Филиал федерального государственного казенного военного образовательного
учреждения высшего образования
«Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
(г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации в г.
Челябинске

Ю.А. Ахкамова, Т.П. Гаврилова

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Челябинск 2019

Филиал федерального государственного казенного военного образовательного учреждения высшего образования
«Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
(г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации в г. Челябинске

Юлия Абдулловна Ахкамова
Татьяна Петровна Гаврилова

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Челябинск 2019

УДК 517

ББК 22.11

А95

Рецензенты:

Асадулина Е.Ю., доцент кафедры общетехнических дисциплин филиала ВУНЦ ВВС «ВВА», кандидат педагогических наук;

Суховиенко. Е.А., заведующий кафедрой математики и методики обучения математике ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ», доктор педагогических наук, доцент

Ахкамова, Ю.А. Интегрирование функции одной переменной : учебное пособие / Ю.А. Ахкамова, Т.П. Гаврилова. – Челябинск : Филиал ВУНЦ ВВС «ВВА», 2019. – 87 с.

Учебное пособие посвящено методам и приемам интегрирования функции одной переменной. Оно состоит из двух разделов. Учебное пособие имеет большую практическую направленность, оно снабжено четкими, понятными и достаточными пояснениями всех этапов выполнения практических задач. В то же время каждый раздел включает задачи для самостоятельного решения, что имеет целью реализации алгоритма методов, последовательного изложения материала решения и аккуратности оформления работ, поскольку содержит четкие, понятные пояснения всех этапов выполнения практических задач, закрепление навыков в решении примеров и задач по рассматриваемой теме. Пособие является средством формирования умений самостоятельного выбора методов решения,

УДК 517

ББК 22.11

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие содержит краткие теоретические сведения о неопределенных и определенных интегралах, большинство известных приемов и методов интегрирования и различные классы интегрируемых функций (с указанием способов интегрирования) и. Изложение материала подкреплено большим количеством разнообразных примеров, в которых подробно рассмотрено применение теории к вычислению интегралов, нахождению площадей плоских фигур, длин дуг кривых и объемов тел вращения, по каждому разделу изучаемого материала предложены задачи для самостоятельного решения с ответами.

Процесс решения задач служит одним из средств овладения системой научных знаний по математике, развития интеллекта, общей математической культуры курсантов. Пособие содержит методические указания по следующим разделам математического анализа: неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его приложения, несобственные интегралы. Данное учебное пособие предназначено для выработки навыков практического интегрирования, закрепления курса лекций, использования на практических занятиях и во время самостоятельной подготовки курсантов.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Непосредственное интегрирование.

Определение. Функция F(x) называется *первообразной* для функции *f(x)* на интервале, если в каждой точке этого интервала

$$F'(x) = f(x).$$

Если функция *f(x)* имеет первообразную *F(x)*, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все первообразные содержатся в выражении

$$F(x) + C.$$

где C – произвольная постоянная.

Определение. Неопределённым интегралом от функции *f(x)* называется совокупность всех её первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования,

$\int$ – знак интеграла.

Нахождение неопределённого интеграла для данной функции *f(x)* называется *интегрированием* функции *f(x)*. Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому результат интегрирование можно проверить дифференцированием.

Определение. График первообразной функции *F(x)* называется *интегральной кривой*. Неопределённый интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых. Все кривые этого семейства *y= F(x) + C* могут быть получены из одной интегральной кривой параллельным сдвигом вдоль оси ординат.

Свойства неопределённого интеграла (правила интегрирования).

$$1^0.\ (f(x)dx))' = f(x).$$

$$2^0.\ d(f(x)dx)) = f(x)dx.$$

$$3^0.\ \int dF(x) = F(x) + C.$$

Свойства 2^0 и 3^0 означают, что знаки интеграла и дифференциала, стоящие рядом, уничтожаются.

$$4^0.\ \int \big(C_1 f_1(x) \pm C_2 f_2(x)\big)dx = C_1 \int f_1(x)dx \pm C_2 \int f_2(x)dx,$$

где C_1, C_2 – постоянные. Это свойство называется линейностью неопределённого интеграла. Оно означает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, а интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов.

5^0. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица основных интегралов.

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;\ x \neq 0;$

3) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;\ a \neq 0;$

4) $a)$ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0;$

б) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, a \neq 0;$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;\ a > 0;$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;\ \ a > 0;$

8) $\int e^x dx = e^x + C;$

9) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

10) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

11) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

12) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$

13) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$

14) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C\,;$

15) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

16) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C\,;$

17) $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C;$

18) $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C;$

Непосредственным интегрированием называется нахождение неопределённого интеграла с помощью его свойств, тождественных преобразований подынтегральной функции и таблицы основных интегралов. Использование при этом свойства 4^0 линейности неопределённого интеграла называется *методом разложения* при нахождении интеграла. Непосредственное интегрирование позволяет привести некоторые виды интегралов к табличным и найти их значения.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx.$$

Решение. Применив свойство 4^0, получим:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\int x^3\, dx - 5\int x^2 dx + 7\int xdx - 3\int dx.$$

К первым трем интегралам правой части применим формулу 1 таблицы основных интегралов, а к четвертому интегралу – свойство 3^0:

$$\int (2x^3 - 5x^2 + 7x - 3)dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 7\cdot\frac{x^2}{2} - 3x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + C.$$

Заметим, что здесь и далее произвольные постоянные, входящие, по определению, в каждый из неопределённых интегралов суммы, объединяются в одну постоянную.

Пример 2. ([3], № 1678). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2}.$$

Решение. Используя отрицательные показатели, приходим к табличному интегралу вида 1:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = C - \frac{1}{x}.$$

Пример 3. ([3], № 1682). Найти интеграл

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}.$$

Решение. Выносим постоянный множитель $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ за знак интеграла, записываем корень в виде дробной степени и переносим её в числитель, после чего используем формулу 1 таблицы:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{2g}} + C = \sqrt{\frac{2h}{g}} + C.$$

Пример 4. ([3], № 1685). Найти интеграл

$$\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx.$$

Решение. Раскрываем скобки и после этого пользуемся свойством 4^0:

$$\int \left(x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1\right)dx = \int \left(x\sqrt{x}+1\right)dx = \int x\sqrt{x}dx + \int dx =$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int dx.$$

К первому интегралу применяем формулу 1 таблицы, а ко второму – свойство 3^0:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + x + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C.$$

Пример 5. ([3], № 1686). Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}\,dx.$$

Решение. Производя почленное деление числителя на знаменатель и, применяя свойство 4^0, получим:

$$\int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3}\right)dx = \int \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \int x^{-\frac{5}{2}}dx - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x}.$$

К первому интегралу применяем формулу 1, ко второму – формулу 8, к третьему – формулу 6 таблицы интегралов:

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot e^x + \ln|x| + C.$$

Пример 6. ([3], № 1693). Найти интеграл

$$\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, разделим почленно числитель на знаменатель и пользуемся свойством 4^0 линейности неопределённого интеграла:

$$\int\left(3 - 2\frac{3^x}{2^x}\right)dx = 3\int dx - 2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx.$$

К первому интегралу применяем свойство 3^0, а ко второму – формулу 7 таблицы при $a = \frac{3}{2}$:

$$3x - 2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}} + C = 3x - \frac{2\cdot(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5} + C.$$

Пример 7. ([3], № 1694). Найти интеграл

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx\,.$$

Решение. Используя формулу $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$, и, после почленного деления числителя на знаменатель, свойство 4^0, получим:

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{2\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx.$$

Применяя к первому интегралу формулу 14 таблицы, а ко второму – свойство 3^0, окончательно получим:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}x + C = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C.$$

Таким образом, как показывают последние три примера, если числитель дроби является суммой функций, а знаменатель – одночлен, то необходимо разделить почленно числитель на знаменатель. Этот приём часто применяется при нахождении неопределённого интеграла.

Пример 8. ([3], № 1698). Найти интеграл

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx\ .$$

Решение. Используя формулу $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ и свойство 4^0, получим:

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \int(1-\cos x)dx = \int dx - \int\cos x\,x\,.$$

К первому интегралу применяем свойство 3^0, а ко второму – формулу 10 таблицы:

$$\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx = x - \sin x + C.$$

В примерах 7 и 8 использованы формулы понижения степени:

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha; \qquad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

которые используют при вычислении неопределённых интегралов, содержащих синусы и косинусы в четных положительных степенях.

Пример 9. ([3], № 1699). Найти интеграл

$$\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}.$$

Решение. Представим $2x^2$ в виде суммы x^2+x^2, разделим почленно числитель на знаменатель и используем свойство 4^0 линейности неопределённого интеграла:

$$\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)} = \int \left(\frac{(1+x^2)+x^2}{(1+x^2)x^2}\right)dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2}.$$

К первому интегралу применяем формулу 1, а ко второму – формулу 3 (при $a = 1$) таблицы интегралов:

$$\int x^{-2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} + \operatorname{arctg} x + C = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 - x^4}.$$

Решение. Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции x^2, а затем, разделив почленно числитель на знаменатель и используя свойство 4^0, получим:

$$\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = \int \frac{(1-x^2)+x^2}{x^2(1-x^2)}dx = \int \left(\frac{1-x^2}{x^2(1-x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1-x^2)}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1-x^2}.$$

К первому интегралу применяем формулу 1, а ко второму – формулу 4б (при $a = 1$) таблицы:

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Примененный здесь приём добавления в числителе подынтегральной функции взаимно уничтожающихся слагаемых часто бывает полезен при нахождении неопределённых интегралов.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 1681. Найти $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Ответ: $\sqrt{x}+C$.

2) [3], № 1687. Найти $\int (2x^{-1,2}+3x^{-0,8}-5x^{0,38})dx$.

Ответ: $\mathrm{C}-10x^{-0,2}+15x^{0,2}-3{,}62x^{1,38}$.

3) [3], № 1692. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C$.

4) [3], №1695. Найти $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

Ответ: $C-ctg\ x-tg\ x$.

5) [3], №1700. Найти $\int \frac{(1+x)^2 dx}{x(1+x^2)}$.

Ответ: $\ln|x|+2\mathrm{arctg}\, x+C$.

1.2. Введение под знак дифференциала.

По определению, дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал её аргумента:

$$\varphi'(x)dx=d\varphi(x).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют *подведением множителя* $\varphi'(x)$ *под знак дифференциала*. Например:

1) $2dx=d(2x)$,   так как $(2x)'=2$;

2) $2x\,dx=d(x^2)$, так как $(x^2)'=2x$;

3) $\frac{1}{x}dx=d(\ln x)$,   так как $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

4) $-\sin x\ dx=d(\cos x)$,   так как $(\cos x)'=-\sin x$;

5) $\cos 3x\,dx=\frac{d(\sin 3x)}{3}$, так как $(\sin 3x)'=\cos 3x\cdot 3$;

6) $x^3dx = \frac{d(x^4)}{4}$, так как $(x^4)' = 4x^3$.

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,.$$

Подводя в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем, используя свойство 5^0 неопределённого интеграла, получим:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + \mathrm{C},$$

если $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Это и есть метод интегрирования введением под знак дифференциала. Он используется для интегрирования сложных функций и заключается в том, что аргумент сложной функции записывается под знаком дифференциала. После введения аргумента под знак дифференциала нужно разделить подынтегральное выражение на производную этого аргумента.

Пример 1. ([3], № 1706). Найти интеграл

$$\int (x+1)^{15}dx.$$

Решение: Поскольку $(x+1)' = 1$, то $d(x+1) = dx$ и мы имеем:

$$\int (x+1)^{15}dx = \int (x+1)^{15}d(x+1) = \frac{(x+1)^{16}}{16} + C.$$

Здесь использовано свойство 5^0 и формула 1 с переменной интегрирования x+1 вместо x.

Пример 2. ([3], № 1707). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5}.$$

Решение. Перенесём выражение из знаменателя в числитель и запишем аргумент $2x$ – 3 сложной степенной функции под знаком дифференциала:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = \int (2x-3)^{-5}dx = \int \frac{(2x-3)^{-5}d(2x-3)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-5}d(2x-3).$$

Здесь подынтегральное выражение разделено на 2, так как

$$(2x-3)' = 2 \text{ и } d(2x-3) = 2dx, \qquad \text{т.е. } dx = \frac{d(2x-3)}{2}.$$

Теперь используем свойство 5^0 и применяем формулу 1 таблицы относительно переменной интегрирования $2x - 3$:

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5} = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{-4}}{-4} + C = C - \frac{1}{8(2x-3)^4}.$$

Пример 3. ([3], № 1709). Найти интеграл

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx.$$

Решение. Переходя от корня степени с дробным показателем и записывая аргумент $8-3x$ сложной степенной функции под знаком дифференциала, получим:

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx = -\frac{1}{3}\int (8-3x)^{\frac{6}{5}} d(8-3x).$$

Перед интегралом появился коэффициент $-\frac{1}{3}$, поскольку

$$(8-3x)' = -3 \text{ и } d(8-3x) = -3dx, \text{т.е.} \quad dx = \frac{d(8-3x)}{-3}.$$

Значит, подынтегральное выражение надо разделить на –3, а постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. Теперь используем свойство 5^0 и применяем формулу 1 с выражением $8-3x$ в качестве переменной интегрирования:

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx = -\frac{1}{3}\frac{(8-3x)^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + C = C - \frac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}.$$

Пример 4. ([3], № 1712) Найти интеграл

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx.$$

Решение. Переходим к степени с дробным показателем и записываем x^2+1 под знаком дифференциала:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}d(x^2+1).$$

Поскольку $2xdx = d(x^2+1)$. Использование свойства 5^0 и формулы 1 таблицы даёт следующее:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = \frac{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}{3} + \mathrm{C} = \frac{2\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}.$$

Данные примеры показывают, что свойство 5^0 неопределённого интеграла значительно расширяет таблицу интегралов. А именно, в силу этого свойства таблицы интегралов оказываются справедливыми независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией. Такое расширение и осуществляется методом введения под знак дифференциала.

Пример 5. ([3], № 1714). Найти интеграл

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}dx.$$

Решение.

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}dx = \left[\ x^2 dx = \frac{d(x^3+2)}{3}\right] = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{\frac{1}{5}} d(x^3+2) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x^3+2)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}(x^3+2)^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C.$$

Здесь формула 1 таблицы интегралов использована для переменной интегрирования вида x^3+2.

Пример 6. ([3], № 1719). Найти интеграл

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx.$$

Решение. В этом интеграле сложной степенной функцией является $\sin^3 x$, поэтому вносим под знак дифференциала $\cos x$, тогда переменной интегрирования будет $\sin x$, и по формуле 1 таблицы интегралов получим:

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = [\cos x\, dx = d(\sin x)] = \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx.$$

Решение. В этом интеграле сложной степенной функцией является $(\ln x)^5$, поэтому вносим $\frac{1}{x}$, под знак дифференциала:

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx = \int (\ln x)^5 \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{x} dx = d(\ln x)\right] = \int (\ln x)^5 d(\ln x) = \frac{(\ln x)^6}{6} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$$

Решение. Сложной степенной функцией является $\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}$, поэтому имеем:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \int (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{1+x^2} dx = d(\operatorname{arctg} x)\right] =$$

$$= \int (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{3}} d(\operatorname{arctg} x) = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Таким образом, метод введения под знак дифференциала используется в том случае, когда подынтегральная функция есть произведение некоторой функции на другую функцию, которая является производной первой с точностью до постоянного множителя.

Интегралы, приводящие к логарифмической функции.

Пример 9. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{5x+3}.$$

Решение. Запишем выражение $5x + 3$ под знаком дифференциала и разделим подынтегральное выражение на 5, так как

$(5x+3)' = 5$ и $d(5x+3) = 5dx$:

$$\int \frac{dx}{5x+3} = \int \frac{d(5x+3)}{(5x+3)\cdot 5} = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+3)}{5x+3}.$$

Теперь применяем формулу 2 таблицы интегралов с выражением $5x + 3$ в качестве переменной интегрирования:

$$\int \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + C.$$

Пример 10. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{4-3x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{4-3x} = \int \frac{d(4-3x)}{(4-3x)\cdot(-3)} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(4-3x)}{4-3x} = -\frac{1}{3}\ln|4-3x| + C.$$

Здесь также использована формула 2 таблицы с выражением $4–3x$ в качестве переменной интегрирования.

Пример 11. ([3], № 1740). Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}.$$

Решение. Внесем x под знак дифференциала и запишем там выражение $x^2+ 1$. Поскольку $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, то подынтегральное выражение разделится при этом на 2:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

И здесь использована формула 2 таблицы, причём роль переменной интегрирования играет выражение $x^2+ 1$.

Примеры 9–11 показывают, что в случае, когда числитель подынтегрального выражения является дифференциалом знаменателя, интеграл равен логарифму абсолютной величины знаменателя.

Сложные тригонометрические функции.

Пример 12. ([3], № 1729). Найти интеграл

$$\int \cos 3x dx.$$

Решение. Записав аргумент *3x* косинуса под знаком дифференциала, и разделив подынтегральное выражение на 3, получаем формулу 10 таблицы интегралов:

$$\int \cos 3x dx = \int \frac{\cos 3x d(3x)}{3} = \frac{1}{3}\int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Пример 13. ([3], № 1731). Найти интеграл

$$\int \sin(2x-3)\, dx.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру получаем формулу 9 таблицы, переменной интегрирования является выражение 2*x*–3:

$$\int \sin(2x-3)\, dx = \int \frac{\sin(2x-3)\, d(2x-3)}{2} = \frac{1}{2}\int \sin(2x-3)\, d(2x-3) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C = C - \frac{1}{2}\cos(2x-3).$$

Сложные показательные функции.

Пример 14. ([3], № 1752). Найти интеграл

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx.$$

Решение. Внесем *cos x* под знак дифференциала и запишем там *sin x*, так как $\cos x\, dx = d(\sin x)$:

$$\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

Пример 15. ([3], № 1755). Найти интеграл

$$\int e^{-3x+1} dx.$$

Решение. Поступая, как в предыдущем примере, придём к формуле 8 таблицы, переменной интегрирования является выражение (–3*x*+1):

$$\int e^{-3x+1}dx = -\frac{1}{3}\int e^{-3x+1}d(-3x+1) = -\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C = C - \frac{e^{1-3x}}{3}.$$

Пример 16. ([3], № 1756). Найти интеграл

$$\int xe^{x^2}dx.$$

Решение.

$$\int e^{x^2}xdx = \left[xdx = \frac{1}{2}d(x^2)\right] = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C = 0{,}5e^{x^2} + C.$$

Интегралы, приводящие к обратным тригонометрическим функциям.

Пример 17. ([3], № 1760). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+9x^2}.$$

Решение. Запишем $3x$ под знаком дифференциала и разделим подынтегральное выражение на 3:

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{1+(3x)^2}.$$

Мы пришли к формуле 3 таблицы интегралов при a=1, переменной интегрирования является выражение $3x$, тогда

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{3}arctg3x + C.$$

Пример 18. ([3], № 1766). Найти интеграл

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+4}.$$

Решение. Внесем x^2 под знак дифференциала и, поскольку,

$x^2dx = \frac{1}{3}d(x^3)$, то получим следующее:

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+4} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^6+4} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+2^2}.$$

Мы пришли к формуле 3 таблицы при a = 2, переменной интегрирования является выражение x^3.

$$\int \frac{x^2dx}{x^6+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{2} + C = \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\frac{x^3}{2} + C.$$

Пример 19. ([3], № 1763). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$$

Решение. Поступая, как в примере 17, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{2^2-(3x)^2}}.$$

Мы пришли к формуле 6 таблицы интегралов при $a = 2$, переменной интегрирования является выражение $3x$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$$

Пример 20. ([3], № 1767). Найти интеграл

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}.$$

Решение.

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}} = \left| x^3 dx = \frac{1}{4}d(x^4) \right| = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{\sqrt{1-(x^4)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin(x^4) + C.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 1713. Найти $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Ответ: $C - \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}$.

2) [3], №1722. Найти $\int \cos^3 x \sin 2x\,dx$.

Ответ: $C - \frac{2}{5}\cos^5 x$.

3) [3], №1723. Найти $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$.

4) [3], № 1732. Найти $\int \cos(1-2x)\ dx$.

Ответ: $C - \frac{1}{2}\sin(1-2x)$.

5) [3], № 1738. Найти $\int \frac{dx}{2x-1}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.

6) [3], № 1753. Найти $\int a^{3x}\,dx$.

Ответ: $\frac{a^{3x}}{3\ln a} + C$.

7) [3], № 1757. Найти $\int e^{-x^3}x^2\,dx$.

Ответ: $C - \frac{1}{3}e^{-x^3}$.

8) [3], № 1759. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

Ответ: $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$.

9) [3], № 1762. Найти $\int \frac{dx}{2x^2+9}$.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}x + C$.

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле.

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)dx,$$

причём, непосредственно подобрать первообразную для *f(x)* мы не можем, но нам известно, что она существует. Введём новую переменную t, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и справедливо равенство

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Это и есть формула метода *замены переменной* или *метода подстановки*. Этот метод является одним из основных методов нахождения неопределённых интегралов. Его задача – свести заданный интеграл к табличному или к более простому, который затем уже приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1. ([3], № 1935). Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}.$$

Решение. Введём новую переменную $t^2 = 2 + 4x$; отсюда $t = \sqrt{2+4x}$,

тогда $x = \frac{t^2-2}{4}$; $dx = \frac{1}{4} \cdot 2tdt = \frac{tdt}{2}$.

Производя замену в заданном интеграле, получим:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}} = \int \frac{\frac{t^2-2}{4} \cdot \frac{tdt}{2}}{t} = \frac{1}{8}\int (t^2-2)dt = \frac{1}{8}\int t^2dt - \frac{1}{4}\int dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int t^2dt - \frac{1}{4}\int dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + C.$$

Ответ должен быть выражен через первоначальную переменную x. Подставляя в результат интегрирования $t = \sqrt{2+4x}$, окончательно получим

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{(2+4x)^3}}{3} - 2\sqrt{2+4x}\right) + C.$$

В дальнейшем, при решении примеров все вспомогательные вычисления, связанные с заменой переменной, будем производить справа от заданного интеграла в скобках.

Пример 2. ([3], № 1873). Найти интеграл

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}.$$

Решение.

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = \begin{bmatrix} x-2=t^2; & t=\sqrt{x-2} \\ x=t^2+2; & dx=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{(t^2+2+1)2tdt}{(t^2+2)t} =$$

$$= 2\int \frac{(t^2+2)+1}{t^2+2}dt = 2\left(\int (1+\frac{1}{t^2+2}dt\right) = 2\left(\int dt + \int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) =$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{2}\right) + C = 2\left(\sqrt{x-2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C.$$

Пример 3. ([3], № 1877). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \begin{bmatrix} x+1=t^3; t=\sqrt[3]{x+1} \\ x=t^3-3; dx=3t^2dt \end{bmatrix} = 3\int \frac{t^2dt}{1+t} =$$

$$= 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt = 3\int \left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 3\left(\int (t-1)dt + \int \frac{dt}{t+1}\right) = 3\left(\int (t-1)dt + \int \frac{dt}{t+1}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C = 3\left(\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} - \sqrt[3]{x+1}\right) + \ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C.$$

Пример 4. ([3], № 1885). Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \begin{bmatrix} 1+\ln x = t^2; & t=\sqrt{1+\ln x} \\ \ln x = t^2-1; & \dfrac{dx}{x}=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{t\cdot 2t}{t^2-1}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2dt}{t^2-1} = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}dt = 2\left(\int dt + \int \frac{dt}{t^2-1}\ \right) =$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = 2\left(\sqrt{1+\ln x}+\frac{1}{2}\ln x\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|\right) + C.$$

Как показывает этот пример, иногда целесообразно, не находя первоначальную переменную x из подстановки, вычислить дифференциал левой и правой части этой постановки:

$$1 + \ln x = t^2, \text{ отсюда } \frac{dx}{x} = 2tdt.$$

Таким образом, если подынтегральное выражение содержит иррациональность, то необходимо сделать такую подстановку, в результате которой подынтегральное выражение становится рациональным относительно новой переменной.

Пример 5. ([3], № 1871). Найти интеграл

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$$

Решение.

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx = \left[\begin{matrix} x-2=t;\ x=t+2 \\ dx=dt \end{matrix}\right] = \int \frac{4(t+2)+3}{t^3}dt = \int \frac{4t+11}{t^3}dt =$$

$$= \int \left(\frac{4}{t^2} + \frac{11}{t^3}\right)dt = 4\int t^{-2}dt + 11\int t^{-3}dt = 4\frac{t^{-1}}{-1} + 11\frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= C - \frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} = C - \frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}.$$

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \left[\begin{matrix} e^x+1=t; \quad e^x=t-1 \\ e^x dx = dt; \quad dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t-1} \end{matrix}\right] = \int \frac{(t-1)^2dt}{t(t-1)} = \int \frac{t-1}{t}dt =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln|t| + C = e^x + 1 - \ln(e^x+1) + C.$$

Итак, замена знаменателя дроби новой переменной часто значительно упрощает интеграл, так что его легко преобразовать к табличному.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], №1872. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C$.

2) [3], № 1936. Найти $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$.

Ответ: $x\sqrt{1+2x} - \frac{1}{3}\sqrt{(1+2x)^3} + C$.

3) [3], №1934. Найти $\int \frac{xdx}{(x-1)^3}$.

Ответ: $C - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2}$.

4) [3], №1884. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

Ответ: $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$.

5) [3], №1874. Найти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Ответ: $2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C$.

6) [3], №1876. Найти$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Ответ: $2(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}) + C$.

7) [3], №1883. Найти$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

Ответ: $\frac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$.

1.4. Интегрирование по частям.

Если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, то *интегрированием по частям* называется нахождение интеграла по формуле:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Метод интегрирования по частям применяется для интегрирования некоторых трансцендентных функций ($\ln x, arcsin\,x, arctg\,x$ и т.д.), а также произведений алгебраических и трансцендентных функций:

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}dx \text{ принимаем за } u = P_n(x),\ \ dv = e^{\alpha x}dx;$$

$$\int P_n(x)a^{\alpha x}dx \text{ принимаем за } u = P_n(x), dv = a^{\alpha x}dx\,;$$

$$\int P_n(x)sinxdx \text{ принимаем за } u = P_n(x), dv = sinx\,dx;$$

$$\int P_n(x)cosxdx \text{ принимаем за } u = P_n(x), dv = cosxdx.$$

Аналогичные подстановки и для обратных функций $\arccos x$, arctg x,
arcctg x, где $P_n(x)$ –многочлен «*n*» -ой степени.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \ln x\, dx.$$

Решение. Сопоставив данный интеграл с левой частью формулы интегрирования по частям, обозначим:

а) $u = \ln x$ и найдем её дифференциал;

б) $dv = dx$ и интегрированием найдем v.

Удобная форма записи: $\begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix}$, тогда

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C =$$
$$= x(\ln x - 1) + C.$$

Результат не изменится, если при определении v и из равенства $dv = dx$ взять $v = x + C_1$. В этом случае будем иметь:

$$\int \ln x\, dx = (x + C_1)\ln x - \int (x + C_1) \cdot \frac{dx}{x} = (x + C_1) \cdot \ln x - \int dx -$$
$$- \int C_1 \cdot \frac{dx}{x} = (x + C_1) \cdot \ln x - x - C_1 \ln x + C = x(\ln x - 1) + C,$$

т.е. результат интегрирования не изменился. В дальнейшем, при нахождении v, для удобства вычислений константу принимают равной нулю.

Пример 2. ([3], № 1837). Найти интеграл

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx.$$

Решение. Примем за:

а) $u = \operatorname{arctg} x$ и найдем её дифференциал;

б) $dv = xdx$ и интегрированием найдем v.

Удобная форма записи: $\begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix}$, тогда

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

Иногда, чтобы свести интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз.

Пример 3. Найти интеграл

$$\int x^2 e^x dx.$$

Решение. Принимаем x^2 за u и находим дифференциал, а остальное $e^x dx$ за dv и находим v, тогда $\left[\begin{array}{c} u = x^2\,;du = 2xdx \\ dv = e^x dx\,;v = e^x \end{array}\right]$ и

$$\int x^2\, v^x dx = \; x^2 e^x - 2\int x\, e^x dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, мы добились понижения степени x на единицу. Чтобы найти $\int xe^x dx$, применяем ещё раз формулу интегрирования по частям.

Полагаем $\left[\begin{array}{c} u = x\,;\; du = dx \\ dv = e^x dx\,;\; v = e^x \end{array}\right]$, тогда

$$\int x^2\, e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\; dx\right) =$$

$$=x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

При повторном интегрировании за u принимаем сходную функцию.

В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл. Интегралы такого рода называются «круговыми».

Пример 4. Найти интеграл

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Решение. Обозначим $\left[\begin{array}{c} u = e^x; \qquad dv = \cos x\, dx \\ du = e^x dx\,;\;\; v = \sin x \end{array}\right]$.

$$I = \int e^x \cos x\, dx = \; e^x \sin x - \int e^x\; \sin x dx.$$

Так как подынтегральная функция заменилась на $e^x \sin x$, то применим еще раз формулу интегрирования по частям:

$$\left[\begin{array}{c} u = e^x; \qquad dv = \sin x\, dx \\ du = e^x dx\,;\;\; v = -\cos x \end{array}\right].$$

При применении формулы при повторном интегрировании по частям за u берется та же функция, что и в первом случае:

$$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right).$$

Получим уравнение

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx,$$

которое нужно решить относительно $I = \int e^x \cos x\, dx$:

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x\,;$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x).$$

Таким образом, можно сделать вывод: во многих случаях легко интегрируемые выражения $e^x dx$, $\sin x\, dx$, $\cos x\, dx$ и т.д. рекомендуется принимать за dv, а множитель при них принимать за u.

Если же подынтегральное выражение содержит функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ и т. д. (или их степени), интегралы от которых не являются табличными, то в большинстве случаев эти функции целесообразно принимать за u.

Одной из причин трудности интегрального исчисления является отсутствие формулы интегрирования произведения функций в общем виде. Некоторой заменой этой формулы является формула интегрирования по частям.

Формула $\int udv = uv - \int vdu$ была известна предшественнику Лейбница Блезу Паскалю (1623–1662) в геометрической форме.

Г. Лейбниц (1646–1716) в рукописи 1700 года оставил запись: "Если $d(uv) = udv + vdu$, то $uv = \int udv + \int vdu$".

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 1832. Найти $\int x \sin 2x dx$.

Ответ: $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2} x cos\, 2x + C$.

2) [3], № 1834. Найти $\int x\, e^{-x} dx$.

Ответ: $C - e^{-x}(x+1)$.

3) [3], № 1838. Найти $\int arccosx\, dx$.

Ответ: $x\, arccosx - \sqrt{1-x^2} + C$.

4) [3], № 1850. Найти $\int x^2\, e^{-x} dx$. Необходимо применить формулу интегрирования по частям два раза.

Ответ: $C - e^{-x}(2 + 2x + x^2)$.

5) [3], № 1860. Найти $\int e^x sinx\, dx$. Составить уравнение, из которого определить интеграл.

Ответ: $\frac{e^x}{2}(sinx - cosx) + C$.

1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.

В данном разделе рассмотрим интегрирование дробей вида:

I. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$;

II. $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$;

III. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Чтобы найти интеграл вида I, нужно дополнить квадратный трехчлен до полного квадрата и свести его к табличному интегралу вида 3 и 4.

Пример 1. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Решение.

а) дополним квадратный трехчлен до полного квадрата:

$x^2+2x+5=(x^2+2x+1)-1+5=(x+1)^2+4$;

б) сведем интеграл к табличному вида 3:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}.$$

Чтобы интеграл был табличным, под знак дифференциала запишем $(x+1)$. Так как $d(x+1)=dx$, то интеграл не изменится:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-6x-16}.$$

Решение. Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата, получим:

$$x^2-6x-16=(x^2-6x+9)-9-16=(x-3)^2-25.$$

Таким образом, чтобы дополнить до полного квадрата, нужно прибавить и вычесть квадрат половины коэффициента при x.

$$\int \frac{dx}{x^2-6x-16}=\int \frac{dx}{(x-3)^2-5^2}=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2-5^2}.$$

Записав под знак дифференциала $(x-3)$, сведем к табличному интегралу вида 4:

$$\frac{1}{2\cdot 5}\ln\left|\frac{(x-3)-5}{(x-3)+5}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-8}{x+2}\right|+C.$$

Следовательно, интеграл $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ сводится к табличным интегралам вида 3 или 4.

Для нахождения интеграла вида II можно использовать следующую схему:

а) найти производную квадратного трехчлена и записать ее в числитель;

б) уравнять коэффициенты в числителе;

в) интеграл $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$ разбить на два интеграла и свести их к одному из табличных интегралов вида 3 или 4.

Пример 3. Найти интеграл

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

Решение.

а) найдём производную знаменателя и запишем её в числитель;

б) для того, чтобы интеграл остался без изменения, производную умножим на $\frac{1}{2}$ и прибавим 1:

$$J_3 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+5}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+2x+5}}_{J_2};$$

в) полученный интеграл разобьем на два интеграла:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + C_1.$$

$J_2 = \int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ – это интеграл вида I. Следовательно, знаменатель нужно дополнить до полного квадрата:

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2x+4)+1}dx = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + C_2.$$

Таким образом, получим:

$$J_3 = \int \frac{x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx.$$

Решение.

а) найдём производную знаменателя и запишем её в числитель;

б) уравняем коэффициенты:

$$J_3 = \int \frac{x-1}{x^2-x-1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-1}dx}_{J_1} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}_{J_2};$$

в) полученный интеграл заменили двумя интегралами, затем выделим в знаменателе второго полный квадрат.

В интеграле J_1 числитель является производной знаменателя, внесем числитель под знак дифференциала и в результате интегрирования получим натуральный логарифм модуля знаменателя. Интеграл J_2 – табличный интеграл вида 4а. Итак,

$J_3 = \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\ln|x^2 - x - 1| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$

Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вида III после выделения полного квадрата сводится к табличному интегралу вида 5 или 6.

Пример 5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 3}}.$$

Решение. Дополним квадратный трёхчлен до полного квадрата и приведём интеграл к табличному вида 5:

$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-6x+9)-9+3}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^3-6}} = \ln\left|(x-3) + \sqrt{(x-3)^2 - 6}\right| + C = = \ln\big|x - 3 +$

x2−6x+3+C.

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}.$$

Решение. Преобразуем квадратный трёхчлен следующим образом:

$$2 + 3x - 2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 1\right) = -2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right) =$$

$= 2\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2\right).$ Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(x - \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{4}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x - 3}{5} + C.$$

Интеграл вида IV $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ решается по плану, предложенному для нахождения интегралов вида II, но сводится данный интеграл свети к табличному вида 5 или 6.

Пример 7. Найти интеграл

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}dx.$$

Решение.

а) найдём производную квадратного трёхчлена и запишем её в числитель;

б) уравняем коэффициенты:

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x + 2) + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}dx.$$

Разобьём полученный интеграл на два интеграла:

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx+2\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+2x+3}+$$

$$+2\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C=\sqrt{x^2+2x+3}+2\ln\ |(x+1)+$$

$$+\sqrt{x^2+2x+3}|+C.$$

Данные примеры показывают, что метод дополнения квадратного трёхчлена до полного квадрата приводит интегралы к более простым табличным интегралам 3, 4, 5, 6.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 1796. Найти $\int\frac{dx}{x^2-7x+10}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|+C$.

2) [3], № 1801. Найти $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

3) [3], № 1944. Найти $\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

Ответ: $\frac{1}{2}ln|x^2+2x+2|+arctg(x+1)+C$.

4) [3], № 1805. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Ответ: $\arcsin(x-2)+C$.

5) [3], № 1806. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

Ответ: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{5}+C$.

6) [3], № 1943. Найти $\int\frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

Ответ: $C-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}$.

Более сложные примеры можно решить с помощью подстановок Л.Эйлера. Дополнительная литература по подстановкам Л.Эйлера: [2] Глава X, § 12.

1.6. Интегрирование рациональных дробей.

Рациональной дробью называется дробь вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены. Рациональная дробь называется *правильной*, если показатель степени многочлена $P_m(x)$ ниже показателя степени многочлена $Q_n(x)$, в противном случае дробь называется *неправильной*. Если дробь неправильная, то необходимо разделить числитель на знаменатель по правилу деления многочлена на многочлен, выделить «целую» часть и представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби. Затем правильную дробь разложить в сумму простейших дробей.

Простейшими (элементарными) дробями называют дроби следующих типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{где } k > 1, k \in N;$$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+rx+q}$, где $\frac{r^2}{4} - 4 < 0$, т.е. квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C;$

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C;$

III. $\int \frac{dx}{x^2+rx+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-r^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+r}{\sqrt{4q-r^2}} + C.$

Приведенные формулы для интегрирования простейших дробей запоминать не обязательно. В каждом конкретном примере эти интегралы следует находить изученными ранее методами.

Для разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей необходимо сначала разложить знаменатель на линейные и квадратные неприводимые множители

$$Q_n(x) = (x-a)^l \dots (x-b)^k (x^2+px+q)^s \dots (x^2+cx+d)^r,$$
$$l + \dots + k + 2s + \dots + 2r = n.$$

Затем записать схему разложения данном дроби на элементарные в следующем виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-a)^l} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-b)^k}$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} +$$
$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \dots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},$$

где $A_1, \dots, \text{B}_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ – некоторые постоянные.

В этом разложении следует обратить внимание на следующее:

– если в знаменателе линейный множитель или его степень, то в числитель запишем постоянное число;

– если в знаменателе квадратный трёхчлен (с комплексными корнями) или его степень, то в числитель запишем многочлен первой степени.

Постоянные коэффициенты правой части разложения находятся методом неопределённых коэффициентов двумя способами:

1 способ.

1) приводим дроби правой части к общему знаменателю и получаем равенство двух дробей с одинаковыми знаменателями;

2) приравнивая числители дробей, получаем тождественно равные многочлены;

3) используя теорему о тождественно равных многочленах, сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях полученного тождества. Это приводит к системе, из которой находим искомые коэффициенты. Этот способ называется *способом сравнения*.

Подставив найденные коэффициенты в разложение дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, сводим интегрирование этой дроби к интегрированию известных простейших дробей.

2 способ.

Этот способ называется *способом частных значений*. Можно определить коэффициенты, если в полученном тождестве переменной *x* придать произвольные значения. При этом вычисление коэффициентов будут проще, если в качестве числовых значений брать действительные корни знаменателя.

Часто бывает полезно комбинировать оба способа.

Случай 1.

Знаменатель имеет только действительные различные корни, т.е. раскладывается на неповторяющиеся множители первой степени.

Пример 1. ([3], № 2013). Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{2x^2 - 3x - 2}.$$

Решение. Имеем $Pm(x) = x,\ m = 1;\quad Q_n(x) = 2x^2 - 3x - 2,\ n = 2$, т.е. m<n и дробь является правильной.

Разложим многочлен $2x^2 - 3x - 2$ на линейные множители:

$2x^2 - 3x - 2 = 0,$

$D = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25,$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4},\quad x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = 2,$

$2x^2-3x-2=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2).$

Выпишем подынтегральную дробь и разложим её на простейшие:

$$\frac{x}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2};$$

а) преобразуем правую часть:

$$\frac{x}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)};$$

б) приравняем числители дробей:

$x=A(x-2)+B(2x+1),$

$x=Ax-2A+2Bx+B.$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$x^1:\ 1=A+2B,$

$x^0:\ 0=-2A+B.$

Решим полученную систему

$\begin{cases}A+2B=1\\-2A+B=0\end{cases}$, $\begin{cases}2A+4B=2\\-2A+B=0\end{cases}$, $\begin{cases}A=1-2B\\5B=2\end{cases}$, отсюда $B=\frac{2}{5},\ A=\frac{1}{5}$.

Подставим найденные коэффициенты в разложение подынтегральной дроби в сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(2x+1)(x-2)}=\frac{\frac{1}{5}}{2x+1}+\frac{\frac{2}{5}}{x-2}.$$

Теперь интегрируем, пользуясь свойством линейности неопределенного интеграла:

$$\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{2x+1}+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{2x+1}+\frac{2}{5}\int\frac{d(x-2)}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{10}\ln|2x+1|+\frac{2}{5}\ln|x-2|+C=\frac{1}{5}\ln\left|(x-2)^2\cdot\sqrt{2x+1}\right|+C.$$

Пример 2. ([3], № 2016). Найти интеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$$

Решение. $P_m(x)=x^5+x^4-8,\ m=5;$

$Q_n(x)=x^3-4x, n=3;$ т.е. m>n и дробь является неправильной.

1. Выделим целую часть рациональной дроби, т.е. представим дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде

$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$,

где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Числитель разделим на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + x^4 - 8 & x^3 - 4x \\ \cline{2-2}
-\,x^5 - 4x^3 & x^2 + x + 4 \\ \cline{1-1}
\qquad x^4 + 4x^3 & \\
\qquad -\,x^4 - 4x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 4x^3 + 4x^2 & \\
\qquad\quad -\,4x^3 - 16x & \text{целая часть} \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = (x^2 + x + 4) + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

2. Целую часть проинтегрируем, а знаменатель дроби разложим на линейные множители:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int (x^2 + x + 4) dx + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

Выпишем дробь $\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}$ и разложим её на сумму простейших рациональных дробей по плану примера 1. Имеем

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Коэффициенты A, B, C можно найти способом 2, т.е. корни знаменателей $x=0$, $x=2$, $x=-2$ подставить в равенство:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2),$$

при $x = 0$: $\quad -2 = -4A \qquad A = \frac{1}{2}$

при $x = 2$: $\quad 4 + 8 - 2 = 8B \qquad 10 = 8B \qquad B = \frac{5}{4}$

при $x = -2$: $\quad 4 - 8 - 2 = 8C \qquad -6 = 8C \qquad C = -\frac{3}{4}$

Таким образом, разложение рациональной дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2} - \frac{\frac{3}{4}}{x+2};$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\left(\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}\right)=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C.$$

Случай 2.

Знаменатель имеет действительные корни, причём некоторые из них кратные, т.е. знаменатель раскладывается на множители первой степени и некоторые из них повторяются.

Пример 3. ([3], № 2022). Найти интеграл

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx.$$

Решение. Подынтегральную дробь $\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$ можно разложить на три простейшие дроби следующим образом:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{Ax(x+1)+Bx+C(x+1)^2}{x(x+1)^2}.$$

Применяем оба способа для нахождения коэффициентов A, B, C:

$$x^2-3x+2=Ax(x+1)+Bx+C(x+1)^2.$$

Корни знаменателей $x=-1$; $x=0$.

При $x=0$ получим $C=2$,

при $x=-1$ получим $1+3+2=-B$ и $B=-6$.

Сравниваем коэффициенты при x^2:

$1=C+A$, $A=-1$.

$$\int\frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}=-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-6}{(x+1)^2}dx+\int\frac{2dx}{x}=-\int\frac{d(x+1)}{x+1}-$$

$$-6\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{x}=\frac{6}{x+1}+2\ln|x|-\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$$

Случай 3.

Знаменатель имеет комплексные корни.

Пример 4. ([3], № 2038). Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{x^3-1}.$$

Решение. Разложим на множители знаменатель подынтегральной дроби:

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Многочлен x^2+x+1 имеет комплексные корни, поэтому дробь можно разложить на сумму двух дробей следующим образом:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+x+1}.$$

Найдём коэффициенты A, B, D методом неопределённых коэффициентов:

$$x = A(x^2+x+1) + (Bx+D)(x-1);$$

$$x = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 - Bx + Dx - D.$$

При $x^2: \ 0 = A + B,$

$x^1: \ 1 = A - B + D,$

$x^0: \ 0 = A - D.$

Нужно решить эту систему, чтобы найти коэффициенты A, B, D. Итак,

$$\begin{cases} A = -B \\ -2B + D = 1 \\ A = D \end{cases} <=> \begin{cases} A = -B \\ -3B = 1 \\ A = D \end{cases} <=> \begin{cases} D = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx.$$

Вторую дробь представим в виде суммы двух дробей, для этого сначала найдём производную знаменателя, а затем уравняем коэффициенты.

$$\frac{1}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интеграл от любой рациональной дроби может быть выражен через конечное число элементарных функций. При этом получаются рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

Большой вклад в теорию рациональных дробей внесли великий учёный Леонард Эйлер (1807–1873) и выдающийся русский математик М.В. Остроградский (1801–1862). Методом интегрирования дробей Остроградского применяется и в настоящее время.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 2012.Найти интеграл $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

Ответ: $ln \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} + C$.

2) [3], № 2014. Найти интеграл $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$.

Ответ: $\ln \left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$.

3) [3], 2033. Найти интеграл $\int \frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2} dx$.

Ответ: $\frac{3}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + 20\ln|x-3| - \frac{47}{4}\ln|x-2| + C$.

4) [3], № 2036. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Ответ: $\ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

1. 7. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций.

Среди интегралов от выражений, содержащих тригонометрические функции, выделяют следующие случаи:

I случай. $\int \sin^{m}x \cos^{n}x dx$.

а) если m и n – чётные целые положительные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 1. ([3], № 1829) Найти интеграл

$$\int \sin^4 x dx.$$

Решение.

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + \mathrm{C} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \mathrm{C}.$$

б) если m или n – нечётное целое положительное число, то от функции с нечётной степенью нужно отделить ее множитель в первой степени.

Пример 2. Найти интеграл

$$\int \sin^3 x dx.$$

Решение. Поскольку $\sin x\, dx = -d(\cos x)$, то имеем:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x) =$$

$$= -\int d(\cos x) + \int \cos^2 x d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл

$$\int cos^3 x\, sin^2 x dx.$$

Решение.

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cos x \ \sin^2 x dx = \int (1-\sin^2 x) \sin^2 x d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x\, d(\sin x) - \int \sin^4 x\, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

<u>II случай.</u> Чтобы найти интегралы

$$\int \mathrm{tg}^n x dx \text{ или } \int \mathrm{ctg}^n x dx,$$

где m и n – целые положительные числа, применяется подстановка

$\mathrm{tg}\, x = t$ или $\mathrm{ctg}\, x = t$.

Пример 4. ([3], № 2099). Найти интеграл

$$\int \mathrm{ctg}^4 x dx.$$

Решение.

$$\int \mathrm{ctg}^4 x dx = \begin{bmatrix} \mathrm{ctg}\, x = t, & x = \mathrm{arcctg}\, t \\ dx = d(\mathrm{arcctg}\, t), & dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = -\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{1-t^4-1}{1+t^2} dt = \int \frac{1-t^4}{1+t^2} dt - \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int (1-t^2) dt - \mathrm{arctg}\, t = t - \frac{t^3}{3} - \mathrm{arctg}\, t + C =$$

$$= \mathrm{ctg} x - \frac{ctg^3 x}{3} - \mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\, x) + C.$$

<u>III случай</u>. Рассмотрим интегралы вида:

$$\int \sin ax \cdot \cos bx \ dx;$$

$$\int \sin ax \cdot \sin bx \ dx;$$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx \ \ dx.$$

В этих случаях применяются формулы тригонометрии:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x];$$

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x];$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)\,x + \cos(a+b)\,x],$$

т.е. интеграл можно найти путём разложения подынтегральной функции на слагаемые.

Пример 5. ([3] № 1817). Найти интеграл

$$\int \cos 2x \cos 3x dx.$$

Решение.

$$\int \cos 2x \cdot \cos 3x \ dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos x \, dx + \frac{1}{10}\int \cos 5x \ d(5x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$$

<u>IV случай.</u> Интеграл вида $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$ находим с помощью подстановки: $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$. При этом $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ и dx выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$ по формулам

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$\operatorname{tg} x = t, \text{отсюда} \ \ x = \operatorname{arctg} t, \text{тогда} \ \ \ dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

После подстановки получается интеграл от рациональной функции.

Пример 6. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}.$$

Решение. Сделаем следующую замену:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t; \quad x = \operatorname{arctg} t; \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix}$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1 + t^2)} = \int \frac{dt}{2 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

<u>V случай.</u> Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, преобразуется в интеграл от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \;=>\; \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \;=>\; x = 2\operatorname{arctg} t \;=>\; dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 7. ([3], № 2105). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

Решение. Применим подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, будем иметь:

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2})} = 2\int \frac{dt}{2t+1-t^2} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t^2-2t+1-1-1)} = 2\int \frac{dt}{2-(t-1)^2} = 2\int \frac{d(t-1)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - (t-1)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-t-1}{\sqrt{2}-t+1}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-tg\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Пример 8. ([3], № 2110). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$$

Решение.

Применим подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{8t^2+2} = \int \frac{dt}{4t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Интегралы от тригонометрических функций используется при решении задач в специальных дисциплинах: самолётовождении, электротехнике, бомбометании и т.д.

Находим интегралы:

1) $\int \left(\frac{u}{v} sin\varepsilon\right)^2 \frac{1}{2\pi} d\varepsilon$;

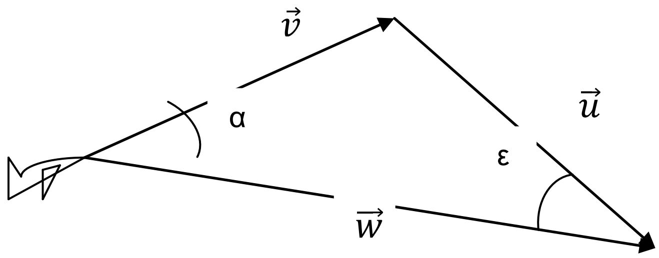
2) $\int \frac{u^2}{2\pi} \cos^2 \varepsilon d\varepsilon$,

где u – скорость ветра;

v – воздушная скорость самолёта;

ε – угол ветра.

Первый интеграл используется в самолётовождении для нахождения среднего квадратичного отклонения угла сноса. Это угол между вектором $\vec{v}$ воздушной скорости и вектором $\vec{w}$ путевой скорости.



Второй интеграл используется для определения среднего квадратичного отклонения путевой скорости.

Рассмотренная подстановка даёт возможность проинтегрировать функцию вида: $R(\sin x, \cos x)$, поэтому её иногда называют "универсальной тригонометрической подстановкой".

На практике она приводит к громоздким рациональным функциям. Необходимо внимательно смотреть на подынтегральную функцию и использовать другие приёмы и подстановки, которые быстрее приводят к цели, чем универсальная подстановка.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 1808. Найти $\int \cos^2 x dx$.

Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

2) [3], № 1809. Найти $\int \sin^2 x dx$.

Ответ: $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

3) [3], № 2090. Найти $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

Ответ: $C - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$.

4) [3], № 1816. Найти $\int \cos x \sin 3x dx$.

Ответ: $C - \frac{1}{4}\left(\frac{cos 4x}{2} + cos 2x\right)$.

5) [3], № 1818. Найти $\int \sin 2x \sin 5x dx$.

Ответ: $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$.

6) [3], № 2096. Найти $\int \frac{sinx dx}{(1-\cos x)^2}$.

Ответ:$\frac{1}{cosx-1} + C$.

7) [3], № 2092. Найти $\int \frac{dx}{\cos x\ \sin^3 x}$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Ответ: $\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$.

8) [3], № 2111. Найти $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$. Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Ответ: $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$.

1.8. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок.

К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы от иррациональных функций.

Для этого в интегралах вида:

$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ применяют подстановки $\left[\begin{array}{l} x=a\sin t, \\ x=a\cos t; \end{array}\right.$

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ применяют подстановки $\left[\begin{array}{l} x=a\operatorname{tg} t, \\ x=a\operatorname{ctg} t; \end{array}\right.$

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ применяют подстановки $\left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t}, \\ x = \frac{a}{\sin t}. \end{array}\right.$

При этом используются формулы:

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

$1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$; $\ 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

Пример 1. ([3], № 1893). Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx.$$

Решение. Сделаем подстановку:

$$\left[\begin{array}{ll} x = \operatorname{tg} t; & t = \operatorname{arctg} x \\ dx = d(\operatorname{tg} t); & dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array}\right]$$

Тогда получим:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx = \int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}dt}{\operatorname{tg}^4 t \cdot \cos^2 t} = \int \frac{\frac{1}{\cos t}\cdot dt}{\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}\cdot\cos^2 t} = \int \frac{\cos t\ dt}{\sin^4 t} =$$

$$= \int \sin^{-4} t \, d(\sin t) = -\frac{1}{3\sin^3 t} + C = C - \frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg} x)}.$$

Пример 2. ([3], № 1900). Найти интеграл

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx.$$

Решение. Сделаем подстановку:

$$\begin{bmatrix} x = 2\sin t\,; & t = \arcsin\frac{x}{2} \\ dx = d(2\sin t\, dt); & dx = 2\cos t\, dt \end{bmatrix},$$

тогда

$$\int x^2\sqrt{4 - x^2}dx = \int 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\, dt = 4\int \sin^2 t \cdot 4\cos^2 t dt =$$

$$= 4\int (2\sin t\cos t)^2 dt = 4\int \sin^2 2t dt = 4\int \frac{1 - \cos 4t}{2} dt =$$

$$= 2t - 2\cdot\frac{1}{4}\sin 4t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right) + C.$$

Пример 3. ([3], № 1897). Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}.$$

Решение. Применим постановку

$$\begin{bmatrix} x = \frac{3}{\cos t}; & t = \arccos\frac{3}{x} \\ dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt & \end{bmatrix},$$

тогда

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}} = \int \frac{3\sin t \cdot \cos^2 t}{9\cos^2 t\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} dt = \frac{1}{3}\int \frac{\sin t\cos t dt}{\sqrt{9 - 9\cos^2 t}} = \frac{1}{9}\int \frac{\sin t\cos t}{\sin t} dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos t\, dt = \frac{1}{9}\sin t + C = \frac{1}{9}\sin\left(\arccos\frac{3}{x}\right) + C = \frac{1}{9}\sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{1 - \left(\frac{3}{x}\right)^2} + C = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C.$$

Применяя тригонометрические подстановки, интегралы от иррациональных функций можно привести к интегралам от рациональных функций и свести интегралы к табличным.

Задачи для самостоятельного решения.

1) Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Применить подстановку $x = \operatorname{tg} t$.

Ответ: $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right| + C$.

2) Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$. Подстановка $x = \sin^2 t$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{1-x}} + C$.

3) [3], № 1894. Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.   Подстановка $x = \operatorname{tg} t$.

Ответ: $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right| + C$.

4) Найти интегралы: а) $\int \frac{\sin^3\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} d\varphi$ или б) $\int \frac{\cos t}{\sin^4 t} dt$.

Ответ: а) $2\cos^{\frac{1}{2}}\varphi + \frac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}}\varphi + C$, б) $C - \frac{1}{3\sin^3 t}$.

5) Найти интеграл $\int \cos^2 4t\, dt$.

Ответ: $\frac{t}{2} + \frac{1}{16}\sin 8t + C$.

6) Найти интеграл $\int x\sin x dx$.

Ответ: $-xcos\, x + sinx + C$.

7) [3], № 2184. Найти интеграл $\int (x^2 + 3x + 5)cos2xdx$.

Ответ: $(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4})cos2x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right)sin2x + C$.

8) [3], № 2190. Найти интеграл $\int (x^3 - 2x^2 + 5)e^{3x}dx$.

Ответ: $e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}\right) + C$.

9) Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C$.

10) [3], № 1948. Найти интеграл $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$.

Ответ: $ln\frac{(x-4)^2}{|x-3|} + C$.

11) [3], № 1952. Найти интеграл $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

Ответ: $\frac{61}{16}ln\left|8x + 9 + 4\sqrt{4x^2 9x + 1}\right| - \frac{5}{4}\sqrt{4x^2 + 9x + 1} + C$.

12) Найти интеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Ответ:$-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Мощным средством исследования в математике, физике, механике, штурманских и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей фигур, длин дуг линий, объемов тел, работы силы, скорости пути, моментов инерции, координат центров тяжести и т.д. сводится к вычислению определенного интеграла.

2.1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница.

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем этот отрезок на n частей точками

$0 = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{i-1} < x_i <\ldots< x_{n-1} < x_a = b$ (рис. 1).

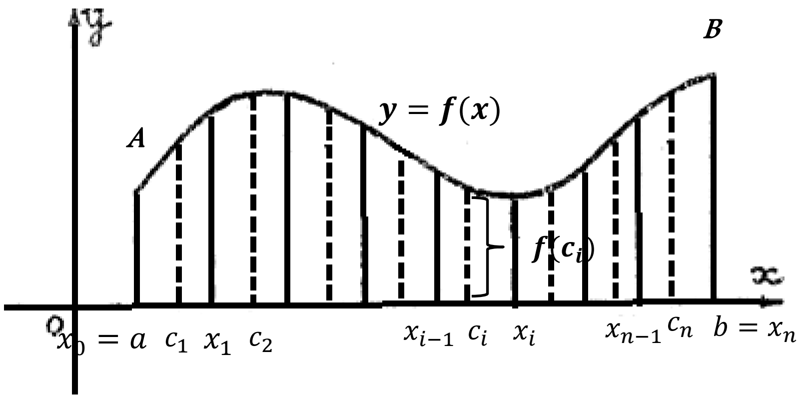


Рис. 1

На каждом частичном отрезке выберем по одной производной точке $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_i, \ldots, c_n$. Вычислим значения функции $f(x)$ в выбранных точках

$f(c_1),\ f(c_2), \ldots ,\ f(\ c_i), \ldots ,\ f(c_n)$.

Умножим каждое значение функции на длину соответствующего частичного отрезка:

$f(c_l)(x_l - x_{l-1}) = \ f(c_l)\cdot\Delta\, x_l,\ \ i = 1,2, \ldots, n.$

Составим сумму полученных произведений:

$$f(c_1)\cdot\Delta\, x_1 + f(c_2)\cdot\Delta\, x_2+\ldots+f(c_i)\cdot\Delta\, x_i+\ldots+f(c_n)\cdot\Delta\, x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta\, x_i.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел ее интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\cdot\Delta x_i. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то предел интегральной суммы существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ и от выбора точек c_i.

Понятие определенного интеграла встречается в работах П. Ферма (1601-1665), Р. Декарта (1596-1650), Б. Паскаля (1623-1662), затем И. Ньютона (1643-1727), Г. Лейбница (1646-1716) и других.

Термин «определенный интеграл» принадлежит французскому астроному и математику Пьеру Лапласу (1749-1827), который ввел его в 1779 г. Сначала пределы интегрирования указывались только на словах. Впервые написание пределов в самом интеграле (справа от него) встречается у знаменитого русского математика Леонарда Эйлера (1707-1783). Современное обозначение определенного интеграла появляется у французского математика Кана Фурье (1768-1830) в его работе «Аналитическая теория тепла» (1822).

Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a;b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке. При этом число b называют *верхним*, число a – *нижним* пределом интеграла.

Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически есть площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 1) – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = S_{aABb}. \qquad (2)$$

Физический смысл определенного интеграла заключается в том, что путь, пройденный телом, равен определенному интегралу от скорости $v = f(t)$, взятому по времени:

$$S = \int_a^b v dt = \int_a^b f(t)dt. \qquad (3)$$

Определенный интеграл используется в специальных дисциплинах, изучаемых будущим штурманом-инженером. Так, например:

- текущие координаты самолета определяются интегрированием проекций путевой скорости на координатные оси;

- анализ точности автоматического счисления пути самолета производится с помощью определенных интегралов;

- для нахождения координат вектора ветра в прицельных устройствах вычисляются определенные интегралы.

Свойства определенного интеграла.

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Аддитивность. Если отрезок интегрирования разбить на части без общих внутренних точек, то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Линейность.

$$\int_a^b [\text{С}_1 f(x) \pm \text{С}_2 y(x)]dx = \text{С}_1 \int_a^b f(x)dx \pm \text{С}_2 \int_a^b \varphi(x)dx,$$

т.е. интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого, а постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

5. Монотонность. Если $f(x) \leq \varphi(x) \;\; \forall x \in [a;b]$ и $a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{4}$$

6. Оценка интеграла. Если m и M - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \leq b$, то

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a). \tag{5}$$

7. Среднее значение функции.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c), \text{ где } a < c < b.$$

Значение функции $f(x)$ в точке c, определяемого из последнего равенства

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \tag{6}$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Для вычисления определенного интеграла служит **формула Ньютона – Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \quad (7)$$

$=$

где $F'(x) = f(x)$.

AA

Данная формула (7) означает, что определенный интеграл равен разности значений любой первообразной от подынтегральной функции на верхнем и нижнем пределах интегрирования. Отсюда вытекает, что при вычислении определенных интегралов используются те же методы и та же таблица основных интегралов, что и при нахождении неопределенных интегралов.

Рассмотрим решение типовых задач и примеров.

Пример 1. ([3], №1636). Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

1) $\int_0^1 x^2\,dx$ или $\int_0^1 x^3\,dx$? 2) $\int_1^2 x^2\,dx$ или $\int_1^2 x^3\,dx$?

Решение.

Поскольку $x^2 \geq x^3$ при любом $x \in [0;1]$и $x^2 \leq x^3$ при любом $x \in [1;2]$, то по свойству монотонности в первом случае имеем:

$$\int_0^1 x^2\,dx \geq \int_0^1 x^3\,dx$$

(знак равенства только при $x = 0$ и $x = 1$), а во втором случае получим:

$$\int_1^2 x^2\,dx \leq \int_1^2 x^3\,dx$$

(знак равенства только при $x = 1$).

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{-2}^{3} (2x^3 + x^2 - 5)\,dx.$$

Решение. Воспользуемся сначала свойством линейности, а затем табличным интегралом 1:

$$\int_{-2}^{3} (2x^3 + x^2 - 5)\,dx = 2\int_{-2}^{3} x^3\,dx + \int_{-2}^{3} x^2\,dx - 5\int_{-2}^{3} dx =$$

$$= 2\frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{3} + \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{3} - 5x\Bigg|_{-2}^{3}.$$

Теперь применяем формулу Ньютона – Лейбница, т.е. подставляем вместо x сначала верхний предел $x = 3$, а затем – нижний ($x = -2$), и из первого результата вычитаем второй:

$$\int_{-2}^{3} (2x^3 + x^2 - 5)\,dx = \frac{1}{2}[3^4 - (-2)^4] + \frac{1}{3}[3^3 - (-2)^3] - 5[3 - (-2)] =$$

$$= \frac{1}{2}(81 - 16) + \frac{1}{3}(27 + 8) - 5(3 + 2) = \frac{65}{2} + \frac{35}{3} - 25 = \frac{115}{6}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_1^8 \left(\sqrt{2x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{8}{3x^2}\right)dx.$$

Решение. Перейдем сначала к дробным и отрицательным показателям степеней, затем воспользуемся свойством линейности, после чего – табличным интегралом 1 (от степенной функции):

$$\int_1^8 \left(\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{3}}-8\cdot\frac{x^{-2}}{3}\right)dx=\sqrt{2}\int_1^8 x^{\frac{1}{2}}dx+2\int_1^8 x^{-\frac{1}{3}}dx-\frac{8}{3}\int_1^8 x^{-2}\,dx=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^8+2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^8-\frac{8}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_1^8 .$$

Теперь применяем формулу Ньютона – Лейбница (7), а для простоты вычислений вернемся к корням и положительным показателям степеней:

$$\int_1^8 (\sqrt{2x}+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{8}{3x^2})dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x\sqrt{x}\Bigg|_1^8+3\sqrt[3]{x^2}\Bigg|_1^8+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x}\Bigg|_1^8=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(8\sqrt{8}-1\right)+3\left(\sqrt[3]{64}-1\right)+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{8}-1\right)=\frac{64}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+3(4-1)+$$

$$+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)=28-\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 27{,}06.$$

Пример 4. ([3], №2232). Вычислить интеграл

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}.$$

Решение. Перенесем степень из знаменателя в числитель и воспользуемся методом введения под знак дифференциала:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\,dx=\frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}d(11+5x).$$

Теперь применим к последнему интегралу табличный интеграл 1, после чего вычисления проведем по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11-5x)^3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{36}-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{35}{36}\right)=\frac{7}{72}.$$

Пример 5. ([3], №2235). Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) dt.$$

Решение. Введем под знак дифференциала выражение $\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0$, чтобы использовать табличный интеграл 9, а затем проведем вычисления по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) dt = \frac{T}{2\pi}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) d\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right) =$$

$$= -\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{T}{2\pi}[\cos(\pi - \varphi_0) - \cos(-\varphi_0)] =$$

$$= -\frac{T}{2\pi}(-\cos\varphi_0 - \cos\varphi_0) = \frac{T}{\pi}\cos\varphi_0.$$

Пример 6. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2\pi} cos^2\mathcal{E}\, d\mathcal{E},$$

где u - скорость ветра, $\mathcal{E}$ - угол ветра. Данный интеграл используется для определения среднего квадратического отклонения путевой скорости (в самолетовождении).

Решение. Используем сначала формулу понижения степени

$$\int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2\pi}\cos^2\mathcal{E}\, d\mathcal{E} = \frac{u^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\mathcal{E}}{2} d\mathcal{E}.$$

Теперь свойство линейности и ведение под знак дифференциала (для второго слагаемого) дают:

$$\int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2\pi}\cos^2\mathcal{E}\, d\mathcal{E} = \frac{u^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\mathcal{E} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\mathcal{E}\, d(2\mathcal{E})\right].$$

Для вычисления второго интеграла используем табличный интеграл 10, а затем формулу Ньютона – Лейбница, окончательно получим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{u^2}{2\pi}\cos^2\mathcal{E}\, d\mathcal{E} = \frac{u^2}{4\pi}\left(\mathcal{E}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\sin 2\mathcal{E}\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{u^2}{2}.$$

Пример 7. ([3], №2237). Вычислить интеграл

$$\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx.$$

Решение. Применяем метод введения под знак дифференциала и табличный интеграл 8:

$$\int_0^1 (e^x-1)^4\, e^x dx = \int_0^1 (e^x-1)^4 d\,(e^x-1) = \frac{(e^x-1)^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{(e-1)^5}{5} \approx 2{,}84.$$

Пример 8. ([3], №2240). Вычислить интеграл

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}\ .$$

Решение. Поскольку $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то введение под знак дифференциала приводит к табличному интегралу 6 при $a = 1$.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int_1^e \frac{d\,(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin \ln x\Bigg|_1^e = \arcsin \ln e - \arcsin \ln 1 =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57.$$

Пример 9. ([3], №2242). Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2}.$$

Решение. Введением под знак дифференциала приходим к табличному интегралу 8:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}\, dx}{x^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2}dx = d\left(-\frac{1}{x}\right) = \\ = -d\left(\frac{1}{x}\right) \end{bmatrix} = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}\ d\,\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}}\Bigg|_1^2 = e - \sqrt{e}\ \approx 1{,}1.$$

Пример 10. ([3], №2247). Вычислить интеграл

$$\int_2^3 \frac{dx}{2\,x^2+3x-2}.$$

Решение. Выделяя полный квадрат в знаменателе, сведем интеграл к табличному 4а, а затем вычислим его по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_2^3 \frac{dx}{2\,x^2+3x-2} = \int_2^3 \frac{dx}{2\,\left(x^2+\frac{3}{2}x-1\right)} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{d\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{\left(x+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{4}}{\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{4}}\right|\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{1}{5}\,ln\,\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\left(\ln\left(\frac{5/2}{5}\right)-\ln\left(\frac{3/2}{4}\right)\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3} \approx 0{,}05.$$

Пример 11. ([3], №2251). Вычислить интеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Решение. Применив формулу понижения степени и метод введения под знак дифференциала, приведем к табличному интегралу 14:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \left. \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 2.$$

Пример 12. ([3], №2296). Вычислить среднее значение функции

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{на отрезке } [1;4].$$

Решение. Вычислим сначала интеграл от заданной функции:

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int_4^1 x^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 + \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^4 =$$

$$= \left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_1^4 + \left.2\sqrt{x}\right|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) + 2(2-1) = \frac{20}{3}.$$

Теперь воспользуемся формулой (6) и найдем среднее значение заданной функции:

$$f(c) = \frac{1}{4-1}\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{20}{3} = \frac{20}{9}.$$

Пример 13. ([3], №1630). Оценить интеграл

$$\int_{1,5}^{3,5} \frac{x^2 dx}{x-1}.$$

Решение. Сначала найдем наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ на отрезке $[1{,}5;\ 3{,}5]$. Вычислим ее производную:

$$f'(x) = \frac{2x\,(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2\,x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Находим критические точки функции:

а) $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \quad (x = 0 \notin [1{,}5;\ 3{,}5]);$

б) $f'(x)$ не существует $\Rightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1\ \ (x = 1 \notin [1{,}5;\ 3{,}5]).$

Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$f(2) = \dfrac{2^2}{2-1} = 4;$

$f(1{,}5) = \dfrac{(1{,}5)^2}{1{,}5-1} = \dfrac{2{,}25}{0{,}5} = 4{,}5;$

$f(3{,}5) = \dfrac{(3{,}5)^2}{3{,}5-1} = \dfrac{12{,}25}{2{,}5} = 4{,}9.$

Итак, наименьшее значение подынтегральной функции $m = f(2) = 4,$ а наибольшее значение $\mathrm{M} = f(3{,}5) = 4{,}9$. Теперь пользуясь формулой (5), оценим заданный интеграл:

$$4 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) < \int_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2 dx}{x-1} < 4{,}9 \cdot (3{,}5 - 1{,}5) \Leftrightarrow 8 < \int_{1{,}5}^{3{,}5} \frac{x^2 dx}{x-1} < 9.$$

Пример 14. Указать ошибку, допущенную при следующем вычислении интеграла:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2\,x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2\cos^2\,x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

(верное значение интеграла равно 2).

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 2236. Вычислить $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Ответ: 12.

2) [3], № 2248. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Ответ: $arctg3 - arctg2$.

3) [3], № 2249. Вычислить $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\ \ln\frac{8}{5}$.

4) [3], № 2250. Вычислить $\int_{-0{,}5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

5) [3], № 2255. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) - \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

6) [3], № 2257. Вычислить $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\ dx$.

Ответ: 1.

7) [3], № 2258. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin\ \left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\,dt$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

8) [3], № 2282. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x \, dx$.

Ответ: $\frac{8}{35}$.

2.2. Вычисление определенного интеграла по частям и заменой переменной.

Если функции $u\,(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на отрезке $[a; b]$, то имеет место следующая формула:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du, \qquad (8)$$

которая называется *формулой интегрирования по частям* в определенном интеграле.

Интегрирование по частям в определенном интеграле осуществляется точно так же, как и в неопределенном интеграле, но после нахождения первообразной надо еще воспользоваться формулой (7) Ньютона – Лейбница.

Интегрирование по частям является одним из основных методов вычисления интегралов. Другим таким методом является *замена переменной (подстановка).* Если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ - непрерывная однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x = \varphi(t)$ для всех значений t из отрезка $[\alpha; \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a; b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$

то для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменной (или подстановки) в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

В этой формуле t– новая переменная; $\alpha,\ \beta$ - новые пределы интегрирования.

Часто вместо подстановки

$$x = \varphi(t) \qquad (9)$$

применяют обратную подстановку

$$t = \psi(x) \qquad (10)$$

Подчеркнем, что если определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется при помощи подстановки в другой интеграл с новой переменной интегрирования t, то старые пределы

$x_1 = a$ и $x_2 = b$ необходимо заменить новыми пределами $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$, которые определяются из исходной постановки (9) или (10).

Рассмотрим решение типовых задач и примеров методом интегрирования по частям.

Пример 1. ([3], №2259). Вычислить интеграл

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx.$$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям (8):

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-x}dx, & v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}2.$$

В этом примере в квадратных скобках справа от заданного интеграла производятся вспомогательные вычисления. Поясним также, что для вычисления функции v использован метод введения под знак дифференциала, чтобы привести интеграл $\int e^{-x}\, dx$ к табличному интегралу 8.

Пример 2. ([3], №2264). Вычислить интеграл

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

Решение. Используем формулу (8):

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+1), & du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx, \quad v = x & \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x\, dx}{x+1} = (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{(x+1)-1}{x+1} dx =$$

$$= e - 1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = e - 1 - \int_0^{e-1} dx + \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} =$$

$$= e - 1 - x\Big|_0^{e-1} + \int_0^{e-1} \frac{d(x+1)}{x+1} = e - 1 - (e-1) + \ln(x+1)\Big|_0^{e-1} =$$

$$= \ln e - \ln 1 = 1.$$

В данном примере при вычислении интеграла $\int_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1}$ использован искусственный прием прибавления и вычитания в числителе постоянной величины (в данном случае 1), чтобы затем воспользоваться свойством линейности интеграла.

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_0^3 \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Решение. Используем формулу (8):

$$\int_0^3 \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, & v = x \end{bmatrix} = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} xdx = d\left(\dfrac{x^2}{2}\right) = \\ = \dfrac{1}{2} d(x^2+1) \end{bmatrix} = 3 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{d\,(1+x^2)}{1+x^2} = 3 \operatorname{arctg} 3 -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\,(1+x^2)\Big|_0^3 = 3 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\,(\ln 10 - \ln 1) = 3 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\ln 10 \approx 2{,}6.$$

Пример 4. ([3], №2261). Вычислить интеграл

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$$

Решение.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \begin{bmatrix} u = x, \quad du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x}, v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \end{bmatrix} = -x \operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x\,dx =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) + \ln|\sin x\,|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \ln\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0{,}38.$$

Перейдем теперь к вычислению определенных интегралов методом замены переменной (методом подстановки).

Пример 5. ([3], №2277). Вычислить интеграл

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}.$$

Решение. Чтобы преобразовать интеграл от иррациональной функции к интегралу от рациональной функции, сделаем замену переменной $\sqrt{1+x} = t$. После такой замены корень в знаменателе извлекается, и мы получим:

$$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \begin{bmatrix} 1+x=t^2, \quad x = t^2-1, \\ dx = 2tdt, \\ x=3 \Rightarrow t=2, \\ x=8 \Rightarrow t=3 \end{bmatrix} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t\,dt}{t} =$$

$$= 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2\ \left[(9-3) - \left(\frac{8}{3} - 2\right)\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Этот же интеграл можно вычислить и с помощью подстановки $1 + x = t$.

Пример 6. ([3], №2309). Вычислить интеграл

$$\int_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$$

Решение. Введем новую переменную $e^x - 1 = t^{\,2}$ с целью преобразования иррациональной подынтегральной функции в рациональную.

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \begin{bmatrix} e^x - 1 = t^2, \quad e^x = t^2+1 \\ e^x dx = 2t\,dt \\ x = 0 \Longrightarrow t = \sqrt{e^0-1} = 0 \\ x = \ln 5 \Longrightarrow t = \sqrt{e^{\ln 5}-1} \ = 2 \end{bmatrix} = \int_0^2 \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2+1+3} =$$

$$= 2\int_0^2 \frac{t^2dt}{t^2+4} = 2\int_0^2 \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}\,dt = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right)\,dt =$$

$$= 2\left(\int_0^2 dt - 4\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4}\right) = 2\left(t\Bigg|_0^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Bigg|_0^2\right) =$$

$$=2(2 - 2\operatorname{arctg} 1 + 2\operatorname{arctg} 0) = 2\cdot\left(2 - 2\cdot\tfrac{\pi}{4}\right) = 4 - \pi \approx 0{,}86.$$

Решенный пример показывает, что из введенной подстановки не всегда целесообразно находить x, а затем dx, иногда достаточно найти дифференциалы левой и правой частей введенной подстановки.

Отметим, что при нахождении нового верхнего предела использовано основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$.

Пример 7. ([3], №2236). Вычислить интеграл

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}ux.$$

Решение.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{\cos t}, \quad \cos t = \frac{1}{x}, \quad dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 0 \\ x = 2 \Longrightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt}{\frac{1}{\cos\ t}} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} \cdot \sin t \cos t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt = \operatorname{tg} t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 0 - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}69.$$

Вычисленный интеграл показывает, что тригонометрические подстановки преобразуют интегралы от некоторых иррациональных функций в интегралы от функций рациональных.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 2260. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x cosx dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

2) [3], № 2263. Вычислить $\int_1^2 x log_2 x dx$

Ответ: $2 - \frac{3}{4ln2}$.

3) [3], № 2262. Вычислить $\int_0^{\pi} x^3 \sin x\, dx$.

Ответ: $(\pi^3 - 6\pi)$.

4) [3], № 2268. Вычислить $\int_0^{e} \ln^3 x\ \ dx$.

Ответ: $6 - 2e$.

5) [3], № 2279. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\, dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}$.

Ответ: $\ln \frac{e + \sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}$.

6) [3], № 2288. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3}\ \ dx$.

Ответ: $\frac{3}{16}\pi$.

7) [3], № 2289. Вычислить $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{16}$.

8) [3], № 2280. Вычислить $\int_8^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2 dx}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Ответ: $8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

9) [3], № 2312. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Итак, при замене переменной необходимо изменять пределы интегрирования (в этом случае не нужно возвращаться к старой переменной, как в неопределенном интеграле), а после нахождения первообразной воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница (7).

2.3. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.

1. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;\, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, снизу осью OX, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2), вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y(x)\,dx. \tag{11}$$

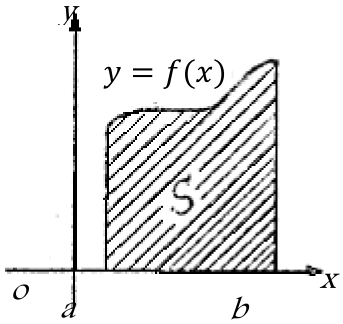


Рис. 2

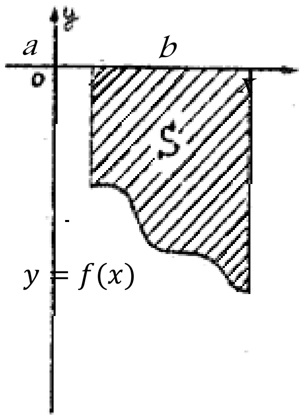


Рис. 3

2. Если $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a;\, b]$, то площадь фигуры (рис. 3) вычисляется по формуле:

$$S = \left|\int_a^b f\,(x)\;dx\right|. \tag{12}$$

3. Если функция $y = f(x)$ меняет знак на отрезке $[a;\, b]$, то площадь фигуры (рис. 4) вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^c f\,(x)dx + \left|\int_c^d f\,(x)dx\right| + \int_d^b f\,(x)dx. \tag{13}$$

где интегралы по отрезкам, на которых функция отрицательна, берутся по абсолютной величине.

4. Если на одном и том же отрезке $[a;\, b]$ заданы две функции: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, примем $f_1(x) \geq f_2(x)\ \forall\, x \in [a;\, b]$, то площадь фигуры, ограниченной этими кривыми на отрезке $[a;\, b]$ (рис. 5), вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\ dx \quad (14)$$

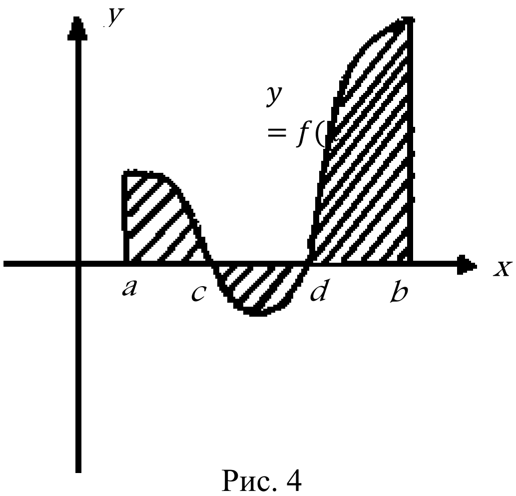


Рис. 4

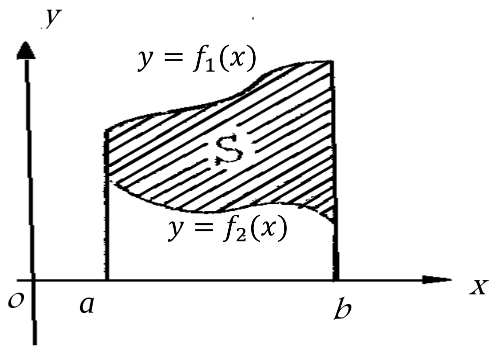


Рис. 5

5. Если фигура ограничена сверху разными линиями, заданными на разных отрезках, имеющих один общий конец: $y = f(x)$ при $x \in [a;\ b]$ и $y = \varphi(x)$ при $x \in [b;$ c], то площадь такой фигуры определяется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c \varphi\ (x)dx. \quad (15)$$

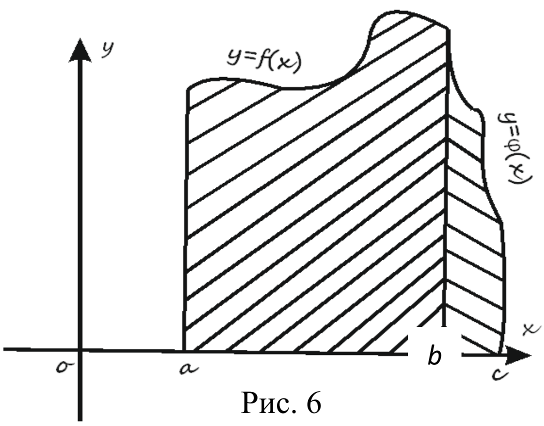


Рис. 6

6. Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где α$\leq t \leq \beta$ и $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, то площадь криволинейной трапеции выражается интегралом:

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta y(t)\ x'(t)dt \quad (16)$$

7. Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$, то площадь сектора AOB (рис. 7), ограниченного дугой AB, кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующими значениям $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выразится интегралом

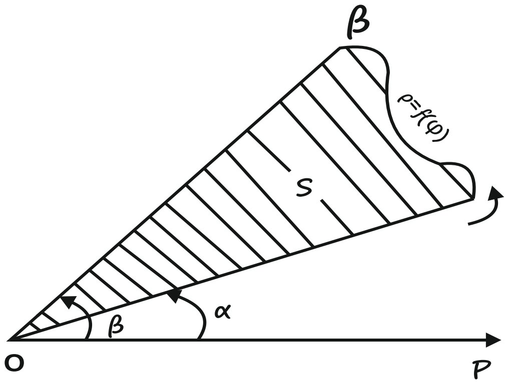


Рис. 7

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (17)$$

8. Объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ОХ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8) вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_{a}^{b} y^2 dx = \pi \int_{a}^{b} f^2(x) dx \qquad (18)$$

Знаменитый немецкий математик и астроном И. Кеплер (1571-1630) издал в 1615 г. замечательную книгу «Новая стереометрия винных бочек», в которой впервые представил вычисление объемов свыше 80 тел вращения. И. Кеплер вычислял объемы, основываясь на принципе суммирования неограниченно большого числа беспредельно малых частиц, на которые разбивается тело. Кеплер заслужил всемирную известность и признательность потомков как астроном (помним об открытых им трех законах движения небесных тел). Но и математика обязана ему тоже немалыми услугами. Он первый сдвинул с места вопрос о вычислении объемов тел вращения, бывший без движения больше десяти веков.

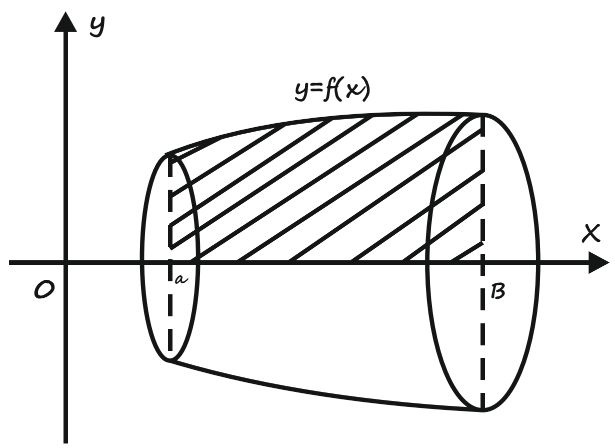


Рис. 8

Ряд новых результатов в вычислении площадей и объемов тел получен одним из создателей аналитической геометрии французским математиком П. Ферма (1601-1665). П. Ферма и французский математик, физик и философ Б. Паскаль (1623-1652) применяли по сути дела преобразования интегралов. Некоторые теоремы Б. Паскаля об объемах являются геометрическим эквивалентом замены переменных и интегрирования по частям. Отметим, что Б. Паскаль не пользовался алгебраической символикой и не производил алгебраических выкладок. Подобно древнегреческим математикам, он все выражал словами. Вероятно, это обстоятельство явилось одной из причин, из-за которых Б. Паскаль был лишен возможности создать тот новый общий алгоритм исчисления бесконечно малых, который открыли И. Ньютон и Г. Лейбниц.

Рассмотрим решение типовых задач на вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и параболой $y = 6x - x^2 - 5$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения параболы с осью OX, решив систему уравнений: $\begin{cases} y = 6x - x^2 - 5 \\ y = 0 \end{cases}$; имеем $6x - x^2 - 5 = 0$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, отсюда $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

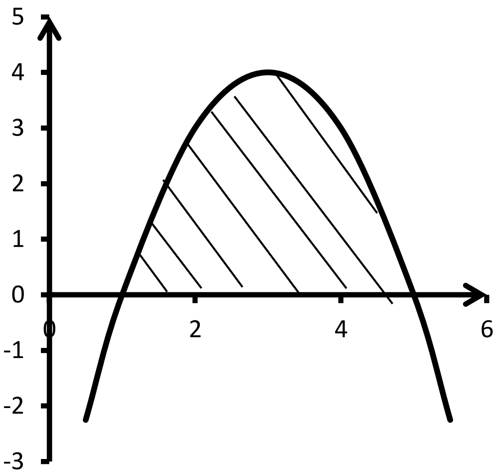


Рис. 9

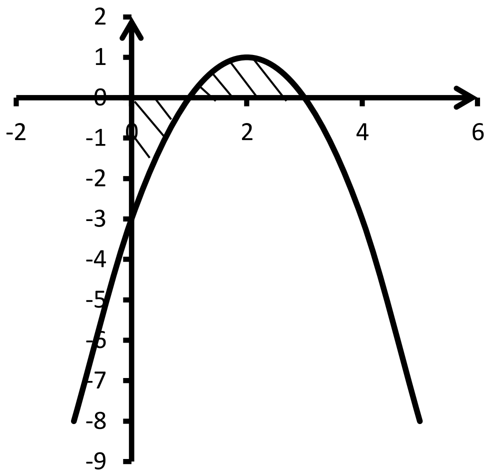


Рис. 10

Это и будут пределы интегрирования. Искомую площадь (она заштрихована на рис. 9) найдем, пользуясь формулой (11):

$$S = \int_1^5 (6x - x^2 - 5)\,dx = 6\int_1^5 x\,dx - \int_1^5 x^2\,dx - 5\int_1^5 dx =$$

$$= 6 \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_1^5 - \frac{x^3}{3}\bigg|_1^5 - 5x\bigg|_1^5 = 3\,(25 - 1) - \frac{1}{3}\,(125 - 1) - 5(5 - 1) =$$

$$= 72 - \frac{124}{3} - 20 = \frac{32}{5}\ (\text{кв. ед.}).$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = -x^2 + 4x - 3$ и осями координат.

Решение. Найдем координаты точек пересечения параболы с осями координат: 1) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 0 \end{cases}$, тогда $-x^2 + 4x - 3 = 0$, отсюда $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

2) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ x = 0 \end{cases}$, отсюда $y = -3$.

На рис. 10 построена данная парабола и искомая площадь заштрихована. Поскольку функция, график которой ограничивает площадь, меняет знак, то пользуемся формулой (13).

$$S = \left|\int_0^1 (-x^2 + 4x - 3)dx\right| + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$

$$= \left| -\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 3x\Big|_0^1 \right| - \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 - 3x\Big|_1^3 = \left| -\frac{1}{3} + 2 - 3 \right| -$$

$$-\frac{1}{3}(27 - 1) + 2(9 - 1) - 3(3 - 1) = \left| -\frac{4}{3} \right| - \frac{26}{3} + 10 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} (\text{кв. ед.}).$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $4y = 8x - x^2$ и $4y = x + 6$.

Решение. Найдем координаты точек пересечения линий, ограничивающих фигуру, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\,y = 8\,x - x^2 \\ 4y = x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 8x - x^2 \\ y = \dfrac{x + 6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 6 = 0 \\ y = \dfrac{x + 6}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1;\ x_2 = 6 \\ y_1 = \dfrac{7}{4};\ y_2 = 3 \end{cases}$$

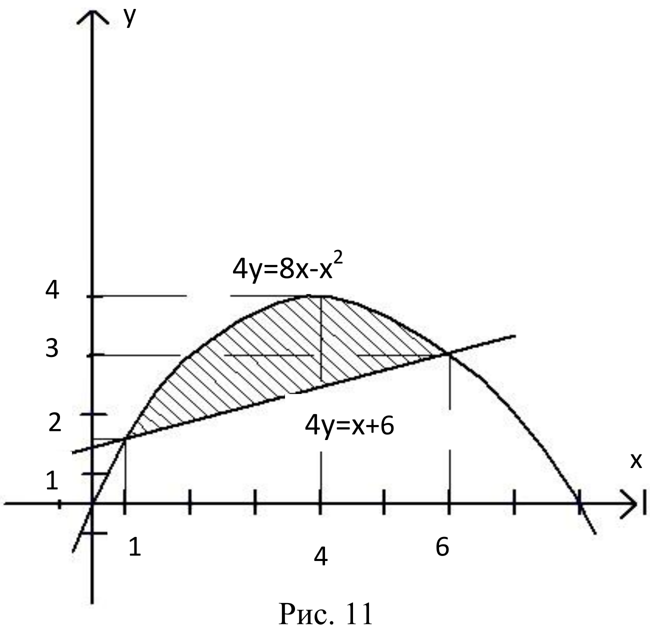


Рис. 11

Таким образом, имеем две точки пересечения: А $(1; \frac{7}{4})$ и В$(6; 3)$. Построив линии, получим фигуру (на рис. 11 она заштрихована), площадь которой надо найти. Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой (14). Разрешим предварительно заданные уравнения относительно y:

$y = \dfrac{8\,x - x^2}{4}$ (это $f_1(x)$); $y = \dfrac{x + 6}{4}$ (это $f_2(x)$).

Таким образом, получим:

$$S=\int_1^6\left(\frac{8x-x^2}{4}-\frac{x+6}{4}\right)dx=\int_1^6\frac{7x-x^2-6}{4}dx=\int_1^6\left(\frac{7x}{4}-\frac{x^2}{4}-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{7}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^6-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^6-\frac{3}{2}x\Bigg|_1^6=\frac{7}{8}(36-1)-\frac{1}{12}(216-1)-\frac{3}{2}(6-1)=$$

$$=\frac{125}{24}\ (\text{кв. ед.}).$$

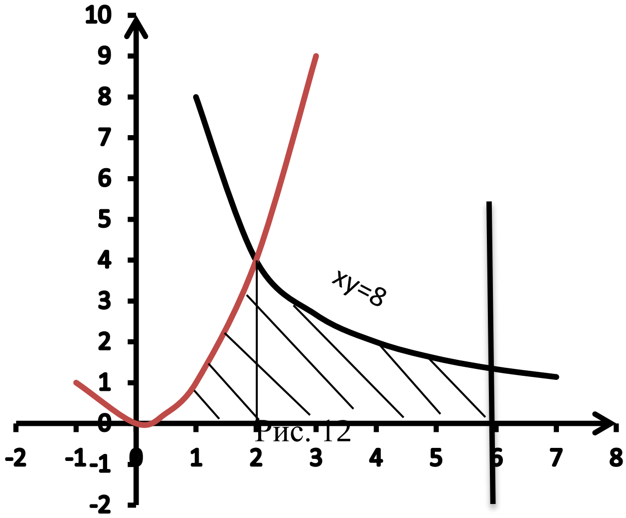


Рис. 12

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $xy=8,\ x=6,\ y=0.$

Решение.

Найдем координаты точек пересечения параболы $y=x^2$ и гиперболы $xy=8$ из системы

$$\begin{cases}y=x^2\\xy=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2\\x^3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4.\\x=2.\end{cases}$$

Фигура, площадь которой требуется найти (рис. 12), ограничена сверху на отрезке [0;2] параболой, а на отрезке [2;6] – гиперболой. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (15), учитывая, что $xy=8\Leftrightarrow y=\frac{8}{x}$:

$$S=\int_0^2x^2dx+\int_2^6\frac{8}{x}dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+8\ln x\Bigg|_2^6=\frac{8}{3}+8(\ln 6-\ln 2)=\frac{8}{3}+8\ln\frac{6}{2}=$$

$$=\frac{8}{3}+8\ln 3\approx 11{,}46\ (\text{кв. ед.}).$$

Рис. 12

Пример 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$$\begin{cases}x=3\sin t\\y=2\sin 2t\end{cases}.$$

Решение. Линия, ограничивающая площадь, задана параметрическими равнениями. Составим таблицу значений x и y для соответствующих значений t и построим линию.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0
y	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0

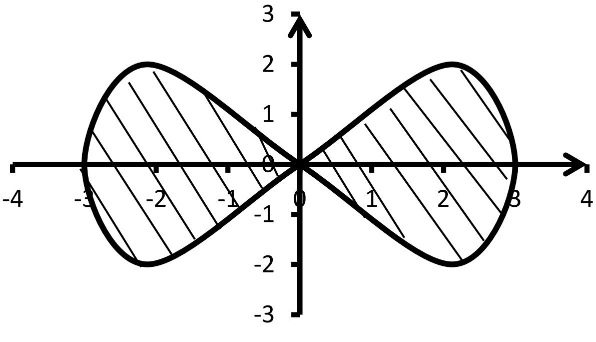


Рис. 13

Для вычисления площади воспользуемся формулой (16), учитывая, что $\varphi' = x'_t = 3\cos t$.

Из построения видно, что t изменяется от 0 до 2π. Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей, мы найдем площадь четвертой части фигуры при $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ и увеличим интеграл в 4 раза.

Таким образом, получим

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2t \cdot 3\cos t\, dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t\cos t\, dt =$$

$$= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin t\, dt = [\sin t\, dt = -d\,(\cos t)] = -48\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, d\,(\cos t) =$$

$$= -48 \cdot \frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16\ (\text{кв. ед.}).$$

Пример 6. ([3], №2490). Найдем площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

Решение.

Линия задана параметрическими уравнениями. Как известно, одна арка циклоиды получается при изменении t от 0 до 2π.

Найдем $x'_t = a\,(1 - \cos t)$ и воспользуемся формулой (16):

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a\,(1 - \cos t)\, dt =$$

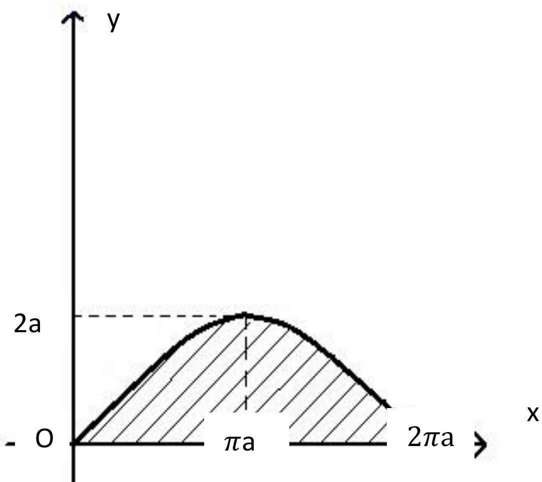


Рис.14

$$= a^2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = a^2\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= a^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + \int_0^{2\pi} cos^2 t \, dt \right) =$$

$$= a^2 \left(t \Big|_0^{2\pi} - 2\sin t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\, t}{2} dt \right) = a^2 (2\pi - 2\sin 2\pi + 2\sin\ 0) +$$

$$+ a^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\, t \, dt \right) = a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2t \, d(2t) \right) =$$

$$= a^2 \left(2\pi + \frac{2\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} \right) = a^2 \left(2\pi + \pi + \frac{1}{4} \sin 4\pi + \frac{1}{4} \sin 0 \right) =$$

$$= 3\pi a^2 \text{ (кв. ед.)}. \approx 0{,}42\, a^2 \text{(кв. ед.)}$$

Пример 7. ([3], №2496). Найдем площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a \sin 2\varphi$ (двулепестковая роза).

Решение. Линия задана в полярной системе координат. Для ее построения необходимо составить таблицу значений ρ для соответствующих значений φ. Пределы интегрирования для φ выберем таким образом, чтобы получилась замкнутая линия. Составим таблицу значений ρ и φ и построим линию, учитывая при этом, что $\rho \geq 0$.

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	0	*a*	0	-*a*	0	*a*	0	-*a*	0

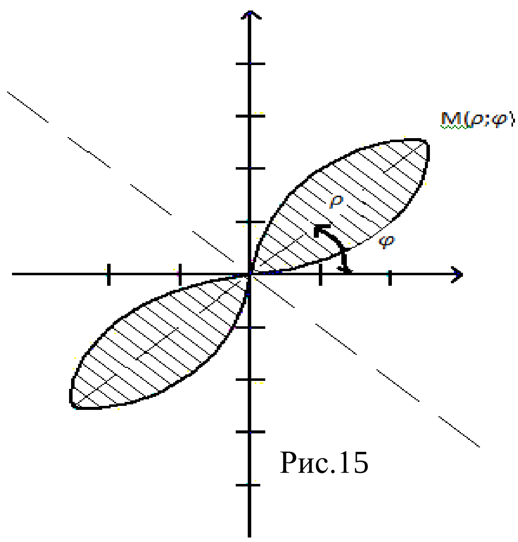


Рис.15

Поскольку $\rho \geq 0$, то в нашем случае $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$. Для вычисления площади воспользуемся формулой (17). Учитывая, что фигура состоит из двух равных частей, пределы интегрирования для φ берем от 0 до $\frac{\pi}{2}$, удваивая при этом интеграл:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin 2\varphi)^2\, d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi\ d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= a^2\left(\frac{1}{2}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\varphi\, d(4\varphi)\right) = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin 4\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

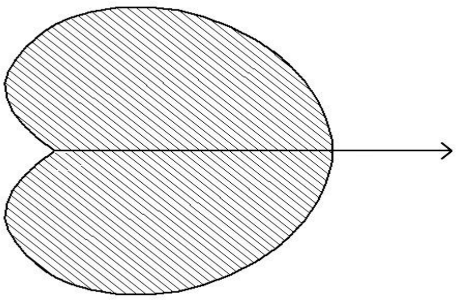
$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\sin 2\pi + \frac{1}{8}\sin 0\right) = \frac{\pi a^2}{4}\ \text{(кв. ед.)} \approx 0{,}785\, a^2\ \text{(кв. ед.)}.$$

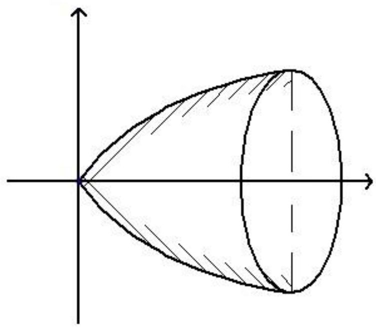
Пример 8. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой

$$\rho = a(\cos\varphi + 1)$$

Решение. Линия задана в полярной системе координат. Как известно, кардиоида получается при изменении φ от 0 до 2π (рис. 16).

Поскольку линия симметрична относительно полярной оси, то пределы интегрирования берем от 0 до π, а





интеграл удваиваем. Тогда формула (17) дает:

y

ρ x

Рис.16 Рис.17

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2 (\cos\varphi + 1)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 1) d\varphi =$$

$$= a^2\left(\int_0^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi + 2\int_0^{\pi} \cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi} d\varphi\right) = a^2\left(\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi +\right.$$

$$+2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{\pi}d\varphi\right)=a^2\left(\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\,\varphi}{2}d\varphi+2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}+\varphi\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi}d\varphi++\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2\,\varphi d(2\varphi)+2\sin\pi-2\sin 0+\pi\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}+\pi\right)=\frac{3}{2}\pi a^2\ (\text{кв. ед.})\approx 4{,}71\ a^2(\text{кв. ед.}).$$

Отметим, что граница зоны досягаемости при планировании самолета с высоты отказа двигателя представляет собой именно кардиоиду.

Перейдем к решению задач на вычисление объемов тел вращения.

Пример 9. ([3], №2555). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением параболы $y^2=4x$ вокруг своей оси (параболоид вращения), и плоскостью, перпендикулярной к его оси и отстающей от вершины параболы на расстояние, равное единице.

Решение. Используя формулу (18) имеем:

$$V=\pi\int_0^1 4\,x\ dx=4\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=2\pi\ (\text{куб. ед.})\approx 6{,}28\ (\text{куб. ед.}).$$

Пример 10. Для решения некоторых задач картографии земной эллипсоид с полуосями $a=6378245$ м и $b=6356853$ м заменяют таким шаром, объем которого равен объему эллипсоида. Каким должен быть в этом случае радиус шара?

Решение. Земной эллипсоид - это тело, образованное вращением эллипса около большой оси $2a$. Уравнение этого эллипса имеет вид:

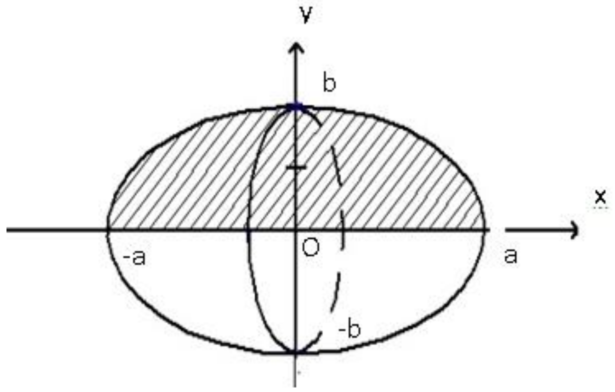


Рис.18

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

так как из этого уравнения

$$y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

то по формуле (18), учитывая симметричность эллипса относительно оси ОУ,

найдем объем эллипсоида

$$V = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = \frac{2b^2}{a^2}\pi\left(a^2\int_0^a dx - \int_0^a x^2dx\right) =$$

$$= \frac{2b^2}{a^2}\pi\left(a^2x\Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a\right) = \frac{2b^2}{a^2}\pi\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\pi\, ab^2.$$

Поскольку объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$, то получим:

$$\frac{4}{3}\pi\ ab^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R^3 = ab^2 = R = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Значит, радиус искомого шара

$$R = \sqrt[3]{6378245\ \cdot 6356863^2} \approx 6371110\ (м).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], №2458. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2) [3], №2461. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 8$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

Ответ: $2\,\pi + \frac{4}{3}$ и $6\pi - \frac{4}{3}$.

3) [3], №2473. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}, x = 1$.

Ответ: $e + \frac{1}{e} - 2$.

4) [3], №2485. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x,\ y = \cos x, y = 0$.

Ответ: $2 - \sqrt{2}$.

5) [3], №2492. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}.$$

Ответ: $6\,\pi a^2$.

6) [3], №2495. Найти площадь фигуры, ограниченной полярным радиусом спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ при одном его обороте, если началу движения соответствует $\varphi = 0$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$.

7) [3], №2492. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$.

Ответ: $18\,\pi a^2$.

8) [3], №2499. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = a\,tg\,\varphi$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$.

9) [3], №2564. Вычислить объем тела, получаемого от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

Ответ: $\frac{8}{3}\pi$.

10) [3], №2556. Эллипс, большая ось которого равна $2a$, малая - $2b$, вращается: 1) вокруг большой оси; 2) вокруг малой оси. Найти объем получающихся эллипсоидов вращения. В частном случае получить объем шара.

Ответ: 1) $\frac{4}{3}\pi\, ab^2$;

2) $\frac{4}{3}\pi\, a^2 b$.

Таким образом, использование определенного интеграла существенно расширяет круг фигур, площади которых можно вычислить. Если в элементарной математике определяются площади фигур, ограниченных отрезками прямой и дугами окружности, то теперь можно вычислять площади фигур, ограниченных любыми кривыми. Аналогично утверждение справедливо и для объемов тел вращения.

2.4. Вычисление длины дуги линии и площади поверхности вращения с помощью определенного интеграла.

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$ и производная y' непрерывна на отрезке $[a;b]$, то длина дуги этой кривой выражается интегралом:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \qquad (19)$$

где a и b - абсциссы концов данной дуги.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$, производные x' и y' непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt \qquad (20)$$

где t_1 и t_2 - значения параметра t, соответствующие концам дуги $(t_1 < t_2)$.

Если гладкая кривая задана уравнением $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}\, d\varphi, \qquad (21)$$

где φ_1 и φ_2 - значения полярного угла φ на концах дуги ($\varphi_{1<}\varphi_2$).

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8), вычисляется по формуле

$$\mathrm{P} = 2\pi \int_{\alpha}^{b} y(x)\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (22)$$

Рассмотрим решение типовых задач на вычисление длин дуг линий с помощью определенного интеграла.

Пример 1. ([3], №2521). Найти длину дуги линии

$$y = \ln x \quad \text{от} \quad x_1 = \sqrt{3} \quad \text{до} \ x_2 = \sqrt{8}.$$

Решение. Заданная линия является графиком логарифмической функции $y = \ln x$. Найдем производную $y' = \frac{1}{x}$, а для вычисления искомой длины дуги воспользуемся формулой (19):

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx \begin{bmatrix} x^2 + 1 = t^2,\ \ x = \sqrt{t^2 - 1} \\ 2x\, dx = 2t\, dt \\ dx = \dfrac{t\, dt}{x} = \dfrac{t\, dt}{\sqrt{t^2-1}}; \end{bmatrix} =$$

$$= \int_2^3 \frac{t \cdot t\, dt}{\sqrt{t^2-1}\cdot\sqrt{t^2-1}} = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\, dt =$$

$$= \int_2^3 dt + \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = t\Big|_2^3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|\Big|_2^3 = 3 - 2 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 1{,}2.$$

Пример 2. ([3], №2524). Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2 = \frac{x}{3}$.

Решение. Найдем сначала координаты точек пересечения (для пределов интегрирования) заданных линий:

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2 = \dfrac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2 = \dfrac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^3 - 6\,x^2 + 5x - 2 = 0 \\ y^2 = \dfrac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}. \end{cases}$$

Разрешим уравнение полукубической параболы относительно y:

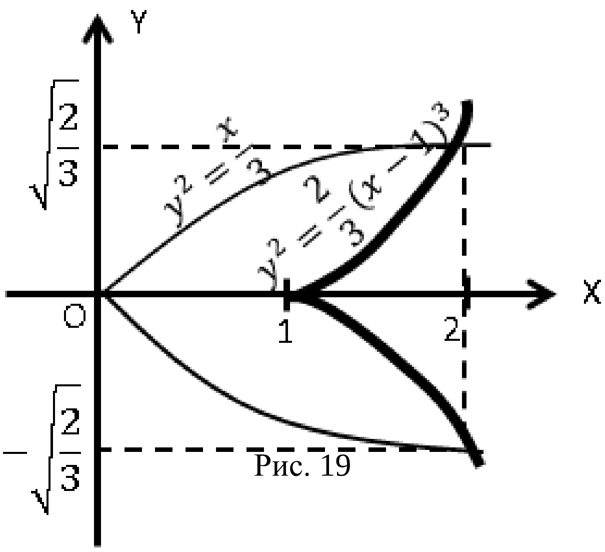


Рис. 19

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}(x-1)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (x-1)^{\frac{3}{2}}.$$

Взято положительное значение корня, так как в силу симметричности кривых относительно оси OX достаточно рассмотреть случай $y > 0$. Найдем производную функции:

$$y' = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Вычислим теперь подынтегральное выражение формулы (19):

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}(x-1)} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(x-1)} = \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}.$$

Таким образом, вычисляя длину дуги по формуле (19) и учитывая при этом симметричность относительно оси OX, получим:

$$l = 2\int_1^2 \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}\, dx = 2 \cdot \frac{2}{3}\int_1^2 \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left.\frac{\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{9}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)\left.\sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}\,\right|_1^2 = \frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right) \approx 2{,}62.$$

Пример 3. ([3], №2531). Найти длину первой арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t).$$

Решение. Линия задана параметрически, поэтому будем пользоваться формулой (20). Найдем сначала производные x'_t и y'_t:

$$x'_t = a\,(1 - \cos t), \quad y'_t = a\sin t.$$

Теперь вычислим подынтегральное выражение формулы (20):

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2\,(1 - 2\cos t + cos^2 t + sin^2 t)} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\,\sqrt{2\,(1 - \cos t)} =$$

$$= a\sqrt{2\ \cdot 2\, sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Наконец, вычислим длину одной арки циклоиды по формуле (20), взяв пределы интегрирования от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$ (см. задачу №6 предыдущего раздела и рис. 14):

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\,a\sin\frac{t}{2}\ dt = 4a\ \int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\ d\ \left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = 8a.$$

Пример 4. Вычислить длину логарифмической спирали

$$\rho = 3e^{2\varphi}\ \text{ от } \varphi_1 = 0\ \text{ до }\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Решение. Линия задана уравнением в полярных координатах, поэтому воспользуемся формулой (21). Найдем $\rho' = 6e^{2\varphi}$, тогда имеем:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(3e^{2\varphi})^2 + (6e^{2\varphi})^2}\ d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{45\, e^{4\varphi}}\ d\varphi = 3\sqrt{5}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi}\ d\varphi =$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi}\ d(2\varphi) = \frac{3\sqrt{5}}{2}\ e^{2\varphi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}(e^{\pi} - 1) \approx 74{,}93.$$

Заметим, что если необходимо вылететь на перехват самолета, летящего с неизвестным курсом, то лететь надо именно по логарифмической спирали (так называемая «кривая погони»).

Перейдем теперь к решению задач на вычисление площадей поверхностей вращения.

Пример 5. ([3], №2594). Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y^2 = 4ax$ вокруг оси абсцисс от вершины до точки с абсциссой $x = 3a$ (рис. 20).

Решение. Выразим y из уравнения параболы и найдем y':

$$y = \sqrt{4\,ax};\ \ y' = \frac{4a}{2\sqrt{4ax}} = \frac{a}{\sqrt{ax}}.$$

Теперь находим площадь поверхности вращения по формуле (22):

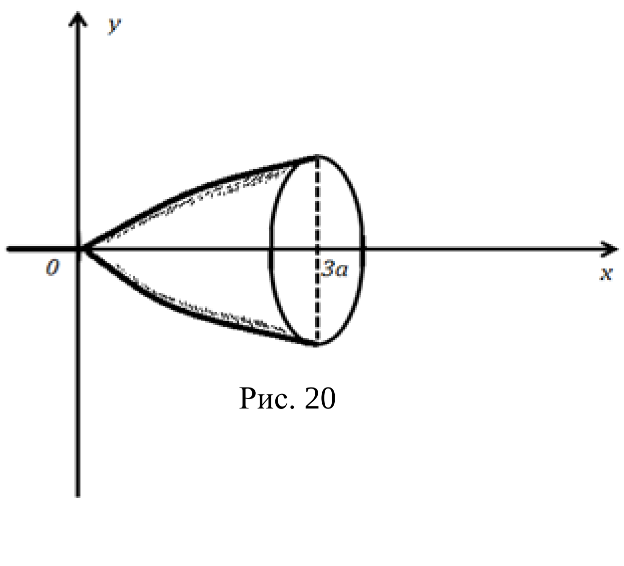


Рис. 20

$$P = 2\pi\int_0^{3a}\sqrt{4\,ax}\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{ax}}\,dx = 4\pi\int_0^{3a}\sqrt{ax\left(1+\frac{a^2}{ax}\right)} =$$

$$= 4\pi\int_0^{3a}\sqrt{ax+a^2}\ dx = \frac{4\pi}{a}\int_0^{3a}(ax+a^2)^{\frac{1}{2}}\ d(\,ax+\ a^2) =$$

$$= \frac{4\pi}{a}\cdot\frac{(\,ax+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{3a} = \frac{8\pi}{3a}(ax+a^2)\sqrt{ax+a^2}\Bigg|_0^{3a} = \frac{8\pi}{3a}\,(4a^2\cdot 2a - a^2\cdot a) =$$

$$= \frac{56\pi a^2}{3}\ (\text{кв. ед}). \approx 58{,}8\ a^2\ (\text{кв. ед.}).$$

Пример 6. Определить площадь поверхности образованной вращением кривой $x^2+4y^2=4$ вокруг оси ОХ.

Решение.

Преобразуем уравнение заданной кривой, разделив его на правую часть

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

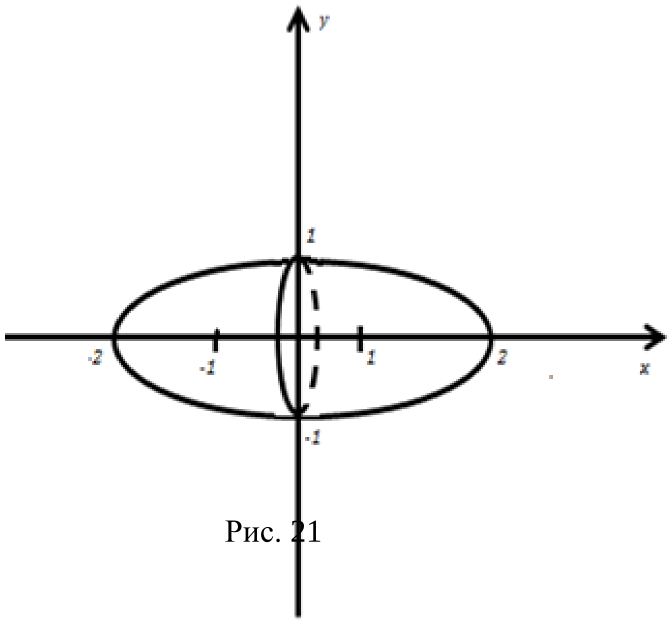


Рис. 21

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=2$ и $b=1$. Следовательно, поверхность, образованная вращением данной кривой – эллипсоид вращения (рис. 21). Выразим y из уравнения эллипса и найдем y′:

$$y = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2};$$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}.$$

По формуле (22) вычислим площадь заданной поверхности, учитывая при этом симметричность поверхности относительно оси ОУ:

$$P = 4\pi\int_0^2\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdot\ \sqrt{1+\frac{x^2}{4(4-x^2)}}\,dx = 2\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2+\frac{x^2}{4}}\ dx =$$

$$= 2\pi\int_0^2\sqrt{\frac{16-4x^2+x^2}{4}}\ dx = \pi\int_0^2\sqrt{16-3x^2}\ dx =$$

$$=\begin{bmatrix} x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin t; & x=0\Rightarrow t=0 \\ dx=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt; & x=2\ \Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\end{bmatrix}=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16-16\sin^2 t}\ \cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{16\,(1-\sin^2 t)}\cos t\ dt=\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\,dt=\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2t}{2}\ dt=$$

$$=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2t\,dt\right)=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2t\,d(2t)\right)=$$

$$=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 27{,}49\ (\text{кв. ед.}).$$

Задачи для самостоятельного решения.

[3], №2522. Найти длину дуги линии

$$y=\ln(1-x^2)\quad \text{от}\quad x_1=0\quad \text{до}\ \ x_2=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $ln3-\dfrac{1}{2}$.

2) Определить длину дуги кривой $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=\frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{112}{27}$.

3)[3], № 2538. Определить длину петли линии $x=t^2, y=t-\frac{t^3}{3}$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

4) [3], № 2537. Определить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2\,t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2\,t\sin t\end{cases}\qquad \text{от}\ t_1=0\ \ \text{до}\ \ t_2=\pi.$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{3}$.

5) Определить длину первого витка винтовой линии

$$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ z=bt.$$

Ответ: $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

6) Определить длину кривой $\rho=2a\cos\varphi$.

Ответ: $2\,\pi a$.

7) [3], № 2547. Определить длину кривой $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\pi a$.

8) [3], № 2519. Определить длину дуги цепной линии

$y = a\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2}$ от $x_1 = 0$ до $x_2 = b$.

Ответ: $a\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}$.

9) [3], № 2527. Найти периметр одного из криволинейных треугольников, ограниченных осью абсцисс и линиями $y = \ln\cos x$ и $y = \ln\sin x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\ln\mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{8}$.

10) Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси ОХ.

Ответ: $4\pi R^2$.

11) Определить площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $y = 2x$ между точками $x_1 = 2,\ x_2 = 4$ вокруг оси ординат.

Ответ: $12\sqrt{5}\ \pi$.

12) Определить площадь поверхности, образованной вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = \frac{3}{2}$ вокруг оси ординат.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 1\right)$.

2.5. Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла.

Существует две схемы, по которым в прикладных задачах приходят к определенному интегралу. Одна из них называется методом дифференциальных уравнений и заключается в следующем:

- находят дифференциал искомой величины, являющейся функцией некоторой переменной;

- путем интегрирования полученного дифференциала находят искомую величину.

Этот метод основан на том, что неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой функции (с точностью до произвольной постоянной).

Рассмотрим решение некоторых задач указанным методом.

Задача 1. ([5], №1) При пикировании под углом $\alpha = 60^0$ скорость самолета возрастает по закону:

$$v = (170 + 6t)\text{м/с}.$$

Определить потерю высоты ΔН самолетом за 5 секунд.

Решение. Поскольку скорость на прямолинейном участке пикирования, есть первая производная пути по времени, то

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{или } ds = vdt.$$

Подставляя в уравнение выражение для скорости и интегрируя, получим длину S пути пикирования

$$S = \int_0^5 (176 + 6t)dt = 176 \int_0^5 dt + 6 \int_0^5 t\,dt = 170\,t \Big|_0^5 + 6 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 =$$

$$= 850 + 75 = 925(\text{м}).$$

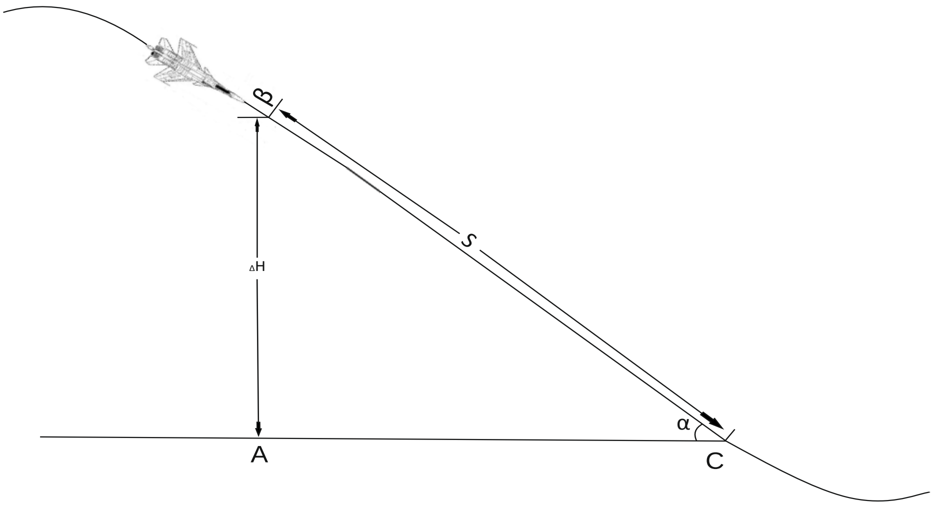


Рис. 22

Из прямоугольного треугольника ABC найдем потерю высоты ΔH:

$$\Delta\text{H} = S \cdot \sin 60^o = 925 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 800\ (\text{м}).$$

Задача 2. ([5], №10). Скорость движения тела определяется формулой

$$v = \sqrt{1 + 2t}\ \text{м/с}.$$

Найти путь, пройденный телом на первые 10 секунд после начала движения.

Решение. Найдем сначала дифференциал искомого пути, учитывая, что первая производная пути по времени есть скорость:

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{или} \quad ds = vdt.$$

Подставляя в уравнение выражение для v и интегрируя от $t_1 = 0$ до $t_2 = 10$ (так как необходимо найти путь за первые 10 секунд), получим:

$$S = \int_0^{10} \sqrt{1 + 2t}\,dt = \frac{1}{2} \int_0^{10} (1 + 2t)^{\frac{1}{2}}\, d\,(1 + 2t) = \frac{(1 + 2t)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{3}{2}} \Bigg|_0^{10} =$$

$$= \frac{1}{3}(1+2t)\sqrt{1+2t}\Big|_0^{10} = \frac{1}{3}\left(21\sqrt{21}-1\right) \text{ (м)} \approx 31{,}7 \text{ (м)}.$$

Задача 3. ([5], №10). Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения веса растет по закону:

$$a = \frac{k_1}{k_2 - k_3\, t}\ , \text{(где } k_2 - k_3\, t > 0),$$

найти скорость ракеты в момент времени $t = T$, если начальная скорость равна нулю.

Решение. Учитывая, что ускорение есть первая производная от скорости по времени, найдем дифференциал скорости:

$$\frac{dv}{dt} = a \ \text{ или } \ dv = a\, dt.$$

Поставляя в уравнение выражение для a и интегрируя в пределах от $t_1 = 0$ до $t_2 = T$, найдем искомую скорость:

$$V = \int_0^T \frac{k_1 dt}{k_2 - k_3\, t} = -\frac{k_1}{k_3}\int_0^T \frac{d\,(k_2 - k_3 t)}{k_2 - k_3 t} = -\frac{k_1}{k_3}\ln(\,k_2 - k_3 t)\Big|_0^T =$$

$$= -\frac{k_1}{k_3}\,[\ln(k_2 - k_3 T) - \ln k_2] = \frac{k_1}{k_3}\ln\frac{k_2}{k_2 - k_3 T}.$$

Задача 4. ([5], №17). Скорость точки задана уравнением

$$v = (t^2 - 3t + 5) \text{ м/с}.$$

Найти уравнение движения точки, если $S = 8$ м в момент времени $t = 0$с.

Решение. Уравнение движения точки – это зависимость пути от времени $S = S\,(t)$. Как и в задачах 1 и 3 имеем:

$$\frac{ds}{dt} = v \quad \text{или} \quad ds = vdt.$$

Подставляем сюда вместо v его выражение и интегрируем:

$$S = \int (t^2 - 3t + 5)dt = \int t^2\, dt - 3\int t\, dt + 5\int dt = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 5t + C.$$

Для того, чтобы найти значение постоянной *C*, подставим начальное условие: $S = 8$ при $t = 0$, тогда получим *C* = 8.

Следовательно, уравнение движения точки имеет вид

$$S = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 5t + 8 \text{ (м)}.$$

Задача 5. ([5], № 30). Напряжение на клеммах электрической цепи $U = 120\, B$. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 Ом в секунду. Кроме того, в цепь входит постоянное сопротивление r=10 Ом. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение двух минут?

Решение. Из курса физики известно, что величина тока есть первая производная от количества электричества по времени:

$$J = \frac{dq}{dt},$$

откуда

$$dq = J \cdot dt.$$

По закону Ома

$$J = \frac{U}{R}.$$

В нашей задаче $R = r + r_t$, где $r = 10$ Ом, r_t=0,1 Ом. Следовательно,

$$dq = \frac{U\,dt}{r + 0{,}1t}.$$

Интегрируя это равенство в пределах от $t_1 = 0$ до $t_2 = 120$ (2 мин = 120 с), найдем количество электричества q, протекающее по цепи:

$$q = \int_0^{120} \frac{U\,dt}{r + 0{,}1\,t} = \frac{U}{0{,}1}\int_0^{120} \frac{d\,(r + 0{,}1t)}{r + 0{,}1t} = \frac{U\ln(r + 0{,}1t)}{0{,}1}\Bigg|_0^{120} =$$

$$= 10U\,[\ln(r + 12) - \ln r] = 10U\ln\frac{r + 12}{r} = 10\;\cdot 120\ln\frac{22}{10} \approx 946{,}8\text{ Кл.}$$

При решении задач прикладного характера часто используется схема, которая называется методом суммирования элементов или методом интегральных сумм и заключается в следующем:

- интервал, на котором определяется искомая величина, разбивается на частные интервалы;

- составляется интегральная сумма, выражающая приближенное значение искомой величины;

-вычислением предела интегральной суммы находится искомая величина в виде определенного интеграла.

Эта схема основана на понятии определенного интеграла как предела интегральной суммы.

Задача 6. ([5], № 21). Стержень АВ вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси OO′ с угловой скоростью $\omega = 10\pi$ с^{-1}. Поперечное сечение стержня $S = 4$ см^2, длина его l=20 см, плотность материала, из которого он изготовлен ρ = 7,8 г/см^3 (стержень однородный). Найти кинетическую энергию стержня.

Решение. Для нахождения кинетической энергии W_k тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, используется формула:

$$W_k = \frac{1}{2} J\omega^2,$$

где ω - угловая скорость, J - момент инерции тела относительно оси вращения.

Для нахождения J разобьём стержень на n частей, длины которых будут $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$. Масса i - той части равна произведению ее объема на плотность:

$$\Delta m_i = \rho V_i = \rho\, S\, \Delta x_i.$$

Из курса механики известно, что момент инерции точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния ее от оси вращения. Следовательно, принимая i-ю часть стержня за точку, расположенную на расстоянии x_i от оси, находим ее момент инерции:

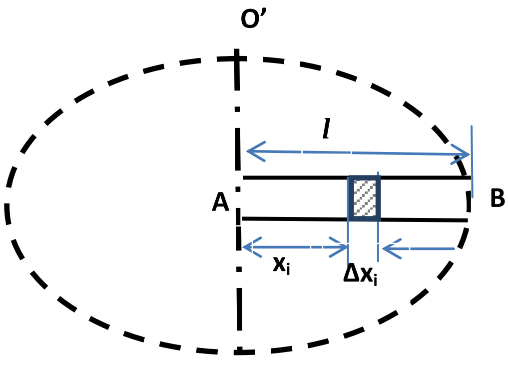


Рис. 23

$$\Delta J \approx \Delta m_i\, x_i^2 = \rho\, S\, x_i^2\, \Delta x_i.$$

Момент инерции стержня будет приближенно равен сумме моментов инерции частей, на которые его разбили. Итак, переходя к пределу, получим момент инерции стержня:

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{i-1}^{n} \Delta J_i = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to \infty \\ (n\to\infty)}} \sum_{i-1}^{n} S\, \rho\, x_i^2\ \Delta x_i = \int_0^l S\, \rho\, x^2\ dx = S\, \rho\, \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{1}{3} S\, \rho\, l^3.$$

Таким образом, получим:

$$W_k = \frac{1}{6} S\, \rho\, l^3 \omega^2 = \frac{1}{6} \cdot 4\ \cdot 7{,}8\ \cdot 8000 \cdot 10\pi \approx 4{,}16 \cdot 10^7 \text{ эрг} = 4{,}16 \text{ Дж}.$$

Задача 7. ([5], №35). Определить работу, совершенную двигателем при подъеме ракеты весом P=1,5 т с поверхности Земли на высоту H=2000 км, если радиус Земли R=6400 км.

Решение. Как известно, работа, совершенная переменной силой F(S) на прямолинейном участке $[a; b]$, вычисляется по формуле:

$$\text{A} = \int_a^b F(S) ds\,.$$

Найдем действующую силу. Сила F притяжения тела Землей или вес тела зависит от его расстояния S от центра Земли:

$$F(S) = \frac{\lambda}{S^2},$$

где λ - постоянная. Вычислим ее. Если P - есть вес тела, когда оно находится на поверхности Земли, т.е. на расстоянии земного радиуса R от центра Земли, то

$$P = \frac{\lambda}{R^2} \Leftrightarrow \lambda = PR^2.$$

Подставив значение λ, получим величину силы F, преодолеваемую двигателем поднимающейся ракеты в момент, когда она находится на расстоянии S от центра Земли:

$$F(S) = \frac{PR^2}{S^2}.$$

При подъеме ракеты с поверхности Земли на высоту H переменная S изменяется от R до $R+$ H. Поэтому, искомая работа будет:

$$\mathrm{A} = \int_R^{R+H} \frac{PR^2}{S^2}\, ds = PR^2 \int_R^{R+H} S^{-2}\, ds = PR^2 \frac{S^{-1}}{-1} \Bigg|_R^{R+H} = -PR^2 \frac{1}{S} \Bigg|_R^{R+H} =$$

$$= -PR^2 \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = \frac{PRH}{R+H} = \frac{1{,}5 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 6400 \cdot 1000 \cdot 2000 \cdot 1000}{8400 + 1000} \approx$$

$\approx 22{,}4 \cdot 10^3$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения.

1) [5], №3. Вертикальная скорость самолета Миг-17 при наборе высоты изменяется по закону

$$v_y = (50 - 0{,}003H)\ \text{м/с}.$$

Найти время, необходимое для набора высоты 7 км.

Ответ: 4,8 мин.

2) [5], №18. Скорость точки задана уравнением

$$v = 5 \sin 3t\ \text{м/с}.$$

Найти уравнение движения точки, если $S = 3$ м при $t = 0$.

Ответ: $-\frac{5}{3}\cos 3\,t + \frac{14}{3}$ (м)

3) [5], №20. Стержень AB, длина которого l, масса M, притягивает точку C массой m, которая лежит на его продолжении на расстоянии a от ближайшего конца B стержня. Найти силу взаимодействия стержня и точки. Какую точечную массу нужно поместить в точке A для того, чтобы она действовала на точку C с той же силой, что и стержень AB? Какую работу совершит сила притяжения, когда точка, отстоявшая от стержня на расстоянии R_1, приблизится к нему на расстояние R_2, двигаясь вдоль прямой, составляющей продолжение стержня?

Ответ: $\frac{km\,M}{a(a+l)}$; $\frac{a+l}{a}M$; $\frac{km\,M}{l}\ln\frac{R_1(R_2+l)}{R_2(R_1+l)}$.

4) [5], №38. Вычислить работу, совершенную при сжатии винтовой пружины на 6 см, если известно, что при сжатии пружины на 0,5 см была приложена сила в 0,75 кг.

Ответ: 2,6 Дж.

Таким образом, широк круг прикладных задач, которые решаются с помощью определенного интеграла. Подчеркнем при этом, что для решения всех типов задач используется один и тот же интеграл

$$\int_a^b f(x)dx.$$

В зависимости от смысла подынтегральной функции, интеграл определяет различные величины, а именно, если:

$-f(x)$ является графиком функции, ограничивающим сверху криволинейную трапецию, то интеграл вычисляет площадь этой трапеции;

$-\ f(x)=\sqrt{1+(y')^2}$, то интеграл вычисляет длину дуги линии;

$-f(x)=2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$, то интеграл вычисляет площадь поверхности вращения;

$-f(x)=v$ есть скорость прямолинейного движения, то интеграл вычисляет пройденный за время $b-a$ путь;

$-f(x)=a$ есть ускорение движения, то интеграл вычисляет скорость этого движения;

$-f(x)=J$ есть величина тока в цепи, то интеграл вычисляет количество электричества в этой цепи за время $b-a$;

$-f(x)=S\rho x^2$ есть произведение массы вращающегося вокруг неподвижной оси стержня на квадрат расстояния до оси, то интеграл вычисляет момент инерции стержня относительно оси;

$-f(x)$ есть действующая на тело сила, то интеграл вычисляет работу силы по прямолинейному перемещению тела на расстояние $b-a$.

Перечисленные задачи говорят о том, что интегральное исчисление является достаточно общим и эффективным средством исследования процессов и явлений объективного мира.

2.6. Несобственные интегралы.

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от разрывных функций.

Интегралы с бесконечными пределами
(несобственные интегралы I рода).

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\int_{a}^{N} f(x)dx. \qquad (23)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует или равен бесконечности, – *расходящимся.*

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx \qquad (24)$$

Наконец,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (25)$$

где с - произвольная точка. Интеграл в левой части называется *сходящимся*, если оба интеграла в правой части равенства (25) сходятся, и называется *расходящимся*, если хотя бы один из указанных интегралов расходится.

Исходя из определения несобственных интегралов, вычислить следующие интегралы (или установить их расходимость):

Пример 1. Вычислить интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx.$$

Решение. В силу определения (24) имеем:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x}\,dx = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\int_{\mathrm{A}}^{1} e^{2x}\,dx = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\frac{1}{2}\int_{\mathrm{A}}^{1} e^{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}\lim_{\mathrm{A}\to-\infty} e^{2x}\Big|_{A}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\mathrm{A}\to-\infty}(e^{2} - e^{2\mathrm{A}}) = \frac{1}{2}e^{2},$$

так как $e^{2\mathrm{A}} \to 0$ при $\mathrm{A} \to -\infty$. Таким образом, интеграл сходится.

Пример 2. ([3], №2371). Вычислить интеграл или доказать его расходимость

$$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$$

Решение. По формуле (23) имеем:

$$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{2}^{N}\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_{2}^{N}\ln x\, d\,(\ln x) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_2^N = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}(\ln^2 N - \ln^2 2) = +\infty,$$

так как $\ln N \ \to +\infty$, следовательно, интеграл расходится.

Пример 3. ([3], №2370).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Решение. По формуле (25) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

Вычисляем первый интеграл правой части, пользуясь формулой (24):

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\int_{\mathrm{A}}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\int_{\mathrm{A}}^{0} \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1} =$$

$$= \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\int_{\mathrm{A}}^{0} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Bigg|_A^0 =$$

$$= \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}[\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(\mathrm{A}+1)] = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Вычислим второй интеграл правой части, пользуясь формулой (23):

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{N} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{N\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+1)\Bigg|_0^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}[\operatorname{arctg}(N+1) - \operatorname{arctg} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя найденные значения интегралов, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Таким образом, данный интеграл сходится.

Пример 4. ([3], №2369).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

Решение. По формуле (25) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}.$$

Вычислим первый интеграл правой части, пользуясь формулой (24):

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\ln(x^2+1)\Big|_{A}^{0}=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}[\ln 1-\ln(A^2+1)]=-\infty.$$

Итак, последний интеграл расходится. Следовательно, расходится и заданный интеграл.

Пример 5. ([3], №2313). Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}.$$

Решение. В том случае, когда подынтегральная функция содержит $\sin x$ и $\cos x$ только в четных степенях, используется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}=\begin{bmatrix}\operatorname{tg} x=t, \qquad x=\operatorname{arctg} t \\ \sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \qquad dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ x=0\Rightarrow t=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\infty\end{bmatrix}=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{6\,(1+t^2)}}=\int_{0}^{\infty}\frac{6\,(1+t^2)dt}{(1+t^2)(6+6t^2+t^2)}=6\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{6+7t^2}=$$

$$=\frac{6}{7}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{\frac{6}{7}+t^2}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{7}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{6}{7}}}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{6}{7}\sqrt{\frac{7}{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{6}}\,t\Bigg|_{0}^{\infty}=$$

$$=\sqrt{\frac{6}{7}}\,(\operatorname{arctg}\infty-\operatorname{arctg}0)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}\approx 1{,}46.$$

Интегралы от разрывных функций
(несобственные интегралы II рода).

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке a отрезка $[a,\ b]$, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то полагают:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad (\varepsilon>0) \qquad (26)$$

Несобственный интеграл в левой части называется *сходящимся*, если существует и конечен предел в правой части равенства (26), и называется *расходящимся*, если указанный предел бесконечен или не существует.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющий бесконечный разрыв на правом конце отрезка $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx \qquad (\delta > 0). \tag{27}$$

Наконец, если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{28}$$

Интеграл в левой части называется *сходящимся*, если оба интеграла в правой части равенства (28) сходятся, и называется *расходящимся*, если хотя бы один из интегралов правой части расходится.

Исходя из определения несобственных интегралов, вычислить следующие интегралы (или установить их расходимость).

Пример 5. ([3], №2394). Исследовать на сходимость $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Решение. Функция $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна при $0 < x < 1$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, поэтому, в силу равенства (27), имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to 0} \arcsin x \Bigg|_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}[\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, данный интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. ([3], №2399)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$$

Решение. Функция $\frac{1}{x\ln x}$ непрерывна при $1 < x < 2$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$, (так как $\ln 1 = 0$). Поэтому, в силу равенства (26), имеем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\ln x \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)] = \infty.$$

Так как $\ln x \to -\infty$ при $x \to 0$. Значит, данный интеграл расходится.

Пример 7.

$$\int_0^3 \frac{xdx}{x^2-4}$$

Решение. Функция $\frac{x}{x^2-4}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=2$, лежащей внутри отрезка $[0;3]$. Поэтому на основании формулы (28) имеем:

$$\int_0^3 \frac{xdx}{x^2-4} = \int_0^2 \frac{xdx}{x^2-4} + \int_2^3 \frac{xdx}{x^2-4}.$$

Вычислим первый интеграл правой части, пользуясь определением (27):

$$\int_0^2 \frac{xdx}{x^2-4} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{2-\delta} \frac{xdx}{x^2-4} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{2-\delta} \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\ln|x^2-4| \Bigg|_0^{2-\delta} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left(\ln|4-4\delta+\delta^2-4| - \ln|-4|\right) = -\infty.$$

Итак, интеграл расходится, значит, заданный интеграл тоже расходится (вычислить второй интеграл в правой части равенства нет необходимости).

Пример 8.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Решение. Функция $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка $[0;2]$. Поэтому на основании формулы (28) имеем:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Вычислим первый интеграл правой части, пользуясь определением (27):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} \sqrt[3]{(x-1)^2} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} (x-1)^{-\frac{2}{3}} d\,(x-1) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_0^{1-\delta} = 3\lim_{\delta\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Bigg|_0^{1-\delta} = 3\lim_{\delta\to 0}\left(\sqrt[3]{1-\delta-1} - \sqrt[3]{-1}\right) = 3.$$

Теперь вычислим второй интеграл правой части, пользуясь определением (26):

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt[3]{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{2-1} - \sqrt[3]{1+\varepsilon-1}\right) = 3.$$

Таким образом, искомый интеграл сходится и

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3+3 = 6.$$

Рассмотрим теперь приложения несобственных интегралов.

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = e^{-2x}$ и осями координат (при $x > 0$).

Решение. Искомую площадь (рис. 24) вычислим по формуле:

$$S = \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx.$$

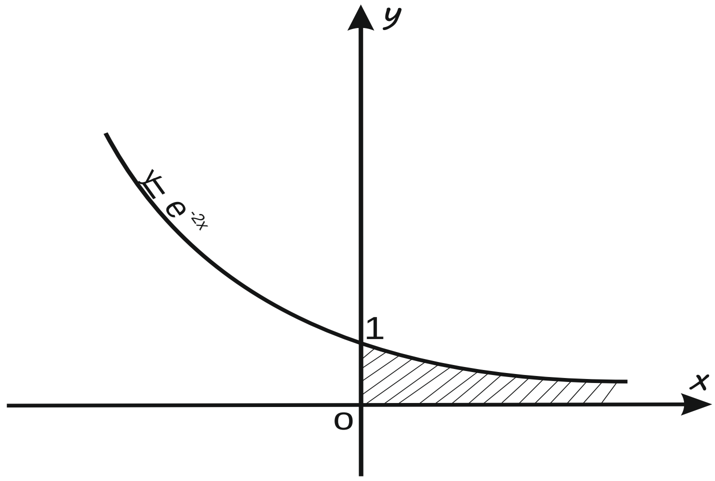


Рис. 24

Площадь выражается несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом, поэтому, в силу формулы (23), получаем:

$$S = \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N} e^{-2x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{N} e^{-2x}\,d(-2x)\right],$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} e^{-2x}\Big|_0^N = -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}\Big|_0^N = -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2N}}-\frac{1}{e^{0}}\right) = \frac{1}{2}$$

поскольку $\frac{1}{e^{2N}} \to 0$ при $N \to \infty$. Таким образом, несобственный интеграл сходится, а искомая площадь равна 0,5 кв.ед.

Пример 10. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, заключенной между линиями: $xy = 4,\ y = 1,\ x = 0$ (рис. 25).

Решение. Объем вычислим по формуле, аналогичной (18). Имеем

$$V = \pi\int_1^{\infty} x^2(y)\,dy = \pi\int_1^{\infty}\left(\frac{4}{y}\right)^2 dy.$$

Это несобственный интеграл I рода. Для его вычисления используем формулу (23):

$$V = 16\pi\int_1^{\infty}\frac{dy}{y^2} = 16\pi\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dy}{y^2} = 16\pi\lim_{N\to\infty}\int_1^{N} y^{-2}dy = 16\pi\lim_{N\to\infty}\frac{y^{-1}}{-1}\Big|_1^N =$$

$$= -16\,\pi\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{y}\Bigg|_{1}^{N} = -16\pi\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}-1\right) = 16\pi\ (\text{куб. ед.}) \approx 50{,}24\ (\text{куб. ед.}).$$

Пример 11. ([5], №35). Определить работу, совершенную двигателем при подъеме ракеты весом Р= 1,5 т с поверхности Земли до полного освобождения ракеты от земного притяжения (без учета движения Земли).

Решение. В задаче №7 предыдущего раздела показано, что сила Р, преодолеваемая двигателем поднимающейся ракеты, находящейся на расстоянии S от центра Земли, выражается формулой:

$$F(S) = \frac{PR^2}{S^2},\ \text{где } R \text{ - радиус Земли (6400 км).}$$

Тогда искомая работа равна:

$$A = \int_R^{\infty}\frac{PR^2}{S^2}\,ds = PR^2\lim_{N\to\infty}\int_R^N S^{-2}ds = -PR^2\lim_{N\to\infty}\frac{1}{S}\Bigg|_R^N = -PR^2\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{R}\right) =$$

$$= PR = 1{,}5\ \cdot 1000\ \cdot 9{,}8\ \cdot 6400\ \cdot 1000\ \approx 94{,}2\ \cdot 10^7\ \text{Дж.}$$

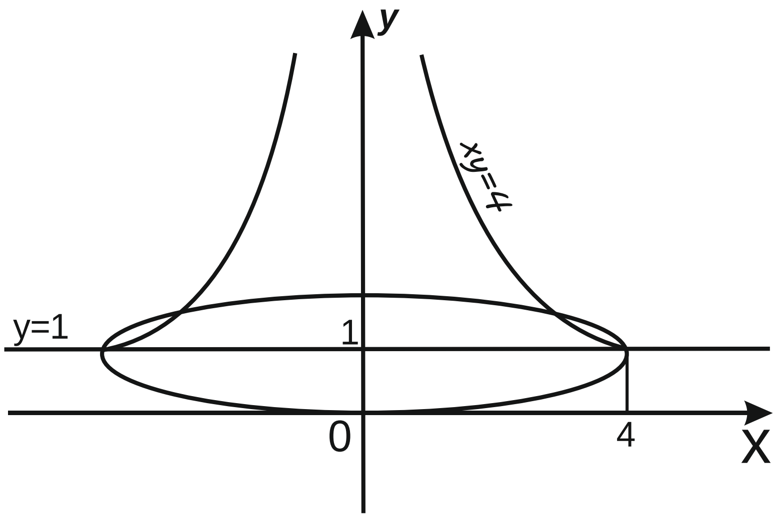


Рис. 25

Первые несобственные сходящиеся интегралы вычисляли З. Торричелли (1643) и Х. Роберваль (1642). При этом итальянский физик и математик З. Торричелли (1606-1647) вычислил несобственный интеграл с бесконечным пределом (объем тела, образованного вращением гиперболы $xy = 2k^2$ вокруг оси Оу`).

Французский математик Х. Реберваль (1602-1675) геометрически вычислил сначала интеграл от разрывной функции, а затем и интеграл с бесконечными пределами. Работа З. Торричелли произвела сенсацию. Парадоксы, возникающие при вычислении интегралов от разрывных функций, были отмечены выдающимся петербургским академиком Л. Эйлером

(1707-1783) и французским математиком И. Даламбером (1717-1783). Вопрос приобрел четкость и ясность в трудах французского математика О. Коши (1789-1857). Его результаты относятся к 1814 г., а опубликованы в 1823 г. Термин «несобственный интеграл» также предложил О. Коши. Название «интеграл с бесконечным пределом» ввел в 1902 г. английский математик Г. Харди (1877-1947).

Задачи для самостоятельного решения.

1) [3], № 2367. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Ответ: расходится.

2) [1], № 2378. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_0^{\infty} x\sin x\,dx$.

Ответ: расходится.

5. [1], № 2396. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

Ответ: $\frac{8}{3}$.

9. ([1], № 2713.) Два электрических заряда $q_1 = 6{,}67\ \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 10\ \cdot 10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии 10 см друг от друга. Разделяющей их средой служит воздух. Сначала оба заряда закреплены неподвижно, затем заряд q_2 освобождается. Тогда под действием силы отталкивания заряд q_2 начнет перемещаться, отталкиваясь от заряда q_1. Какую работу совершит сила отталкивания, когда заряд удалится в бесконечность?

Ответ: $6\ \cdot 10^{-6}$ Дж.

10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ох дуги кривой $y = e^{-x}$ от x=0 до x=+∞.

Ответ: $\pi[\sqrt{2} + \ln\,(1 + \sqrt{2})](\text{кв. ед.})$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Трудно назвать научную область, в которой бы не применялись математические методы изучения реальных объектов и явлений. Одним из важнейших разделов математики, используемых для описания и решения прикладных задач, является интегральное исчисление. Интегрирование широко применяется в теории дифференциальных уравнений, теории поля, рядах Фурье. В физике с помощью определенного интеграла вычисляют работу переменной силы, а также массу, моменты инерции, координаты центра тяжести плоских фигур и линий, количество теплоты и т.д. Это далеко не исчерпывающий список задач, которые используют интегрирование, но даже они показывают широкое применение этого метода при решениии прикладных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Г.Н. Берман. – М.: «Альянс», 2016.
2. Демидович, Б.П., Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики. / Б. П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: АСТ, 2004.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления в 2т. Т 1. / Н.С. Пискунов. – М.: « Интеграл-Пресс», 2004.
4. Щипачев, В.С. Высшая математика: учебник / В.С. Щипачев. – М.: «ИНФРА-М», 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Неопределенный интеграл……………………………………………… …3

1.1. Непосредственное интегрирование………………………….… … .4

1.2. Введение под знак дифференциала ……………………..………… 10

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле…………………… 17

1.4. Интегрирование по частям…………………………………………… ..19

1.5. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе……………………………………………………..……… …..23

1.6. Интегрирование рациональных дробей…………………………..… …27

1.7. Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций…………………………………………………………………………..32

1.8. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок………………………………...…………… 37

2. Определенный интеграл……………………………………………..… …40

2.1. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница………………………………………………………… …40

2.2. Вычисление определенного интеграла по частям и заменой переменной………………………………………………………………………. 48

2.3. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения с помощью определенного интеграла…………………………………………… 54

2.4. Вычисление длины дуги линии и площади поверхности вращения с помощью определенного интеграла……………………………………..…..… 65

2.5. Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла………………………………………………………………… 71

2.6. Несобственные интегралы…………………………………………….. 77

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………….... 85

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……………………………..……..… 86

Филиал федерального государственного казенного военного образовательного учреждения высшего образования
«Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил
«Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
(г. Воронеж) Министерства обороны Российской Федерации в г. Челябинске

Ю.А. Ахкамова, Т.П. Гаврилова

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Корректура:
Г.Г. Арепьева

Компьютерная верстка:
А.И. Федорова

Формат издания 60x84/16 Усл.-печ. Листов 5,5
Подписано в печать 09.06.17. Бесплатно Тираж 130 экз.
2019 год Заказ № 38

Типография филиала ВУНЦ ВВС «ВВА» в г. Челябинске