом издании предложен большой набор тригонометрических формул для использования их при решении тригонометрических уравнений, Колмогоров А. Н., также как и Алимов Ш. А., рассматривает малый перечень методов решения тригонометрических уравнений. Не дает понятия однородных уравнений, однако, в отличие от Алимова Ш. А., в данном учебнике рассматриваются однородные уравнения не только первой степени. Автором не рассматриваются уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$ и ни один из способов их решения. Книга содержит недостаточное количество методов решения тригонометрических уравнений, а также нет систематизации по видам.

Шабунин М. И., Прокофьев А. А., «Математика. Алгебра. Начала математического анализа», учебник для 10 класса.

Структура учебника

Учебник профильного уровня, предназначен для обучающихся 10 классов в объеме 6 часов в неделю. Полный комплект материалов по данному курсу включает учебники для 10-го и 11-го классов, методические пособия и дидактические материалы, соответствующие каждому учебнику, а также задачник для 10-11 классов.

Место изучения тригонометрических уравнений в курсе математики.

Темы «Тригонометрические уравнения» как таковой нет. Ее заменяет глава «Тригонометрические формулы», которая идет после изучения функций, а также алгебраических уравнений и неравенств.

Методика изложения материала по данной теме.

В 5 главе «Тригонометрические формулы» введены основные понятия, формулы тригонометрии, рассмотрены различные способы преобразования тригонометрических выражений и доказательств тождеств. Отдельно не рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений.

Вывод: в основном М. И. Шабунин предоставляет задания на вычисление тригонометрических выражений и мало на решение уравнений. В отличие от Ш. А. Алимова сначала дает формулы суммы, разности аргументов и выражений, а затем тригонометрические формулы приведения, позже понятия «арксинус», «арккосинус», «арктангенс».

Мордкович А. Г., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10-11 классов.

Структура учебника.

Учебное пособие состоит их двух частей: учебник и задачник. Учебник разбит на десять глав, после каждой из которых четко обозначены основные результаты изучения.

Место изучения тригонометрических уравнений в курсе математики.

Обучающиеся начинают с повторения, затем рассматривают тригонометрические функции, тригонометрические уравнения, преобразование тригонометрических выражений.

В материале 11 класса задания по тригонометрии встречаются в темах «Производная», «Первообразная и интеграл», «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств».

Методика изложения материала по данной теме.

Решение тригонометрических уравнений автор поместил, после изучения главы «Тригонометрические функции». В этой главе вводится понятие тригонометрической окружности на координатной плоскости, понятия синус и косинус, основные тригонометрические соотношения с ними связанные, решение простейших уравнений по тригонометрической окружности, формулы приведения вводятся после изучения тригонометрических функций углового аргумента.

В главе «Тригонометрические уравнения» подробно рассматривается решение каждого простейшего тригонометрического уравнения, на основе ранее введенных понятий арксинуса, арккосинуса и арктангенса. Также рассмотрены следующие методы решения: разложение на множители и введение новой переменной, метод решения однородных тригонометрических уравнений.

Вывод: с точки зрения применения учебник Мордковича А. Г. удобен для самостоятельного изучения обучающимися, так как содержит сильную теоретическую базу. Изложение материала ведется очень удобно, разнообразно, а также представлено достаточное количество примеров. Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберется в том, что нужно рассказать на уроке, а что предложить ребятам прочесть дома. Во второй части комплекта (задачнике) содержится трехуровневая система упражнений, количество заданий которого достаточно для работы в классе и дома.

Сравнение учебников

Критерий сравнения	Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. и др. «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов	Колмогоров А. Н., Абрамов А. М. и др. «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов	Шабунин М. И., Прокофьев А. А., «Математика. Алгебра. Начала математического анализа», учебник для 10 класса	Мордкович А. Г., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10-11 классов
Знание графиков тригонометрических функций	+	+	+	+
Основные тригонометрические формулы	+	+	+	+
Введение понятий arcsin α, arccos α, arctg α	+	+	+	+
Синус, косинус и тангенс α и - α	+	+	+	+
Основные типы тригонометрических уравнений А) Разложение на множители	+	+	+	+

Б) Метод замены переменной	+	+	+	+
В) Однородные уравнения	+	–	–	+
Г) Вспомогательный угол	+	–	+	+
Д) Универсальная подстановка	–	–	+	–
Е) Формулы двойного аргумента	+	–	+	+
Ж) Формулы половинного аргумента	+	–	+	+

Выводы по главе 1.

Нами были разобраны, разъяснены и обобщены основные методы решения тригонометрических уравнений различных типов. Приведены примеры и их решения.

Анализ школьных учебников алгебры Ш. А. Алимова, А. Н. Колмогорова, М. И. Шабунина и А. Г. Мордковича показал их разнообразие в изложении исследуемой темы. Некоторые авторы сначала предоставляют для изучения тему «Тригонометрические функции», а только потом «Тригонометрические уравнения», некоторые авторы – наоборот. Также наблюдается различное местоположение исследуемой темы в учебниках.

Необходимо отметить, что в представленной литературе рассматриваются и называются не все методы решения тригонометрических уравнений. Но имеется большое количество упражнений различных уровней сложности.

Глава 2. Разработка факультативного занятия по теме «Тригонометрические уравнения»

§ 1. Анализ материалов ЕГЭ по разделу «Тригонометрические уравнения».

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) – централизованно проводимый во всех школах Российской Федерации экзамен в средних учебных заведениях – школах, лицеях и гимназиях. Служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным испытанием в высшие учебные заведения. До 2013 года служил также и вступительным экзаменом в ссузы, но новым законом об образовании они отменены. При проведении экзамена на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки качества выполнения работ. После сдачи экзамена всем участникам выдаются свидетельства о результатах ЕГЭ (сертификаты), где указаны полученные баллы по предметам. С 2009 года ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов в школе и основной формой вступительных экзаменов в вузы, при этом есть возможность повторной сдачи ЕГЭ в последующие годы.

Рассмотрим, какие изменения были в структуре ЕГЭ на протяжении последних 5 лет, а также какие типы заданий по тригонометрии встречаются в данных вариантах. Единый государственный экзамен состоит из двух частей: часть В содержит задания с кратким ответом базового курса по материалу курса математики. Часть С представлена более сложными заданиями. При их выполнении необходимо записать полное решение и ответ.

Из-за того, что школьная нагрузка увеличена по всем предметам, в том числе по математике, стоит проблема распределения часов на изучение школьных предметов. Так на решение тригонометрических уравнений в школе отводится небольшое количество часов, и те знания, которые обучающиеся приобретают за это время, достаточны только для успешного выполнения первой части. Подготовку на выполнение второй части дети проходят с учителем на дополнительных занятиях или самостоятельно во внеурочное время.

Анализ материалов ЕГЭ позволил сделать следующие вывод: включены задания по тригонометрии различной сложности от простейших в части В (задания В7, В 11, В 14) до сложных в части С (задания С 1, С 5), в том числе упражнения с параметром и применением производной.

2011 год:

В 11. Найдите наибольшее значение функции $y = 24tg\ x - 24\ x + 6\pi - 4$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

С 1. Решите уравнение $|4\cos 2x + 1| = -(8\cos x + 3)$.

С 1. Решить уравнение $\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

2012 год:

В 7. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = 0,6$, $\pi < \alpha < 2\pi$.

В 14. Найти наибольшее значение функции $y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}x}{3}$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

С 1. а) Решить уравнение $\cos 2x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

б) найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi)$.

2013 год:

В 7. Найти $tg\ \alpha$, если $sin\ \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

В 14. Найти точку максимума функции $y = (2x - 3)cos\ x - 2\ sin\ x + 10$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

С 1. а) решить уравнение $cos\ 2x = 1 - cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$,

б) найти все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

2014 год:

В 7. Найдите корень уравнения $\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.

В 11. Найдите $sin\ \alpha$, если $cos\ \alpha = 0,6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

С 1.решить уравнение $cos\ 2x = 1 - cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$.

С 5.найдите все значения параметра a, при которых уравнение $cos\ 2x + 2sin^2\ (x + a) + 2 - sin\ \alpha$ имеет корни принадлежащие промежутку $\pi \leq x \leq 2\pi$.

2015 год:

В 1. Найдите значение выражения $\frac{10}{sin^2 92^{\circ} + sin^2 182^{\circ}}$.

В 5. Найдите $cos\ \alpha$, если $sin\ \alpha = 0,8$ и $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$.

В 5. Найдите $sin\ 390^{\circ}$.

В 10. Найдите значение выражения $2\sqrt{2}\ sin\frac{13\pi}{8}\ cos\frac{13\pi}{8}$.

С 1. Решить уравнение $(2sin\ x + \sqrt{3}) * \sqrt{cos\ x} = 0$.

С 1. а) Решить уравнение $cos\ 2x = 1 - cos\ (\frac{\pi}{2} - x)$,

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$.

2016 год:

В 11. Найдите значение выражения $\frac{48 \sin 121^{\circ} \cos 121^{\circ}}{\sin 242^{\circ}}$

В 15. Найти наибольшее значение функции $y = 12x - 2sin\ x + 3$ на $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

С 1. а) Решите уравнение $\frac{2\ cos^2\ x - 7 \cos x + 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0$,

б) укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 7\pi]$.

С 1. Решите уравнение $\frac{4\ sin^2\ x - 3}{2 \cos x + 1} = 0$.

С 1. Решить уравнение $(6cos^2 x + 5cos\ x - 4) * \sqrt{-4\ sin\ x} = 0$.

§ 2. Факультативный курс по теме «Тригонометрические уравнения».

Проанализировав учебную литературу, было выявлено, что в некоторых учебниках не хватает разъяснений, а также конкретных заданий. Следовательно, требуется подготовка к единому государственному экзамену на факультативе, которая позволит решить какие-либо недостатки в изложении исследуемой темы «Тригонометрические уравнения».

Программа факультативного курса предназначена для обучающихся 10 и 11 классов. В курсе алгебры и начал анализа рассматриваются некоторые основные методы решения тригонометрических уравнений, в данном курсе представлено углубленное изучение школьного курса.

Цель курса – расширение, углубление и систематизация знаний при решении тригонометрических уравнений.

Задачи:

1. дать представление о методах решений тригонометрических уравнений;
2. подготовить учеников к ЕГЭ;
3. способствовать совершенствованию и развитию важнейших математических знаний и умений, предусмотренных программой.

Основной деятельностью курса является развитие логического и творческого потенциала; воспитание творческой личности; систематизация знаний; развитие познавательных интересов и творческих способностей.

Курс ориентирован на расширение базового уровня знаний обучающихся по математике, дает возможность познакомиться с интересными вопросами тригонометрии, с весьма распространенными методами решения тригонометрических задач, проверить свои знания и умения в математике.

Требования к математической подготовке обучающихся:

1) знать тригонометрические формулы и уметь их применять для преобразования тригонометрических выражений;
2) решать тригонометрические уравнения с использованием различных методов;
3) логично и полно излагать решение, записывать ответ.

Программа рассчитана на 8 часов. Курс может быть рассмотрен в 10 классе, после изучения соответствующих тем, или в 11 классе, при подготовке к единому государственному экзамену. Занятия проводятся 1 час в неделю. Итоги реализации данной программы поводятся в форме практических и самостоятельных работ.

Результатом предложенного курса должно быть успешное решение заданий ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения»

Учебно-тематический план факультативного курса

№ п/п	Название темы	Количество часов
1.	Повторение простейших тригонометрических уравнений. Метод разложения на множители. Метод замены переменной.	1 час
2.	Однородные уравнения 1-й и 2-й степени и сводящиеся к ним.	1 час
3.	Применение формул двойного и тройного угла. Применение формул половинных углов	1 час

	(понижение степени)	
4.	Введение вспомогательного угла.	1 час
5.	Применение универсальной подстановки.	1 час
6.	Решение заданий ЕГЭ по теме «Тригонометрические уравнения»	1 час
7.	Контрольная работа по теме «Тригонометрические уравнения»	1 час
8.	Работа над ошибками. Подведение итогов	1 час
	Итого:	8 часов

Нами были разработаны тесты по типу единого государственного экзамена, которые могут быть использованы, в качестве примеров заданий факультативного курса (Приложение 2).

§ 3. Апробация факультативного курса.

Апробация факультатива была проведена в МКОУ СОШ № 11 поселка Роза Коркинского муниципального района Челябинской области. Проведено два занятия по темам «Метод разложения на множители. Метод замены переменной» и «Однородные уравнения 1-й и 2-й степени и сводящиеся к ним» (Приложение 1).

После объяснения материала, была проведена самостоятельная работа № 1.

Результаты самостоятельной работы № 1.

Количество учеников: 18 человек.

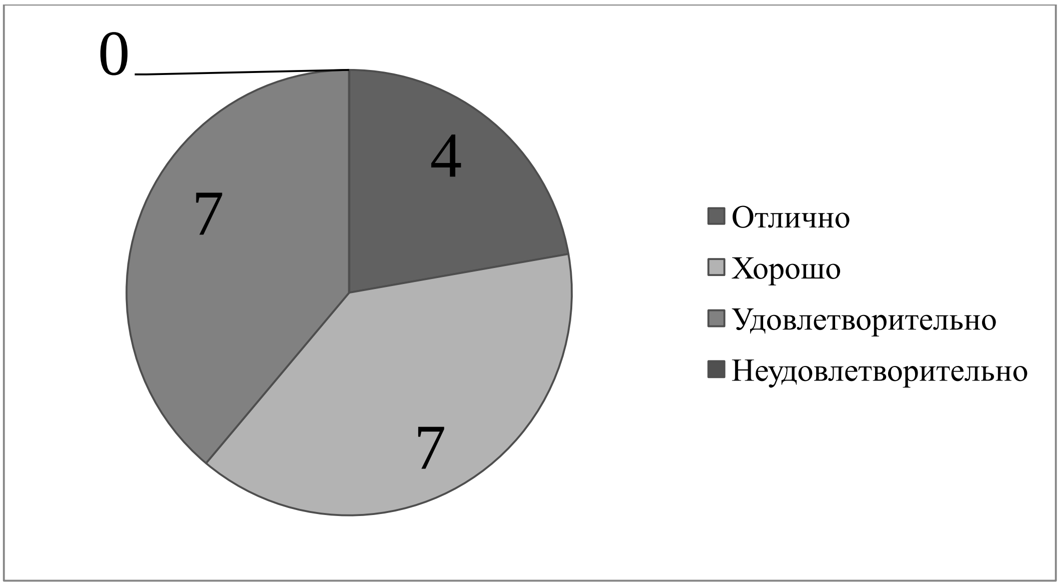
Оценки обучающихся:

«отлично» – 4 человека;

«хорошо» – 7 человек;

«удовлетворительно» – 7 человек;

«неудовлетворительно» – 0 человек.



Результат выполнения самостоятельной работы № 1.

После разбора ошибок с учениками, проведена самостоятельная работа № 2.

Результаты самостоятельной работы № 2.

Количество учеников: 18 человек.

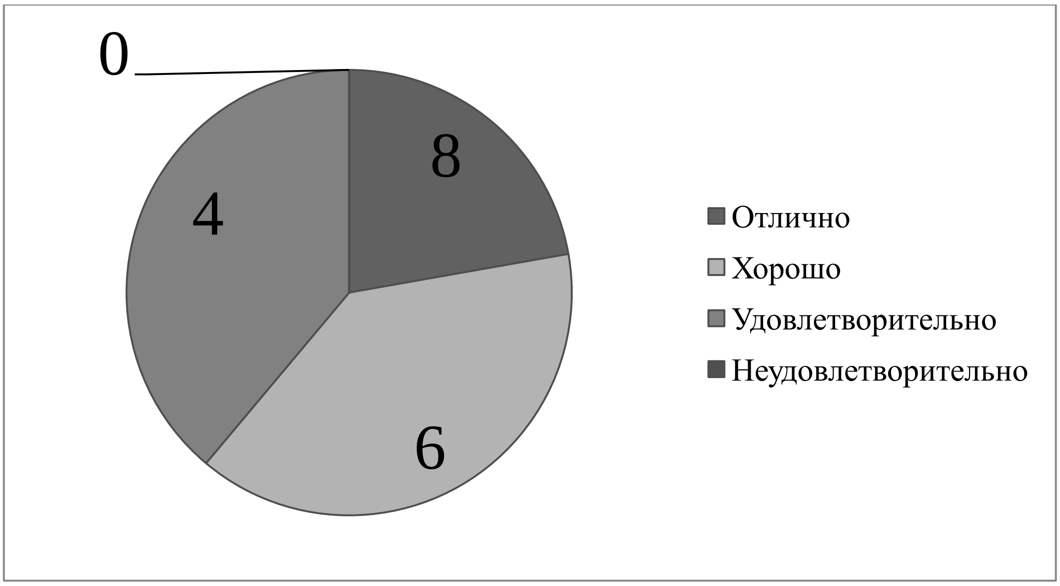
Оценки обучающихся:

«отлично» – 8 человека;

«хорошо» – 6 человек;

«удовлетворительно» – 4 человек;

«неудовлетворительно» – 0 человек.



Результат выполнения самостоятельной работы № 2.

Можно сделать вывод об успеваемости класса:

	Самостоятельная работа № 1	Самостоятельная работа № 2
Абсолютная успеваемость	100 %	100 %
Качественная успеваемость	61 %	78 %

Типичные ошибки:

1) Неточности и заблуждения в формулах простейших тригонометрических уравнений, в том числе частные случаи (5 человек);
2) При получении ответа не учитывается область допустимых значений (5 человек);
3) Неверная выборка корней (2 человека);
4) Незнание множества значений тригонометрических функций (4 человека);
5) Вычислительные ошибки (6 человек).

Вывод: по итогам проведения двух работ, можно наблюдать улучшения усвоения материала, значительное увеличение качественной успеваемости.

В целом, класс неплохо освоил тему «Тригонометрические уравнения», чему свидетельствовала их упорная работа на уроке. Основная часть учащихся справилась с заданиями успешно. Таким образом, задачи и цель факультатива достигнуты.

Выводы по 2 главе.

Анализ материалов единого государственного экзамена показал, что тригонометрические уравнения встречаются очень часто как в первой части, так и во второй. Следовательно, тема «Тригонометрические уравнения» является основополагающей.

Для успешного закрепления темы, в том числе для успешной сдачи ЕГЭ, нами был разработан факультативный курс, охватывающий все основные методы решения уравнений такого типа.

Апробация показала, что разработанные методические рекомендации для проведения уроков по теме позволили учащимся систематизировать свои знания по данной теме и что задания сформулированы корректно.

Заключение

Несмотря на то, что тригонометрия считается одним из наиболее молодых разделов элементарной математики, она является одной из важнейших составных частей школьного курса математики.

Тема «Тригонометрические уравнения» занимает в школьном курсе одно из важных мест. Без умения решать такие уравнения невозможно дальнейшее изучение тригонометрии и решение задач не только по математике, но и по физике.

Согласно цели и задачам, поставленным в начале работы, была изучена учебно-методическая и математическая литература по данной теме. Был проведен анализ 4 разных учебников, из которых наиболее эффективными оказались учебник Мордковича А. Н. для профильных классов и учебник Алимова Ш. А.. В процессе анализа были выявлены достоинства и недостатки каждого, а также рассмотрены методы изучения данной темы, показаны роль и место темы в системе математических знаний обучающихся. Также проведен анализ материалов ЕГЭ за последние 5 лет.

Необходимо отметить, что учителя не должны ограничиваться только учебниками школьной программы. Чтобы школьники более эффективно усвоили материал, нужно обращаться к различной литературе, справочным и практическим материалам, пособиям и разработкам.

Разработан и апробирован факультативный курс по теме «Тригонометрические уравнения». Данный материал может быть использован в практике работы учителя в 10 и 11 классах и при подготовке учеников к единому государственному экзамену.

В данной работе были представлены различные типы тригонометрических уравнений и способы их решения. Значение таких уравнений весьма велико. Эта тема является базой для изучения дальнейшего материала данного раздела математики.

Изучение темы «Тригонометрические уравнения» входит в школьную программу как основной компонент и как метод проверки знаний школьников в едином государственном экзамене. Поэтому учителя должны подготовить учеников к успешной сдаче централизованного тестирования.

Апробация факультатива показала, что представленный курс способствует боле глубокому усвоению темы «Тригонометрические уравнения», вследствие чего, приведет к успешной сдаче единого государственного экзамена.

Таким образом, задачи данной исследовательской работы решены, цель – выявить методические особенности по теме «Тригонометрические уравнения» – достигнута.

Представленные материалы могут быть использованы в качестве методического пособия как учителями, так и школьниками, готовящимися к поступлению в высшие учебные заведения.

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10 кл. общеобразоват. учреждений : базовый и профил. Уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – М. : Просвещение, 2013. – 432 с. : ил.

2. Алимов Ш.А.. Алгебра. 9 класс.: учебн. для общеобразоват. учреждений – М.: Просвещение, 2014. – 336 с.

3. Алимов Ш.А.. Алгебра. 10-11 кл.: учебн. для общеобразоват. учреждений – М.: Просвещение, 2013. – 646 с.

4. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, Просвещение, 18-е издание, 2012 г.

5. Высоцкий И., Ященко И. ЕГЭ – 2014. Математика. Типовые экзаменационные работы. 30 вариантов. – Национальное образование – 2013. – 192 с.

6. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2011 – 2016 гг.

7. Дземяшевич Е.В., Иванова Т.И. Подготовка к единому государственному экзамену по математике. – Тульский государственный университет. – 2013. – 95 с.

8. Дорофеев Г. В. Алгбра и начала анализа. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений: В 2 ч. Ч 1 / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнейова, Е.А. Седова. – М.: Дрофа, 2009. – 320 с. : ил.

9. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. 192 с. (ЕГЭ – 2012. ФИПИ – школе).

10. ЕГЭ – 2012. Математика. Типовые тестовые задания / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издатльство «Экзамен», 2012. – 51 с.

11. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.

12. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Ивлев Б.М., Швацбурд С.И., «Алгебра и начала анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, просвещение, 2011 г.

13. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 11 класса, Москва, Просвещение, 3-е издание, 2011 г.

14. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней. Математика ЕГЭ 2012 (типовые задания С 1).

15. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Математика. Сборник тестов ЕГЭ 2001-2010 учебно-методическое пособие/ под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов на Дону: Лагион – М, 2010-192 с. –(Готовимся к ЕГЭ).

16. Макарычев Ю. Алгебра 9 класс: учебн. для общеобразоват. учреждений – М.: Просвещение, 2014. – 288 с.

17. Маслова Т.Н., Суходский А.М. Справочник по математике для школьников 5 – 11 классов. М.: ООО «Издательство «Мир и образование», 2013.-672 с.

18. Мордкович А.Г., «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10-11 классов, Москва, Мнемозина, 2014 г.

19. Мордкович А., Глизбург В., Лаврентьева Н.. Математика. Полный справичник для подготовки к ЕГЭ. АСТ, Астрель, ВКТ – 2014 г. – 352 с.

20. Мордкович А., Смирнова И., Денищева Л., Корешова Т., Мишустина Т.. математика. 10 класс. – 2013. – 432 с.

21.

22. Новиков А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2010.-260 с.

23. Потапов М.К. Алгера и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс: базовый и профильный уровни/ М.К. Потапов, А.В Шевкин. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2013-159 с.: ил.

24. Пробные маериалы ЕГЭ по математике за 2012 г., математика, 11 класс. http://mat-ege.ru

25. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2012: Математика / авт. –сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – 93 с. (Федеральный институт педагогических измерений).

26. Шабунин М.И., Прокофьев А.А., «Математика. Алгебра. Начала математического анализа», учебник для 10 класса, Москва, БИНОМ, 2013 г.

27. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.:МЦНМО, 2011.

28. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С1. Уравнения и системы уравнений. – МЦНМО. – 2012. – 176 с.

29. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2013. Математика. Задача С1. Уравнения и системы уравнений. – МЦНМО. – 2013. – 176 с.

Приложение 1.

План-конспект занятия из факультативного курса на тему «Методы решения тригонометрических уравнений»

Метод разложения на множители. Метод замены переменной.

Тип урока: комбинированный, новый материал, обобщение и систематизация знаний.

Цели урока:

Образовательные:

- проверить и обобщить знания и умения учащихся по теме «Методы решения уравнений»;
- проверка умения выполнять арифметические действия с целыми и дробными числами;
- проверка умения выполнять преобразование тригонометрических выражений.

Развивающие:

- развитие логического мышления;
- активизация мыслительной деятельности, познавательной активности;
- формирование навыков самоконтроля, адекватной самооценки и саморегуляции собственной деятельности;
- развитие гибкости мышления.

Воспитательные:

- воспитание аккуратности, трудолюбия;
- развитие общей культуры личности;
- способствование толерантному воспитанию учащихся.

Ход урока:

1. *Организационный момент*
2. *Изучение нового материала*
3. *Практическая часть*

Пример 1. Найдите корни уравнения $5sin\ x – sin^5\ x = 0$.

$5\sin x – \sin^5 x = 0$

$\sin x * (5 – \sin^4 x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ 5 - \sin^4 x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ \sin^4 x = 5 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ \sin x = \pm \sqrt[4]{5} \end{array}\right. =>$$
$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = (-1)^k \arcsin \sqrt[4]{5} + \pi k, k \in Z, \\ x = (-1)^{t+1} \arcsin \sqrt[4]{5} + \pi t, t \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: πn; $(-1)^k \arcsin \sqrt[4]{5} + \pi k$; $(-1)^{t+1} \arcsin \sqrt[4]{5} + \pi t$, n, k, t $\in$ Z.

Пример 2. Чему равна сумма корней уравнения *3sinx + sin2x = 0* на отрезке *[3π; 5π]* ?

3sinx + sin2x = 0

3sinx*(3 + 2cosx) = 0

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 3 + 2\cos x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k, k \in Z \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k, k \in Z \\ x \in \emptyset \text{ (нет решений, т к } -1 \le \cos x \le 1) \end{array}\right.$$

k = 0, x = 0

k = 1, x = π

k = 2, x = 2π

k = 3, x = 3π є [3π; 5π]

k = 4, x = 4π є [3π; 5π]

k = 5, x = 5π є [3π; 5π]

k = 6, x = 6π не є [3π; 5π]

Ответ: 3π + 4π + 5π = 12π

Пример 3. Чему равно количество решений уравнения *sin 4x+sin 5x+ sin 6x = 0* на *[–π; π]*?

sin 4x + sin 5x + sin 6x = 0, 2sin 5x cos x + sin 5x = 0

sin 5x (cos x + 1) = 0

$$\left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pi n, n \in Z \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

n = –5, –4, –3, –2, …, 4, 5 => корни є [–π; π] – 11 решений

k = 0, X = ± $\frac{2\pi}{3}$ – 2 решения

Ответ: 13 решений

Пример 4. Чему равна сумма корней уравнения *cos 7x + sin 3x*sin 4x = 0* в промежутке $[0; \pi]$?

cos 7x + sin 3x*sin 4x = 0

cos 7x + $\frac{1}{2} * (\cos\ (3x-4x) - \cos(3x+4x))$ = 0

cos 7x + $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 7x\ = 0$

$$\frac{1}{2}\cos 7x\ +\ \frac{1}{2}\cos x\ = 0$$

cos 7x + cos x = 0

2 cos $\frac{7x-x}{2}$ * cos $\frac{7x+x}{2}$ = 0

2 cos 3x * cos 4x = 0

$\left[\begin{array}{l}\cos 3x\ =\ 0\\ \cos 4x\ =\ 0\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}3x\ =\ \frac{\pi}{2}+\ \pi n, n\ \epsilon\ Z\\ 4x\ =\ \frac{\pi}{2}+\ \pi k, k\ \epsilon\ Z\end{array}\right. => \left[\begin{array}{l}x\ =\ \frac{\pi}{6}+\ \frac{\pi n}{3}, n\ \epsilon\ Z\\ x\ =\ \frac{\pi}{8}+\ \frac{\pi k}{4}, k\ \epsilon\ Z\end{array}\right.$

n = 0, x = $\frac{\pi}{6}$ $\epsilon\ [0;\pi]$ k = 0, x = $\frac{\pi}{8}$ $\epsilon\ [0;\pi]$

n = 1, x = $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ $\epsilon\ [0;\pi]$ k = 1, x == $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{8}$ $\epsilon\ [0;\pi]$

n = –1, x = $\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{6}$ не $\epsilon\ [0;\pi]$ k = –1, x == $\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{8}$ не $\epsilon\ [0;\pi]$

n = 2, x = $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$ $\epsilon\ [0;\pi]$ k = 2, x = $\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{4}=\frac{5\pi}{8}$ $\epsilon\ [0;\pi]$

n = 3, x = $\frac{\pi}{6}+\pi$ не $\epsilon\ [0;\pi]$ k = 3, x = $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{4}=\frac{7\pi}{8}$ $\epsilon\ [0;\pi]$

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=3\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}$

Ответ: $\frac{7\pi}{2}$

Пример 5. Найдите корни уравнения –22sin 4x – 5cos 8x + 17 = 0.

–22sin 4x – 5cos 8x + 17 = 0

–22sin 4x – 5(1 – 2sin^{2}x) + 17 = 0

–22sin 4x – 5 + 10sin^2 4x + 17 = 0

10sin^2 4x –22sin 4x + 12 = 0 | : 2

5sin^2 4x –11sin 4x + 6 = 0

sin 4x = a, |a| ≤ 1

5a^2 – 11a + 6 = 0

D = 121 – 4*5*6 = 121 – 120 = 1

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{11+1}{10}, \\ a = \frac{11-1}{10}. \end{array}\right. \quad => \quad \left[\begin{array}{l} a = \frac{12}{10}, \\ a = \frac{10}{10}. \end{array}\right. \quad => \quad \left[\begin{array}{l} a = 1{,}2, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

1) sin x = 1,2

Нет корней, т к | sin x| ≥ 1

2) sin x = 1

x = $\frac{\pi}{2}$ + 2πn, n є Z

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ + 2πn, n є Z

Пример 6. Решите уравнение *cos 5x = cos 3x*

cos 5x = cos 3x,   cos 5x – cos 3x = 0

– 2sin 4x * sin x = 0

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \; => \; \left[\begin{array}{l} 4x = \pi n, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right. \; => \; \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Объединяя корни получим x = $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Ответ: x = $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

4. *Постановка домашнего задания*

Пример 1. Найдите корни уравнения *sin 3x = cos 2x*.

Пример 2. Найдите корни уравнения $sin^3\,27^\circ - cos^3\,27^\circ = 0$.

Пример 3. Найдите корни уравнения *5cos 4x – 21cos 2x + 16 = 0.*

План-конспект занятия

Однородные уравнения 1-й и 2-й степени и сводящиеся к ним.

Тип урока: комбинированный, новый материал, обобщение и систематизация знаний.

Цели урока:

Образовательные:

- проверить и обобщить знания и умения учащихся по теме «Методы решения уравнений»;
- проверка умения выполнять арифметические действия с целыми и дробными числами;
- проверка умения выполнять преобразование тригонометрических выражений.

Развивающие:

- развитие логического мышления;
- активизация мыслительной деятельности, познавательной активности;
- формирование навыков самоконтроля, адекватной самооценки и саморегуляции собственной деятельности;
- развитие гибкости мышления.

Воспитательные:

- воспитание аккуратности, трудолюбия;
- развитие общей культуры личности;
- способствование толерантному воспитанию учащихся.

Ход урока:

1. *Организационный момент*
2. *Изучение нового материала*
3. *Практическая часть*

Пример 1. Решите уравнение $\sin x + \sqrt{7}\cos x = 0$.

$\sin x + \sqrt{7}\cos x = 0 \quad | : \cos x$

$\operatorname{tg} x + \sqrt{7} = 0$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{7}$

$x = -\operatorname{arctg}\sqrt{7} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\sqrt{7} + \pi k,\ k \in Z$

Пример 2. Решите уравнение $4sin\ x + \frac{\sqrt{3}}{5}cos\ x = 0$.

4sin x + $\frac{\sqrt{3}}{5}$cos x = 0 | : cos x

4tg x + $\frac{\sqrt{3}}{5}$ = 0

4tg x = – $\frac{\sqrt{3}}{5}$

tg x = – $\frac{\sqrt{3}}{20}$

x = – arctg $\frac{\sqrt{3}}{20}$ + πk, k ϵ Z

Ответ: – arctg $\frac{\sqrt{3}}{20}$ + πk, k ϵ Z

Пример 3. Найдите корни уравнения $7sin^2 x + 2sin\ 2x = 3cos^2 x$.

$7\sin^2 x + 2\sin 2x = 3\cos^2 x$

$7\sin^2 x + 4\sin x \cos x = 3\cos^2 x$ | : $\cos^2 x$

$7tg^2 x + 4tg\ x – 3 = 0$

tg x = t, t ϵ R

$7t^2 + 4t – 3 = 0$

D = 16 + 4*7*3 = 16 + 84 = 100

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{-4+10}{14}, \\ t = \frac{-4-10}{14}. \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} t = \frac{6}{14}, \\ t = \frac{-14}{14}. \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{7}, \\ t = -1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\ x = \frac{3}{7}, \\ tg\ x = -1. \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x = arctg\ \frac{3}{7} + \pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; arctg\ \frac{3}{7} + \pi n, n \in Z.$

Пример 4. Решите уравнение $2sin\ x\ cos\ x + 6cos^2 x = 7$.

$2\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 7$

$2\sin x \cos x + 6\cos^2 x – 7 = 0$

$2\sin x \cos x + 6\cos^2 x – 7*(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$2\sin x \cos x + 6\cos^2 x – 7\sin^2 x – 7\cos^2 x = 0$

$– 7\sin^2 x + 2\sin x \cos x – \cos^2 x = 0$ | : (– 1)

$7\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$

$7tg^2 x - 2tg\, x + 1 = 0$

$D = 4 - 4*7*1 = 4 - 28 = -24$

$D < 0 \;\; => \;\;$ решений нет

Ответ: решений нет

Пример 5. Найти корни уравнения $2sin^2x - 2\,sin\,2x + 1 = 0$.

$2\sin^2 x - 2\sin 2x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \;\; | : \cos^2 x$

$3tg^2 x - 4tg\, x + 1 = 0$

tg x = a, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$

$3a^2 - 4a + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,x = 1, \\ tg\,x = \frac{1}{3}. \end{array}\right. \;\; => \;\; \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = arctg\,\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $arctg\,\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

4. Постановка домашнего задания

Пример 1. Найдите корни уравнения $\sqrt{5}cos\,x - 5sin\,x = 0$.

Пример 2. Найдите корни уравнения $2cos\,2x - 3cos\,x + 1 = 0$.

Пример 3. Найдите корни уравнения $3sin\,2x + sin\,x\,cos\,x - 2cos\,2x = 0$.

Приложение 2.

Тест № 1 на тему: «Тригонометрические уравнения» и его решения.

А1. Чему равна сумма корней уравнения 3sinx + sin2x = 0 на отрезке [3π; 5π] ?

3sinx + sin2x = 0

3sinx*(3 + 2cosx) = 0

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 3 + 2\cos x = 0 \end{array}\right.$ => $\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k, k \in Z \\ \cos 2x = -\frac{3}{2} \end{array}\right.$ =>

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi k, k \in Z \\ x \in \emptyset \text{ (нет решений, т к } -1 \le \cos x \le 1) \end{array}\right.$

k = 0, x = 0

k = 1, x = π

k = 2, x = 2π

k = 3, x = 3π є [3π; 5π]

k = 4, x = 4π є [3π; 5π]

k = 5, x = 5π є [3π; 5π]

k = 6, x = 6π не є [3π; 5π]

Ответ: 3π + 4π + 5π = 12π

А2. Решите tgx + ctgx = 2

tgx + ctgx = 2

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2, \qquad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2$

$\frac{2}{\sin 2x} = 2, \qquad \text{Sin}2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

А3. Найти корни уравнения $2\sin^2 x - 2\sin 2x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - 2\sin 2x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0 \ : \cos^2 x$

$3\text{tg}^2 x - 4\text{tg}\, x + 1 = 0$

tg x = a, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$

$3a^2 - 4a + 1 = 0$

$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}$

1) $\operatorname{tg} x = 1$ 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

А4. При каких значениях параметра a, уравнение $3^{\sin x} + \sin x = a$ имеет решение?

$3^{\sin x} + \sin x = a, \quad 3^{\sin x} = a - \sin x$

$3^{\sin x} = 3^{\log_3(a - \sin x)}$,

$\sin x = \log_3(a - \sin x)$

Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то

Максимальное значение $\sin x = 1 \Rightarrow a = 3 + 1 = 4$

Минимальное значение $\sin x = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

Значит, что $-\frac{2}{3} \le a \le 4$

Ответ: $a \in [-\frac{2}{3}; 4]$

А5. Чему равно количество решений уравнения $\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$ на $[-\pi; \pi]$?

$\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0, \quad 2\sin 5x \cos x + \sin 5x = 0$

$\sin 5x (\cos x + 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 5x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \pi n, n \in Z \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \pm(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{5}, n \in Z \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$n = -5, -4, -3, -2, \dots, 4, 5 \Rightarrow$ корни $\in [-\pi; \pi]$ – 11 решений

$k = 0, x = \pm\frac{2\pi}{3}$ – 2 решения

Ответ: 13 решений

А6. Решите уравнение $\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2}$

$\sqrt{1 + \cos 2x} = \sqrt{2}$

ОДЗ: $1 + \cos 2x \geq 0 \quad => \quad \cos 2x \geq -1$

$1 + \cos 2x = 2$

$\cos 2x = 1$

$2x = 2\pi n, n \in Z$

$x = \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$

A7. Решите уравнение cos 5x = cos 3x

cos 5x = cos 3x, cos 5x – cos 3x = 0

– 2sin 4x * sin x = 0

$$\left[\begin{array}{l} Sin\, 4x = 0 \\ Sin\, x = 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} 4x = \pi n, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z \\ x = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Объединяя корни, получим x = $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Ответ: x = $\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

A8. Решите уравнение $sin^2 x + 1 = cos^2 5x$

$sin^2 x + 1 = cos^2 5x$

$$\frac{1 - cos\, 2x}{2} + 1 = \frac{1 + cos\, 10x}{2}$$

cos 10x + cos 2x = 2

2cos 6x * cos 4x = 2

cos 6x * cos 4x = 1

1) $\begin{cases} cos\, 4x = 1 \\ cos\, 6x = 1 \end{cases} => \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z \\ x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z \end{cases} =>$ $x = \pi n, n \in Z$

2) $\begin{cases} cos\, 4x = -1 \\ cos\, 6x = -1 \end{cases} => \begin{cases} 4x = \pi + 2\pi q, q \in Z \\ 6x = \pi + 2\pi m, m \in Z \end{cases} => \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi q}{2}, q \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3}, m \in Z \end{cases} =>$
нет общих решений

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$

A9. При каких значениях параметра а функция f(x) = $\sqrt{a + cos\, x}$ определена для всех действительных значений x?

f(x) = $\sqrt{a + cos\, x}$

$a + cos\, x \geq 0$

cos x = 1 $\quad => \quad a \geq -1$

cos x = – 1 $\quad => \quad a \geq 1$

$=> a \geq 1$

Ответ: $a \geq 1$

А10. Чему равна сумма корней уравнения cos 7x + sin 3x*sin 4x = 0 в промежутке $[0;\pi]$?

cos 7x+sin 3x*sin 4x = 0

cos 7x + $\frac{1}{2} * (cos\ (3x-4x) - cos(3x+4x))$ = 0

cos 7x + $\frac{1}{2} cos\, x - \frac{1}{2} cos\, 7x\ = 0$

$$\frac{1}{2} cos\, 7x\ + \frac{1}{2} cos\, x\ = 0$$

cos 7x + cos x = 0

2 cos $\frac{7x-x}{2}$ * cos $\frac{7x+x}{2}$ = 0

2 cos 3x * cos 4x = 0

$$\left[\begin{array}{l} cos\, 3x\ =\ 0 \\ cos\, 4x\ =\ 0 \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} 3x\ =\ \frac{\pi}{2} + \ \pi n, n\ \epsilon\ Z \\ 4x\ =\ \frac{\pi}{2} + \ \pi k, k\ \epsilon\ Z \end{array}\right. => \left[\begin{array}{l} x\ =\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n\ \epsilon\ Z \\ x\ =\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k\ \epsilon\ Z \end{array}\right.$$

n = 0, x = $\frac{\pi}{6}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$ $\qquad$ k = 0, x = $\frac{\pi}{8}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$

n = 1, x = $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$ $\qquad$ k = 1, x == $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$

n = –1, x = $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6}$ $\quad$ не $\epsilon\ [0;\pi]$ $\qquad$ k = –1, x == $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{8}$ $\quad$ не $\epsilon\ [0;\pi]$

n = 2, x = $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$ $\qquad$ k = 2, x = $\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$

n = 3, x = $\frac{\pi}{6} + \pi$ $\quad$ не $\epsilon\ [0;\pi]$ $\qquad$ k = 3, x = $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{8}$ $\quad \epsilon\ [0;\pi]$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{2}$

А 11. Найдите $cosx_0$, где x_0 наибольший отрицательный корень уравнения sin x + 2 cos x = 1

sin x+ 2 cos x = 1 $\qquad \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} sin\, x + \frac{2}{\sqrt{5}} cos\, x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = cos\, x$ и $\frac{2}{\sqrt{5}} = sin\, x$

sin (x + ϕ) = $\frac{1}{\sqrt{5}}$

x + ϕ = $(-1)^k\, arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z$

x = $(-1)^k\, arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \phi + \pi n, n \in Z$

x = $(-1)^k\, arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - arccos \frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n, n \in Z$

k=0, x = $arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$

cos $(arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) = cos\,(arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}) * cos\,(arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) + sin\,(arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}) * sin\,(arccos \frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} * \frac{1}{5} + \frac{1}{5} * \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} * \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{\frac{4}{5}} * \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

Ответ: 4/5 (или 0,8)

А 12. Чему равна сумма корней уравнения $arcsin(sin(x + \frac{\pi}{4})) = 2x - \frac{\pi}{6}$

$arcsin(sin(x + \frac{\pi}{4})) = 2x - \frac{\pi}{6}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$

$\pi - x - \frac{\pi}{4} = 2x - \frac{\pi}{6}$

$-x - 2x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} - \pi$

$-3x = \frac{-2\pi + 3\pi - 12\pi}{12}$

$-3x = -\frac{11\pi}{12}$

x = $\frac{11\pi}{36}$

Ответ: $\frac{11\pi}{36}$

А 13. Чему равна сумма корней уравнения sin x = a, где $0 < a < 1$ для $x \in [0; 3\pi]$

sin x = a

x = $(-1)^k \arcsin a + \pi k$, k є Z

k = 0, x = $\arcsin a \in [0; 3\pi]$

k = 1, x = $-\arcsin a + \pi \in [0; 3\pi]$

k = 2, x = $\arcsin a + 2\pi \in [0; 3\pi]$

k = 3, x = $-\arcsin a + 3\pi \in [0; 3\pi]$

$\arcsin a - \arcsin a + \pi + \arcsin a + 2\pi - \arcsin a + 3\pi = 6\pi$

Ответ: 6π

А 14. При каких значениях параметра а, уравнение $\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x = a + 2$ имеет решение

$\cos^3 x + \cos^2 x + \cos x = a + 2$

cos t = t, $|t| \leq 1$

$t^3 + t^2 + t = a + 2$

$t*(t^2 + t + 1) = a + 2$

y = $t^3 + t^2 + t$ y = a + 2

$y' = 3t^2 + 2t + 1$

$y' = 0, \quad 3t^2 + 2t + 1 = 0$ – возрастает

$-1 \leq a + 2 \leq 3$

$-3 \leq a \leq 1$

Ответ: a ∈ [1; 3]

А 15. Решите уравнение $|\sin x| \cos x = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

1) 2x = $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n$ є Z

x = $\frac{\pi}{4} + \pi n, n$ є Z

n = 0, x = $\frac{\pi}{4}$

n = 1, x ≠ $\frac{\pi}{4} + \pi$

2) 2x = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k$ є Z

x = $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k$ є Z

k = 0, x = - $\frac{\pi}{4}$

k = 1, x ≠ $-\frac{\pi}{4} + \pi$

Ответ: x = $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n$ є Z

В 1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2} * (2|\sin x| - 1) = 0$?

$\sqrt{4-x^2} * (2|\sin x| - 1) = 0$

ОДЗ: $4 - x^2 \geq 0$ => $(2-x)(2+x) \geq 0$ => $x \in [-2; 2]$

$$\left[\begin{array}{l} 4 - x^2 = 0 \\ 2|\sin x| - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ |\sin x| = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x < 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

k = 0, $x_1 = \frac{\pi}{6}$ $\in [-2; 2]$ n = 0, $x_2 = -\frac{\pi}{6}$ $\in [-2; 2]$

k = 1, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + \pi$ не $\in [-2; 2]$ n = 1, $x_4 = \frac{\pi}{6} + \pi$ не $\in [-2; 2]$

Ответ: 4 корня

В 2. Найдите 25 cos $2x_0$, где x_0 – наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x + 3\cos x$.

$$\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin 2x + 1 = 2\sin x + 3\cos x$$

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 1 - 2\sin x - 3\cos x = 0$$

$$2\sin^2 x + \cos^2 x + 3\sin x\cos x - 2\sin x - 3\cos x = 0$$

sin x (2sin x + 3cos x) – (2sin x + 3cos x) + $\cos^2 x = 0$

(2sin x + 3cos x)(sin x – 1) + $\cos^2 x$ = 0

(2sin x + 3cos x)(sin x – 1) +(1 - $\sin^2 x$) = 0

(2sin x + 3cos x)(sin x – 1) – (sin x - 1)(sin x + 1) = 0

(sin x - 1) (2sin x + 3cos x – sin x – 1) = 0

$$\left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = 0 \\ 2\sin x + 3\cos x - \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x + 3\cos x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ \frac{1}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ \sin(x + \phi) = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{10}} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

n = -1, $x_1 = \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$ $k = 0, x_2 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

25 cos $2x_0$ = 25 cos (2(arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$ – arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$)) = 25 ($\cos^2$ (arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$ – arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$) – $\sin^2$ (arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$ – arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$)) = 25 ((cos(arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$) cos (arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$) + sin(arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$) sin (arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$))^2 – (sin (arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$) cos (arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$) – cos (arcsin $\frac{1}{\sqrt{10}}$) sin (arcos $\frac{1}{\sqrt{10}}$))^2) = 25 (($\sqrt{1-\frac{1}{10}} * \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$)^2 – ($\sqrt{1-\frac{1}{10}} * \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$)^2) = 25 (($\frac{2*3}{10}$)^2 – ($\frac{2*3}{10}$)^2) = 0.

Ответ: 0

В 3. Чему равно количество корней уравнения $2cos^2 x - sin\,x - 1 = 0$ на отрезке $[\pi; 3\pi]$?

$2cos^2 x - sin\,x - 1 = 0$

2(1 - $sin^2 x$) – sin x – 1 = 0

–2$sin^2 x$ – sin x + 1 = 0

$\left[\begin{array}{l} sin\,x = -1 \\ sin\,x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

n = 0, x = $-\frac{\pi}{2}$ не є $[\pi; 3\pi]$

n = 1, x = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ є $[\pi; 3\pi]$

k = 0, x = $\frac{\pi}{6}$ не є $[\pi; 3\pi]$

k = 1, x = $-\frac{\pi}{6}$ + π не є $[\pi; 3\pi]$

k = 2, x = $\frac{\pi}{6}$ + 2π є $[\pi; 3\pi]$

k = 3, x = $-\frac{\pi}{6}$ + 3π є $[\pi; 3\pi]$

Ответ: 3

В 4. Чему равна сумма корней уравнения $\sqrt{2\,sin\,x - 1} * \left(\sqrt{2}\,sin\,2x - \sqrt{6}\,cos\,x + \sqrt{3}\right) = 0$ на отрезке $[-360^0; 360^0]$? (Ответ напишите в градусах)

$\sqrt{2\,sin\,x - 1} * \left(\sqrt{2}\,sin\,2x - \sqrt{6}\,cos\,x + \sqrt{3}\right) = 0$

ОДЗ: $2\,sin\,x - 1 \geq 0 \Rightarrow sin\,x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z$

$\left[\begin{array}{l} 2\,sin\,x - 1 = 0 \\ \sqrt{2}\,sin\,2x - \sqrt{6}\,cos\,x + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} sin\,x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} * 2sin\,x\,cos\,x - \sqrt{6}\,cos\,x - 2\,sin\,x + \sqrt{3} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ \sqrt{2}cos\,x\,(2\,sin\,x - \sqrt{3}) - (2sin\,x - \sqrt{3}) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ (2\sin x - \sqrt{3})(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ \left[\begin{array}{l} 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \\ x_3 = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right. \end{array}\right.$$

m=k=n=0, $x_1 = \frac{\pi}{6}$; $x_2 = \frac{\pi}{3}$; $x_3 = \frac{\pi}{4}$; $x_4 = -\frac{\pi}{4}$

m=k=n=1, $x_1 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$; $x_3 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$; $x_4 = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$

m=k=n=2, $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ не є $[-360^0; 360^0]$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi$ не є $[-360^0; 360^0]$;

$x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ не є $[-360^0; 360^0]$; $x_4 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

m=k=n= – 1, $x_1 = -\frac{\pi}{6} - \pi = \frac{-7\pi}{6}$; $x_2 = \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}$;

$x_3 = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{-7\pi}{4}$; $x_4 = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$ не є $[-360^0; 360^0]$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{-7\pi}{6} + \frac{-5\pi}{3} + \frac{-7\pi}{4} = -180^0$$

Ответ: -180^0 или –π

В 5. Чему равно количество целых значений параметра а, для которых уравнение $sin^3\, x + cos^3\, x = \frac{a}{2} - 1$ имеет решение?

$sin^3\, x + cos^3\, x = \frac{a}{2} - 1$

$-1 \leq sin^3\, x \leq 1$ и $-1 \leq cos^3\, x \leq 1$

$-2 \leq \frac{a}{2} - 1 \leq 2$ $-1 \leq \frac{a}{2} \leq 3$ $-2 \leq a \leq 6$ => –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Ответ: 9

С 1. Чему равно наименьшее положительное значение x + y, где (sin x + cos x)($\sqrt{3}\, sin\, y + cos\, y$) = $2\sqrt{2}$?

(sin x + cos x)($\sqrt{3}\, sin\, y + cos\, y$) = $2\sqrt{2}$

(sin x + cos x)($\frac{\sqrt{3}}{2} sin\, y + \frac{1}{2} cos\, y$) = $\sqrt{2}$

(sin x + cos x)(sin (y+$\frac{\pi}{3}$)) = $\sqrt{2}$

($\frac{1}{\sqrt{2}}$ sin x + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cos x)(sin (y + $\frac{\pi}{3}$)) =1

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) \sin(y + \frac{\pi}{3}) = 1$

1) $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin(y + \frac{\pi}{3}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ y + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ y_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \\ y + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ y_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

$x_1 + y_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

$x_2 + y_2 = -\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{19\pi}{12}$

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$

С 2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\pi^2 - x^2}(\sin x + a) = 0$ имеет три корня?

$\sqrt{\pi^2 - x^2}(\sin x + a) = 0$

ОДЗ: $\pi^2 - x^2 \geq 0$ $\quad x \in [-\pi; \pi]$

$\left[\begin{array}{l} x = \pm\pi \\ \sin x = -a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\pi \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$

$k=1$, $x = -\arcsin a + \pi \quad \in [-\pi; \pi]$

$k=0$, $x = \arcsin a \quad \in [-\pi; \pi]$

$-1 \leq a \leq 1$

Ответ: $[-1; 1]$

Тест № 2 на тему: «Тригонометрические уравнения» и его решения.

1) Найти значение выражения $tg\ 20^0 * tg\ 110^0 + \sin^4 22.5^0 + \cos^2 22.5^0 = tg\ (90^0 - 70^0) * tg\ (180^0 - 70^0) + (\frac{1-\cos^2 45^0}{2})^2 + \frac{1+\cos^2 45^0}{2} = ctg\ 70^0 * (-tg\ 70^0) + (\frac{1-\frac{1}{2}}{2})^2 + \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = -1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $-\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

2) Найти $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{4}$, $1+\sin 2\alpha = \frac{9}{16}$

$\sin 2\alpha = -\frac{7}{16}$,

$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - 2*(\frac{-7}{16})^2 = 1 - \frac{49}{128} = \frac{128-49}{128} = \frac{79}{128}$

Ответ: $\frac{79}{128}$

3) Вычислить $tg\ 30 * tg\ 31 * \ldots * tg\ 59 = \frac{\sin 30^0 * \sin 31^0 * \sin 32^0 * \ldots * \sin 59^0}{\cos 30^0 * \cos 31^0 * \cos 32^0 * \ldots * \cos 59^0} = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sin 45^0 * \frac{1}{2}(\cos 28^0 - \cos 90^0) * \frac{1}{2}(\cos 26^0 - \cos 90^0) * \ldots}{\cos 45^0 * \frac{1}{2}(\cos 28^0 - \cos 90^0) * \frac{1}{2}(\cos 26^0 - \cos 90^0) * \ldots} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4) Вычислить $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} - \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} + \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)} - \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)} + \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)} = 1 - \cos x - 1 + \sin x + \cos x - \sin x = 0$

Ответ: 0

5) Вычислить $\frac{\sin 20 - \sin 40 + \sin 80}{\cos 115 - \cos 110 + \cos 25} = \frac{-2\sin 10^0 \cos 30^0 + \cos 10^0}{2\cos 70^0 \cos 45^0 + \cos 70^0} = \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{2\cos 70^0 + \cos 70^0} = \frac{\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0}{\frac{\sqrt{2}}{3}\cos 70^0 + \frac{1}{2}\cos 70^0} = \frac{\sin 20^0}{\cos 70^0(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2})} = \frac{\cos 70^0}{\cos 70^0(\frac{\sqrt{2}+1}{2})} = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2$

Ответ: $2\sqrt{2} - 2$

6) Наименьшее значение выражения 5sin x – 3cos y – 12cos x

Наименьшее значение принимает при cos x = 1, sin x = 0 и cos y = 1.

0–3–12 = –15

Ответ: –15

7) Найти значение выражения $\cos\frac{\pi+3\alpha}{2} + \sin\frac{\pi+3\alpha}{2}$, если $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{16}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{1}{4}$ $\qquad \alpha = 2\arcsin\frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi+3\alpha}{2} + \sin\frac{\pi+3\alpha}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\sin^3\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha = -\sin(3\arcsin\frac{1}{4}) + \cos(2\arcsin\frac{1}{4}) = -(3\sin(\arcsin\frac{1}{4}) - 4\sin^3(\arcsin\frac{1}{4})) + \cos^2(\arcsin\frac{1}{4}) - \sin^2(\arcsin\frac{1}{4}) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{16} + 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

Ответ: $\frac{3}{16}$

8) Упростить $(1+\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}))(1+\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})) = (1 + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4})*(1 + \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4} - (\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4})) = (1 + 2*\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)(1 - 2*\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

Ответ: $1 - 2\sin^2\alpha$

9) Найти $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$, если $3\sin\alpha - 3\cos\alpha - 1 = 0$ $\qquad \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} * (\frac{-1}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{6}$

10) Упростить

$$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin 17\alpha}{\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos 17\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\sin 17\alpha)+(\sin 2\alpha+\sin 16\alpha)+\cdots+}{(\cos\alpha+\cos 17\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 16\alpha)+\cdots+} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha+17\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-17\alpha}{2}+2\sin\frac{2\alpha+16\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha-16\alpha}{2}+\cdots}{2\cos\frac{\alpha+17\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-17\alpha}{2}+2\cos\frac{2\alpha+16\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha-16\alpha}{2}+\cdots} = \frac{2\sin 9\alpha\cos 8\alpha+2\sin 9\alpha\cos 7\alpha+\cdots+2\sin 9\alpha\cos 0\alpha}{2\cos 9\alpha\cos 8\alpha+2\cos 9\alpha\cos 7\alpha+\cdots+2\cos 9\alpha\cos 0\alpha} = \operatorname{tg} 9\alpha$$

Ответ: tg 9α

11) Найти cos (α + 2d), если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$

$\alpha + d + \alpha + 2d + \alpha = 180$ $\quad 3\alpha + 3d = 180$ $\quad \alpha + d = 60$

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\quad \alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ $\quad d = 60 - \arcsin\frac{1}{3}$

$\cos(\alpha + 2d) = \cos(\arcsin\frac{1}{3} + 120 - 2\arcsin\frac{1}{3}) = \cos(120 - \arcsin\frac{1}{3}) = \cos 120 \cos(\arcsin\frac{1}{3}) + \sin 120 \sin(\arcsin\frac{1}{3}) = -\frac{1}{2} * \sqrt{1 - \frac{1}{9}} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} * \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$

Ответ: $\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{6}$

12) Найти sin 2α, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{3}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

sin 2α – ?

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{3}$ $\quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \arcsin\frac{2}{3}$ $\quad \alpha + \beta = 2\arcsin\frac{2}{3}$

$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $\quad \alpha - \beta = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

складываем

$2\alpha = 2\arcsin\frac{2}{3} + \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin 2\alpha = \sin(2\arcsin\frac{2}{3} + \text{arcos}\frac{\sqrt{5}}{3}) = \sin(2\arcsin\frac{2}{3})\cos(\text{arcos}\frac{\sqrt{5}}{3}) + \sin(\text{arcos}\frac{\sqrt{5}}{3})\cos(2\arcsin\frac{2}{3}) = 2 * \frac{2}{3} * \cos(\arcsin\frac{2}{3}) * \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{1 - \cos^2(\arccos\frac{\sqrt{5}}{3})} * (\cos^2(\arcsin\frac{2}{3}) - \sin^2(\arcsin\frac{2}{3})) =$

$2 * \frac{2}{3} * \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin\frac{2}{3})} * \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} * (1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9}) = \frac{4}{3} * \frac{\sqrt{5}}{3} * \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3} * (1 - \frac{8}{9}) = \frac{20}{27} + \frac{2}{27} = \frac{22}{27}$

Ответ: $\frac{22}{27}$

13) Найти $\sin^6 x + \cos^6 x$, если $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad 1 - \sin 2x = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 2x = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 2x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x+1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x}{8} = \frac{2+6\cos^2 2x}{8} =$

$\frac{2+6*\frac{3}{4}}{8} = \frac{2+4.5}{8} = 0{,}8125$

Ответ: 0,8125

14) Вычислить $32\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{32\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}\sin\frac{\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{16\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} =$

$\frac{8\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{4\sin\frac{8\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{2\sin\frac{16\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{2\sin(\pi-\frac{\pi}{17})}{\sin\frac{\pi}{17}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{17}}{\sin\frac{\pi}{17}} = 2$

Ответ: 2

15) Найти $2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{12})$, если $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = -2$

$\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = -2 \quad / \sqrt{3-1} = 2$

$\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = -1 \qquad \sin(\alpha+\frac{\pi}{3}) = -1 \qquad \alpha+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in Z$

$\alpha = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \qquad \alpha = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

$-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{12} = -\frac{10\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = -\frac{9\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$

$2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{12}) = 2\sqrt{2}\cos(-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + 2\pi k) = 2\sqrt{2}\cos(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k) = 2\sqrt{2}\cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2}*\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$

Ответ: –2

16) Упростить $\frac{\sqrt{1-\sin 50}}{\cos 25} + \mathrm{tg}\ 25 = \frac{\sqrt{1-2\sin 25\cos 25}}{\cos 25} + \mathrm{tg}\ 25 = \frac{\sqrt{\cos^2 25-2\sin 25\cos 25+\sin^2 25}}{\cos 25} + \mathrm{tg}\ 25 = \frac{\sqrt{(\sin 25-\cos 25)^2}}{\cos 25} + \mathrm{tg}\ 25 = \frac{|\sin 25-\cos 25|}{\cos 25} + \frac{\sin 25}{\cos 25}$

$\frac{|\sin 25-\cos 25|}{\cos 25} + \frac{\sin 25}{\cos 25} = \frac{\sin 25-\cos 25}{\cos 25} + \frac{\sin 25}{\cos 25} = -1 + 2\mathrm{tg}\ 25$ или

$$\frac{|\sin 25-\cos 25|}{\cos 25}+\frac{\sin 25}{\cos 25}=\frac{\sin 25-\cos 25}{\cos 25}+\frac{\sin 25}{\cos 25}=1$$

Ответ: –1 + 2tg 25 или 1

17) Упростить $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}+\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}}$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ $\quad$ $1+\sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ $\quad$ $1-\sin x = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}+\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}}=\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}+\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}}=\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\frac{\sqrt{2}}{2}*(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}=$$

$$\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{|\sin x|}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\frac{|\sin x|}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\qquad \text{или}$$

$$\frac{|\sin x|}{\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}}=-\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=-\left(\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=-2\sin\frac{x}{2}$$

Ответ: $2\sin\frac{x}{2}$ или $-2\sin\frac{x}{2}$