МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»»

(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Методика изучения тригонометрических функций числового аргумента - модель периодических процессов

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.01 Педагогическое образование,
направленность (профиль) программы бакалавриата

«Математика»

Выполнил:
Студент группы ЗФ-413/087-4-1
Ниязов Ридаль Рафкатович
____

Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шумакова Екатерина Олеговна
____

Проверка на объем заимствований:

____________% авторского текста

Работа _______________ к защите

«___» ___________ 20__ г.

зав. кафедрой математики и методики обучения математике

_____________ Суховиенко Е.А.

Челябинск

2017

Содержание

Введение

В настоящее время изучению тригонометрических функций именно как функций числового аргумента уделяется большое внимание в школьном курсе алгебры и начал анализа.

Существует несколько различных подходов к преподаванию данной темы в школьном курсе, и учитель, особенно начинающий, легко может запутаться в том, какой подход является наиболее подходящим.

А ведь тригонометрические функции представляют собой наиболее удобное и наглядное средство для изучения всех свойств функций (до применения производной), а в особенности такого свойства многих природных процессов как периодичность. Поэтому их изучению следует уделить пристальное внимание. Все выше сказанное и обуславливает актуальность выбора темы для данной исследовательской работы.

Кроме того, большие трудности при изучении темы «Тригонометрические функции» в школьном курсе возникают из-за несоответствия между достаточно большим объемом содержания и относительно небольшим количеством часов, выделенным на изучение данной темы.

Таким образом, проблема этой исследовательской работы состоит в необходимости устранения этого несоответствия за счет тщательного отбора содержания и разработки эффективных методов изложения данного материала.

Гипотеза: изучение тригонометрических функций будет более эффективным, в том случае, когда:

перед введением тригонометрических функций проведена достаточно широкая пропедевтическая работа с числовой окружностью;

числовая окружность рассматривается не только как самостоятельный объект, но и как элемент декартовой системы координат;

Объект: процесс изучения тригонометрических функций числового аргумента.

Предмет: тригонометрические функции числового аргумента.

Цель: рассмотреть методику изучения тригонометрических функций числового аргумента - модель периодических процессов.

Задачи:

1. Дать характеристику изучению тригонометрических функций в школьном курсе.

2. Рассмотреть методику изучения тригонометрических функций.

3. Провести анализ изучения тригонометрических функций числового аргумента в различных школьных учебниках.

Глава 1. Теоретические основы изучения тригонометрических функций числового аргумента

1.1 Характеристика изучения тригонометрических функций в школьном курсе

В изучении тригонометрических функций можно выделить следующие этапы:

I. Первое знакомство с тригонометрическими функциями углового аргумента в геометрии. Значение аргумента рассматривается в промежутке (0^0;90^0).

На этом этапе учащиеся узнают, что sin, cos, tg и ctg угла зависят от его градусной меры, знакомятся с табличными значениями, основным тригонометрическим тождеством и некоторыми формулами приведения.

II. Обобщение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов (0^0;180^0).

На этом этапе рассматривается взаимосвязь тригонометрических функций и координат точки на плоскости, доказываются теоремы синусов и косинусов, рассматривается вопрос решения треугольников с помощью тригонометрических соотношений.

III. Введение понятий тригонометрических функций числового аргумента.

IV. Систематизация и расширение знаний о тригонометрических функциях числа, рассмотрение графиков функций, проведение исследования, в том числе и с помощью производной.

Отметим, что существует несколько способов определения тригонометрических функций.

Их можно подразделить на две группы: аналитические и геометрические. К аналитическим способам относят определение функции у

= sin x как решения дифференциального уравнения $f''(x)=-cf(x)$ или как сумму степенного ряда $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$

К геометрическим способам относят определение тригонометрических функций на основе проекций и координат радиус-вектора, определение через соотношения сторон прямоугольного треугольника и определения с помощью числовой окружности. В школьном курсе предпочтение отдается геометрическим способам в силу их простоты и наглядности.

Отметим, что изучение тригонометрических функций в школьном курсе имеет некоторые особенности.

Во-первых, до изучения тригонометрических функций, рассматривались функции вида y=f(x), где x и y - некоторые действительные числа, здесь же - углу ставится в соответствие число, что является несколько непривычным для учащихся.

Кроме того, раньше все функции задавались формулами, в которых явным образом был указан порядок действий над значениями аргумента для получения значений функции. Теперь же учащиеся сталкиваются с функциями, заданными таблично.

Таким образом, изучая тригонометрические функции, учащиеся лучше начинают разбираться в сущности самого понятия функции.

Они начинают осознавать, что функцией может быть зависимость между любыми множествами объектов, даже если они имеют различную природу (лишь бы каждому значению аргумента соответствовало единственное значение функции).

1.2 Методика изучения тригонометрических функций

В древности тригонометрия возникла в связи с потребностями астрономии, землемерия и строительного дела, то есть носила чисто геометрический характер и представляла главным образом «исчисление хорд». Со временем в нее начали вкрапляться некоторые аналитические моменты. В первой половине 18-го века произошел резкий перелом, после чего тригонометрия приняла новое направление и сместилась в сторону математического анализа. Именно в это время тригонометрические зависимости стали рассматриваться как функции. Это имеет не только математико-исторический, но и методико-педагогический интерес.

Тригонометрии в школе традиционно уделяется много внимания - сначала в курсе геометрии, затем в курсе алгебры и начал анализа. Предлагается построить изучение темы «Тригонометрия» по следующей схеме: функция – уравнения – преобразования.

Объясняется это тем, что сначала целесообразно изучить «простые модели» (таковыми являются элементарные функции), а затем переходить к изучению «сложных моделей» (таковыми в математике являются сложные выражения, которые нужно упрощать, используя формульный аппарат).

Пример: Найти период функции y=sin3x.

Решение: Пусть T – основной период

f(x)=f(x+T)

f(x)=sin(x)

f(x+T)=sin 3(x+T)=sin (3x+3T)

sin3x=sin(3x+3T)→3T=2Пn, т.к. нужен основной период n=1

3T=2П, T=2П/3

Основной период функции y=sinkx(y=coskx) равен 2П/k.

После изучения функций y=sinx,y=cosx знакомятся с преобразованием графиков функции y=f(x),y=mf(x),y=f(kx).

Далее знакомятся с функциями y=tgx,y=ctgx.

Таким образом, изучение данной темы следует построить по следующей схеме:

1. рассмотрение тригонометрической формы записи действительного числа и ее свойств.

Основной целью является изучить новые математические модели – числовую окружность и числовую окружность на координатной плоскости;

познакомить учащихся с первым классом неалгебраических функций – тригонометрическими функциями; научить школьников находить значение тригонометрических функций некоторого аргумента по известному значению другой функции того же аргумента; дать представление о градусной и радианной мерах измерения углов.

2. Собственно тригонометрические уравнения.

Основная цель – научить школьников решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сначала надо разобраться с «элементарными моделями», т.е. с простейшими тригонометрическими уравнениями и уравнениями, которые сводятся к простейшим с помощью алгебраических приемов, и только потом переходить к «сложным моделям», т.е. к уравнениям, которые надо сначала долго и упорно «раскручивать, используя рутинный аппарат формул».

3. Тригонометрическими формулами следует заняться после того, как учащиеся овладеют двумя «китами», на которых базируется курс тригонометрии: числовой окружностью и простейшими уравнениями.

Основная цель – познакомить учащихся с основными тригонометрическими формулами, научить находить нужную формулу для доказательства тригонометрических тождеств, упрощения тригонометрических выражений.

После того, как пройдена тема «Простейшие тригонометрические уравнения», учащимся предлагаются задания с использованием формул тригонометрии. Отсюда и вытекает для учащихся польза от изучения формул: «жуткие» уравнения принимают после преобразований вполне знакомый вид.

Согласно стандарту полного общего образования в теме «Основы тригонометрии» должны быть рассмотрены следующие темы: синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; радианная мера угла; синус, косинус, тангенс, котангенс числа; основные тригонометрические тождества; формулы привидения; синус, косинус, тангенс суммы и разности двух углов;

синус, косинус двойного угла; формулы половинного угла; преобразование суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму; выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента; преобразование простейших тригонометрических выражений; простейшие тригонометрические уравнения; решение тригонометрических уравнений; простейшие тригонометрические неравенства; арксинус, арккосинус, арктангенс числа; тригонометрические функции, их свойства и графики, периодичность, основной период.

Глава 2. Анализ изучения тригонометрических функций числового аргумента в различных школьных учебниках

2.1 Плюсы и минусы методик изучения тригонометрических функций числового аргумента в различных школьных учебниках

В настоящее время вопросы тригонометрии изучаются в 10-11 классах в рамках 85 - часового курса "Алгебра и начала анализа". В разных вариантах тематических планов, опирающихся на учебники разных авторов, отводится от 15 до 28 часов, при этом в основном ставятся следующие цели:

- ввести понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса для произвольного угла;

- систематизировать, обобщить и расширить уже имеющиеся у учащихся знания о тригонометрических функциях углового аргумента;

- изучить свойства тригонометрических функций;

- научить учащихся строить графики тригонометрических функций и выполнять некоторые преобразования этих графиков.

Проанализируем с точки зрения реализации вышеперечисленных целей те учебники, которые наиболее распространены в общеобразовательных школах, а именно учебники [16], [2], [3], [11].

Прежде всего, отметим некоторые особенности этих учебников как методических пособий в целом, а не по данной теме. Вообще, данные учебники дают цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начала анализа, отвечают требованиям обязательного минимума содержания образования. Но каждый из них имеет свои особенности. Учебник [16], например, отличается более доступным для школьников, по сравнению с остальными учебниками, изложением теоретического материала, которое ведется очень подробно, обстоятельно и достаточно живым литературным языком, наличием большого числа примеров с подробными решениями. Построение всего курса осуществляется на основе приоритетности функционально-графической линии. Учебник [11] имеет прикладную направленность, содержание отличается большей научностью и близостью к математическому анализу, язык изложения в большей мере научен, чем доступен. Теоретический материал изложен достаточно кратко и лаконично. Учебник [3] также имеет прикладную направленность, но в отличие от [11] ориентирован на физические приложения математических знаний и умений. В конце учебника представлены несколько лабораторных работ, например, «Построение математической модели механического движения». В конце учебника весь изученный материал представлен в виде схем и таблиц, что удобно не только ученику при подготовке к какому-либо контрольному мероприятию, но и учителю при подготовке к уроку или к системе уроков. Также среди достоинств этого учебника стоит отметить и тот факт, что каждая глава открывается вводной беседой, подготавливающей появление новых основных понятий, и заключительной беседой, которая включает в себя сведения, полезные для учащихся, интересующихся математикой.

Ну, а учебник [2] по сравнению с другими изобилует большим количеством цитат и шуточных математических рисунков. Это, несомненно, развивает математический кругозор учащихся, но, что касается содержательной стороны этого учебника, то, по моему мнению, он больше подойдет для обучения математике в профильных (не математических) классах.

Перейдем к анализу изложения конкретной темы «Тригонометрические функции» в данных учебниках. Напомним, что в школьном курсе математики в разные годы использовались разные варианты введения тригонометрических функций: при помощи тригонометрического круга, при помощи проекции и некоторые другие.

В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной окружности. При этом только в [16] уделено достаточное внимание работе с числовой окружностью как с самостоятельным объектом изучения, и это является одним из достоинств этого учебника.

Слишком поспешное введение понятий синуса и косинуса «по окружности» приводит к трудностям при дальнейшем обучении: многие учащиеся испытывают затруднения с геометрическим истолкованием «тригонометрического языка». Таким образом, не получается создать надежный фундамент для успешного изучения материала.

В учебнике [16] на работу с числовой окружностью отводится 5 часов, что составляет почти 20% от 28 запланированных часов на изучение всей темы «Тригонометрические функции». Вообще говоря, здесь рассматриваются две математические модели: «числовая окружность» и «числовая окружность на координатной плоскости». То есть учащиеся обучаются работать одновременно в двух системах координат: в прямоугольной декартовой и криволинейной. Это поможет им в дальнейшем, когда понятия синуса и косинуса угла будут вводиться через координаты.

Здесь не только четко выделяется алгоритм построения точки на числовой окружности, но и проводится аналогия с числовой прямой, с указанием основных сходств и различий в построении точки на окружности и на прямой. Неплохо в учебнике [16] мотивируется и само введение числовой окружности: «В реальной жизни двигаться приходится не только по прямой, но и по окружности. Будем считать беговую дорожку стадиона окружностью…». К тому же, уже на этапе изучения числовой окружности в неявном виде происходит подготовка к решению простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Например, рассматриваются задания типа: «Найти на числовой окружности точки с ординатой $y = 1/2$ и записать, каким числам t они соответствуют», «Найти на числовой окружности точки с абсциссой $x < 1/2$ и записать, каким числам t они соответствуют».

Итак, в учебнике [16], в отличие от остальных учебников, проводится достаточно хорошая пропедевтическая работа для введения тригонометрических функций.

В учебнике [3] также присутствуют элементы работы с числовой окружностью, но не в таком количестве как в [16]. Здесь выделяется отдельный параграф «Вращательное движение и его свойства», в котором рассматриваются такие вопросы как построение точки по заданной мере угла и свойства вращательного движения.

В учебнике [11] в качестве подготовительной работы для введения тригонометрических функций выступает лишь повторение следующих вопросов:

- радианная мера угла (измерение углов в радианах, таблица значений тригонометрических функций (рассматривается исходя из геометрических соображений)),

- основные формулы тригонометрии (основное тригонометрическое тождество, формулы суммы и разности двух аргументов, формулы приведения, формулы суммы и разности синусов и косинусов, формулы двойного и половинного аргументов).

Вообще вопросы тригонометрии в этом учебнике рассматриваются в следующем порядке: тригонометрические преобразования - тригонометрические функции - тригонометрические уравнения и неравенства, в отличие от учебника [16], по которому сначала изучаются функции, затем уравнения и неравенства, а только потом преобразования (как свойства функций).

Обучение же по учебникам [2] и [3] предполагает изучение тригонометрических функций не в начале 10 класса (как это представлено в учебниках [11] и [16]), а в конце него. Авторы учебника [2] предлагают приступить к изучению тригонометрии после изучения показательной и логарифмической функций. Причем, сначала изучаются тригонометрические преобразования, затем - тригонометрические уравнения и только после этого

- тригонометрические функции. Такое расположение темы имеет ряд особенностей:

- изучение тригонометрических уравнений подразумевает изучение обратных тригонометрических функций. Таким образом, сначала учащиеся детально прорабатывают понятия арксинуса, арккосинуса и арктангенса, а затем только приступают к работе с синусом, косинусом и тангенсом, хотя с точки зрения логики, целесообразнее сделать наоборот;

- изучение тригонометрических функций после тригонометрических уравнений выкидывает из рассмотрения один из немаловажных методов решения тригонометрических уравнений - а именно графический метод (к тому времени мы ещё не умеем строить графики тригонометрических функций).

В учебнике же [3] же вообще предлагается изучать тригонометрию уже после изучения производной. Это позволяет вычислять приближенные значения тригонометрических функций в точках, тем самым облегчая их исследование, помогая при построении графиков и решении тригонометрических уравнений.

Что касается введения самих тригонометрических функций, то и здесь каждый из учебников имеет свои особенности. Начнем с определения синуса и косинуса. В учебнике [2] дается следующее определение: «Cos x - это абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P (1;0) вокруг начала координат на угол x, а sin x - ее ордината». В [16]: «Если точка M числовой окружности соответствует числу t, то абсциссу точки M называют косинусом числа t, а ординату точки M называют синусом числа t». Эти два определения, в общем-то, принципиально не различаются, за исключением только того, что в учебнике [2] тригонометрические функции определяются как функции углового аргумента, а в [16] как функции числового аргумента, да еще присутствуют различия в обозначении переменной (заметим, что при работе с числовой окружностью лучше употреблять символы sin t, cos t, tg t, ctg t, учитывая, что знак x в сознании детей ассоциируется с абсциссой в декартовой прямоугольной системе координат, а не с длиной пройденного по числовой окружности пути).

В учебнике же [11] как таковых определений синуса и косинуса нет, а вместо них присутствует фраза «… нетрудно понять, что ордината точки P - это синус угла, а абсцисса этой точки - косинус угла», а затем приведено геометрическое подтверждение этого факта. Благодаря этому, у учащихся не возникает недоумения по поводу того, почему раньше синусом называли отношение длин катета и гипотенузы, а сейчас откуда-то выплыли какие-то абсциссы и ординаты. В учебнике [16] этот факт тоже довольно неплохо пояснен, но с опозданием в 3 параграфа, а в учебнике [3] пояснение отсутствует вовсе.

Тангенс же во всех учебниках, за исключением [11], определяется как отношение синуса к косинусу. В учебнике же [11] опять не дается четкого определения тангенса, а приводится лишь геометрическая интерпретация «ордината точки пересечения прямой OP (P - точка на единичной окружности) и касательной к окружности в точке (1;0) равна тангенсу угла».

Определения котангенса авторы дают аналогично определениям тангенса за исключением учебника [2], в котором котангенс почему-то совсем игнорируется и не рассматривается как функция.

Остановимся подробнее на вопросах исследования и построения графиков тригонометрических функций.

В учебнике [16] процесс построения графика и исследования функции происходит следующим образом: уже известные ребятам факты обобщаются и формулируются как свойства функций. Сначала рассматриваются такие свойства функции $y=\sin(x)$, как область определения, множество значений, нечетность, возрастание на отрезке $[0;\pi/2]$ и убывание на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$, ограниченность сверху и снизу, наибольшее и наименьшее значение. Затем составляется таблица основных значений функции на отрезке $[0;\pi]$, строятся соответствующие точки и плавно соединяются.

Используя свойство нечетности синуса, полученный график отображается относительно начала координат на отрезок [-π;0], используя свойство периодичности, график функции достраивается на остальных отрезках длиной 2π. С опорой на построенный график, выделяется свойство непрерывности функции синус и область ее значений. Исследование функции cos *x* и построение ее графика, как и во всех остальных учебниках основывается на том факте, что $\cos x = \sin(x+\pi/2)$.

В учебнике [3] построение синусоиды происходит при помощи единичной окружности переносом значения синуса к соответствующим точкам оси ОХ. А затем, после построения графика, еще раз происходит возвращение к свойствам и к тому, как они проявляются на графике. В учебнике [11] синусоида строится подобно тому, как она строится в [3], но все свойства функций за исключением области определения и множества значений рассматриваются в следующей теме «Основные свойства функций», а затем только переносятся на тригонометрические.

Отметим, что в учебниках [16] и [11] не обоснован тот факт, что областью определения функций sin и cos является множество всех действительных чисел. Конечно, этот факт достаточно очевиден, но тем не менее учебник пишется не для учителя, а для учеников, а «мера очевидности», как известно, у всех разная. Поэтому не стоит забывать об обосновании даже очевидных фактов, ведь это приучает ребят к столь необходимой при изучении математики логической четкости и аккуратности мысли.

Что касается области значений тригонометрический функций, то ни в одном из учебников нет четкого обоснования данного свойства. Все «попытки» обоснования этого свойства сводятся к рассмотрению двойных неравенств: $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$, которые выполняются для всех значений x. Однако, отсюда совершенно не следует то, что в область значений данных функций входят все точки отрезка [-1;1].

При обосновании свойств четности и нечетности тригонометрических функций доказательство тождества sin(-x) = -sin(x) сводится в основном к симметричности точек x и -x, которая также четко не обоснована ни в одном из учебников. Монотонность же тригонометрических функций во всех учебниках, за исключением [11], иллюстрируется с помощью числовой окружности. В учебнике [11] в силу того, что тригонометрические преобразования изучаются перед тригонометрическими функциями, монотонность функции y= sin(x) обоснована более доказательно, но все же некоторые недочеты имеются.

При изучении свойства периодичности авторы учебников [16], [2] и [11] дают следующее определение периодичности: «Функция f(x) называется периодической, если существует такое число T0, что для любого x из области определения данной функции выполняется равенство *f(x-T)=f(x)=f(x+T)*. Число T называется периодом функции *f(x)*». В учебнике [3] равенство *f(x-T)=f(x)=f(x+T)* заменяется менее сильным равенством f*(x)=f(x+T)*, но зато снимаются ограничения на *x*. Здесь *x* может быть любым, а не только из области определения. Заметим, что для функций, областью определения которых является все множество R, эти два определения будут не только равносильными, но и одинаково корректными. Но если применять второе определение к функции y=sinx, то у учащихся может вызвать затруднения сравнение значений данной функции в точках. Поэтому более целесообразным является использование первого определения.

Проанализируем теперь системы задач, направленные на отработку умений и навыков, которые предусмотрены программой по теме «Тригонометрические функции».

Система задач в учебнике [3] содержит в себе задания на перевод из градусной меры в радианную и наоборот, построение углов на единичной окружности, движение точки по окружности, определение тригонометрических функций, исследование и построение графиков комбинаций тригонометрических функций, нахождение значений тригонометрических функций в некоторых точках и их знаков на некоторых промежутках, нахождение производных комбинаций тригонометрических функций и вычисление приближенных значений тригонометрических функций.

В учебниках [2] и [11] работе со свойствами комбинаций тригонометрических функций уделяется уже гораздо большее внимание, чем в учебнике [3], присутствуют задачи теоретического плана, например, «Докажите, что если функция y=f(x) является периодической, то и y=kf(x)+b тоже периодическая», не остаются без практической отработки и гармонические колебания. В учебнике [2] присутствует еще одна особенность: здесь подобрано большое количество задач с ограничением на переменную *x*, что помогает учащимся в осознании того факта, что «не всякие свойства функции, рассматриваемой на множестве всех действительных чисел, сохраняются при наложении ограничений на область определения этой функции».

Наиболее же полноценной из всех является система задач в учебнике [16]. Здесь, кроме всего уже вышеперечисленного, большое внимание уделено отработке навыков и умений работы с числовой окружностью, присутствуют задачи для работы с тригонометрическими функциями как числового, так и углового аргументов, используются функции, заданные кусочно, отрабатываются умения решать уравнения, содержащие тригонометрические функции, графическим методом.

Вообще, говоря о системе задач этих учебников, следует отметить некоторые недостатки учебника [3]. В идеале, решение каждой последующей задачи должно не только опираться на предыдущую, но и содержать какие-то дополнительные идеи. Здесь же не везде четко прослеживается система, да и по уровню сложности задачи не столь уж разнообразны.

Зато наличие отдельного задачника к учебнику [16] позволило дать в нем полноценную по объему систему упражнений, достаточную для работы в классе, для домашних заданий и повторения. Все задания дифференцированы по блокам, отдельно выделены даже устные и полуустные упражнения, что дает возможность более рационального использования учебного времени.

Таким образом, наиболее удачным учебным пособием в плане изучения темы «Тригонометрические функции» в курсе алгебры и начала анализа является учебно-методический комплект под редакцией А.Г. Мордковича, хотя оставлять без внимания остальные учебники тоже не стоит.

Примеры задач из учебника Мордковича А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11, 2003.

1. (стр. 198) Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

Найдем значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т.е. значение x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение sin x + cos x = 0, находим tg x = -1, $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

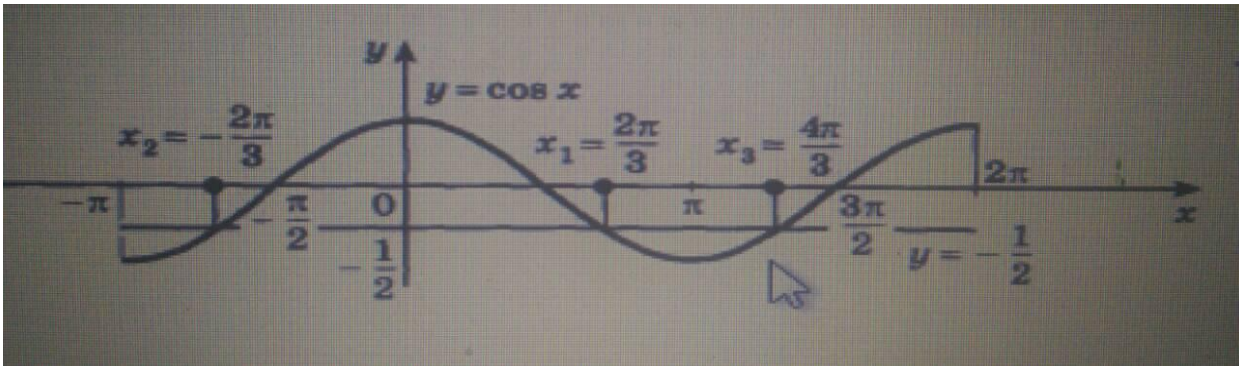
2. (стр.207) Найти все корни уравнения cos x = $-\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку

$-\pi \leq x \leq 2\pi$.

Построим графики функций y = cos x и y = $-\frac{1}{2}$ на данном отрезке (см. рис.) Эти графики пересекаются в трех точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3, являются корнями уравнения cos x = $-\frac{1}{2}$.

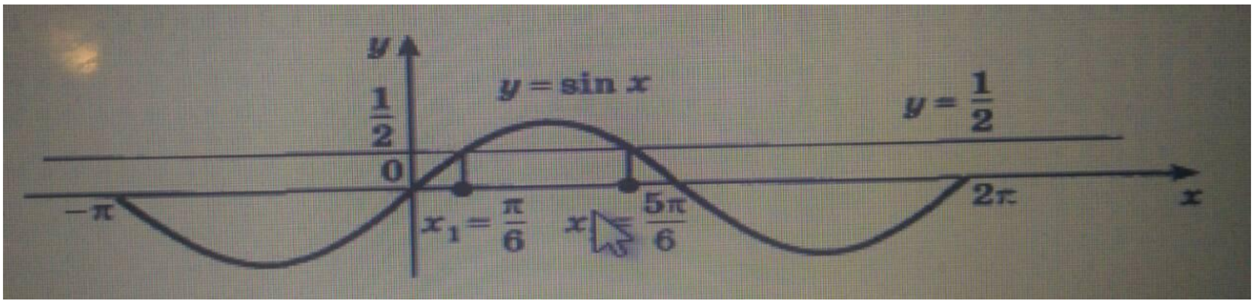
На отрезке [0; π] корнем уравнения cos x = $-\frac{1}{2}$ является число

$x_1 = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}$. И рисунка видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относительно оси Оу, т.е. $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, а $x_3 = x_2 = 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.



3. (стр. 212) Найти все решения неравенства sin x < $\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку - π≤ x≤ 2π.

Из рисунка видно, что график функции у = sin x лежит ниже графика функции у = $\frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $(\frac{5\pi}{6}; 2\pi]$.



2.2 Математические модели процессов

Математическая модель — это математическое представление реальности.

Математическое моделирование — процесс построения и изучения математических моделей.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути, занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его математической моделью и затем изучают последнюю.

Никакое определение не может в полном объёме охватить реально существующую деятельность по математическому моделированию. Несмотря на это, определения полезны тем, что в них делается попытка выделить наиболее существенные черты.

Определение модели по Мордкович, А.Г.: Моделирование — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель):

1. находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

2. способная замещать его в определенных отношениях;

3. дающая при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте.

По учебнику Алимов, Ш.А.: «модель (лат. modulus — мера) — это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.» «Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием.» «Под математическим моделированием будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности, и точности решения этой задачи».

По Колмогорову, А.Н., математическая модель — это «эквивалент объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д.» Существует в триадах «модель-алгоритм-программа». «Создав триаду модель-алгоритм-программа, исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в пробных вычислительных экспериментах. После того, как адекватность (достаточное соответствие) триады исходному объекту установлена, с моделью проводятся разнообразные и подробные опыты, дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта».

По монографии Мышкиса: «Перейдем к общему определению. Пусть мы собираемся исследовать некоторую совокупность S свойств реального объекта a с помощью математики (здесь термин объект понимается в наиболее широком смысле: объектом может служить не только то, что обычно именуется этим словом, но и любая ситуация, явление, процесс и т. д.). Для этого мы выбираем (как говорят, строим) „математический объект a' — систему уравнений, или арифметических соотношений, или геометрических фигур, или комбинацию того и другого и т. д., — исследование которого средствами математики и должно ответить на поставленные вопросы о свойствах S. В этих условиях a' называется математической моделью объекта a относительно совокупности S его свойств».

По Башмакову: «Математической моделью называется совокупность математических соотношений, уравнений, неравенств и т.п., описывающих основные закономерности, присущие изучаемому процессу, объекту или системе».

Наконец, наиболее лаконичное определение математической модели: «Уравнение, выражающее идею».

Формальная классификация моделей

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств. Часто строится в форме дихотомий. Например, один из популярных наборов дихотомий:

- Линейные или нелинейные модели;

- Сосредоточенные или распределённые системы;

- Детерминированные или стохастические;

- Статические или динамические;

- Дискретные или непрерывные.

и так далее. Каждая построенная модель является линейной или нелинейной, детерминированной или стохастической, … Естественно, что возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом — распределённые модели и т. д.

Классификация по способу представления объекта

Наряду с формальной классификацией, модели различаются по способу представления объекта:

-Структурные или функциональные модели

Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования. Функциональные модели не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «чёрного ящика». Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».

Содержательные и формальные модели

Практически все авторы, описывающие процесс математического моделирования, указывают, что сначала строится особая идеальная конструкция, содержательная модель. Устоявшейся терминологии здесь нет, и другие авторы называют этот идеальный объект концептуальная модель, умозрительная модель или предмодель. При этом финальная математическая конструкция называется формальной моделью или просто математической моделью, полученной в результате формализации данной содержательной модели (предмодели). Построение содержательной модели может производиться с помощью набора готовых идеализаций, как в механике, где идеальные пружины, твёрдые тела, идеальные маятники, упругие среды и т.

п. дают готовые структурные элементы для содержательного моделирования. Однако в областях знания, где не существует полностью завершенных формализованных теорий (передний край физики, биологии, экономики, социологии, психологии, и большинства других областей), создание содержательных моделей резко усложняется.

Содержательная классификация моделей

Эта классификация сфокусирована, в первую очередь, на этапе построения содержательной модели.

Тип 1: Гипотеза (такое могло бы быть)

Эти модели «представляют собой пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным». По Р. Пайерлсу это, например, модель Солнечной системы по Птолемею и модель Коперника (усовершенствованная Кеплером), модель атома Резерфорда и модель Большого Взрыва.

Никакая гипотеза в науке не бывает доказана раз и навсегда. Очень чётко это сформулировал Ричард Фейнман:

«У нас всегда есть возможность опровергнуть теорию, но, обратите внимание, мы никогда не можем доказать, что она правильна. Предположим, что вы выдвинули удачную гипотезу, рассчитали, к чему это ведет, и выяснили, что все ее следствия подтверждаются экспериментально. Значит ли это, что ваша теория правильна? Нет, просто-напросто это значит, что вам не удалось ее опровергнуть».

Если модель первого типа построена, то это означает что она временно признаётся за истину и можно сконцентрироваться на других проблемах. Однако это не может быть точкой в исследованиях, но только временной паузой: статус модели первого типа может быть только временным.

Тип 2: Феноменологическая модель (ведем себя так, как если бы…)

Феноменологическая модель содержит механизм для описания явления. Однако этот механизм недостаточно убедителен, не может быть достаточно подтверждён имеющимися данными или плохо согласуется с имеющимися теориями и накопленным знанием об объекте. Поэтому феноменологические модели имеют статус временных решений. Считается, что ответ всё ещё неизвестен и необходимо продолжить поиск «истинных механизмов». Ко второму типу Пайерлс относит, например, модели теплорода и кварковую модель элементарных частиц.

Роль модели в исследовании может меняться со временем, может случиться так, что новые данные и теории подтвердят феноменологические модели и те будут повышены до статуса гипотезы. Аналогично, новое знание может постепенно прийти в противоречие с моделями-гипотезами первого типа и те могут быть переведены во второй. Так, кварковая модель постепенно переходит в разряд гипотез; атомизм в физике возник как временное решение, но с ходом истории перешёл в первый тип. А вот модели эфира, проделали путь от типа 1 к типу 2, а сейчас находятся вне науки.

Идея упрощения очень популярна при построении моделей. Но упрощение бывает разным. Пайерлс выделяет три типа упрощений в моделировании.

Тип 3: Приближение (что-то считаем очень большим или очень малым)

Если можно построить уравнения, описывающие исследуемую систему, то это не значит, что их можно решить даже с помощью компьютера. Общепринятый прием в этом случае — использование приближений (моделей типа 3). Среди них модели линейного отклика. Уравнения заменяются линейными. Стандартный пример — закон Ома.

Если мы используем модель идеального газа для описания достаточно разреженных газов, то это — модель типа 3 (приближение). При более высоких плотностях газа тоже полезно представлять себе более простую ситуацию с идеальным газом для качественного понимания и оценок, но тогда это уже тип 4.

Тип 4: Упрощение (опустим для ясности некоторые детали)

В модели типа 4 отбрасываются детали, которые могут заметно и не всегда контролируемо повлиять на результат. Одни и те же уравнения могут служить моделью типа 3 (приближение) или 4 (опустим для ясности некоторые детали) — это зависит от явления, для изучения которого используется модель. Так, если модели линейного отклика применяются при отсутствии более сложных моделей (то есть не производится линеаризация нелинейных уравнений, а просто ищутся линейные уравнения, описывающие объект), то это уже феноменологические линейные модели, и относятся они к следующему типу 4 (все нелинейные детали «для ясности» опускаем).

Примеры: применение модели идеального газа к неидеальному, уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, большинство моделей физики твердого тела, жидкостей и ядерной физики. Путь от микроописания к свойствам тел (или сред), состоящих из большого числа частиц, очень длинен. Приходится отбрасывать многие детали. Это приводит к моделям 4-го типа.

Тип 5 : Эвристическая модель (количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела)

Эвристическая модель сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только «по порядку величины». Типичный пример — приближение средней длины свободного пробега в кинетической теории. Оно даёт простые формулы для коэффициентов вязкости, диффузии, теплопроводности, согласующиеся с реальностью по порядку величины.

Но при построении новой физики далеко не сразу получается модель, дающая хотя бы качественное описание объекта — модель пятого типа. В этом случае часто используют модель по аналогии, отражающую действительность хоть в какой-нибудь черте.

Тип 6: Аналогия (учтём только некоторые особенности)

Р. Пайерлс приводит историю использования аналогий в первой статье В. Гейзенберга о природе ядерных сил. «Это произошло после открытия нейтрона, и хотя сам В. Гейзенберг понимал, что можно описывать ядра состоящими из нейтронов и протонов, он не мог все же избавиться от мысли, что нейтрон должен в конечном счете состоять из протона и электрона. При этом возникала аналогия между взаимодействием в системе нейтрон — протон и взаимодействием атома водорода, и протоном. Эта-то аналогия и привела его к заключению, что должны существовать обменные силы взаимодействия между нейтроном и протоном, которые аналогичны обменным силам в системе Н − Н +, обусловленным переходом электрона между двумя протонами. … Позднее было все-таки доказано существование обменных сил взаимодействия между нейтроном и протоном, хотя ими не исчерпывалось полностью взаимодействие между двумя частицами… Но, следуя все той же аналогии, В. Гейзенберг пришёл к заключению об отсутствии ядерных сил взаимодействия между двумя протонами и к постулированию отталкивания между двумя нейтронами. Оба последних вывода находятся в противоречии с данными более поздних исследований».

Тип 7: Мысленный эксперимент (главное состоит в опровержении возможности)

А. Эйнштейн был одним из великих мастеров мысленного эксперимента. Вот один из его экспериментов. Он был придуман в юности и, в конце концов, привел к построению специальной теории относительности. Предположим, что в классической физике мы движемся за световой волной со скоростью света. Мы будем наблюдать периодически меняющееся в пространстве и постоянное во времени электромагнитное поле. Согласно уравнениям Максвелла, этого быть не может. Отсюда юный Эйнштейн заключил: либо законы природы меняются при смене системы отсчета, либо скорость света не зависит от системы отсчета. Он выбрал второй — более красивый вариант. Другой знаменитый мысленный эксперимент Эйнштейна — Парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена.

А вот и тип 8, широко распространенный в математических моделях биологических систем.

Тип 8: Демонстрация возможности (главное — показать внутреннюю непротиворечивость возможности)

Это тоже мысленные эксперименты с воображаемыми сущностями, демонстрирующие, что предполагаемое явление согласуется с базовыми принципами и внутренне непротиворечиво. В этом основное отличие от моделей типа 7, которые вскрывают скрытые противоречия.

Один из самых знаменитых таких экспериментов — геометрия Лобачевского (Лобачевский называл её «воображаемой геометрией»). Другой пример — массовое производство формально — кинетических моделей химических и биологических колебаний, автоволн и др. Парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена был задуман как модель 7 типа, для демонстрации противоречивости квантовой механики. Совершенно незапланированным образом он со временем превратился в модель 8 типа — демонстрацию возможности квантовой телепортации информации.

В основе содержательной классификации — этапы, предшествующие математическому анализу и вычислениям. Восемь типов моделей по Р. Пайерлсу суть восемь типов исследовательских позиций при моделировании.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела.

Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалеких звезд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Следует отметить применение тригонометрии в следующих областях: техника навигации, теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ), компьютерная томография, фармацевтика, химия, теория чисел, сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография, геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

Гармонические колебания

Когда какая-либо точка движется по прямой линии попеременно то в одну, то в другую сторону, то говорят, что точка совершает колебания.

Одним из простейших видов колебаний является движение по оси проекции точки М, которая равномерно вращается по окружности. Закон этих колебаний имеет вид

x=$Rcos(\frac{2\pi}{T}t + a)$, (1)

где R-радиус окружности, T-время одного оборота точки М, а число α показывает начальное положение точки на окружности. Такие колебания называют гармоническими или синусоидальными.

Из равенства (1) видно, что амплитуда гармонических колебаний равна радиусу окружности, по которой движется точка М, а частота этих колебаний равна: $\frac{l}{T}$.

Обычно вместо этой частоты рассматривают циклическую частоту:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, показывающую угловую скорость вращения, выраженную в радианах в секунду. В этих обозначениях имеем:

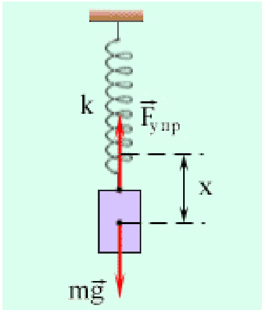
x= R cos(ωt+α). (2)

Число α называют начальной фазой колебания.

Изучение колебаний всякого рода важно уже по одному тому, что с колебательными движениями или волнами мы сталкиваемся весьма часто в окружающем нас мире и с большим успехом используем их (звуковые волны, электромагнитные волны).

Механическими колебаниями называют движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Примерами простых колебательных систем могут служить груз на пружине или маятник. Возьмем, например, гирю, подвешенную на пружине (см.рис.) и толкнем ее вниз. Гиря начнет колебаться вниз и вверх. Как показывают расчеты, отклонение гири от положения равновесия выражается формулой

$$s=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$



Здесь v_0-скорость, с которой мы толкнули гирю, а

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

где:

m-масса гири,

k- жесткость пружины(сила, которая нужна, чтобы растянуть пружину на 1 см).

Если мы сначала оттянем гирю на s_0 см, а потом толкнем ее со скоростью v_0, то она будет совершать колебания по более сложному закону: $s=A\sin(\omega t+\alpha)$ (2).

Расчеты показывают, что амплитуда A этого колебания равна:

$\sqrt{s_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$, а число таково, что:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{s_0\omega}{v_0}.$$

Из-за слагаемого α это колебание отличается от колебания $s=A\sin\omega t$.

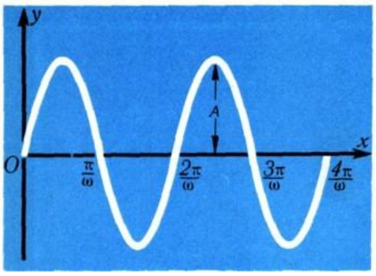
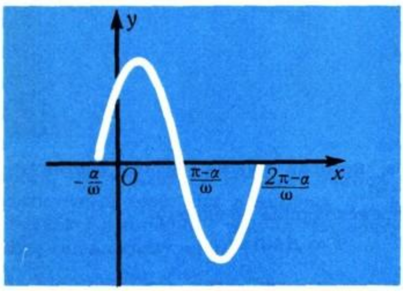
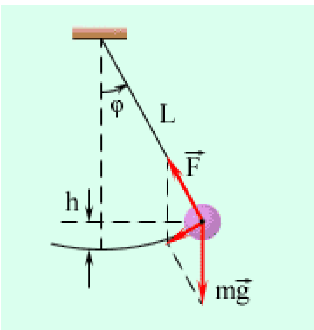


График колебания (2) получается из графика колебания(1) сдвигом влево на $\frac{\alpha}{\omega}$. Число α называют начальной фазой.





Колебания маятника

Колебания маятника тоже приближенно происходят по синусоидальному закону. Графическое изображение этой функции, дающее наглядное представление о протекании колебательного процесса во времени удобно рассмотреть с помощью модели маятника программы « Функции и графики».

Если эти колебания малы, то угол отклонения маятника приближенно выражается формулой:

$$\varphi=\varphi_0\sin(t\sqrt{\frac{g}{l}}),$$

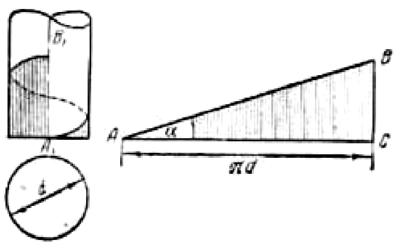
Где l-длина маятника,

φ_0-начальный угол отклонения.

Чем длиннее маятник, тем медленнее он качается. Измеряя период колебания маятника известной длины, можно вычислять ускорение земного тяготения g в различных точках земной поверхности.

Задачи по тригонометрии с практическим содержанием

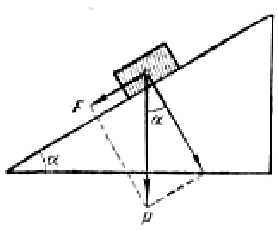
Винтовая линия



Представим себе, что на боковую поверхность цилиндра с диаметром d наматывается прямоугольный треугольник ABC (см.рис.) с основанием AC =πd так , что основание это совпадает с окружностью основания цилиндра. Так как AC =πd, то точка C после того , как весь треугольник будет навернут на боковую поверхность цилиндра, совпадает с точкой A_1, точка B займет положение B_1 на образующей A_1B_1 цилиндра, а гипотенуза AB займет некоторое положение на боковой поверхности цилиндра и примет форму винтовой линии.

Мы получили один виток винтовой линии. Длина катета BC (h) называется шагом винтовой линии. Угол BAC (α) называется углом подъема винтовой линии. Найдем зависимость между h,d, и α. Из треугольника ABC имеем $h=\pi d \operatorname{tg}\alpha$; полученная формула позволяет также определить угол подъема по данным h и d. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{\pi d}$.

Определение коэффициента трения



Тело веса P положено на наклонную плоскость с углом наклона α. Тело под действием своего собственного веса прошло ускоренно путь S в t секунд. Определить коэффициент трения k.

Решение.

Сила давления тела на наклонную плоскость $=kP\cos\alpha$.

Сила, которая тянет тело вниз равна $F=P\sin\alpha-kP\cos\alpha=P(\sin\alpha-k\cos\alpha)$.(1)

Если тело движется по наклонной плоскости, то ускорение $a=\frac{2S}{t^2}$.

С другой стороны, ускорение $a=\frac{F}{m}=\frac{F}{\frac{P}{g}}=gF$; следовательно, $\frac{gF}{P}=\frac{2S}{t^2}$.(2)

Из равенств (1) и (2) следует, что $g(\sin\alpha-k\cos\alpha)=\frac{2S}{t^2}$.

Отсюда: $k=\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{2S}{gt^2\cos\alpha}=g\operatorname{tg}\alpha-\frac{2S}{gt^2\cos\alpha}$.

Тригонометрия в планиметрии.

Основные формулы при решении задач по геометрии с применением тригонометрии:

$\sin^2\alpha=1/(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)=\operatorname{tg}^2\alpha/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$; $\cos^2\alpha=1/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=\operatorname{ctg}^2\alpha/(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)$;

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$; $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Соотношение сторон и углов в прямоугольном треугольнике:

Катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на тангенс противолежащего угла.

Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус прилежащего угла.

Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего угла.

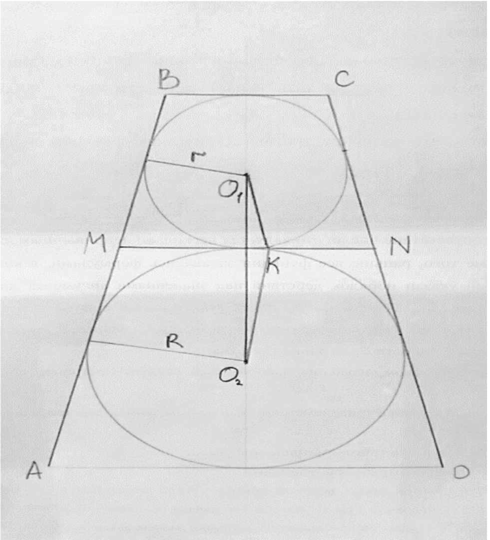
Катет прямоугольного треугольника равен произведению другого катета на котангенс прилежащего угла.

Задача1: *На боковых сторонах AB и CD равнобокой трапеции ABCD взяты точки M и N таким образом, что прямая MN параллельна основаниям трапеции. Известно, что в каждую из образовавшихся малых трапеций MBCN и AMND можно вписать окружность, причем радиусы этих окружностей равны r и R соответственно. Найти основания AD и BC.*

Дано: ABCD-трапеция, AB=CD,

M€AB, N€CD, MN||AD,

в трапеции MBCN и AMND можно вписать окружность с радиусом r и R соответственно.



Найти: AD и BC.

Где угол альфа? Что за точка F?

Решение:

Пусть O_1 и O_2 – центры вписанных в малые трапеции окружностей. Прямая $O_1K||CD$.

В $\Delta\, O_1O_2K$ $\cos\alpha = O_2K/O_1O_2 = (R-r)/(R+r)$.

Т. к. $\Delta\, O_2FD$ прямоугольный, то $O_2DF = \alpha/2$ *почему? это так, надо пояснить)*

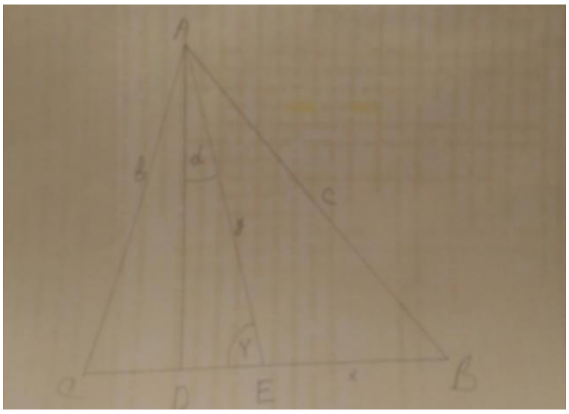
=> $FD=R\cdot ctg(\alpha/2)$. Т. к. $AD=2DF=2R\cdot ctg(\alpha/2)$,

аналогично $BC = 2r\cdot tg(\alpha/2)$.

$\cos\alpha = (1-tg^2\alpha/2)/(1+tg^2(\alpha/2)) \Rightarrow (R-r)/(R+r)= (1-tg^2(\alpha/2))/(1+tg^2(\alpha/2)) \Rightarrow (1-r/R)/(1+r/R)= (1-tg^2\alpha/2)/(1+tg^2(\alpha/2)) \Rightarrow tg\ (\alpha/2)=\sqrt{(r/R)} \Rightarrow ctg(\alpha/2)= \sqrt{(R/r)}$, тогда $AD=2R\cdot ctg(\alpha/2)$, $BC=2r\cdot tg(\alpha/2)$, находим ответ.

Ответ: $AD=2R\sqrt{(R/r)}$, $BC=2r\sqrt{(r/R)}$.

Задача 2: *В треугольнике ABC известны стороны b, c и угол между медианой и высотой, исходящими из вершины A. Вычислить площадь треугольника ABC.*



Дано: Δ ABC, AD-высота,

AE-медиана, $DAE=\alpha$, $AB=c$, $AC=b$.

Найти: $S\Delta ABC$.

Решение:

Пусть $CE=EB=x$, $AE=y$, $AED=\gamma$. По теореме косинусов в ΔAEC $b^2=x^2+y^2-2xy\cdot\cos\gamma(1)$; а в ΔABE по теореме косинусов $c^2=x^2+y^2+2xy\cdot\cos\gamma(2)$. Вычитая из 1 равенства 2, получим $c^2-b^2=4xy\cdot\cos\gamma(3)$.

Т. К. $S\Delta ABC=2S\Delta ACE=xy\cdot\sin\gamma(4)$, тогда разделив 3 равенство на 4 получим: $(c^2-b^2)/S=4\cdot ctg\gamma$, но $ctg\gamma=tg\alpha$, следовательно, $S\Delta ABC= (c^2-b^2)/4\cdot tg\alpha$.

Ответ: $(c^2-b^2)/4\cdot tg\alpha$.

Заключение

Используя опыт практического преподавания, можно сделать следующие выводы:

1. Тригонометрические функции являются наиболее удобным и наглядный средством для обучения учащихся исследованию функций.

2. Преподавание темы «Тригонометрические функции» требует тщательного подбора содержания, средств и методов обучения, то есть разработки эффективной методики.

3. Изучение тригонометрических функций будет более эффективным, в том случае когда:

- перед введением тригонометрических функций проведена достаточно широкая пропедевтическая работа с числовой окружностью;

- числовая окружность рассматривается не только как самостоятельный объект, но и как элемент декартовой системы координат;

- построение графиков осуществляется после исследования свойств тригонометрических функций, исходя из анализа поведения функции на числовой окружности;

- каждое свойство функций четко обоснованно и все они сведены в систему.

4. Наиболее удачным как с методической, так и с содержательной точек зрения является учебник Мордкович, А.Г..

Список использованной литературы

1. Алексеев, А. Тригонометрические подстановки [Текст] / Алексеев А., Курляндчик Л. // Квант. - 1995. - №2. -с. 40 - 42.

2. Алимов, Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11[Текст] / Ш.А. Алимов // Учебник - Москва: Просвещение, 2001.

3. Башмаков, Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /Башмаков //Учебник - Москва: Просвещение, 1992.

4. Бескин, Н.М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания [Текст] / Бескин Н.М. - Москва: Учпедгиз, 1950.

5. Гилемханов, Р.Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу В [Текст] / Гилемханов Р.Г. //Математика в школе. 2001-№ 6 -с. 26-28.

6. Горнштейн, П.И. Тригонометрия помогает алгебре [Текст] / Горнштейн П.И. // Квант. 1989-№5 - с. 68-70.

7. Дорофеев, Г. Периодичность и не периодичность функций [Текст] / Дорофеев Г., Розов Н. //Квант. 1977- №1- с.43-48.

8. Зарецкий, В.И. Изучение тригонометрических функций в средней школе [Текст] / Зарецкий В.И. - Минск: Народная асвета, 1970.

9. Земляков, А. Периодические функции [Текст] / Земляков А., Ивлев Б. // Квант. 1976-№12- с. 34-39.

10. Калинин, С.И. Задачи и упражнения по началам математического анализа [Текст] / Калинин С.И., Канин Е.С., Маянская Г.М., Ончукова Л.В., Подгорная И.И., Фалелеева С.А. - Киров: ВГПУ, 1997.

11. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /А.Н. Колмогоров// Учебник - Москва: Просвещение, 1999.

12. Крамор, В.С. Тригонометрические функции [Текст] / Крамор В.С., Михайлов П.А. - Москва: Просвещение, 1979.

13. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст] /Лященко Е.И. - Москва: Просвещение, 1988.

14. Мишин, В.И. Методика преподавания математики в средней школе (Частная методика). [Текст] / Мишин, В.И. - Москва: Просвещение, 1987.

15. Мордкович, А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе [Текст] / Мордкович А.Г. //Математика в школе. 2002 - № 6 - с.32-38.

16. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа 10-11 [Текст] /А.Г. Мордкович// Учебник- Москва: Мнемозина, 2003.

17. Панчишкин, А.А. Тригонометрические функции в задачах [Текст] / Панчишкин А.А., Шавгулидзе Е.Т. - Москва: Наука, 1986.

18. Раббот, Ж. Тригонометрические функции [Текст] / Раббот Ж. // Квант. 1972- №5- с. 36-38.

19. Синакевич, С.В. Тригонометрические функции [Текст] / Синакевич С.В. - Москва: Учпедгиз, 1959.

20. Смирнова, И.М. Необычный способ получения синусоиды [Текст] / Смирнова И.М. // Математика в школе. 1993-№3- с.56-58.

21. Цукарь, А.Я. Упражнения практического характера по тригонометрии [Текст] / Цукарь А.Я. //Математика в школе. 1993-№3- с 12-15.