БИБЛИОТЕЧКА СТУДЕНТА

ЧГПУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛА «МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА»

1999

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ РАЗДЕЛА «МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА»

Челябинск, 1999

Методические указания для студентов по изучению раздела «Метрические пространства». Челяб.гос. педагогический университет Челябинск, 1999, 15 с.

Методические указания предназначены для студентов второго курса математического факультета педагогических вузов. В них излагается теоретический материал по одному из важных разделов математического анализа, приводятся примеры и предлагаются упражнения для закрепления материала.

Составитель: Коржакова С.В. – конд.пед.наук доц.кафедры матем.анализа ЧГПУ
Рецензент: Макаров А.С. – конд.физ-мат.наук, доц., зав.каф.матем.анализа ЧГПУ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Пусть X – некоторое непустое множество. Говорят, что оно наделено метрической структурой (метрикой), если любой паре элементов $(x, y) \in X$ поставлено в соответствие одно и только одно неотрицательное число $\rho(x, y) \geq 0$ так, что выполняются условия (аксиомы метрики):

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества)
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии)
3. $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника)

В этом случае множество X называется метрическим пространством, а его элементы – точками метрического пространства (независимо от того, какова природа этих элементов).

ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Пример 1. R – множество действительных чисел – метрическое пространство, если $\rho(x, y) = | x - y |$

Пример 2. $R^n - n -$ мерное евклидовое пространство – метрическое пространство. Покажем это. Пусть $p = p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $q = q(x_1, x_2, ..., x_n)$. Определим метрику в этом пространстве следующим образом:

$$\rho(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Проверим аксиомы метрики. Первые две очевидны. Проверим третью аксиому. Пусть $r = r(z_1, z_2, ..., z_n)$, докажем, что $\rho(p, q) \leq \rho(p, r) + \rho(r, q)$, т.е.

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^n} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + ... + (x_n - z_n)^n} +$$
$$+ \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + ... + (y_n - z_n)^n} \qquad (1)$$

Введем обозначения: $x_k - z_k = a_k$, k = 1,2,…,n

$$z_k - y_k = b_k \Rightarrow x_k - y_k = a_k + b_k \qquad (2)$$

подставим (2) в (1)

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

возведем в квадрат:

$$a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+\ldots+a_n^2+2a_nb_n+b_n^2 \le a_1^2+\ldots+a_n^2+\ldots+b_1^2+\ldots+b_n^2+$$
$$2\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2},$$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2),$$

$$a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\ldots+a_n^2b_n^2+2a_1b_1a_2b_2+2a_1b_1a_3b_3+\ldots+2a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n) \le$$
$$\le (a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\ldots+a_n^2b_n^2)+(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+\ldots+a_{n-1}^2b_n^2+a_n^2b_{n-1}^2)$$

$$0 \le (a_1^2b_2^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2)+\ldots+(a_{n-1}^2b_n^2-2a_{n-1}b_na_nb_{n-1}+a_n^2b_{n-1}^2)$$

$0 \le (a_1b_2-a_2b_1)^2+\ldots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2$ - очевидное неравенство.

Третья аксиома выполняется, R^n - метрическое пространство.

Пример 3. $C_{[0,1]}$ - пространство функций непрерывных на отрезке $[0,1]$ - метрическое пространство, если $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$

Легко проверить, что $\forall x(t), \forall y(t) \in C_{[0,1]} \exists \rho(x,y)$. Так как x(t), y(t) – непрерывны на [0,1], то и их разность есть функция непрерывная, а следовательно достигает на нем своего максимума, т.е. $\exists \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$

Проверим аксиомы метрики.

1. $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=0 \Rightarrow |x(t)-y(t)|=0 \Rightarrow$ x(t) = y(t), обратно, если

   $\forall t\in[0,1], x(t)=y(t) \Rightarrow \forall t\in[0,1], |x(t)-y(t)|=0 \Rightarrow \max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=0 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \rho(x,y)=0$

2. $\rho(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=\rho$ (y,x).

3. $\forall t\in[0,1] \quad |x(t)-z(t)| \le |x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)| \Rightarrow$

$$\rho(x,z)=\max_{t\in[0,1]}|x(t)-z(t)|\le \max_{t\in[0,1]}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\le$$
$$\le\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|+\max_{t\in[0,1]}|y(t)-z(t)|=\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

т.е. $C_{[0,1]}$ с заданной метрикой есть метрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Является ли метрикой на множестве натуральных чисел функция
$$\rho(x,y)=\frac{|x-y|}{xy}$$
2. Является ли множество действительных чисел метрическим пространством, если расстояние между элементами этого множества определить так:
   a) $\rho(x,y)=\max(|x|,|y|)$,
   b) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$,
   c) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$,
   d) $\rho(x,y)=arctgx-arctgy$.
3. Показать, что множество всех непрерывных функций на [a,b] образует метрическое пространство, если расстояние между двумя функциями задать формулой:
$$\rho(x,y)=\int_b^a|x(t)-y(t)|dt$$

МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Определение 1. Совокупность точек x метрического пространства X таких, что ρ (x,a) < r, где a- фиксированная точка из X, а r- положительное число, называется открытым шаром радиуса r с центром в точке a и обозначается S(a,r), т.е. $S(a,r)=\{x\in X/\rho(x,a)<r\}$

Определение 2. Множество $M\subset X$ называется ограниченным, если оно содержится внутри некоторого шара.

Определение 3. Назовем окрестностью точки x любой открытый шар с центром в этой точке.

Определение 4. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества М, если имеется окрестность S(x, r) такая, что $S(x,r) \subset M$, т.е. точка $x \in X$ содержится в М с некоторой окрестностью.

Определение 5. Множество G точек из X, все точки которого внутренние, называется открытым.

Определение 6. Точка $a \in X$ называется предельной для множества, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества М, отличную от а. Предельные точки множества М обозначаются M'.

Определение 7. Если $a \in M$ не является предельной для М, то она является изолированной.

Определение 8. Множество М называется замкнутым, если оно содержит свои предельные точки.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти предельные точки множества рациональных чисел.
2. Множество М состоит из точек плоскости вида (1/m, 1/n), где m, n $\in N$. Найти M'
3. Является ли множество $M = \{(x,y) \in R, r \leq (x-y)^2 + (y-b)^2 \leq R\}$ открытым, замкнутым, ограниченным?

СХОДИМОСТЬ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Точка $x_0 \in X$ называется пределом последовательности (x_n) точек метрического пространства X, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

В качестве примеров рассмотрим сходимость в пространствах R^n и $C_{[0,1]}$

Пример 1. Сходимость в пространстве R^n является покоординатной.

Теорема. Для того, чтобы последовательность (x_n) точек К-мерного пространства R^k сходились к точке $C \in R^k$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности, составленные из соответствующих координат точек последовательности (x_n) сходились к координатам точки С.

Доказательство:

Необходимость: Пусть $(x_n) = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{kn})$ - последовательность точек пространства R^k, $c = (c_1, c_2, ..., c_k)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$, тогда

$$| a_{1n} - c_1 | \leq \sqrt{(a_{1n} - c_1)^2 + (a_{2n} - c_2)^2 + ... + (a_{kn} - c_k)^2} = \rho(x_n, c) \to 0, \text{ или}$$

$| a_{1n} - c_1 | \to 0, a_{1n} \to c,$. Аналогично $| a_{in} - c_i | \underset{n \to \infty}{\to} 0$, $\forall i = 2,3,...,k$.

Достаточность: Пусть $a_{1n} \to c_1, a_{2n} \to c_2, ..., a_{kn} \to c_k$.

Покажем, что $x_n \to c$

$$\rho(x_n, c) = \sqrt{(a_{1n} - c_1)^2 + (a_{2n} - c_2)^2 + ... + (a_{kn} - c_k)^2} \to 0 \Rightarrow \rho(x_n, c) \to 0 \Rightarrow x_n \to C$$

Пример 2. Сходимость в пространстве $C_{[0,1]}$ равномерная.

Рассмотрим $(x_n = x_n(t))_{m=1}^{\infty}$, $x_n(t) \in C_{[0,1]}$ и пусть $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$,

т.е. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall nЮ > N \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon)$, или

$\max\limits_{t \in [0,1]} | x_n(t) - x_0(t) | < \varepsilon, \forall n > N$, т.е. $\forall t \in [0,1] \Rightarrow \quad | x_n(t) - x_0(t) | < \varepsilon$,

но это означает, что $x_n(t) \to x_0(t)$ равномерно на [0,1].

Покажем, что выполняется и обратное, т.е. если $x_n(t)$ *и* $x_0(t)$ непрерывны на [0,1] и $x_n(t) \to x_0(t)$ равномерно на [0,1], то $x_n(t) \to x_0(t)$ в смысле метрики пространства $C_{[0,1]}$.

В самом деле, пусть $x_n(t) \to x_0(t)$ равномерно, т.е.

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall n > N, \forall t \in [0,1] \Rightarrow | x_n(t) - x(t)_0) | < \varepsilon)$, следовательно,

$\max\limits_{t\in[0,1]} | x_n(t) - x_0(t) | < \varepsilon$ или $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ в смысле метрики пространства $C_{[0,1]}$.

Вывод: сходимость в пространстве $C_{[0,1]}$ есть равномерная сходимость на [0,1].

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, сходится ли последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ к функции f(x) = 0 в пространстве $C_{[0,1]}$.
2. Проверить, сходится ли последовательность $f_n(x) = xe^{-nx}$ к функции f(x)=0 в пространстве $C_{[0,1]}$

ПОЛНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Последовательность (x_n) точек метрического пространства X называется фундаментальной, если

$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N, \forall p \in N \Rightarrow \rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)$

Теорема. Если последовательность (x_n) точек метрического пространства X имеет предел, то она является фундаментальной.

Доказательство:

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad a \in X \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N, \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon/2)$.

Рассмотрим $\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_{n+p}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,

$\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad (x_n)$ - фундаментальная.

Замечание. Обратная теорема неверна. Фундаментальная последовательность точек метрического пространства может и не иметь предела, принадлежащего этому пространству.

Пример 1. Q – множество рациональных чисел не является полным. Действительно, последовательность 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;.. значений $\sqrt{2}$ по недостатку, является фундаментальной, но сходится к $\sqrt{2}$, числу, которое не является рациональным, т.е. данная последовательность не имеет предела в пространстве Q.

Определение. Если любая фундаментальная последовательность точек метрического пространства X имеет предел, принадлежащий этому пространству, то X называется полным.

Пример 2. R – множество действительных чисел – полное метрическое пространство. Действительно, любая фундаментальная последовательность точек пространства R имеет предел, принадлежащий R, на основании критерии Коши сходимости числовой последовательности.

Пример 3. R^k – полное метрическое пространство. Действительно, пусть (x_n) произвольная фундаментальная последовательность точек пространства R^k. Пусть $(x_n) = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots a_{kn})$, тогда $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(n > N, \forall p \in N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon)$.

Оценим $|a_{1\,(n+p)} - a_{1n}|$.

$$|a_{1\,(n+p)} - a_{1n}| \le \sqrt{(a_{1(n+p)} - a_{1n})^2 + \ldots (a_{k(n+p)} - a_{kn})^2} = \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$$

$\Rightarrow \quad | a_{1(n+p)} - a_{1n} | \; < \; \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; (a_{1n})$ - фундаментальная, поэтому в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности она имеет предел, т.е.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{1n} = c_1$, аналогично $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_{in} = c_i, \forall i = 1,2\ldots,k.$ Так как $c = (c_1, c_2, \ldots c_k)$ $\in \; R^k$, и сходимость в пространстве R^k является покоординатной, то полученное означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

Пример 4. $C_{[0,1]} = \{x=x(t)$ – непрерывных на $[0,1]\}$ – полное метрическое пространство

Пусть $x_n = x_n(t)$ – фундаментальная последовательность в $C_{[0,1]}$, тогда

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N, \forall p \in N \Rightarrow \rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\max_{t\in[0,1]} | x_n(t) - x_{n+p}(t) | \; < \; \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; | x_n(t) - x_{n+p}(t) | \; < \; \varepsilon, \quad \forall n,p > N, \quad \forall t \in [0,1]$$

Это означает, что для последовательности $(x_n(t))$ выполняется критерий Коши сходимости $\forall t \in [0,1]$, а значит эта последовательность имеет предел, т.е.

$\exists x_0 = x_0(t)$ такая, что $x_n(t) \to x_0(t)$ $на$ $[0,1]$. По теореме Вейерштрасса $x_0(t)$ непрерывна как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, т.е. $x_0(t) \in C_{[0,1]}$, а т.к. в пространстве $C_{[0,1]}$ равномерная сходимость есть в то же время сходимость по метрике, то $x_n \to x_0$ и в смысле метрики пространства $C_{[0,1]}$.

Итак, любая фундаментальная последовательность в $C_{[0,1]}$ имеет предел, т.е. $C_{[0,1]}$ – полное метрическое пространство.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что фундаментальная последовательность ограничена. Верно ли обратное утверждение? Привести пример.
2. Привести отрицание определения фундаментальной последовательности.
3. Будет ли метрическое пространство E = [0,1] с метрикой ρ (x, y) = |x, y| полным.
4. Исследовать на полноту следующие метрические пространства:

   a) R – множество всех действующих чисел.

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & при \quad x \neq y \\ 0, & при \quad x = y \end{cases}$$

   b) R – то же,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{1-(x-y)^2}, & при \quad x \neq y \\ 0 & при \quad x = y \end{cases}$$

ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема Банаха. Пусть f – отображение полного метрического пространства в себя, причем для любых точек x и y этого пространства выполняет неравенство

$$\rho(f(x), f(y) \leq a\rho(x,y) \qquad (1),$$

где $a \in R$, $0 < a < 1$, тогда существует единственная точка $c \in x$ *такая, что* $f(c) = c$.

Определение. Точка с называется неподвижной точкой отображения f; отображение, удовлетворяющее (1), называется сжатым.

Сама теорема называется принципом сжатых отображений или принципом неподвижной точкой.

Доказательство:

Построим последовательность (x_n) следующим образом. Возьмем $\forall x_0 \in X$. Найдем $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,…, $x_n = f(x_{n-1})$,…

Так как f – отображение X в себя, то все $x_n \in X$.

1) Докажем, что (x_n) – фундаментальная последовательность. Имеем

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_0), f(x_1)) \le a\rho(x_0, x_1) = a\rho(x_0, f(x_0))$$

$$\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \le a\rho(x_1, x_2) \le a^2 \rho(x_0, f(x_0))$$

$\rho(x_3, x_4) \le a^3 \rho(x_0, f(x_0))$ и т.д., по индукции можно доказать, что

$\rho(x_n, x_{n+1}) \le a^n \rho(x_0, f(x_0)) \quad \forall n \in N$. Тогда

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) <$$

$$< a^n \rho(x_0, f(x_0)) + a^{n+1} \rho(x_0, f(x_0)) + \ldots a^{n+p-1} \rho(x_0, f(x_0)) = \rho(x_0, f(x_0)) \frac{a^n - a^n a^p}{1-a} =$$

$$= \rho(x_0, f(x_0)) \frac{a^n - a^{n+p}}{1-a} < \rho(x_0, f(x_0)) \frac{a^n}{1-a}$$

Итак: $\rho(x_n, x_{n+p}) < \rho(x_0, f(x_0)) \dfrac{a^n}{1-a}$

Так как $0 < a < 1 \Rightarrow \dfrac{a^n}{1-a} \to 0 \Rightarrow p(x_n, x_{n+p}) \to 0 \Rightarrow (x_n)$ - фундаментальная последовательность. Но X – полное метрическое пространство, а значит любая фунда-

$$\rho(c, f(c)) \le \rho(c, x_n) + \rho(x_n, f(c)) = \rho(c, x_n) + \rho(f(x_{n-1}), f(c)) \le$$
$$\le \rho(c, x_n) + a\rho(x_n, c) = \rho(x_n, c)(1+a),$$
$$\rho(x_n, c) \to 0 \Rightarrow \rho(x_n, c)(1+a) \to 0 \Rightarrow \rho(c, f(c)) \to 0 \quad при \quad n \to \infty$$
$$\rho(c, f(c)) = 0 \to f(c) = c$$

3) Докажем единственность точки с.

Предположим, что существуют две неподвижные точки отображения $c \ne d$ тогда:

$$\rho(c,d) = \rho(f(c), f(d)) < a\rho(c,d),$$
$$\rho(c,d) \le a\rho(c,d); \quad \rho(c,d)(1-a) \le 0; \quad 0 < \rho(c,d) \le 0 \Rightarrow \rho(c,d) = 0 \Rightarrow c = d$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано уравнение f(x) = 0. Проведем его к виду $x = \varphi(x)$. Пусть для $\varphi(x)$ выполняются следующие условия:

1. $\varphi(x)$ - определена и непрерывна на [0,1];
2. $E(\varphi) \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x)$ - отображение в себе;
3. $\varphi(x)$ имеет производную на [a,b] и $|\varphi'(x)| \le k < 1$, тогда исходное уравнение имеет на [a,b] единственное решение в R.

Действительно, проверим выполнение неравенство (1) в теореме Банаха:

$\forall x, y \in R, \quad \rho(\varphi(x), (\varphi(y)) = |(\varphi(x) - \varphi(y) = |\varphi'(c)(x-y)| \le$

$\le k|x-y| = k\rho(x,y), \quad где \quad 0 < k < 1,$ тогда условия теоремы Банаха выполнены и отображение $\varphi(x)$ имеет неподвижную точку, т.е. $\varphi(c) = c$, что означает, что на [a, b] существует единственное решение с уравнения $x = \varphi(x)$.

При фактическом нахождении корня уравнения поступают как при доказательстве теоремы Банаха. Точка с является пределом последовательности (x_n), которая строится следующим образом: возьмем $\forall x_0 \in [a,b]$ и построим

$x_1 = \varphi(x_0); x_2 = \varphi(x_1);...; x_n = \varphi(x_{n-1});...$ По доказанному $x_n \to c$.

На этой теореме основан метод решения уравнений, который получил название метода итераций или метода последовательных приближений.

Пример 1: Решить уравнение $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Составим функцию $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Найдем значения функции на концах отрезка [0,1].

$$\begin{matrix} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow f(x) \quad \text{на} \quad [0,1] \quad \text{имеет решение.}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f(x)$ - строго возрастает на $[0,1] \Rightarrow f(x) = 0$ только в одной точке и уравнение $x^3 + 2x - 1 = 0$ на [0,1] имеет единственный корень. Найдем приближенное значение корня, для чего построим функцию

$\varphi(x)$ проделав преобразования:

$$x^3 + 2x - 1 = 1;\ x(x^2 + 2) = 1;\ x = \frac{1}{x^2+2}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2+2}.$$

Найдем $\varphi'(x)$ и оценим $|\varphi'(x)|$

$$\varphi'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}; \quad |\varphi'(x)| = |\frac{2x}{(x^2+2)^2}| = \frac{2x}{x^2+2} \cdot \frac{1}{x^2+2} <$$

$$\frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+2} \le \frac{1}{x^2+2} \le \frac{1}{2} < 1.$$

Так как $|\varphi'(x)| < 1$, то можно к отображению $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ применить принцип сжатых отображений. В качестве первого приближения к корню возьмем $x_0 = 0$. Найдем

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = 1/2 = 0{,}50;$$
$$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0{,}50) = 4/9 \cong 0{,}44;$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(0{,}44) \cong 0{,}45;$$
$$x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(0{,}45) \cong 0{,}45;...;\Rightarrow c \cong 0{,}45 \quad (\textit{с точностью до } 0{,}01),$$

Пример 2. Будет ли отображение $f(x) = x^2$ сжатым на полном метрическом пространстве a) $X_0 = [-1/3, 1/3]$; b) $X_1 = [-1,1]$, если $\rho(x,y) = |x-y|$.

РЕШЕНИЕ:

a) Будет, т.к.

$$\rho(f(x),f(y)) =| f(x),f(y) |=| x^2 - y^2 |=| x-y || x+y |\leq| x-y |(| x |+| y |) \leq$$

$$\leq 2/3 | x-y |= a\rho(x-y), \qquad где \quad a = 2/3 < 1$$

b) Не будет, т.к. если x = 1, y = 0 то |f(x),f(y)| = |x-y|.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти неподвижные точки отображения $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ на [1/2,1]. Будет ли отображение f сжатым на [1/2,1].
2. Убедиться, что функция f осуществляет сжатое отображение на [a,b], если она дифференцируема на [a,b], причем $\forall x \in [a,b] \Rightarrow | f'(x) | \leq g < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. – М.: Просвещение, 1968.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: Наука, 1968.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука, 1965.
4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967.
5. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973.
6. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1981.