МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Тема диссертации: «Методика обучения решению заданий с параметром в курсе математики профильной школы»

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.04.01 Педагогическое образование

Направленность программы магистратуры
«Математическое образование в системе профильной подготовки»
Форма обучения заочная

Проверка на объем заимствований:
83,21 % авторского текста
Работа рекомендована к защите

«25» ноября 2023 г.

И.о. зав. кафедрой МиМОМ
_______________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-313-131-2-1
Пивцайкина Ирина Евгеньевна

Научный руководитель:
док. пед. наук, доцент
_______ Суховиенко Елена Альбертовна

Челябинск

2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………………..…3

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ……………………………………………………...5

1.1 Состояние проблемы обучения школьников решению заданий с параметром…………………………………………………………………...5

1.2 Задания с параметрами в учебниках и пособиях…………………………9

1.3 Понятие параметра и классификация заданий с параметром….………14

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ……………………………………………….66

2.1 Планирование элективного курса по решению задач с параметрами..66

2.2 Реализация методики обучения решению заданий с параметром в элективном курсе……………………………………………………………...79

2.3 Содержание и результаты педагогического эксперимента…………….89

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…………………………………………………………...100

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ………………….....……101

ВВЕДЕНИЕ

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа.

По статистике многие из выпускников не приступают к решению задач с параметрами на ЕГЭ. По данным ФИПИ всего около 30% выпускников приступают к решению таких задач, и процент их верного решения невысок: 5-6%, поэтому приобретение навыков решения трудных, нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, учащимися школ по-прежнему остается актуальным.

Задачи с параметрами представляют большую трудность для учащихся. Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Умение выполнять такие задания свидетельствуют о том, что ученик хорошо подготовлен по всем разделам школьного курса математики. Это связано с тем, что каждое уравнение с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений, для каждого из которых должно быть получено решение. Чтобы успешно справляться с такими задачами, необходимо знать стандартные алгоритмы решения математических задач, уметь правильно анализировать и делать выводы, знать основные функции графиков и применять основные методы решения задач с параметрами. Такие задачи предлагаются на едином государственном экзамене.

Сегодня на первый план выходит личность ученика, способность его к самоопределению и самореализации, а также критической оценки собственной деятельности. Математика, и в частности алгебра, создает благоприятные условия для развития многих интеллектуальных качеств учащихся, требует творческого подхода к решению различных проблем. Умение решать задачи с параметрами позволит учащемуся не только повысить уровень своих математических способностей, но и успешно сдать экзамен на высокий балл.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам анализа в старшей профильной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению заданий с параметром в курсе математики профильной школы.

Цель исследования: разработать методику обучения решения задач с параметром учащихся старшей школы.

Гипотеза: элективный курс по решению задач с параметрами будет способствовать формированию у школьников умений решать задания с параметром.

Задачи исследования:

1. Изучить состояние проблемы обучения школьников решению заданий с параметром.

2. Провести анализ возможностей учебников и пособий для формирования умений решать задачи с параметрами.

3. Систематизировать основные типы задач с параметрами, а также методы их решения.

4. Разработать элективный курс для обучения школьников решению заданий с параметром.

5. Разработать методику решения задач с параметрами для учащихся средней школы.

6. Провести педагогический эксперимент.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

1.1 Состояние проблемы обучения школьников решению заданий с параметром

Положение всего комплекса учебно-методических и педагогических вопросов, связанных с задачами с параметрами в современном математическом образовании в нашей стране достаточно обширно. С одной стороны, эти задачи есть и в весьма заметном количестве, а с другой стороны, их практически нет. С одной стороны, все учителя в какой-то мере знакомы с простейшими приемами их решений, с другой – старательно избегают последовательного использования этих задач.

В каждом итоговом экзамене, проверяющем математическую подготовку на достаточно высоком уровне, есть задачи с параметрами. Более того, именно то, что в ЕГЭ и ОГЭ присутствуют задачи с параметром является своего рода знаком того, что нужно уделять время на изучение данной темы.

Необходимо отметить присутствие задач с параметрами в вариантах Единого государственного экзамена по математике. Среди задач группы «С» одна задача – это задача с параметрами. Место задач с параметрами в конкретных учебно-методических комплектах по математике, утвержденных или рекомендованных к использованию в общеобразовательной школе Министерством образования и науки РФ, совсем не столь значимо. Количество задач с параметрами в любом из общефедеральных комплектов не велико. Также следует отметить, что ни в один из общефедеральных комплектов учебников по математике, в том числе и для углубленного изучения, нет систематического обращения к этим задачам.

Большинство авторов учебников Федерального комплекта сознательно ограничивают круг задач с параметрами рассмотрением некоторых свойств линейной функции, квадратного трехчлена и не более того. Вообще из-за этого отношение к задачам с параметрами как и некой сложной, почти неразрешимой проблеме господствует не только среди учащихся, не только среди учителей, но и среди ведущих методистов-математиков.

Еще 40 лет тому назад в книге Дорофеева Г.В. «Пособие по математике для поступающих в вузы» [9] было сказано: «Очень серьезные трудности вызывают обычно уравнения, неравенства и системы уравнений или неравенств с параметрами, в которых требуется найти такие значения этих параметров, при которых выполняются некоторые требования. Например, такие значения, при которых уравнение имеет единственное решение, или, наоборот, уравнению удовлетворяют все допустимые значения x, или всякое решение одной системы уравнений является решением другой системы, или всякое решение одного неравенства является решением другого неравенства и т.п.

Эти задачи являются наиболее трудными из предлагаемых на экзаменах задач, они требуют логической культуры чего не хватает большинству учащихся. Чтобы решить такую задачу, необходимо в каждый момент представлять себе, что уже сделано и что еще предстоит сделать, что означают уже полученные результаты».

А.Г. Мордкович оценивает задачи с параметрами как «один из труднейших разделов школьного курса математики, в котором, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений и неравенств, приходится обдумывать, по какому признаку нужно разбить множество значений параметра на классы. Следить за тем, чтобы не пропустить какие-либо тонкости» [24].

Г.В. Дорофеев обращал внимание на необходимость разработки методов обучения учащихся решению задач с параметрами и указывал, что «решение уравнений и неравенств с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применимых в исследованиях и на любом другом математическом материале» [9].

Ю.Н. Макарычев, характеризуя задачи с параметрами как «миниатюрные исследовательские задачи, требующие обширных знаний из различных разделов школьной программы», отмечает, что «решение таких задач требует от абитуриентов высокой логической культуры и высокой техники исследования» [14].

С.А. Тынянкин также подчеркивает, что «задачи с параметрами являются наиболее сложным в логическом и техническом плане разделом элементарной математики. В очень сильном смысле эти задачи есть индикатор общего владения абитуриентом техникой и логикой математики» [36].

Считаю, что трудности в решении задач с параметрами связаны не столько с их технической сложностью, сколько с отсутствием ясного внимания многоуровневости таких задач. Например, в обычном уравнении с x следует просто найти его корни, следуя алгоритму решения, и на этом уровне решение заканчивается. А в уравнении с параметром следует перейти на более высокий уровень: необходимо проанализировать корни уравнения, т.е. понять, как они изменяются при изменении данных задачи и, чтобы корни уравнения в итоге удовлетворяли тому или иному условию. Поэтому формирующаяся в школе привычка решить уравнение и на этом поставить точку, и вообще, присутствие в подавляющем числе уравнений и неравенств только одной переменной, сразу же переводит задачи с параметром в ранг трудных.

Известно, что в программе по математике для неспециализированных математических школ задачам с параметрами отводится незначительное место. Поэтому, в первую очередь, укажем разделы общеобразовательной математики, в которых вообще присутствует идея параметра.

Так, с параметрами учащиеся встречаются при введении некоторых понятий. Не приводя подробных определений, рассмотрим в качестве примеров следующие объекты:

- Функция прямой пропорциональности: $y = kx$ (x и y – переменные; k – параметр, $k \neq 0$);
- Линейная функция: $y = kx + b$ (x и y – переменные; k и b – параметры);
- Линейное уравнение: $ax + b = 0$ (x – переменная; a и b – параметры);
- Уравнение первой степени: $ax + b = 0$ (x - переменная; a и b – параметры, $a \neq 0$);
- Квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$ (x – переменная; a, b и c – параметры, $a \neq 0$).

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Решить задачу с параметрами – это значит найти все те и только те значения параметров, при которых задача имеет решения. Задача, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная, удовлетворяющая определению понятия «параметр», называется задачей с параметрами.

При решении задач, содержащих параметр, встречаются задачи, которые условно можно разделить на два больших класса. В первый класс можно отнести задачи, в которых надо решить неравенство или уравнение при всех возможных значениях параметров. Ко второму классу отнесем задачи, в которых надо найти не все возможные решения, а лишь те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. При решении задач с параметрами иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики.

1.2 Задания с параметрами в учебниках и пособиях

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс» А.Г. Мордковича и П.В. Семенова [23] параметр сначала встречается при изучении арккосинуса, арксинуса, арктангенса, арккотангенса. Рассматривается решение этих уравнений в общем виде, и в зависимости от значения параметра рассматриваются частные случаи, причем ставится ограничение на множество значений переменной. Следующие задачи, содержащие параметр, предлагаются при изучении производной функции.

Особое геометрическое и алгебраическое значение имеют задачи с параметром, которые предложены в главе «Первообразная и интеграл». В конце изучения курса алгебры и начала анализа в 11 классе выделен параграф для решения уравнений, содержащих параметр. В параграфе объясняется, что такое параметр на простейших уравнениях, рассматриваются линейные и квадратные уравнения. Пункт начинается с определения уравнение с параметром. Далее рассматривается задание, в котором надо решить относительно одой переменной уравнения и неравенство. В уравнение рассматриваются случаи обращения коэффициента в нуль, а при решении неравенства необходимо еще учесть знак коэффициента при переменной. Рассматривается решение квадратного и иррационального уравнения с параметром. При решении уравнений используется графический метод представления результатов измерений.

Система задач во второй части учебного пособия рассматриваются линейные, квадратные, логарифмические, иррациональные, показательные, тригонометрические уравнения и неравенства. В упражнениях повышенной трудности приведены системы уравнений с параметром.

В учебном пособии Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой, Н.Е. Федоровой, М.И. Шабунина «Алгебра и начала математического анализа 11 класс». [12] рассматриваются решения задач с параметрами в параграфе «Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры». В первом пункте параграфа разбираются квадратные уравнения с параметром.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс»: С.М. Никольский [27] в первом пункте параграфа изучается основной принцип решения уравнений, содержащих параметр – разбиение области изменения параметра на участки. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значение параметра. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения.

После подробно разобранных уравнений с параметром приводятся задания, которые необходимо решить и найти для каждого значения параметра. Автор подчеркивает, что сложность задач с параметром заключается в том, что, как правило, вместе с изменением параметра меняются не только коэффициенты, но и ряд других характеристик, связанных с параметром. Это приводит к тому, что при разных значениях параметра приходится использовать различные методы решения.

Во втором пункте рассматриваются решения неравенств с параметром. Вводится понятие, что значит решить неравенство с параметром и указывается, что при решении используются те же методы как и при решении уравнений с параметром.

Далее даны задания для самостоятельного решения и отработки навыков решения неравенств с параметром.

Системы уравнений с параметром рассмотрены в третьем пункте 15 параграфа. Предлагаются задания, как с подробным решением, так и для самостоятельной работы в которых необходимо для каждого значения параметра решить систему уравнений.

В четвертом пункте рассматриваются задачи, в которых требуются найти все значения параметра, при каждом из которых выполнено некоторое условие. Приводятся 6 примеров с подробным решением и 16 задач с различными условиями для отработки навыка решения задач с условием.

В книге М.К. Потапова, А.В. Шевкина «Книга для учителей» [30] идет объяснение, что значит решить уравнение и неравенство с параметром, в чём заключен основной принцип решения уравнения, как должен быть записан ответ в таких задачах, приведены примеры решения рациональных и логарифмических неравенств с параметром, а также рассматриваются задачи, в которых требуется найти все значения параметра, при каждом из которых выполняется некоторое условие, и разобраны соответствующие примеры.

В учебнике Н.А. Виленкина, О.С. Ивашева-Мусатова, С.И. Шварцбурда «Алгебра и математический анализ для 11 класса» [3] рассматривается рациональные, иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства с параметром.

Книга П.И. Горнштейна, В.Б. Полонского, М.С.Якира «Задачи с параметрами» [6] содержит более 700 задач, подавляющее большинство из которых предлагалось на вступительных экзаменах в ведущие вузы. Весь материала пособия разбит на главы, параграфы и пункты. Каждый пункт посвящен определенному типу задач или приему их решения. В первой главе происходит знакомство с параметрами. Во второй и четвертой главах рассматриваются аналитические и графические приемы решения задач с параметрами. В третье главе идет речь о квадратичных функциях.

Пособие А.А. Прокофьева, А.Г. Корянова «Математика ЕГЭ. Задачи с параметрами (типовое задание 18)» [31] рассматриваются основные методы решений задач с параметром. В этом учебнике алгебраический метод решения задач разбит на пункты, которые в себя включают: метод замены, выявление необходимых условий, метод введения параметра. В функциональном методе рассматриваются область определения, непрерывность, дифференцируемость, нули, промежутки знакопостоянства, чётность/нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность, наибольшее(наименьшее) значение, точки экстремума, множество значений и график функций. В функционально-графическом методе рассматриваются координатные плоскости Oxy, Oxa и Oax. И последний рассматриваемый способ, это геометрический метод решения. В неё рассматриваются уравнения прямой, параболы, гиперболы, окружности и параллелограмма, а также формула расстояния между точками.

В книге С. А. Шестакова «Задачи с параметром предназначена для подготовки к ЕГЭ профильного уровня» [38] рассматриваются такие способы решений заданий с параметром, как логический перебор и квадратный трёхчлен в задачах с параметрами и нестандартных задачах, применение свойств функций к решению уравнений и неравенств, графическая интерпретация, метод упрощающего значения, параметра как переменная, тригонометрические подстановки и векторные интерпретации в алгебре.

В авторском курсе подготовки к ЕГЭ А.Г. Малковой [15] рассматриваются элементарные функции и их графики, метод оценки, преобразование графиков функций, построение графиков функций, а также «базовые элементы» для решения задач с параметрами, взятые из ЕГЭ прошлых лет.

В пособии В.В. Амелькина, В.Л. Рабцевича «Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике» [1] содержится 727 задач с параметрами и предназначено для углубленного изучения математики в средней школе и для подготовки к конкурсным экзаменам в ВУЗы.

Книга В.С. Высоцкого «Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ» [4] посвящена решению задач с параметрами, которые для многих школьников традиционно являются задачами повышенной трудности.

Задачи классифицированы как по типам, так и по методам решений, начиная от простейших задач до трудных, встречающихся на олимпиадах, ЕГЭ и вступительных экзаменах в МГУ.

Учебное пособие Е.А. Ефимовой «Задачи с параметрами. Учебное пособие для факультета довузовской подготовки СГАУ» [10] предназначено для занятий со слушателями подготовительных курсов факультета довузовской подготовки СГАУ и самостоятельной работы абитуриентов. В учебное пособие включены все основные типы задач с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах по математике в СГАУ, на централизованном тестировании и Едином государственном экзамене. Ко всем задачам приведены решения или ответы.

Пособие В.Л. Натяганова и Л.М. Лужиной «Методы решения задач с параметрами: Учеб. Пособие» [26] посвящено задачам с параметрами, которые для абсолютного большинства абитуриентов традиционно являются задачами повышенной трудности. В пособии основное внимать уделено классификации методов, основанных на использовании различных свойств функций (ограниченность, монотонность, периодичность, четность и т.д.), симметрии переменных, применении производной, а также специальных приемов решения задач с параметрами, требующих глубокого знания школьной математики и высокой логической культуры, что подкреплено большим количеством примеров из вариантов вступительных экзаменов в Московский государственный университет за последние 40 лет.

Делаем вывод, что содержательно-методической линии «Задачи с параметрами» и часы отводимые на ее изучение присутствуют только в учебниках алгебры профильного уровня, во всех остальных же учебниках уравнения и неравенства с параметрами находится в разделе «трудных задач» или «задач повышенной сложности», что приводит к «обеднению» школьного курса алгебры. Отметим, что задачи с параметрами (в частности уравнения и неравенства с параметрами) обладают большим потенциалом в развитии исследовательских умений таких, как умение наблюдать, анализировать, выдвигать и доказывать гипотезу, обобщать и др. Данные задачи играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры как у школьников, так и у студентов.

1.3 Понятие параметра и классификация заданий с параметром

Определение понятия «параметр» и «задача с параметрами» в большинстве современных справочных и учебно-методических пособиях восходят к определениям, данным С.И. Новоселовым. В «Специальном курсе элементарной алгебры» [28] приведено определение, которое стало традиционным для большинства последующих изданий.

«Рассмотрим некоторое аналитическое выражение, содержащее две группы аргументов. Будем для определенности обозначать аргументы одной группы последними буквами латинского алфавита, например, x, y, …, z и называть их по-прежнему аргументами, а аргументы второй группы обозначать первыми буквами алфавита, например, a, b,…. ,c и называть их параметрами».

В «Толковом словаре математических терминов» сказано: «Параметр – величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но которое в другой задаче меняет свои значения» [35].

В пособии П.С. Моденова и С.И. Новоселова говорится: «Если в уравнение кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами» [19].

В пособии Г.А. Ястребинецкого говорится: «Рассмотрим уравнение $f(a,b,c,\ldots,x)=\varphi(a,b,c,\ldots,x)$, где $a,b,c,\ldots,x$ – переменные величины. Переменные $a,b,c,\ldots$, которые при решении уравнения считаются постоянными, называются параметрами» [39].

В.И. Голубев дает следующее определение: «Параметром называется независимая переменная, значение которой в данной задаче считается фиксированным» [5].

Особенность переменных, названных параметрами, отмечалась авторами некоторых других пособий. Так в книге «Задачи с параметрами» сказано: «… параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет обращаться с параметром как с числом, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью» [25].

Следует отметить, что авторы многих пособий по математике не считают нужным даже пытаться дать определение параметра или задачам с параметрами, оставляя это, как видимо, на долю школьных учителей.

Чисто формальное разделение переменных на неизвестные и параметры по признаку обозначения со временем перешло из пособий для поступающих в вузы в школьные учебники. Подобный подход к введению понятия параметра на примерах вообще характерен для современных учебников. Почти во всех учебно-методических комплектах на той или иной стадии обучения понятие «параметр» вводится, однако, в большинстве учебников этим, по сути, и ограничивается.

Заметим сразу, что определение понятия «параметр» и соответственно задач с параметрами в большинстве УМК по математике дается «постфактум» или как бы между делом.

1. В учебнике А. Г. Мордковича к уравнению $x^2-(2p+1)x+(p^2+p-2)=0$ дается пояснение: «Это квадратное уравнение отличается от всех рассмотренных до сих пор тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют *уравнениями с буквенными коэффициентами* или уравнениями с параметрами. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения» [25].

2. Ю. Н. Макарычев приводит решение уравнения $8x = 7$, $15x = 7$, $-11x = 7$, $ax = 7$: «Рассматривая уравнение $ax = 7$, мы придавали буквам a и x разный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a – некоторое фиксированное число, значение которого в каждом конкретном случае известно. В таких случаях говорят, что a является *параметром*, а уравнение называют *уравнением с параметром*» [14].

3. В учебнике Н. Я. Виленкина даётся такое пояснение: «Обычно в уравнении или неравенстве буквами обозначают неизвестные. Решить уравнение (неравенство) – значит найти множество значений неизвестных, удовлетворяющих этому уравнению (неравенству), кроме букв, обозначающих неизвестные, содержат другие буквы, называемые параметрами. Тогда мы имеем дело не с одним, а с бесконечным множеством уравнений (неравенств). При этом бывает, при других – имеет только один корень, при третьих – два корня» [3].

4. В учебнике С. М. Никольского говорится: «Задачи с параметрами нередки в школьном курсе математики. Так, например, задача решить (относительно x) квадратное уравнение общего вида $ax^2+bx+c=0$, является примером задачи с тремя параметрами a, b, c. В этом случае говорят, что надо решить уравнение с параметрами a, b, c.

Задача решить относительно x и y систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$ является примером задачи с одним параметром a. В этом случае говорят, что надо решить систему уравнений с параметром a» [27].

Интуитивное, сиюминутное описание понятия «параметр» приводит к тому, что предлагаемые методы решения соответствующих задач также носят частный характер. Методические приемы решения задач с параметрами опираются на определения вида: «если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а буквами, то они (буквы) называются параметрами, а соответствующее уравнение или неравенство – параметрическим».

При этом:

– если нет точных определений термина «параметр», «задачи с параметрами» и других связанных с ними понятий, то невозможно проведение исследований, устанавливающих связь этих задач с основными математическими понятиями;

– закрепление (на уровне условного рефлекса) за неизвестными одних и тех же символов, а за параметрами других символов, приводит к тому, что эти несущественные признаки становятся доминирующими, превращая некоторые достаточно простые задачи в задачи чуть ли неразрешимые;

– отсутствие методической базы решения подобных задач приводит к тому, что каждое уравнение или неравенство с параметрами превращается в задачу, вызывающую у большинства учащихся затруднение;

– в процессе решения стандартных задач объектом внимания учащихся являются вычислительные процедуры, а не мыслительная деятельность, посредством которой осуществляется отбор и использование математических фактов.

Причина этого достаточно очевидна: основная стратегия математического образования в школе – это развитие умений и навыков решения определенного круга стандартных задач, в большинстве своем связанных с выполнением некоторых алгоритмов. Задачи с параметрами, напротив, относятся к тому классу задач, где эти алгоритмы либо вовсе отсутствуют, либо явно неприменимы. Эти задачи требуют, прежде всего, умения проводить – порой достаточно разветвленные – самостоятельные логические построения. Кроме того, арсенал стандартных методов решения требует существенного пополнения некоторыми специфическими методами. Именно это и вызывает «у большинства учащихся и учителей как минимум робость».

Для того чтобы преодолеть эти затруднения, необходимо всем используемым понятиям дать корректные определения.

Согласно «Философскому энциклопедическому словарю» «понятие – это мысль, высказывание, отражающие общие существенные признаки объекта» [37]. Являются ли признаки понятия «параметр», высказанные в предыдущих определениях, существенными?

Рассмотрим, например, определение, приведенное в книге С.И. Новоселова, которое послужило основной определений большинства последующих изданий:

«Если в уравнение кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами» [28].

Очевидно, что обозначение буквой не является признаком такого понятия, как «параметр». Во-первых, существуют постоянные величины, которым также присвоено «имя собственное» - например: π, e, и т.д.

Во-вторых, отсутствие в задаче переменных кроме неизвестной, также не может служить признаком того, что данная задача – не задача с параметрами.

В процессе решения любой математической задачи условие представляется в виде некоторого набора уравнений и (или) неравенств. Поэтому в дальнейшем под задачей с параметрами будем понимать либо уравнения, либо неравенства, либо их комбинации – системы, совокупности и т.д.

Поясним на примерах необходимость каждого из существенных признаков понятия «параметр».

1. Независимость переменной, обозначенной термином «параметр», легко просматривается в большинстве соответствующих задач. Например, если поставлена задача «решить уравнение $x^2 + 1 = p$ относительно переменной x с параметром p», то независимость

переменной p состоит хотя бы в том, что она не обязана принимать значения не меньше 1, в силу равенства величине, принимающей такие значения.

2. «Управляемость» решением задачи данной переменной заключается в том, мы должны ей каждый раз «подчиняться», каждый раз указывая ответ в зависимости от значений этой переменной. Например, в приведенном выше уравнении ответ записывается следующим образом:

1) если $p < 1,$ то уравнение решений не имеет;

2) если $p = 1,$ то уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x = 0;$

3) если $p > 1,$ то уравнению удовлетворяют два значения переменной $x = \sqrt{p-1}$ и $x = -\sqrt{p-1}.$

3. В подавляющем большинстве задач некоторая переменная, входящая в условие, явно «назначается» параметром. Таковы задачи, начинающиеся словами, такими как «Найдите все значения параметра.» или «Решите при каких значениях параметра», в условиях которых явно указан идентификатор параметра. Но есть широкий класс задач, по своей сути параметрических, которые традиция к таковым не относит. Это тригонометрические задачи, задачи на нахождение минимума и максимума, нахождение области значений некоторых функций и т.д.

В этих задачах параметр появляется по ходу составления математической модели или по ходу решения задачи.

4. Даже единственная переменная на каком-то этапе решения может приобретать свойства параметра.

Пример. Решите уравнение $\sqrt{5+\sqrt{5+x}} = x.$

Определение 1. Параметром называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи.

Определение 2. Задача, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная, удовлетворяющая определению понятия «параметр», называется задачей с параметрами.

Введенное определение параметра позволяет сформулировать простейшие, но весьма важные для дальнейшего понимания следствия.

Следствие 1. Все величины, входящие в аналитическое выражение, задающее условие задачи, подразделяются на две категории: постоянные и переменные.

Как было указано выше, под понятием «задача с параметрами» будем понимать условие задачи, представленное в виде уравнений, неравенств или их систем, совокупностей и т.д.

Все задачи с параметрами делятся на два класса «по условию». В одном из них ставится условие отыскать решение задачи, а во втором – отыскать некоторое подмножество допустимых значений параметра или параметров, при каждом из которых соответствующее решения задачи обладают указанными свойствами.

Понятие решения задачи с параметром или параметрами естественным образом должно быть сформулировано для обоих классов задач. В соответствии с поставкой задания «решить задачу с параметрами» можно сформулировать следующим образом: решить задачу с параметрами – это значит: провести классификацию совокупности всех получающихся частных видов данной задачи, найти все ее общие решения на соответствующих областях допустимых значений параметров, включая и те, при которых задача решений не имеет.

Определение 3. Постоянными называются величины, значение которых остаются неизменными в условиях любой задачи, использующих их.

Заметим, что использование в качестве идентификатора постоянной величины чисел не обязательно. Постоянные могут обозначаться и буквами.

Следствие 2. Объявление тех или иных независимых переменных искомыми или параметрами определяется либо условиями задачи, либо методами, используемыми в ходе ее решения.

Следствие 3. Любая переменная, входящая в аналитическое выражение, задающее условие задачи (и, как мы видели, не только переменная), может быть объявлена неизвестной (аргументом).

Следствие 4. Все оставшиеся переменные объявляются параметрами, которым «присваиваются по умолчанию» некоторые числовые значения, входящие в область определения аналитического выражения, задающего условие задачи [31].

Следующим шагом является введение понятий, непосредственно опирающихся на определение «параметра». Первым из них является понятие «допустимого значения параметра». Будем исходить из следующего определения.

Определение 4. Допустимым значением параметра будем называть такое его значение, при котором область определения данной задачи есть не пустое множество.

Другими словами: значение параметра считается допустимым, если найдется хотя бы один набор значений других переменных, входящих в условие данной задачи, при подстановке которого совместно с заданным значением параметра в аналитическое выражение, задающее условие, оно (выражение) имеет смысл.

Приведем ряд примеров, поясняющих данное понятие. При этом будем считать, что переменные, входящие в соответствующее условие, принимают действительные значения, и в каждом примере, следуя традиции, в качестве искомой выберем переменную x.

Пример. В уравнении $ax + 1 = 0$, рассматриваемом относительно переменной x, допустимым является любое действительное значение параметра a.

Определение 5. Допустимые значения параметра образуют некоторое множество, называемое областью допустимых значений параметра.

Правомерен вопрос: если значение параметра не входит в область допустимых значений, означает ли это, что при таком значении параметра задача не имеет решения?

Ответ очевиден: если значение параметра не является допустимым, то нельзя вести разговор о существовании или не существовании решения соответствующей задачи. В этом случае будем считать, что сама задача не имеет смысла.

Параметр – это величина, характеризующая какое-нибудь основное свойство устройства, системы, явления или процесса.

Вот, например, ракета выводит космический аппарат в околоземное пространство.

Если корабль запустить с первой космической скоростью, приближенно равной 7,9 км/с, он выйдет на круговую орбиту.

Вторая космическая скорость, приближенно равная 11,2 км/с, позволяет космическому кораблю преодолеть поле тяжести Земли. Третья космическая скорость, приближенно равная 16,7 км/с, дает возможность преодолеть гравитационное притяжение Земли и Солнца и покинуть пределы Солнечной системы.

А если скорость меньше первой космической? Значит, тонны металла, топлива и дорогостоящей аппаратуры упадет на землю. Скорость космического корабля – *параметр,* от которого зависит его дальнейшая траектория и судьба. Конечно, это не единственный параметр. В реальных задачах науки и техники, задействованы уравнения, включающие функции многих переменных и параметров, а также производные этих функций.

Чтобы лучше вникнуть в «идеологию» задач с параметрами, мы рассмотрим два простых примера из механики.

Пример. Тело движется из состояния покоя с постоянным ускорением a м/с^2 . Какой путь s пройдёт тело за 4 с?

Решение. Если начальная скорость тела равна нулю, то путь, пройденный телом за время t, выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2}$$

Подставляя сюда t = 4, находим: $s = 8a$ (1)

Ответ: s = 8a.

Обратите внимание: числовое значение ускорения в задаче не дано. Ускорение является параметром и может принимать какие угодно значения. Фактически мы нашли зависимость пути, пройденного за 4 секунды, от ускорения. Подставляя теперь в формулу (1) какое-то конкретное значение ускорения, мы найдём соответствующее значение пройденного пути.

Пример. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Через какое время t тело будет на высоте h? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Зависимость высоты подъёма тела от времени имеет вид:

$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$,

где v_0 – начальная скорость, g — ускорение свободного падения. Подставляем сюда v_0 = 20 м/с и g = 10 м/с^2: $h = 20t - 5t^2$

Получаем квадратное уравнение относительно t с параметром h:

$5t^2 - 20t + h = 0$. (2)

Нас интересуют решения этого уравнения при различных значениях параметра. Прежде всего находим дискриминант: $D = 400 - 20h$.

В зависимости от значений параметра h дискриминант может быть положительным, равным нулю или отрицательным. Необходимо рассмотреть все три случая.

1. $D > 0$, то есть h < 20. Тогда уравнение (2) имеет два корня:

$t_1 = \frac{20-\sqrt{400-20h}}{10}, t_2 = \frac{20+\sqrt{400-20h}}{10}$ (3)

Физический смысл двух корней ясен: в момент времени t_1 тело достигает высоты h, двигаясь вверх, а в момент t_2 тело снова окажется на высоте h, но уже двигаясь обратно вниз.

2. D = 0, то есть h = 20. В этом случае подкоренное выражение в (3) обращается в нуль, и оба корня t_1, t_2 «сливаются» в один: $t = \frac{20}{10} = 2$.

Физический смысл единственности корня заключается в том, что h = 20 м – это максимальная высота подъёма. Тело достигает данной высоты в один-единственный момент времени, а именно через 2 секунды.

3. D < 0, то есть h > 20. В этом случае уравнение (2) не имеет корней.

Тело не может подняться выше 20 метров, поэтому, какое бы значение параметра h > 20 мы ни взяли, данному значению не будет соответствовать никакой момент времени.

Остаётся записать ответ (расстояние измеряется в метрах, время – в секундах).

Ответ: Если h < 20, то $t_1 = \frac{20-\sqrt{400-20h}}{10}$ или $t_2 = \frac{20+\sqrt{400-20h}}{10}$; если $h = 20$, то $t = 2$; если h > 20, то решений нет.

Проведем классификацию заданий с параметром по методам их решения.

Графический метод в задачах с параметрами ЕГЭ

1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2+a^2-4a}{x-a} = 0$ *имеет ровно 2 различных решения?*

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

Получим систему:

$$\begin{cases} x^{2+}a^2 - 4a = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases}$$

В первом уравнении выделим полный квадрат:

$$x^2 + a^2 - 4a + 4 = 4$$

$$x^2 + (a-2)^2 = 4$$

Это уравнение окружности с центром в точке $P(0;2)$ и радиусом равным 2. Обратите внимание – графики будем строить в координатах *xOa* (Рисунок 1).

Уравнение $a = x$ задает прямую, проходящую через начало координат. Нам нужны ординаты точек, лежащих на окружности и не лежащих на этой прямой.

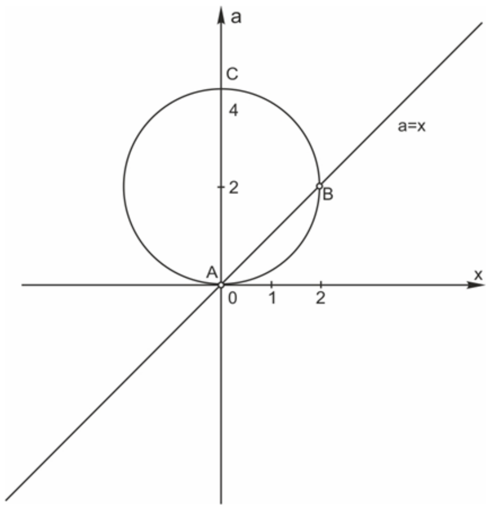


Рисунок 1 – Окружность

Для того чтобы точка лежала на окружности, ее ордината *a* должна быть не меньше 0 и не больше 4.

Кроме того, точка не должна лежать на прямой $a = x$, которая пересекает окружность в точках $A(0;0)$ и $B(2;2)$ Координаты этих точек легко найти, подставим $a = x$ в уравнение окружности.

Точка C также не подходит нам, поскольку при $a = 4$ мы получим единственную точку, лежащую на окружности, и единственное решение уравнения.

Это значит, что $a \in (0;2) \cup (2;4)$.

2. Найдите все значения a, при которых уравнение

$\sqrt{a-2x} = y - x + 7$ *имеет единственное решение.*

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a - 2xy = (y - x + 7)^2 \\ y - x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

Мы возвели обе части уравнения в квадрат при условии, что $y - x + 7 \geq 0$ (смотри тему «Иррациональные уравнения»).

Раскроем скобки в правой части уравнения, применяя формулу квадрата трехчлена. Получаем систему.

$$\begin{cases} a - 2xy = y^2 + x^2 + 49 + 14y - 14x - 2xy \\ y \geq x - 7 \end{cases}$$

Приводим подобные слагаемые в уравнении.

$$\begin{cases} a = y^2 + x^2 + 49 + 14y - 14x \\ y \geq x - 7 \end{cases}$$

Заметим, что при прибавлении к правой и левой части числа 49 можно выделить полные квадраты.

Решим систему графически:

Уравнение $(x-7)^2 + (y+7)^2 = a + 49$ задает окружность с центром в точке $P(7;-7)$, где радиус $R = \sqrt{a+49}$

Неравенство $y \geq x - 7$ задает полуплоскость, которая расположена выше прямой $y = x - 7$, вместе с самой этой прямой (Рисунок 2).

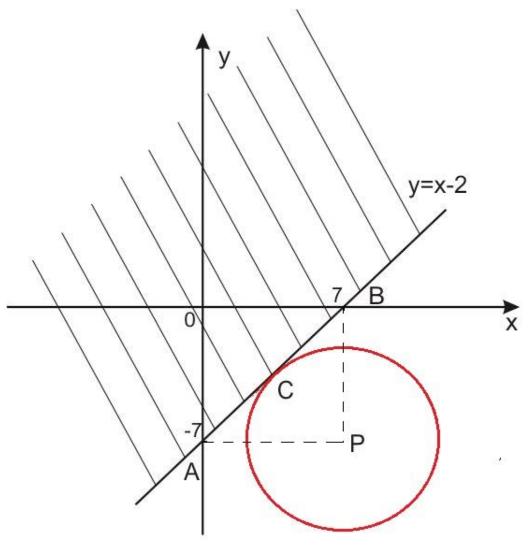


Рисунок 2 – Система

Исходное уравнение имеет единственное решение, если окружность имеет единственную общую точку с полуплоскостью. Другими словами, окружность касается прямой, заданной уравнением $y = x - 7$

Пусть С – точка касания.

На координатной плоскости отметим точки $A\ (0; -7)$ и $B\ (7; 0)$, в которых прямая $y = x - 7$пересекает оси Y и X.

Рассмотрим треугольник ABP. Он прямоугольный, и радиус окружности PC является медианой этого треугольника. Значит $PC = \frac{AB}{2}$ по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

Из треугольника ABP найдем длину гипотенузы AB по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2}$$

$$AB = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

Тогда $PC = \frac{AB}{2}$

$$\sqrt{a + 49} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Решая это уравнение, получаем, что $a = -24{,}5$

Ответ: $a = -24{,}5$

3. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых система имеет единственное решение.

График уравнения $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$ – окружность ω_1 с центром $P\ (5; 4)$ и радиусом равным 2.

График уравнения $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$ – две симметричные окружности ω_1и ω_2 радиуса 2 с центрами в точках $P\ (5; 4)$ и $Q\ (-5; 4)$.

Второе уравнение при $a > 0$ задает окружность ω с центром в точке $M(2; 0)$ и радиусом a (Рисунок 3).

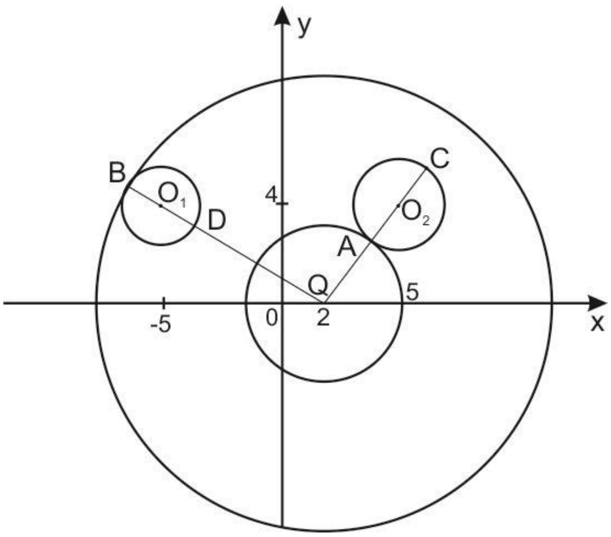


Рисунок 3 – Окружности

Система имеет единственное решение в случаях, когда окружность ω, задаваемая вторым уравнением, касается только левой окружности ω_2 или только правой ω_2.

Если а – радиус окружности ω, то это значит, что $a = MA$ (только правая) или $a = MB$ (только левая).

Пусть А – точка касания окружности ω и окружности ω_1;

Для точки А:

$MA + AP = MP,\ MP = 5$ (как гипотенуза прямоугольного треугольника MNP с катетами 3 и 4), $MA = a = MP - AP = 5 - 2 = 3$

В – точка касания окружности ω и окружности ω_2;

Для точки В:

$MB = MQ + QB$; длину MQ найдем как гипотенузу прямоугольного треугольника KMQ с катетами 7 и 4; $MQ = \sqrt{65}$.

Тогда для точки В получим: $a = MB = \sqrt{65} + 2$.

Есть еще точки C и D, в которых окружность ω касается окружности ω_1 или окружности ω_2 соответственно. Однако эти точки нам не подходят. В самом деле, для точки С:

$MC = MA + AC = 3 + 4 = 7$, но $7 < \sqrt{65} + 2$ и это значит, что окружность с центром в точке М, проходящая через точку С, будет пересекать левую окружность ω_2 и система будет иметь не одно, а три решения.

Аналогично, для точки D:

$MD = MQ - QD = \sqrt{65} - 2 > 3$, и значит, окружность с центром M, проходящая через точку D, будет пересекать правую окружность ω_1и система будет иметь три решения.

Ответ: $a = 3$ или $a = \sqrt{65} + 2$.

4. При каких значениях а система уравнений $\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x| \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$ *имеет 4 решения?*

Решаем графически. И в первом, и во втором уравнении системы уже можно разглядеть известные «базовые элементы» (ссылка) — в первом ромбик, во втором окружность. Просто выделили полный квадрат во втором уравнении.

Сделаем замену $y - 3 = t$ Система примет вид: $\begin{cases} 3|x| + 4|t| = 12 \\ x^2 + t^2 = a^2 \end{cases}$

Рисуем в координатах $(x; t)$.

Графиком первого уравнения является ромб, проходящий через точки с координатами и $(0; 3)$; $(0; -3)$; $(4; 0)$ и $(-4; 0)$.

Графиком второго уравнения является окружность с радиусом $R = |A|$ и центром в начале координат (Рисунок 4).

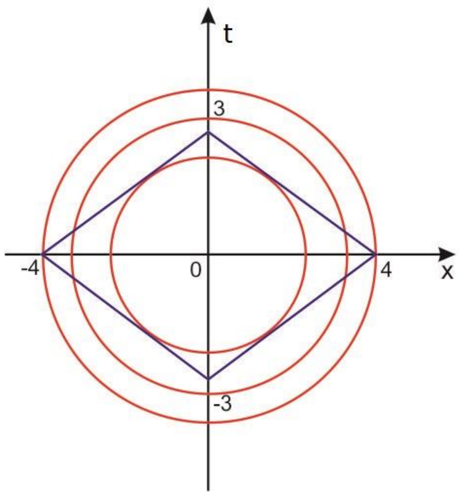


Рисунок 4 – Ромб

Когда же система имеет ровно 4 решения?

1) В случае, когда окружность вписана в ромб, то есть касается всех сторон ромба.

Запишем площадь ромба двумя способами – как произведение диагоналей пополам и как произведение стороны на высоту, проведенную к этой стороне.

Диагонали нашего ромба равны 8 и 6. Значит, $S_{\text{ромба}} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$

Сторону ромба найдем по теореме Пифагора. Видно, что на рисунке прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Это египетский треугольник, и его гипотенуза, то есть сторона ромба, равна 5. Если h — высота ромба, то

$S_{\text{ромба}} = 5h = 24.$ При этом $h = 2R$ Мы помним, что если окружность вписана в ромб, то диаметр этой окружности равен высоте ромба. Отсюда

$R = \frac{12}{5} = |a|.$

Мы получили ответ: $a = \pm \frac{12}{5}$

2) Есть второй случай.

Давайте посмотрим – если уменьшить радиус окружности, сделав $R < \frac{12}{5}$, окружность будет лежать внутри ромба, не касаясь его сторон. Система не будет иметь решений, и нам это не подходит.

Пусть радиус окружности больше, чем $\frac{12}{5}$, но меньше 3. Окружность дважды пересекает каждую из четырех сторон ромба, и система имеет целых 8 решений. Опять не то.

Пусть радиус окружности равен 3. Тогда система имеет 6 решений.

А что, если $3 < R < 4$? Окружность пересекает каждую сторону ромба ровно 1 раз, всего 4 решения. Подходит!

Значит, $3 < |a| < 4$. Объединим случаи и запишем ответ:

Ответ: $\left[\begin{array}{l} |a| = \frac{12}{5} \\ 3 < |a| < 4 \end{array}\right.$

Условия касания в задачах с параметром

При каких значениях параметра а уравнение $|x-2| = a\log_2|x-2|$ *имеет ровно 2 решения?*

Поскольку логарифмы определены для положительных чисел, $|x-2| > 0$ Это значит, что $x \neq 2$.

Сделаем замену $|x-2| = t, t > 0$. При $t > 0$ каждому значению t соответствует два значения x.

Получим уравнение $t = \mathrm{a}\log_2 t$.

В левой части уравнения – линейная функция, в правой – логарифмическая. Это функции разных типов. Пытаться справиться с таким уравнение аналитически – бесполезно. Попробуем графический способ.

Если $a = 0$, то $t = 0$ и условие $t > 0$ не выполняется. Рассмотрим по отдельности случаи $a < 0$ и $a > 0$.

Пусть $a < 0$. Нарисуем графики функций $y_1 = \frac{t}{a}$ и $y_2 = \log_2 t$

Функция $y_2 = \log_2 t$ монотонно возрастает при $t > 0$. Обозначим $\frac{1}{a} = b, b < 0$. Функция $y_1 = bt$ монотонно убывает при $t > 0$ (Рисунок 5).

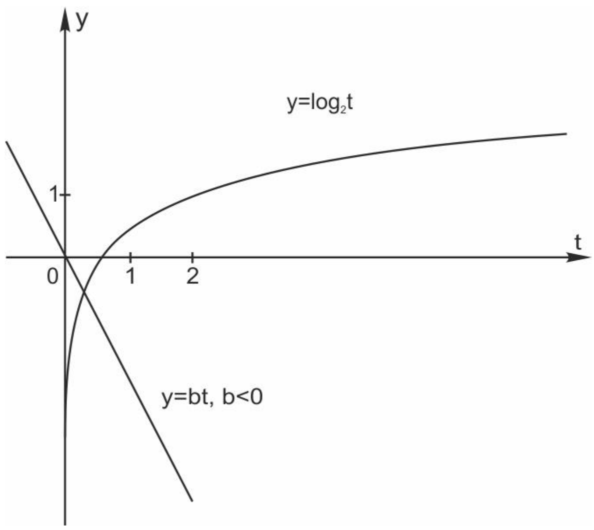


Рисунок 5 – Пересечение

Докажем, что графики функций $y_1 = bt$ и $y_2 = \log_2 t$ имеют единственную точку пересечения при $t > 0$ и любом $t < 0$.

Рассмотрим функцию $z(t) y_2 - y_1 = \log_2 t - bt$. Функция $z(t)$ является монотонно возрастающей при $b < 0$ (как сумма монотонно возрастающих функций $\log_2 t$ и $-bt$, следовательно, каждое свое значение, в том числе и значение $z = 0$, она принимает ровно один раз.

Уравнение $\log_2 t - bt = 0$ имеет единственное решение при положительных t и $b < 0$ (Рисунок 6). Значит, при всех $a < 0$ исходное уравнение имеет ровно 2 решения. Теперь случай $a > 0$.

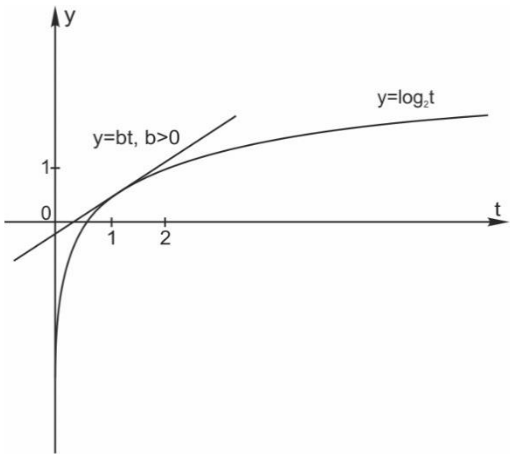


Рисунок 6 – Касание

Уравнение $\log_2 t = bt$ имеет единственное решение, если прямая $y = bt$ касается графика функции $y = \log_2 t$. Мы помним, как записываются условия касания: $\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$.

В нашем случае $\begin{cases} \log_2 t = bt \\ \frac{1}{t \ln 2} = b \end{cases}$

Учитывая, что $b = \frac{1}{a}$, получим: $\log_2 e = \log_2 t$, $t = e, a = eln2$

Мы получили, что, $t = e$ – точка касания. При этом $a = eln2$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a = eln2 \end{array} \right.$

Четность функций и симметрия уравнений в задачах с параметрами

Пример №1. При каких значениях параметра ***a*** система уравнений имеет только одно решение. Найти это решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2^{|y|} + |y| - y^2 = x - a \end{cases}$$

Решение.

Система симметричная относительно $y \rightleftarrows -y$. Тогда, если $(x_0; y_0)$ является решением, то и $(x_0; -y_0)$ является решением. Искомое *a* среди множества значений *a*, что определяются условием

$$\begin{cases} y = 0 \\ |x| = 1, \\ 1 = x - a \end{cases} \quad \text{т.е.}\, a \in \{0; -2\}$$

Если $a = -2$, имеем больше одного решения, так как $(0; \pm 1)$ тоже удовлетворяют условию.

Если $a = 0$, то из первого уравнения $|x| \leq 1$, а из второго $|x| \geq 1$, так как функция $x = e^t + t - t^2$, возрастает на интервале $t \in [0; 1]$ (производная $x_t' = e^t + 1 - 2t \geq e^t + 1 - 2 > 0$ при $t \in (0; 1]$), а x(0)=1. То есть (1;0) – единственное решение.

Ответ: (1;0) при $a = 0$.

Пример №2. Найти все *a* при которых уравнение

$4a \cos\frac{\pi x}{2} + a^2 \left(2\sqrt{|x|} + 1\right) = 12$ имеет единственное решение.

Решение.

Область определения выражения $D: x\epsilon R$, а левая часть уравнения – четная функция. Тогда если единственное решение существует, то это x=0 (так как решению $x_0 > 0$ соответствует решение $(-x_0)$). Соответственные значения *a* необходимо искать среди множества значений, которые удовлетворяют условию $4a + a^2 = 12 \Leftrightarrow a \in \{-6; 2\}$.

Возвращаясь к исходному уравнению имеем:

При $a = -6$: $\quad -24\cos\frac{\pi x}{2} + 36\left(2\sqrt{|x|}+1\right) = 12 \Leftrightarrow 1 + 3\sqrt{|x|} = \cos\frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow$ $x = 0$ (потому, что левая часть больше 1, а правая не превышает 1).

При $\quad a = 2$: $\quad 8\cos\frac{\pi x}{2} + 4\left(2\sqrt{|x|}+1\right) = 12 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \sqrt{|x|}$, имеет, согласно графической интерпретации, по крайней мере три решения: $\pm 1; 0$ (Рисунок 7).

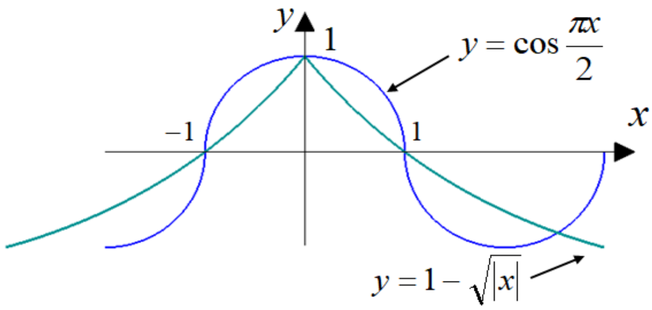


Рисунок 7 – Пересечение

Ответ: $a = -6$.

Пример №3. При каких значениях параметра ***a*** система $\begin{cases} 2|x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет восемь разных решений?

Решение.

Способ №1. Левые части уравнений системы четные выражения относительно x и y. Тогда каждой паре решений (x_0, y_0) положительных значений x_0 и y_0 соответствует еще три решения $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$. То есть система имеет 8 решений, если в первой координатной четверти она имеет 2 разных решения. При $x \geq 0$, $y \geq 0$ имеем

$$\begin{cases} 2xy + y = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 5x^2 - 4x + 1 - a = 0 \end{cases}$$

Последняя система имеет два разных решения с положительными значениями x и y при условии, что ее второе уравнение имеет неравные корни, для которых выполняется

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Это является условием расположения разных корней квадратного трёхчлена $f(x) = 5x^2 - 4x + 1 - a$ на промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ (Рисунок 8):

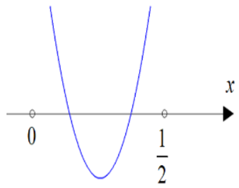


Рисунок 8 – Парабола

Тогда $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ x_b \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ \frac{D}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a > 0 \\ \frac{5}{2} - 2 + 1 - a > 0 \\ \frac{4}{10} \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \\ 4 - 5(1 - a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a < \frac{1}{4} \\ a > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$.

Способ 2. Решим эту задачу, опираясь на графическое толкование. Построим ГМТ, координаты которых удовлетворяют уравнениям данной системы.

Первое ГМТ получим, опираясь на его симметричность относительно осей *Ox* и *Oy* (Рисунок 9):

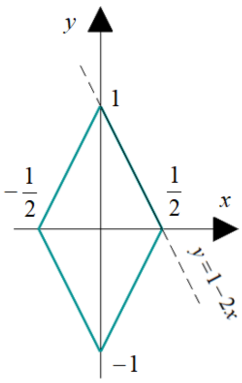


Рисунок 9 – Ромб

ГМТ уравнение $2|x| + |y| = 1$

Второе ГМТ – окружность радиусом $\sqrt{a}$ с центром в точке O (0;0) (Рисунок 10):

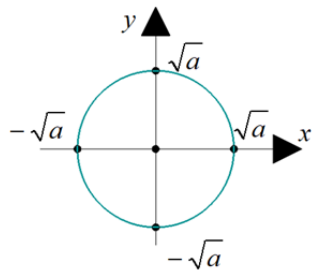


Рисунок 10 – Окружность

ГМТ уравнение $x^2 + y^2 = a$

Система имеет 8 разных решений (8 точек пересечений построенных ГМТ), когда окружность расположена между положением касания сторон ромба и позицией, когда окружность проходит через точки $\left(\pm\frac{1}{2}; 0\right)$. В первом случае радиус окружности равняется расстоянию от точки O (0;0) к прямой $2x + y - 1 = 0$

$\sqrt{a} = \rho\left(\frac{(0;0)}{2x+y-1}\right) = \frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, и $a = \frac{1}{5}$;

Во втором $\sqrt{a} = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}$. То есть $a \in \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$ и имеем предыдущий ответ.

Пример №4. Найти значения параметра *a*, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Решение.

Уравнение не изменится при замене x на $-x$. Тогда, если x_0 – решение, то $-x_0$ также является решением. Единственное решение имеем при $x_0 = -x_0 = 0$ (корни совпадают). Тогда значения параметра a ищем, решая уравнение:

$-2a\sin 1 + a^2 = 0; (x = 0)$

$a(a - 2\sin 1) = 0;$

$a = 0$ или $a = 2\sin 1$.

Таким образом, при $a = 0$ или $a = 2\sin 1$, $x = 0$ – является корнем, но не факт, что единственным.

Проверка достаточности:

При $a = 0$, имеем $x^2 = 0$, $x = 0$ - единственный корень.

При $a = 2\sin 1$, $x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0$

$$x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x)$$

Левая часть уравнения не меньше $4\sin^2 1$, а правая не больше $4\sin^2 1$

$(-1 \le \cos x \le 1, \sin(\cos x) \le \sin 1)$

Уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin^2 1 \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ - единственное решение.

Ответ: $a = 0$, $a = 2\sin 1$.

Параметр как переменная. Метод областей.

Сравнение метода интервалов и метода областей

Таблица 1 – Сравнение методов

Метод интервалов (неравенство с одной переменной)	Метод областей (неравенство с двумя переменными)
1. Разложить на множители и представить в виде $\frac{(x-a)(x-b)\dots}{(x-c)(x-d)\dots} \vee 0$. 2. Найти область определения и нули функции, решив уравнения x-a = 0; 3. Нанести область определения и нули функции на координатную прямую. 4. Определить знаки на интервалах. 5. Записать ответ.	1. Разложить на множители и представить в виде $\frac{f(x;a)\cdot g(x;a)\dots}{h(x;a)\cdot p(x;a)\dots} \vee 0$. 2. Найти границы областей, выразив а через х, решив уравнения f(x; a) = 0; 3. Построить графики функций и уравнений f(x; a) = 0 ; 4. Определить знаки в полученных областях. 5. Записать ответ с опорой на рисунок.

Пример. Изобразить множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $(x - y)(xy - 1) \ge 0$

Решение:

1. В координатной плоскости ХОУ изобразим линии (*границы областей*), решив уравнения $x - y = 0$ $(y = x)$ и $x \cdot y - 1 = 0$ $(y = \frac{1}{x})$, которые разбивают плоскость на 6 областей.

2. При $x = 1, y = 0$ левая часть неравенства равна -1(отрицательна)

Следовательно, в 1 области, содержащей точку (1; 0), левая часть неравенства имеет знак минус, а *в остальных областях её знаки чередуются* (Рисунок 11).

3. Выбираем области, удовлетворяющие данному неравенству.

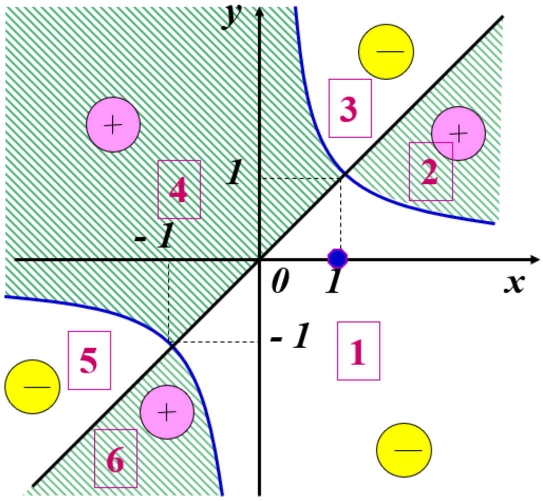


Рисунок 11 – Области

Ответ: заштрихованные области на рисунке удовлетворяют условию $(x-y)(x-1) \geq 0$

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию двух переменных x и a: $f(x;a) \leq 0$.

Алгоритм решения задач методом областей

1) Построить графики уравнений границ в координатной плоскости xОa. Данные кривые разбивают координатную плоскость на области, в которых знак выражения $f(x;a)$ постоянный.

2) Отобрать те области, в которых: $f(x;a) \leq 0$.

3) Чтобы ответить на вопрос задачи, в плоскости *xOa* изображают так называемую «считывающую» прямую *a = c (c – число)*, параллельную оси абсцисс.

4) С помощью параллельного переноса этой прямой считываем ответ на поставленный вопрос.

Пример для понимания «метода областей»

Пример 1. Указать множество точек плоскости (*X*;*Y*), удовлетворяющих неравенству $xy^2 - x^3 \leq 0$.

$x(y^2 - x^2) \leq 0,$

$x(y-x)(y+x) \leq 0,$

Построим границы (графики функций) $x = 0,\ y = x,\ y = -x$ (Рисунок 12).

Проверим знак одной из областей. Возьмем точку (1;0)
$1(0-1)(0+1) = -1 < 0.$

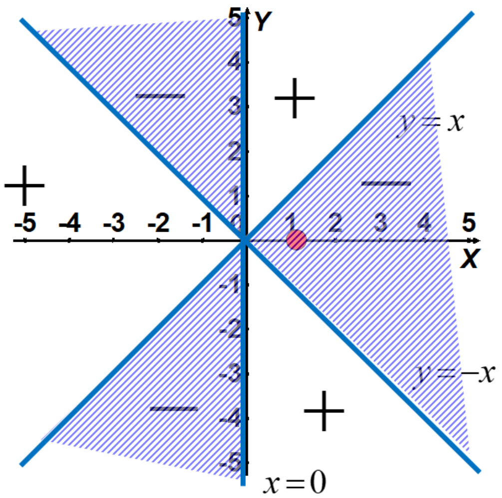


Рисунок 12 – Области

Пример 2. Указать множество точек плоскости (X;Y), удовлетворяющих неравенству:

$x^2y^2 - x^4 \leq 0,$

$x^2(y^2 - x^2) \leq 0,$

$x^2(y-x)(y+x) \leq 0$

Построим границы $x^2 = 0,\ y = x,\ y = -x$ (Рисунок 13).

Проверим знак одной из областей и выделим решение неравенства.

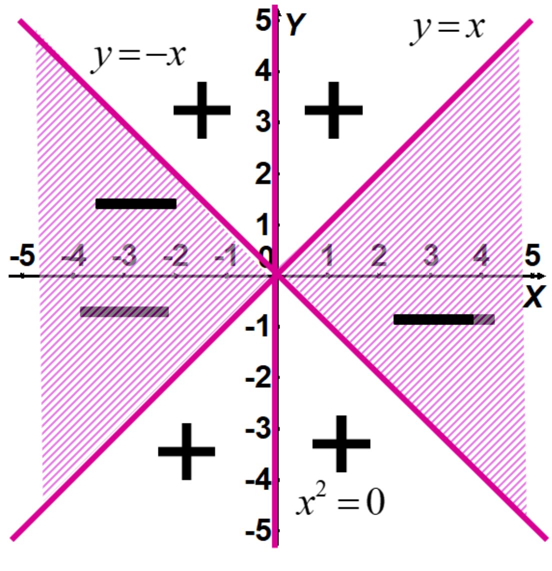


Рисунок 13 – Области

Пример 3. Указать множество точек плоскости (X;Y), удовлетворяющих неравенству: $\frac{x+y}{x-y} \geq 1$;

Преобразуем неравенство: $\frac{x+y}{x-y} - 1 \geq 0$; $\frac{2y}{x-y} \geq 0$;

Построим границы $\mathrm{y} = 0,\ \mathrm{y} = x$ (Рисунок 14).

Проверим знак одной из областей и выделим решение неравенства.

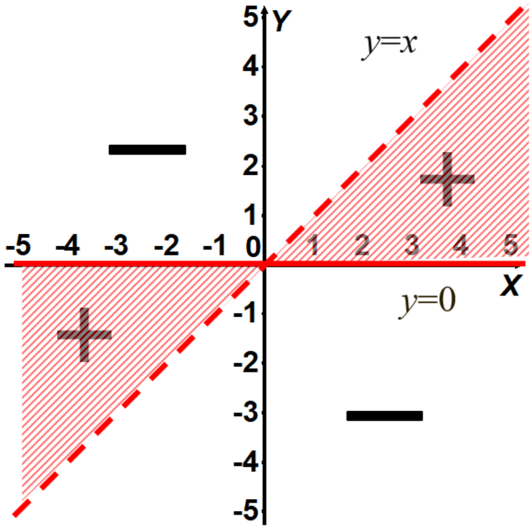


Рисунок 14 – Области

Пример 4. Найти все значения параметра *p*, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$

Решение: применим метод областей.

1. Строим границы областей в плоскости *x*O*p*: $p = x^2$ и $p = 2 - x$

2. Определяем знаки в полученных областях. Выбираем точку (0; 3): (3-0)(3+0-2)<0 – неверно.

3. Осталось из полученного множества исключить решения неравенства

$x^2 \leq 1$

$|x| \leq 1, -1 < x < 1$

По рисунку легко считываем ответ

При $p \leq 0$, $p \geq 3$ в решениях исходного неравенства нет решений неравенства $x^2 \leq 1$ (Рисунок 15).

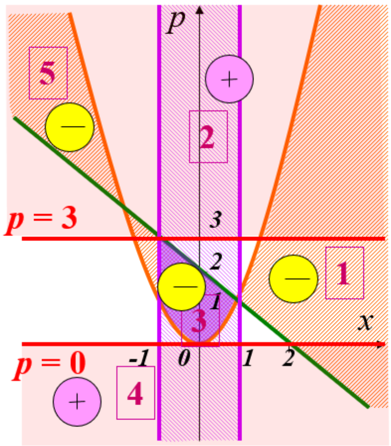


Рисунок 15 – Области

Ответ: $p \leq 0, p \geq 3$

Пример 5. Найти наименьшее значение параметра a, при котором система имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} a < |x| \\ x^2 - 2x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - |x| < 0 \\ x^2 - 2x - a \leq 0 \end{cases} \quad a = x^2 - 2x$$

1. На плоскости xOa строим границу $a = |x|$,

2. Определим знаки областей и выделим решение первого неравенства

3. Так же для второго неравенства $a = x^2 - 2x$

4. Ограничим область решения системы неравенств (Рисунок 16).

5. Наименьшее значение параметра a, при котором система имеет решение равно –1.

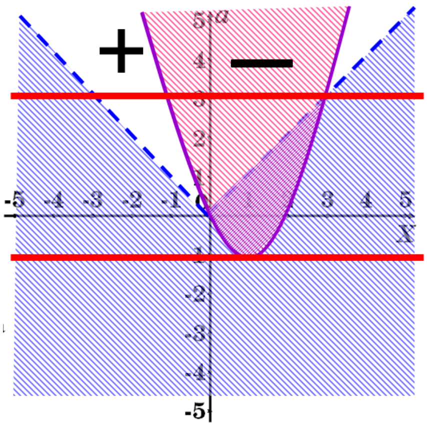


Рисунок 16 – Области

Пример 6. Решите систему неравенств относительно x

$$\begin{cases} x - a > -1, \\ a > x^2 - 3x + 1. \end{cases}$$

Решение:

Система уравнений: $\begin{cases} a < x + 1, \\ a > x^2 - 3x + 1. \end{cases}$

1. Границы областей: $\begin{cases} a = x + 1, \\ a = x^2 - 3x + 1. \end{cases}$

2. Вершина параболы: $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}, \\ y_0 = -\frac{5}{4}. \end{cases}$

3. Решим уравнения: а) $\begin{matrix} a=x^2-3x+1, \\ x^2-3x+1-a=0, \\ x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5+4a}}{2}. \end{matrix}$

б) $a = x + 1, \quad x = a - 1$ (Рисунок 17).

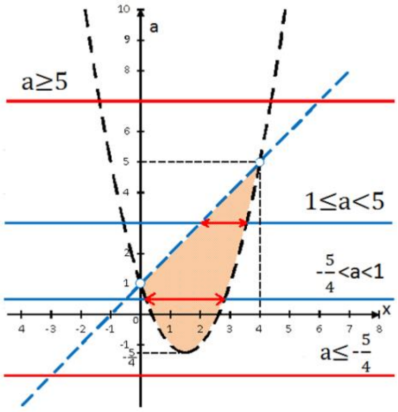


Рисунок 17 – Парабола

Ответ: при $a \le -\frac{5}{4}$; $a \ge 5$ (решений нет);

при $-\frac{5}{4} < a < 1$ $m\frac{3-\sqrt{5+4a}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5+4a}}{2}$;

при $1 \le a < 5$ $a - 1 < x < \frac{3+\sqrt{5+4a}}{2}$.

Пример 7. Найдите все значения *a,* при каждом из которых система $\begin{cases} \frac{x+ax+a}{x-2a-2} \ge 0; \\ x + ax > 8. \end{cases}$ не имеет решения.

Решим систему методом областей.

1. Построим границы для первого неравенства

$x + ax + a = 0, a = \frac{-x}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}$ и $x - 2a - 2 = 0, a = \frac{x}{2} - 1.$

2. Определяем знаки в полученных областях.

3. Выбираем области, соответствующие знаку неравенства.

4. Построим границы и области для второго неравенства.

$x + ax = 8, a = -1 + \frac{8}{x}$ (Рисунок 18).

5. Считываем информацию.

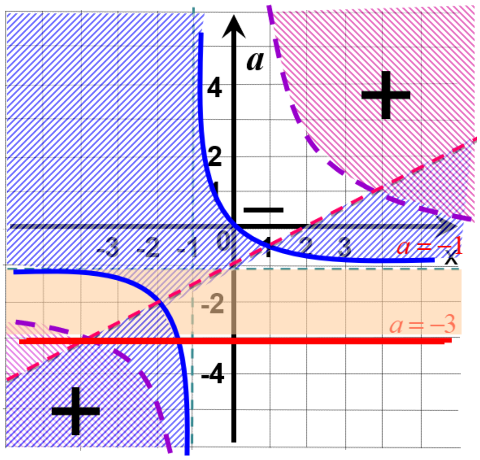


Рисунок 18 – Гипербола

Ответ: система не имеет решения при $a \in [-3; -1]$

Пример 8. Найдите все значения a, при которых неравенство

$\log_a(x^2 + 4) > 1$ выполняется для всех значений x.

Решение: Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)(x^2+4-a) > 0, \ (1) \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Применим метод областей:

1. Уравнения границ областей: $\begin{cases} a = 1 \\ a = x^2 + 4 \end{cases}$ (Рисунок 19).

2. $(0;2)$: $(2\text{-}1)(0^2\text{+}4\text{-}2)\text{=}2 > 0$.

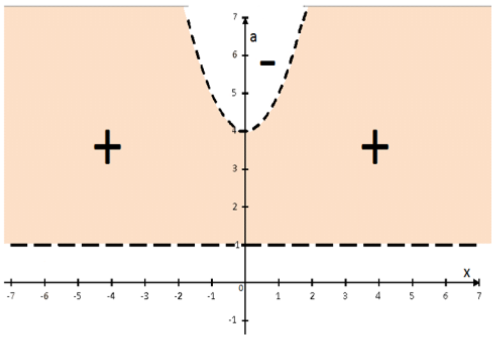


Рисунок 19 – Парабола

Ответ: $a\epsilon(1;4)$

Пример 9. Найдите все значения *а,* при каждом из которых решение неравенства $|x\text{-}a|+|y|\le 2$ является решением неравенства $(y+3)(y\text{-}x+2)(x^2\text{-}8x+12–y)\ge 0$.

Решение: применим метод областей

$$y=-3;$$

$$y=x-2;$$

$$y=x^2-8x+12.$$

Определяем знаки в полученных областях. Выделяем решение данного неравенства.

$|x-a|+|y|\le 2$ при a=0 $|x|+|y|\le 2$ (Рисунок 20).

Так как параметр *а* влияет на сдвиг по оси Ох, то сдвигая область решения считываем ответ.

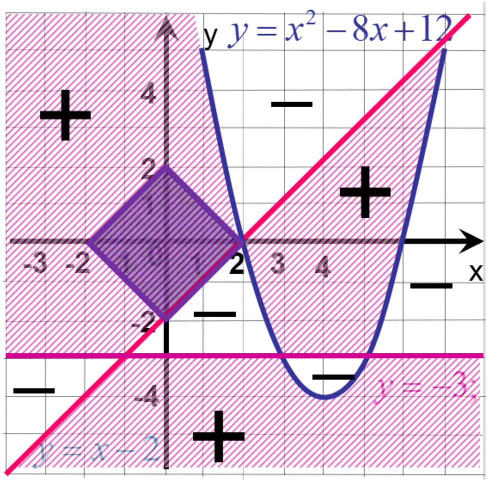


Рисунок 20 – Области

Ответ: $\mathrm{a}\le 0,\ \mathrm{a}=4.$

Пример 10. На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1} \leq 0$.

Область определения неравенства: $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$.

Граничные линии: $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x|$ и $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Проводим граничные линии, с учётом области определения. Они разбивают плоскость на 8 областей. Определяем знаки на областях подстановкой в отдельных точках (Рисунок 21).

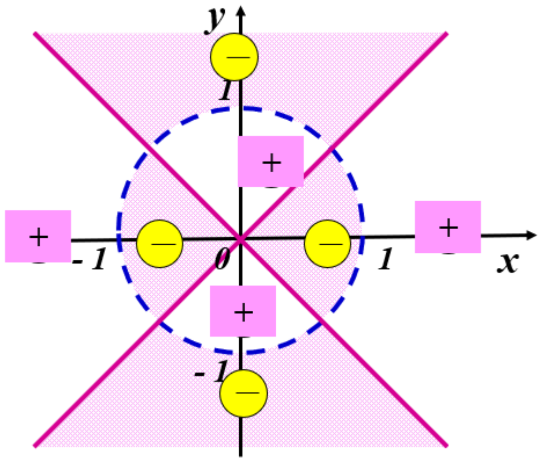


Рисунок 21 – Окружность

Ответ: заштрихованные области на рисунке.

Квадратные уравнения и квадратичные неравенства с параметрами

Функцию вида $y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ (1), где $A(a), B(a)$, $C(a)$ – данные функции от параметра a, рассматриваемые на пересечении их областей определения, назовём квадратичной функцией с параметром a.

В частности, некоторые из коэффициентов или свободный член могут быть числами.

Примеры.

1. $y = ax^2$.
2. $y = x^2 + 3bx$.
3. $y = x^2 + 7c$.
4. $y = (a-1)x^2 + x - a^2$.
5. $y = (a^2+3)x^2 - 5$.

6. $y = \sqrt{-a^2} \cdot x^2 + 3.$

7. $y = \frac{x^2}{a-1} - \sqrt{a}x + a.$

8. $y = x^2 - \sqrt{|a| - 1} \cdot x.$

9. $y = \sqrt{-2a} \cdot x^2 + x - \frac{1}{a}.$

10. $y = \sqrt{2 - |a+1|} \cdot x^2 + \frac{1}{a+3}x - 1.$

Под областью определения квадратичной функции (1) с параметром *a* будем понимать всё множество пар значений *x* и *a* вида (*x*; *a*), при каждой из которых выражение $A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ не теряет смысла.

Область определения $(D(y))$функций:

1. $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

2. $\begin{cases} b \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

3. $\begin{cases} c \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

4. $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

5. $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

6. $\begin{cases} a = 0, \\ x \in R. \end{cases}$

7. $\begin{cases} a \geq 0, \\ x \neq 1. \\ x \in R. \end{cases}$

8. $\begin{cases} |a| \geq 1, \\ x \in R. \end{cases}$

9. $\begin{cases} a < 0, \\ x \in R. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -3 < a \leq 1, \\ x \in R. \end{cases}$

Если параметр принимает одно из числовых значений из *D(y),* то функция (1) примет вид одной из функций с числовыми коэффициентами:

$y = kx^2 + bx + c;$

$y = kx^2 + bx;$

$y = kx^2 + c;$

$y = kx^2;$

$y = bx + c;$

$y = bx;$

$y = c;$

где k, b, c – действительные числа.

Обратим внимание на то, что при некоторых значениях параметра из $D(y)$ квадратичная функция с параметром принимает вид либо квадратичной функции без параметра, либо – линейной.

Так как квадратичная функция с параметром чаще всего «порождает» семейство квадратичных или линейных функций с числовыми коэффициентами, то говоря о *графиках квадратичной функции с параметром*, мы будем подразумевать множество графиков этого семейства.

Квадратным уравнением с параметром *a* называется уравнение вида $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$ (1) где $A(a), B(a), C(a)$ – данные функции от параметра *a*, рассматриваемые на пересечении их областей определения.

В частности, некоторые из коэффициентов или свободный член могут быть числами.

Примеры.

$(a + 1)x^2 + 3x - 7 = 0,$ (1)

$x^2 - 2ax + 3 = 0,$ (2)

$ax^2 + x + a^2 - 1 = 0,$ (3)

$(a^2 - 4)x^2 + 2ax - 4a = 0,$ (4)

$(a - 1)x^2 + \sqrt{a} \cdot x - a = 0.$ (5)

Если $A(a) \neq 0$, то уравнение (1) является квадратным в традиционном смысле, т.е. второй степени. Если же $A(a) = 0$, то уравнение (1) становится линейным.

При всех допустимых значениях параметра a, при которых $A(a) \neq 0$ и $D(a) = B^2(a) - 4A(a) - 4A(a) \cdot C(a) \geq 0$, по известным формулам получаем выражения корней уравнения (1) через параметр.

Т.е. значения a, при которых $A(a) = 0$, следует рассматривать отдельно в качестве особых случаев. Так, например, уравнение (5) при $a = 1$ примет вид $x - 1 = 0$, откуда $x = 1$.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x^2-4x+3}{x-a} = 0$.

Решение

ООУ: $\begin{cases} a \in R \\ x \neq a \end{cases}$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ – уравнение-следствие. Получим: $x_1 = 1, x_2 = 3$.

В системе координат (*aOx*) завершаем решение (Рисунок 22).

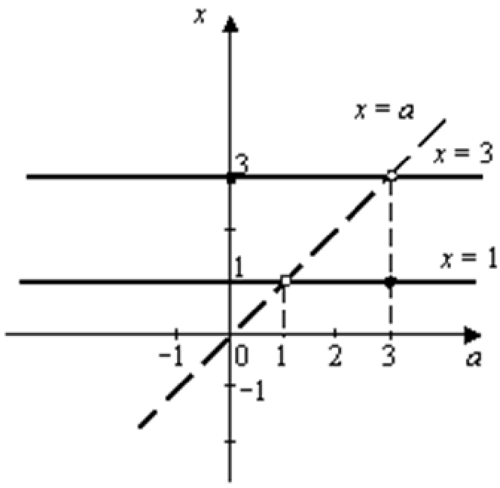


Рисунок 22 – Прямая

Ответ: 1. Если $a = 1$, то $x = 3$.

2. Если $a = 3$, то $x = 1$.

3. Если $a \neq 1, a \neq 3$, то $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Пример 2. Найдите значение параметра a, при котором уравнение

$\frac{a-x^2}{|a|-x-2} = 0$ имеет единственный корень. Если таких значений несколько, в ответе запишите их сумму.

Решение

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \neq |a| - 2. \end{cases}$

Данное уравнение сводится к равносильной системе:

$$\begin{cases} a - x^2 = 0 \\ |a| - x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Приведём её к виду: $\begin{cases} a = x^2, \\ |a| \neq x + 2 \end{cases}$ и решим графически в системе координат (xOa) (Рисунок 23).

Уравнение имеет единственный корень при $a = 0$, $a = 1$ и $a = 4$.

0 + 1 + 4 =5.

Ответ: 5.

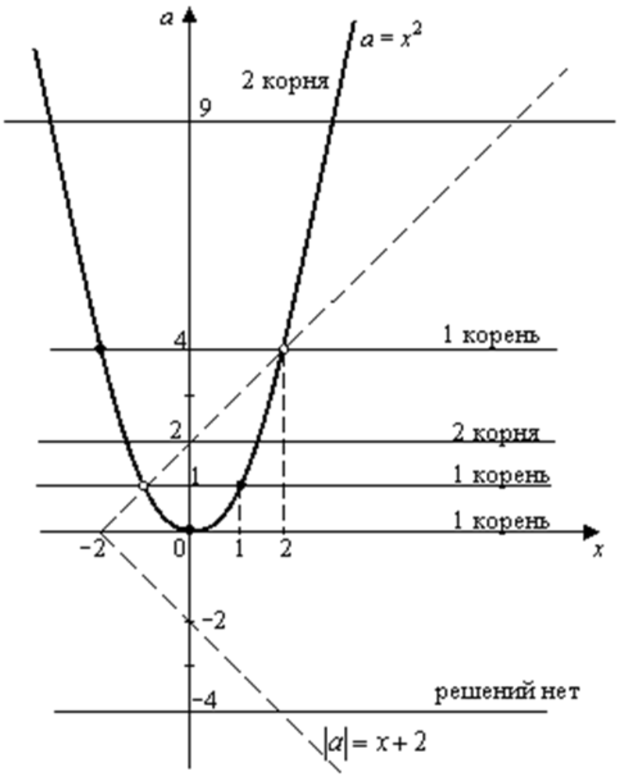


Рисунок 23 – Парабола

Пример 3. Найдите все значения x такие, что при любом значении параметра a, не принадлежащем промежутку (0; 2], выражение $x^2 + a$ не равно выражению $(a - 6) \cdot x + 7$. (ЕГЭ–2007).

Решение.

Переформулируем задачу: «Найдите все значения *x* такие, что при любом значении параметра $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ уравнение $x^2 + a = (a-6) \cdot x + 7$ не имеет корней».

Выразим *a* через *x*:

$x^2 + 6x - 7 = ax - a$; $(x+7)(x-1) = a(x-1)$.

1) Пусть $x = 1$. Тогда $0 = a \cdot 0$. Поэтому уравнение имеет корни. Значит, $x = 1$ не удовлетворяет условию.

2) Пусть $x \neq 1$. Тогда $a = x + 7$. Воспользуемся системой координат (*xOa*) (Рисунок 24).

Условию удовлетворяют $x \in (-7; -5]$.

Ответ: $x \in (-7; -5]$.

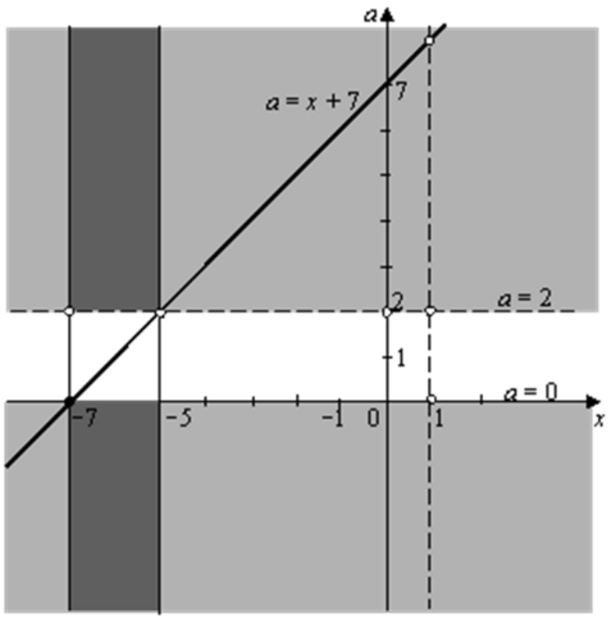


Рисунок 24 – Области

Пример 4. Сколько корней в зависимости от параметра *a* имеет уравнение $x^2 - x + 2|x-2| + 2 - a = 0$?

Решение

ООУ: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - x + 2x - 4 + 2 - a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x^2 - x - 2x + 4 + 2 - a = 0 \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \geq 2, \\ a = x^2 + x - 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ a = x^2 - 3x + 6 \end{cases}\end{array}\right.$$

В системе координат (*xOy*) построим график функции

$y = \begin{cases} x^2 + x - 2, \text{если } x \geq 2, (1) \\ x^2 - 3x + 6, \text{если } x < 2\ (2) \end{cases}$ и несколько прямых пучка параллельных прямых, задаваемых уравнением $y = a$ (Рисунок 25).

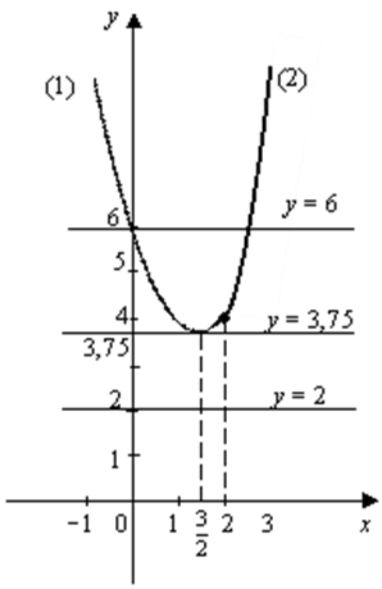


Рисунок 25 – Парабола

Ответ: 1. Если $a < 3{,}75$, то корней нет.

2. Если $a < 3{,}75$, то один корень.

3. Если $a < 3{,}75$, то два корня.

Пример 5. Решите неравенство $|x - 1| \cdot (x - b) \leq 0$.

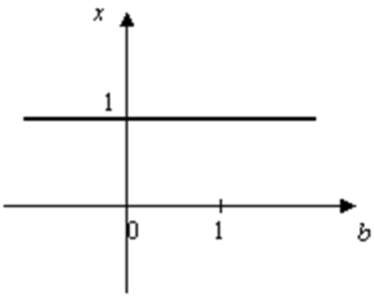
Решение.

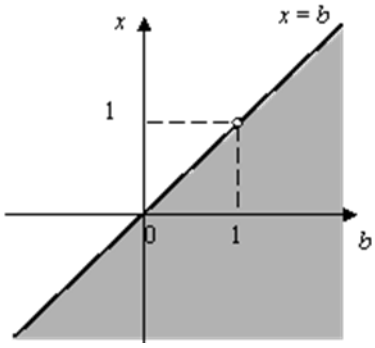
1 способ.

Учтём, что $|x - 1| \geq 0$. Тогда $x = 1$ – решение данного неравенства при любом b (Рисунок 26.1).

Если $x \neq 1$, то переходим к неравенству $x - b \leq 0$, множество решений которого изобразим в системе координат (*bOx*) (Рисунок 26.2).

Совместим рисунки 26.1 и 26.2 (Рисунок 26.3).





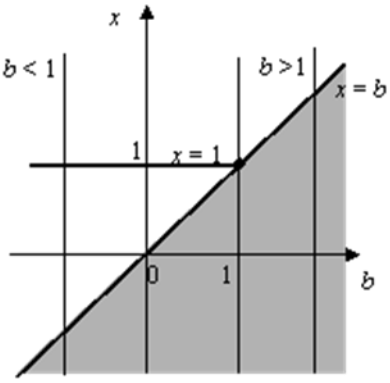


Рисунок 26.1 Рисунок 26.2 Рисунок 26.3

А теперь по последнему рисунку, рассекая его вертикальными прямыми, легко получить ответ.

Ответ: 1. Если $b < 1$, то $x \in (-\infty; b] \cup \{1\}$.

2. Если $b = 1$, то $x \in (-\infty; 1]$.

3. Если $b > 1$, то $x \in (-\infty; b]$

2 способ.

Решим неравенство графическим методом в системе координат (xOb): $|x-1| \cdot x \leq b \cdot |x-1|$ (Рисунок 27).

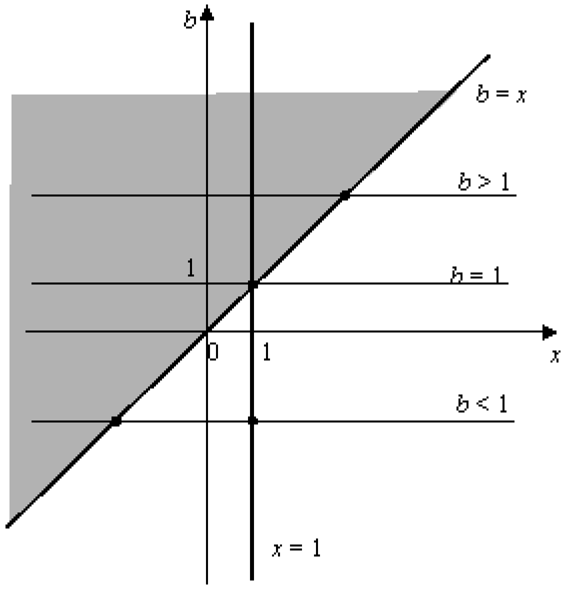


Рисунок 27 – Модули

Рассмотрим два случая.

1) $x = 1$. Тогда неравенство примет вид $0 \leq b \cdot 0$, откуда $b \in R$.
2) $x \neq 1$, тогда $b \geq x$.

График функции $b = x$ и часть плоскости, содержащая точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $b \geq x$ (Рисунок 27).

Ответ:

1. Если $b < 1$, то $x \in (-\infty; b] \cup \{1\}$.

2. Если $b = 1$, то $x \in (-\infty; 1]$.

3. Если $b > 1$, то $x \in (-\infty; b)$.

3 способ.

Приведём теперь графическое решение в системе координат (*xOy*). Для этого раскроем модуль:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 - (b+1)x + b \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x^2 - (b+1)x + b \geq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим функцию $y = x^2 - (b+1)x + b$.

$x_1 = 1, x_2 = b$ – корни квадратного трёхчлена $x^2 - (b+1)x + b$ (Рисунок 28).

Сравним x_1 и x_2.

1) $x_1 = x_2$, откуда $b = 1$.

Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ (x-1)^2 \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x < 1; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 1]$ (Рисунок 29).

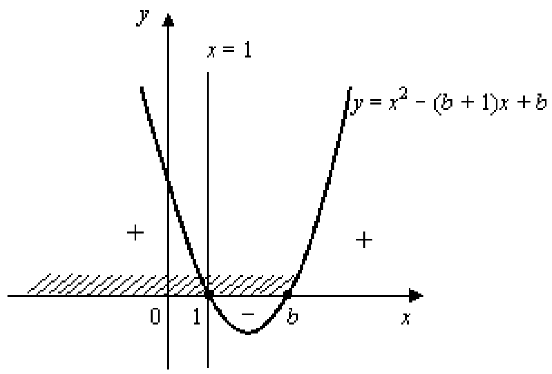


Рисунок 28

2) $x_2 > x_1$, откуда $b > 1$ (Рисунок 29).

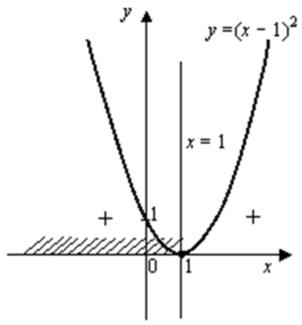


Рисунок 29

Тогда $\left[\begin{array}{c} x \in [1; b], \\ x \in (-\infty; 1), \end{array}\right.$ т.е. $x \in (-\infty; b]$.

4) $x_2 < x_1$, откуда $b < 1$ (Рисунок 30).

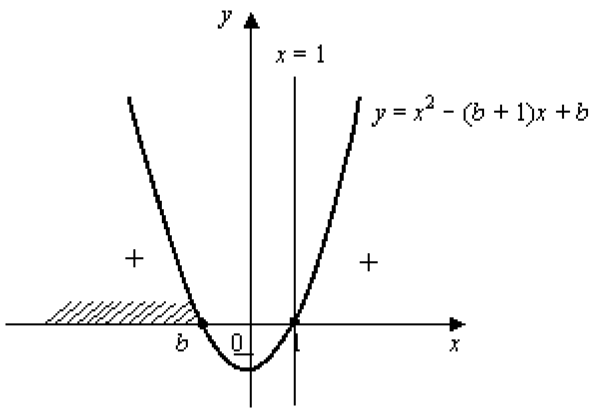


Рисунок 30

Тогда $\left[\begin{array}{c} x = 1, \\ x \in (-\infty; b], \end{array}\right.$ т.е. $x \in (-\infty; b] \cup \{1\}$.

Ответ: 1. Если $b < 1$, то $x \in (-\infty; b] \cup \{1\}$.

2. Если $b = 1$, то $x \in (-\infty; 1)$.

3. Если $b > 1$, то $x \in (-\infty; b]$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$ больше 2.

Решение.

Достаточно найти все значения параметра a, для каждого из которых для любого $x \in R$ верно неравенство $x^2 + |x - a| + |x - 1| > 2$. Перепишем неравенство в виде $|x - a| > -x^2 - |x - 1| + 2$.

Решим его графически в системе координат (xOy).

Для этого рассмотрим функции $y = -x^2 - |x-1| + 2$ (1), $y = |x-a|$ (2).

$(1) y = \begin{cases} -x^2 - x = 3, \text{если } x \geq 1; \\ -x^2 + x + 1, \text{если } x < 1. \end{cases}$ (Рисунок 31).

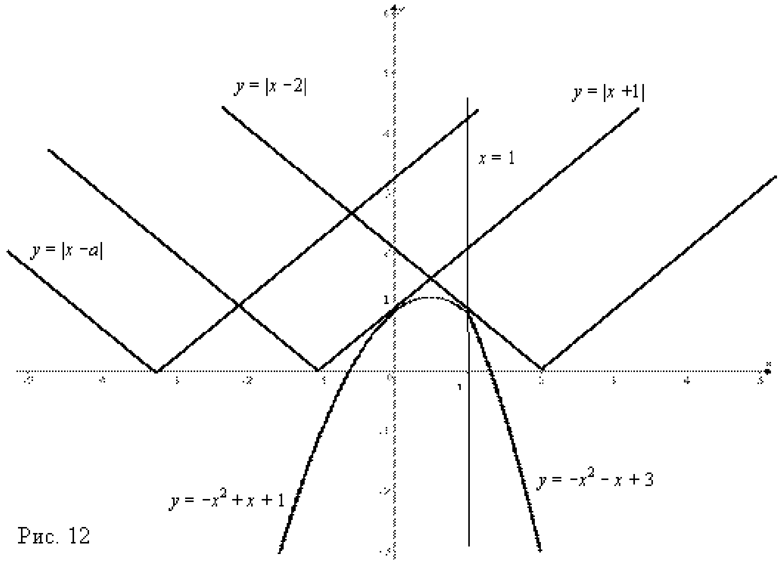


Рисунок 31

Неравенство будет выполняться для всех $x \in R$, если график функции $y = |x-a|$ будет выше графика функции $y = -x^2 - |x-1| + 2$.

Рассмотрим 2 случая: 1) прямая $y = x - a$ является касательной к графику функции $y = -x^2 + x + 1$; 2) прямая $y = -x + a$ является касательной к графику функции $y = -x^2 + x + 1$.

1. $y' = -2x + 1, -2x + 1 = 1, x_1 = 0, y_1 = 1, y = x + 1$ - уравнение касательной. Откуда$-a = 1$,

$a_1 = -1$. Тогда $a \in (-\infty; -1)$.

2. График функции $y = -x + a$ проходит через точку с координатами (1; 1): $1 = -1 + a$, откуда $a = 2$.

Условию задачи удовлетворяют все $a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 7. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + a \leq 0, \\ -2 \leq x \leq -a. \end{array}\right.$

Решение

Установим сначала область определения совокупности:

$\begin{cases} -a > -2, \\ x \in R, \end{cases} \begin{cases} a < 2, \\ x \in R. \end{cases}$

Будем решать совокупность графически в системе координат (xOa). (Рисунок 32).

Перепишем совокупность в виде $\left[\begin{array}{l} a \leq -x^2 + 6x, \\ \begin{cases} x \geq -2, \\ a < -x, \end{cases} \end{array}\right.$ где $a < 2$.

Введем функцию $a = -x^2 + 6x$. (0; 0), (6; 0) - точки пересечения с осями координат; (3; 9) - вершина параболы.

Найдём корни квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + a$; $x_1 = 3 - \sqrt{9-a}$;

$x_2 = 3 + \sqrt{9-a}$.

На рисунке 32 множество решений совокупности выделено цветом (темным или светлым).

Ответ:

1. Если $a > 2$, то решений нет.

2. Если $0 < a < 2$, то $x \in [-2; -a) \cup [3 - \sqrt{9-a}; 3 + \sqrt{9-a}$.

3. Если $a = 0$, то $x \in [-2; 0) \cup (0; 6]$.

4. Если $-7 < a < 0$, то $x \in [-2; 3 + \sqrt{9-a})$.

5. Если $a = -7$, то $x \in [-2; 7)$.

6. Если $-16 \leq a < -7$, то $x \in [-2; -a)$.

7. Если $a < -16$, то $x \in [3 - \sqrt{9-a}; -a)$.

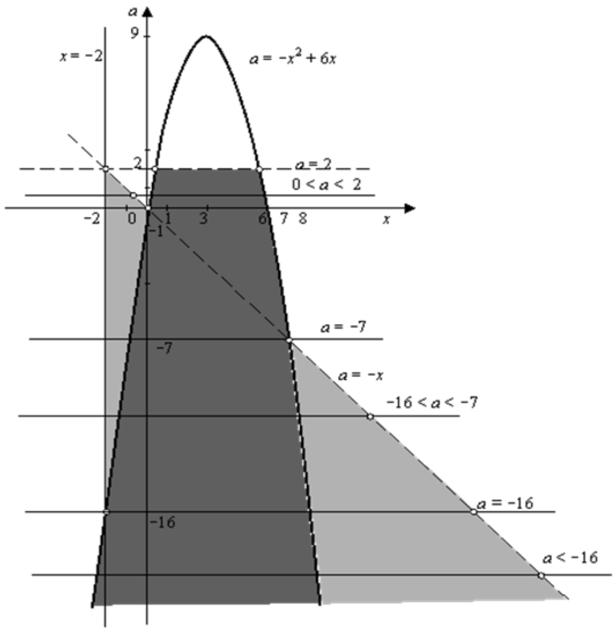


Рисунок 32

Аналитический метод в задачах с параметрами

Пример 1. Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a + 2, \\ xy = 6 - a \end{cases}$ раз имеет ровно два личных решения.

Решение: при $x = 0$ из второго уравнения системы, $a = 6$. Подставим $a = 6$ в систему получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 20; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x^2 = 20. \end{cases} \end{array}\right.$$

При $a = 6$ система имеет четыре решения, это значение $a = 6$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a \neq 6 (x \neq 0, y \neq 0)$ выразим из второго уравнения $y = \frac{6-a}{x}$ и подставим в первое, получим

$$x^2 + \left(\frac{6-a}{x}\right)^2 - 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - (3a + 2)x^2 + (6 - a)^2 = 0.$$

Система имеет два решения тогда, когда биквадратное уравнение имеет два решения.

Пусть $x^2 = t$ получим уравнение $t^2 - (3a + 2)t + (6 - a)^2 = 0.$

Биквадратное уравнение имеет два решения в следующих случаях.

1 случай: Квадратное уравнение имеет один корень и он положительный.

$$D = (3a+2)^2 - 4(6-a)^2 = (3a+2+12-2a)(3a+2-12+2a) =$$
$$= (a+14)(5a-10) = 0$$

При $a = 2$ получим $t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow t = 4 > 0$.

При $a = -14$ получим $t^2 + 40t + 400 = 0 \Rightarrow t = -20 < 0$.

Условию задачи удовлетворяет $a = 2$.

2 случай: Квадратное уравнение имеет корни разных знаков, т.е. $t_1 \cdot t_2 < 0$.

По теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow t_1 \cdot t_2 = (6-a)^2$.

Неравенство $(6-a)^2 < 0$ не имеет решений.

Биквадратное уравнение, а следовательно, и исходная система будут иметь два решения при a=2.

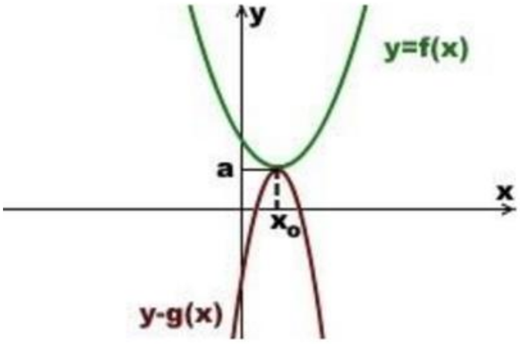
Ответ: 2

Метод оценки в задачах с параметрами

Метод оценок или метод мажорант относится к нестандартным методам решения уравнений и неравенств. Он базируется на свойстве ограниченности функций и применяется, когда в левой и правой частях уравнения или неравенства стоят функции разных типов. В ЕГЭ по математике встречаются задачи с параметром, где требуется оценить функции. Важно научить методу оценок при подготовке к экзамену. Применение метода оценок будет успешным, если учащиеся умеют находить экстремумы элементарных функций, область значений, исследовать функцию с помощью производной.

Метод оценок применяется для уравнений и неравенств, где функции, стоящие в левой и правой части, могут быть равны друг другу только в определенной точке, причем одна из них принимает в этой точке наименьшее значение, а другая – наибольшее (Рисунок 33, 34).

Вот это как выглядит:



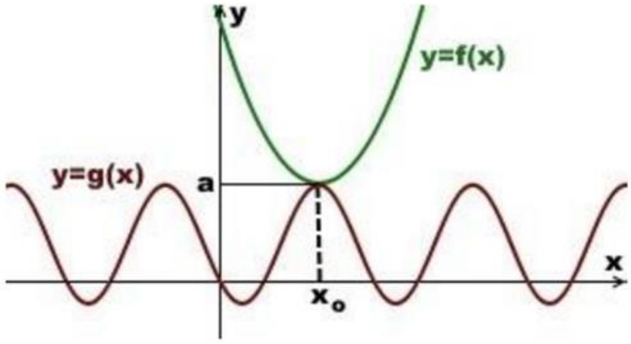


Рисунок 33 Рисунок 34

Рассмотрим пример: $2^{|x|} = cos(x^2)$.

Оценим обе части уравнения.

При всех значениях x верны неравенства $2^{|x|} \geq 1$ и $\cos(x^2) \leq 1$.

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos^2 x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

При x = 0 второе уравнение обращается в тождество, значит $x = 0$ корень уравнения (Рисунок 35).

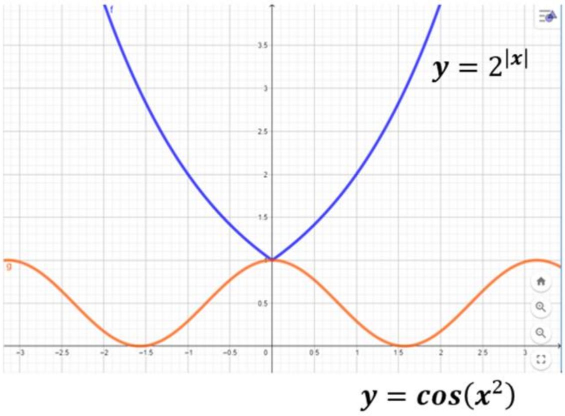


Рисунок 35

Если максимальное значение функции, стоящей в одной части уравнения, равно минимальному значению функции, стоящему в другой части уравнения, но эти значения достигаются при разных x_0, то уравнение не имеет корней (Рисунок 36).

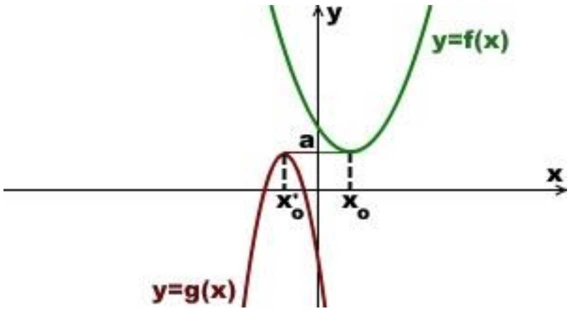


Рисунок 36

Рассмотрим пример: $2^{|x|} = sin(x^2)$.

Оценим обе части уравнения. При всех значениях x верны неравенства

$$2^{|x|} \geq 1 \text{ и } \sin(x^2) \leq 1.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ \sin(x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sin(x^2) = 1 \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений, так как x=0 не удовлетворяет второму уравнению. А значит уравнение корней не имеет (Рисунок 37).

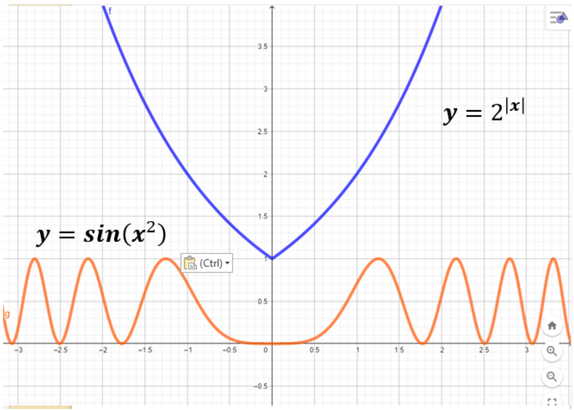


Рисунок 37

Пример: $2^{(\sqrt{3}-\cos 10\pi x)(\sqrt{3}+\cos 10\pi x)} = 8 + (20x+3)^2$.

Сделаем преобразования, которые можно выполнить сразу.

$$2^{(\sqrt{3}-\cos 10\pi x)(\sqrt{3}+\cos 10\pi x)} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$2^{3-\cos^2 10\pi x} = 8 + (20x+3)^2;$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi x}} = 8 + (20x+3)^2;$$

В левой и правой части уравнения находятся функции разных типов. Это уравнение бесполезно возводить в квадрат или делать с ним арифметические действия. Бесполезно брать логарифм от обеих частей – от всего этого оно станет еще хуже.

В левой и правой части появились восьмерки. Это «подсказка» специально сделана. В левой и правой частях уравнения находятся функции разных типов. И при определенном значении x они оказались равны друг другу. Легко заметить, что значения выражения в правой части всегда больше либо равны 8, значения выражения в левой части –меньше либо равны 8. И возможно, есть такая точка, где у одной из этих функций будет минимум, а у другой-максимум, причем значение каждой из них станет равно восьми.

Приравниваем правую часть к восьми.

$$8 + (20x + 3)^2 = 8;$$

$$(20x + 3)^2 = 0;$$

$$x = -\frac{3}{20} = -0{,}15.$$

Подставив $x = -0{,}15$ в левую часть, получим, что и она равна восьми при этом значении x. Значит, $x = -0{,}15$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: $x = -0{,}15$

Задача 1. Найти все значения параметра *a* при которых уравнение $\sqrt{7\,cos(6x + 7) + 32} = -a^2 + 10a - 20$ имеет решение.

Оценим обе части уравнения.

Найдем множество значений левой части исходного уравнения: $\cos x \,\epsilon[-1; 1]$. Т.к. $7\,cos(6x + 7)\,\epsilon[-7; 7]$, то $7\cos(6x + 7) + 32\,\epsilon[25; 39]$, тогда $\sqrt{7\cos(6x + 7) + 32}\,\epsilon\left[5; \sqrt{39}\right]$ из чего следует, что наименьшее значение

у $= \sqrt{7\cos(6x + 7) + 32}$ равно 5.

В правой части данного уравнения – квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви направлены вниз.

Выделив, полный квадрат получаем: $-a^2 + 10a - 20 = -(a-5)^2$. Следовательно, наибольшее значение правой части равно 5 и достигается в вершине при $a - 5 = 0$, то есть при $a = 5$ (Рисунок 38).

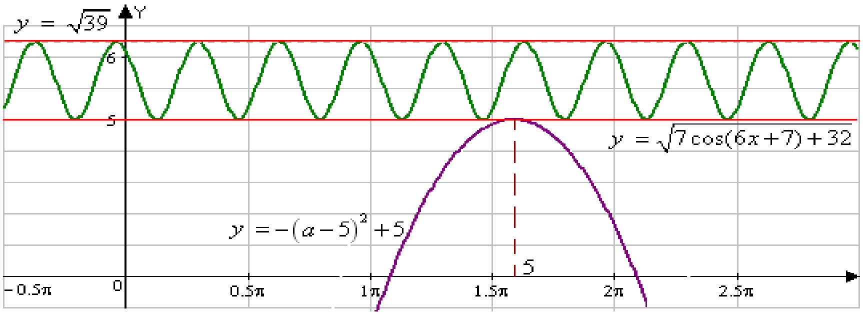


Рисунок 38

Итак, исходное уравнение имеет решение при $a = 5$.

Ответ: 5.

Задача 2. Найти все значения параметра $a \in (5; 16)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число $x \in (1; 2)$, удовлетворяющее уравнению

$$1 + cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|cos(\pi x) - sin(\pi x)|}$$

Решение.

Оценим обе части уравнения.

Учитывая, что $cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \geq 0$ и $|cos(\pi x) - sin(\pi x)| \geq 0$, для левой и правой частей уравнения имеем оценки: $1 + cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \geq 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{|cos(\pi x) - sin(\pi x)|} \geq 1$

Уравнение имеет решение, если обе его части равны 1. Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 + cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|cos(\pi x) - sin(\pi x)|} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0, \\ |cos(\pi x) - sin(\pi x)| = 0. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$|cos(\pi x) - sin(\pi x)| = 0,$$

$$cos(\pi x) - sin(\pi x) = 0,$$

$$cos(\pi x) = sin(\pi x)\ /\ \cos(\pi x),$$

$$\mathrm{tg}(\pi x) = 1,$$

$$\pi x = arctg1 + \pi k, k \in z,$$

$$\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z,$$

$$x = \frac{1}{4} + k, k \in z.$$

$k = 1, x = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}, \quad \frac{5}{4} \in (1; 2)$

$k = 2, x = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}, \quad \frac{9}{4} \notin (1; 2)$

Промежутку (1;2) принадлежит только $\frac{5}{4}$.

Подставим найденное *x* в первое уравнение системы, найдем a:

$$\begin{cases} cos\left(\frac{\alpha\frac{5}{4}}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0\,, \\ a \in (5; 16). \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} cos\left(\frac{5\alpha}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0\,, \\ a \in (5; 16). \end{cases}$$

$$cos\left(\frac{5\alpha}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{5\alpha}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z,$$

$$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in z,$$

$$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in z,$$

$$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in z,$$

$$a = \frac{\pi}{5} + \frac{8}{5}\pi n, n \in z,$$

при *n=1*, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{8}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi,$

при n=2, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{16}{5}\pi = \frac{17}{5}\pi$,

при n=3, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{24}{5}\pi = 5\pi$.

Из найденного множества в промежутке (5;16) принадлежат $\frac{9}{5}\pi, \frac{17}{5}\pi, 5\pi$.

Ответ: $\frac{9}{5}\pi, \frac{17}{5}\pi, 5\pi$.

Внешним признаком использования метода оценок является наличие функций различной природы, что затрудняет или делает невозможным использование стандартных методов.

Иногда оценка одной из частей уравнения (неравенства) может быть легко сделана, тогда следует попытаться получить противоположную оценку для другой части уравнения (неравенства).

Но решающим фактором успешного применения метода оценок остается знание свойств элементарных функций.

Использование свойств функций: непрерывность, монотонность, четность

Пример 1. $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$.

Решение: при решении используем ограниченность функций $y = \sin x$ и квадратичной функций:

1. $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$ для любого x из R.

2. $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geq 2$.

Таким образом, мы видим, что области значений левой и правой части этого уравнения не имеют "точек соприкосновения". Значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 2. $\log_5 x < \sqrt{1 - x^4}$.

Решение: при решении используем анализ ОДЗ неравенства.

ОДЗ: $\begin{cases} 1 - x^4 \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x \leq 1$.

x=1 не является решением. Тогда при $0 < x < 1$получим, что $\log_5 x < 0$, а $\sqrt{1 - x^4} > 0$. Значит решением данного неравенства являются все числа из промежутка $0 < x < 1$.

Ответ: $0 < x < 1$

Пример 3. $2^x + 3^x + 4^x < 3$.

Решение: при решении используем монотонность функций, входящих в неравенство.

Рассмотрим функции $y_1 = 2^x, y_2 = 3^x, y_3 = 4^x$. Все они непрерывны и строго возрастают на R. Значит, и сумма этих функцийy=$2^x + 3^x + 4^x$ тоже будет возрастающей функцией. Легко увидеть, что $y(0) = 3$. А в силу её непрерывности и строгой монотонности получим, что при $x > 0$ имеем $2^x + 3^x + 4^x > 3$, а при $x < 0$ имеем$2^x + 3^x + 4^x < 3$. Значит решениями являются все $x < 0$.

Ответ: $x < 0$

Применение вышеописанных методов требует глубоких познаний в алгебре, начале анализа и геометрии. Чтобы научиться решать задания с параметрами, необходимо развивать аналитическое мышление (задачи бывают разные и нужно уметь анализировать разные функции), уметь решать все типы уравнений и неравенств, знать как ведут себя различные функции и уметь их строить.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

2.1 Планирование элективного курса по решению задач с параметрами

Задачи с параметрами (элективный курс для учащихся 10-11 классов)

Пояснительная записка

Задачи с параметрами входят во 2-ю часть ЕГЭ по профильной математике. Успешная сдача ЕГЭ по математике позволит выпускнику поступить в вуз и поможет в дальнейшей учебе. Программа данного элективного курса ориентирована на приобретение определенного опыта решения задач с параметрами, и тесно связано с такими дисциплинами, как алгебра, алгебра и начала анализа, геометрия. Программа разработана для обучающихся 10-11 классов профильной направленности.

Целью прохождения настоящего курса является формирование логического мышления и математической культуры у школьников.

В структуре изучаемой программы выделяются следующие основные разделы:

1. Знакомство с параметрами.
2. Линейные уравнения, неравенства и их системы.
3. Квадратные уравнения, неравенства и их системы.
4. Уравнения и неравенства с модулем, содержащие параметр.
5. Рациональные уравнения, неравенства и их системы.
6. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы.
7. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы.
8. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.
9. Нестандартные задачи с параметрами.

10. Решение комбинированных задач на использование различных свойств и методов.
11. Нерешаемые задачи с параметрами.
12. Задания из ЕГЭ профильного уровня.

Программа предусматривает чтение установочных лекций, проведение практических занятий, семинаров, практикумов.

При изучении курса для обучающихся предусмотрены большие возможности для самостоятельной работы, творческого подхода, исследовательской деятельности.

Оценка знаний и умений обучающихся проводится с помощью итоговой контрольной работы, который включает в себя задачи с параметрами из вариантов ЕГЭ.

Программа курса “Задачи с параметрами” общим объемом 68 часов.

Общая характеристика учебного предмета

Учебный курс включает в себя изучение методов решения математических задач, в которых параметры играют важную роль. Такие задачи возникают в различных областях науки и техники, и позволяют рассматривать зависимости между различными переменными.

Основная цель курса заключается в том, чтобы дать ученикам навыки и умения решения задач с параметрами, а также понимание того, как эти задачи связаны с реальными проблемами в различных областях знания. В ходе курса ученики учатся находить решения задач, используя различные методы, такие как аналитический, графический и метод решения относительно параметра.

Важной составляющей учебного курса является изучение понятий функции, параметра и переменной. Обучающиеся учатся определять и интерпретировать параметры в задачах и использовать их для анализа зависимостей между различными переменными.

В целом, курс представляет собой важный компонент математического образования, который позволяет студентам получить фундаментальные знания и навыки, необходимые для решения сложных задач в различных областях знания.

В процессе изучения курса ученики могут столкнуться с различными проблемами и трудностями. Например, для успешного решения задач с параметрами необходимо иметь хорошее понимание алгебры и тригонометрии, а также умение работать с функциями и дифференциальными уравнениями.

Кроме того, обучающиеся должны быть готовы к тому, что задачи с параметрами могут быть достаточно сложными и требовать значительных усилий для их решения. Поэтому важно иметь хорошую математическую подготовку и не бояться трудностей.

Изучение задач с параметрами имеет важное практическое значение во многих областях науки и техники. Например, задачи с параметрами могут быть использованы для анализа экономических моделей, проектирования инженерных систем, оптимизации производственных процессов и т.д.

Другой важный аспект курса "Задачи с параметрами" заключается в том, что он помогает обучающимся развивать свои навыки анализа и решения проблем. В процессе решения задач с параметрами обучающиеся учатся выделять основные факторы, влияющие на решение задачи, и находить оптимальные решения на основе имеющейся информации.

Таким образом, курс "Задачи с параметрами" представляет собой важный элемент математического образования, который помогает учащимся развивать свои математические навыки, готовиться к решению сложных задач в различных областях науки и техники, понимать и анализировать сложные явления и процессы, улучшать навыки коммуникации и сотрудничества, а также развивать креативность и способность мыслить нестандартно.

Место предмета в учебном плане

Предмет «Математика» в учебном плане МБОУ «СОШ №3» реализуется в предметной области «Математика». Согласно учебному плану МБОУ «СОШ №3» на изучение математики на углубленном уровне отводится 7 учебных часов в неделю, где 1 час выделяется курсу.

Планируемые результаты освоения учебного курса

Личностные результаты обучения:

креативность, готовность и способность к личностному самоопределению, способность ставить цели и ответственное и компетентное отношение к собственному физическому и психологическому здоровью; готовности и способности вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения; мировоззрение, соответствующее современному уровню развития науки, значимость науки, готовность к научно-техническому творчеству, владение достоверной информацией о передовых достижениях и открытиях мировой и отечественной науки, заинтересованность в научных знаниях;

Метапредметные результаты обучения:

Выпускник научится:

• самостоятельно определять цели, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях;

• оценивать ресурсы, в том числе время и другие нематериальные ресурсы, необходимые для достижения поставленной ранее цели;

• сопоставлять имеющиеся возможности и необходимые для достижения цели ресурсы;

• организовывать эффективный поиск ресурсов, необходимых для достижения поставленной цели;

• определять несколько путей достижения поставленной цели;

• выбирать оптимальный путь достижения цели с учетом эффективности расходования ресурсов и основываясь на соображениях этики и морали;

• задавать параметры и критерии, по которым можно определить, что цель достигнута;

• сопоставлять полученный результат деятельности с поставленной заранее целью;

• критически оценивать и интерпретировать информацию с разных позиций;

• распознавать и фиксировать противоречия в информационных источниках;

• использовать различные модельно-схематические средства для представления выявленных в информационных источниках противоречий;

• осуществлять развернутый информационный поиск и ставить на его основе новые (учебные и познавательные) задачи;

• искать и находить обобщенные способы решения задач;

• анализировать и преобразовывать проблемно-противоречивые ситуации;

• выходить за рамки учебного предмета и осуществлять целенаправленный поиск возможности широкого переноса средств и способов действия;

• менять и удерживать разные позиции в познавательной деятельности (быть учеником и учителем);

• формулировать образовательный запрос и выполнять консультативные функции самостоятельно;

• ставить проблему и работать над ее решением;

• управлять совместной познавательной деятельностью и подчиняться);

• осуществлять деловую коммуникацию как со сверстниками, так и со взрослыми (как внутри образовательной организации, так и за ее пределами);

• при осуществлении групповой работы быть как руководителем, так и членом проектной команды в разных ролях (генератором идей, критиком, исполнителем, презентующим и т. д.);

• развернуто, логично и точно излагать свою точку зрения с использованием адекватных (устных и письменных) языковых средств;

• согласовывать позиции членов команды в процессе работы над общим продуктом/решением;

• подбирать партнеров для деловой коммуникации, исходя из соображений результативности взаимодействия, а не личных симпатий;

• воспринимать критические замечания как ресурс собственного развития.

Предметные результаты обучения:

Формирование научного типа мышления, научных представлений о ключевых теориях, типах и видах отношений, владение научной терминологией, ключевыми понятиями, методами и приемами решения задач с параметрами, возможность использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов, повышение уровня математической культуры, ознакомление и использование на практике нестандартных методов решения задач.

Выпускник получит возможность научиться:

– алгоритмам решений задач с параметрами;

– зависимости количества решений неравенств, уравнений и их систем от значений параметра свойства решений уравнений, неравенств и их систем;

– свойствам функций в задачах с параметрами.

Выпускник научится:

– определять вид уравнения (неравенства) с параметром;

– выполнять равносильные преобразования;

– применять аналитический или графический способы для решения задач с параметром;

– осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;

– использовать в решении задач с параметром свойства основных функций (монотонность, ограниченность, чётность, нечётность);

– выбирать и записывать ответ;

– решать линейные, квадратные уравнения и неравенства; несложные иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства с одним параметром при всех значениях параметра.

Содержание программы

1. Знакомство с параметрами.

Знакомство с параметром. Типы задач с параметрами. Параметр и поиск решений уравнений, неравенств и их системы. Аналитический, графический методы решения задач с параметрами и метод решения относительно параметра.

2. Линейные уравнения, неравенства и их системы.

Простейшие линейные уравнения**.** Алгоритм решения линейных уравнений с параметром. Линейные уравнения, уравнения, приводимые к ним. Системы линейных уравнений. Линейные неравенства и неравенства, приводимые к линейным. Системы линейных неравенств. Определение линейного неравенства. Алгоритм решения неравенств. Решение стандартных линейных неравенств, простейших неравенств с параметрами. Исследование полученного ответа. Обработка результатов, полученных при решении.

3. Квадратные уравнения, неравенства и их системы.

Теорема Виета. Расположение корней квадратного трёхчлена. Алгоритм решения уравнений. Решение уравнений с нестандартным условием. Свойство квадратного трехчлена. Квадратные уравнения. Соотношение между корнями квадратных уравнений. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Уравнения, приводимые к квадратным. Квадратные неравенства. Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений. Системы уравнений и неравенств. Геометрическая интерпретация. Взаимное расположение корней квадратного уравнения.

4. Уравнения, неравенства и системы с модулем, содержащие модули.

Модуль числа. Свойства модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль. Геометрическая интерпретация модуля. Преобразование выражений, содержащих модуль, используя его определение. График функции $y = |x|$. Методы решения уравнений с модулем. Решение комбинированных уравнений, содержащих переменную и переменную под знаком модуля. Построение графиков функций, содержащих неизвестное под знаком модуля. Теорема о равносильности неравенства с модулем и рационального неравенства. Основные методы решения неравенств с модулем.

5. Рациональные уравнения, неравенства и их системы.

Рациональные уравнения с параметрами, способы решения. Рациональные неравенства с параметрами, способы решения. Системы рациональных уравнений и неравенств с параметрами.

6. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы.

Представление об иррациональных алгебраических функциях. Понятие арифметических и алгебраических корней. Иррациональные алгебраические выражения и уравнения. Уравнения с квадратными радикалами. Замена переменной. Замена с ограничениями. Метод эквивалентных преобразований уравнений с квадратными радикалами. Сведение иррациональных уравнений к системам. Освобождение от кубических радикалов. Использование монотонности. Использование однородности. Иррациональные алгебраические неравенства.

Эквивалентные преобразования неравенств. Стандартные схемы освобождения от радикалов в неравенствах (сведение к системам и совокупностям систем). Дробно-иррациональные неравенства. Сведение к совокупностям систем. Метод интервалов при решении иррациональных неравенств. Замена при решении иррациональных неравенств.

7. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы.

Методы решении показательных и логарифмических уравнений. Преобразования логарифмических уравнений. Замена переменных в уравнениях. Логарифмирование. Показательные и логарифмические неравенства. Методы решений показательных и логарифмических неравенств (метод замены переменных, метод замены множителей). Основные типы показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Основные способы их решения. Примеры потери корней и приобретения лишних корней. Решение показательных и логарифмических уравнений, содержащих неизвестную в основании. Использование свойств функции. Графический способ решения. Использование нескольких приёмов при решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

8. Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы.

Простейшие тригонометрические уравнения. Сведение тригонометрических уравнений простейшим с помощью тождественных преобразований. Сведение тригонометрического уравнения к рациональному с одним неизвестным. Метод решения тригонометрических уравнений и неравенств. Отбор корней в тригонометрических уравнениях. Примеры систем тригонометрических уравнений. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции. Обобщение метода интервалов на тригонометрической окружности. Решение тригонометрических неравенств методом интервалов.

9. Нестандартные задачи с параметрами.

10. Решение комбинированных задач на использование различных свойств и методов.

11. Нерешаемые задачи с параметрами.

12. Задания из ЕГЭ профильного уровня.

Тематическое планирование

Таблица 2 – тематическое планирование

№ урока	Название темы	Кол-во часов	Тип занятия
10 класс			
Знакомство с параметрами			
1	Входная контрольная работа	1	Контрольная работа
2	Задачи с параметром. Первое знакомство	1	Лекция
3	Типы задач с параметрами	1	Лекция
4	Параметр и поиск решений уравнений, неравенств и их системы	1	Практикум
5-6	Аналитический метод решения задач с параметрами	2	Лекция, практикум
7-8	Графический метод решения задач с параметрами	2	Лекция, практикум
9-10	Метод решения относительно параметра	2	Семинар, практикум
Линейные уравнения, неравенства и их системы			
11	Алгоритм решения линейных уравнений с параметром	1	Лекция
12	Решений линейных уравнений с параметром	1	Практикум
13	Решение линейных неравенств с параметром	1	Практикум
14-15	Решение системы линейных уравнений с параметром	2	Лекция, практикум
16	Решение систем линейных неравенств с параметром	1	Практикум
Квадратные уравнения, неравенства и их системы			
17	Свойство квадратного трехчлена	1	Семинар
18	Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметром	1	Практикум
19	Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром	1	Практикум
20	Расположение корней квадратичной функции относительно заданной точки	1	Практикум
21	Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратичной функции	1	Практикум
22	Решение квадратных уравнений с параметром первого вида («для каждого значения параметра найти все решения уравнения»)	1	Практикум

23	Решение квадратных уравнений второго типа («найти все значения параметра при каждом из которых уравнение удовлетворяет заданным условиям»)	1	Практикум
24-25	Решение квадратных неравенств с параметром первого типа	2	Практикум
26-27	Решение квадратных неравенств с параметром второго типа	2	Практикум
Уравнения, неравенства и системы с модулем, содержащие параметры			
28	Линейные уравнения с модулем	1	Лекция, практикум
29	Линейные неравенства с модулем	1	Практикум
30	Квадратные уравнения с модулем	1	Практикум
31	Квадратные неравенства с модулем	1	Практикум
32	Линейные и квадратные неравенства с модулем	1	Практикум
33	Линейные и квадратные неравенства с модулем	1	Практикум
34	Промежуточная контрольная работа	1	Контрольная работа
11 класс			
35	Повторение пройденного материала	1	Лекция, практикум
Рациональные уравнения, неравенства и их системы			
35	Рациональные уравнения с параметрами, способы решения	1	Лекция, практикум
36	Рациональные неравенства с параметрами, способы решения	1	Лекция, практикум
37-38	Системы рациональных уравнений и неравенств с параметрами	2	Семинар
Иррациональные уравнения, неравенства и их системы			
39	Иррациональные уравнения, способы решения	1	Лекция, практикум
40	Системы иррациональных уравнений	1	Лекция, практикум
41-42	Иррациональные неравенства, способы решения	2	Лекция, практикум
Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы			
43	Решение показательных уравнений и неравенств с параметрами	1	Лекция, практикум
44	Решение систем показательных уравнений и неравенств с параметрами	1	Семинар
45	Решение логарифмических уравнений и неравенств с параметрами	1	Лекция, практикум
46	Решение систем логарифмических уравнений и неравенств с параметрами	1	Семинар
Тригонометрические уравнения, неравенства и их системы			
47	Тригонометрические уравнения с параметрами	1	Лекция, практикум
48	Тригонометрические неравенства с параметрами	1	Лекция, практикум
49	Системы тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами	1	Семинар

50	Способы решений тригонометрических уравнений и неравенств и их систем.	1	Семинар
Нестандартные задачи с параметрами			
51-54	Нестандартные задачи с параметрами	4	Лекция, практикум, семинар
Решение комбинированных задач на использование различных свойств и методов			
55-58	Комбинированные задачи с параметрами	4	Лекция, практикум, семинар
Нерешаемые задачи с параметрами			
59-61	Нерешаемые задачи с параметрами	3	Практика
Задания из ЕГЭ профильного уровня			
62-67	Задачи ЕГЭ	6	Практика
68	Итоговая контрольная работа	1	Контрольная работа

Рекомендации для учащихся

1. Прежде, чем приступить к решению задачи с параметрами, советую разобраться в ситуации для конкретного числового значения параметра. Например, возьмите значение параметра $a = 1$ и ответьте на вопрос: является ли значение параметра $a = 1$ искомым для данной задачи. Отметим, что подстановка фиксированного значения параметра позволяет во многих случаях нащупать путь решения задачи.

2. При решении многих задач с параметрами удобно воспользоваться геометрическими интерпретациями. Если изобразить графики функций, входящих в левые и правые части рассматриваемых уравнений, то тогда точки пересечения графиков будут соответствовать решениям уравнения, а число точек пересечения- числу решений. Аналогично, при решении систем уравнений или неравенств можно изобразить геометрические места точек плоскости, удовлетворяющих рассматриваемым уравнениям или неравенствам. Это часто позволяет существенно упростить анализ задач, а в ряде случаев представляет собой единственный “ключ” к решению.

3. Решение многих задач с параметрами требует умения правильно формулировать необходимые и достаточные условия, соответствующие различным условиям расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси.

4. Существенным этапом решения задач с параметрами является запись ответа. Особенно это относится к тем примерам, где решение как бы “ветвится” в зависимости от значений параметра. В подобных случаях составление ответа – это сбор ранее полученных результатов. И здесь очень важно не забыть отразить в ответе все этапы решения. Также рекомендуем прежде, чем записывать ответ, еще раз внимательно прочитать условие задачи и четко уяснить, что именно спрашивается.

5. Для того, чтобы освоить приемы решения задач с параметрами, необходимо внимательно разобрать приведенные примеры решения таких задач и постараться нарешать как можно больше задач для самостоятельного решения.

Планируемые предметные результаты

На уровне среднего общего образования в соответствии с ФГОС СОО выделяют две группы результатов: результаты базового и углубленного уровней. Логика представления результатов четырех видов: «Выпускник научится – базовый уровень», «Выпускник получит возможность научиться – базовый уровень», «Выпускник научится – углубленный уровень», «Выпускник получит возможность научиться – углубленный уровень» – определяется следующей методологией. Результаты углубленного уровня ориентированы на получение компетентностей для последующей профессиональной деятельности, как в рамках данной предметной области, так и в смежных с ней областях. Эта группа результатов предполагает:

– овладение ключевыми понятиями и закономерностями, на которых строится данная предметная область, распознавание соответствующих им признаков и взаимосвязей, способность демонстрировать различные подходы к изучению явлений, характерных для изучаемой предметной области;

– умение решать как некоторые практические, так и основные теоретические задачи, характерные для использования методов и инструментария данной предметной области;

– наличие представлений о данной предметной области как целостной теории (совокупности теорий), об основных связях с иными смежными областями знаний. Примерная программа учебного предмета построена таким образом, что предметные результаты базового уровня, относящиеся к разделу «Выпускник получит возможность научиться», соответствуют предметным результатам раздела «Выпускник научится» на углубленном уровне. Предметные результаты раздела «Выпускник получит возможность научиться» не выносятся на итоговую аттестацию, но при этом возможность их достижения должна быть предоставлена каждому обучающемуся.

Материально-техническое обеспечение

Компьютер.

Интерактивная доска.

Чертежные инструменты.

Учебно-наглядные пособия (таблицы):

1. Таблицы по алгебре и началам анализа для 10 – 11 классов;
2. Таблицы по геометрии для 10 - 11 классов;
3. Наборы стереометрических тел и их разверток.

2.2 Реализация методики обучения решению заданий с параметром в элективном курсе

Показательные и логарифмические уравнения

Найти все значения параметров, при которых уравнение:

Пример 1. $\log_2(4^x - a) = x$ (1) имеет единственный корень.

Решение.

– Увидев логарифмическое уравнение, на что нужно обратить внимание в первую очередь?

– У логарифма есть ограничения, т.е. $\log_2(4^x - a)$ существует, если $4^x - a > 0$.

– Хорошо, ограничение мы увидели. Какое свойства логарифма мы можем использовать, чтобы преобразовать выражение?

– Приведем к общему основанию $\log_2(4^x - a) = \log_2 2^x$ и получим $4^x - a = 2^x$ (2) и $2^x > 0\ \forall x$.

– Видим, что условие ОДЗ выполняется автоматически, какой вывод можно сделать?

– Уравнения (1) и (2) равносильны. Поэтому находим значения a, при которых уравнение (2) имеет единственный корень:

$$(2) \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - a = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, 2^x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

– Нетрудно понять, что искомые a удовлетворяют либо уравнению $1 + 4a = 0$, либо системе

$$\begin{cases} 1+\sqrt{1+4a} > 0, \\ 1-\sqrt{1+4a} \le 0. \end{cases}$$

В результате получаем $a = -\frac{1}{4}, a \ge 0$.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}, a \ge 0$.

Пример 2. $(1 + \log_5 x)(4\log_5 x + (a-3)\log_x 5 - 2|a| + 4) = 0$ равносильно уравнению $\log_x(5x^2)\log_5^2 x = 1$.

Решение.

– Чтобы доказать равносильность уравнений, необходимо преобразовать одно из них. Какое уравнение можно преобразовать и какие свойства логарифма при этом используем?

– $\log_x(5x^2) = \frac{1}{\log_5 x} + 2$

– Что объединяет эти два уравнения?

– В обоих уравнениях есть $\log_5 x$, поэтому сделаем замену $t = \log_5 x$, где $t \ne 0$:

$$(1+t)(4t+\frac{(a-3)}{t}-2|a|+4)=0\ (1) \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{1}{t}+2\right)t^2=1\ (2)$$

равносильны. Решая второе из них, находим $t_2=\frac{1}{2}$. Ясно, что -1является корнем уравнения (1) при любом a. Подставляя в него $\frac{1}{2}$ вместо t, получаем после простых преобразований $|a|=a$, т.е. $a\geq 0$. Итак, множество $\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$ всех решений уравнения (2) включается в множество всех решений уравнения (1) при $a\geq 0$.

Теперь решим (1) при условии $a\geq 0$ и наложением дополнительных ограничений на a добьемся, чтобы уравнений (1) не имело корней, кроме -1 и $\frac{1}{2}$:

$(1+t)(4t+\frac{a-3}{t}-2a+4=0 \Leftrightarrow t=-1$ или $4t^2-2(a-2)t+a-3=0$ и $t\neq 0$. Корни последнего квадратного уравнения $t_{1,2}=\frac{a-2\pm\sqrt{(a-4)^2}}{4}=\frac{a-2\pm(a-4)}{4}$, т.е.

$t_1=\frac{a-3}{2},\ t_2=\frac{1}{2}$.

Таким образом$\left\{-1,\frac{1}{2},\frac{a-3}{2}\right\}$ – множество всех корней уравнения (1) при $a\geq 0$.

– Какой общий вывод можно сделать?

– Стало быть, искомые значения a будут корнями уравнений $\frac{a-3}{2}=\frac{1}{2},\frac{a-3}{2}=0$. Отсюда получаем $a=1,a=3,a=4$.

Ответ: $a=1,a=3,a=4$.

Пример 3. Найдите все значения a, при которых уравнение $(2x+\ln(x+2a))^2=(2x-\ln(x+2a))^2$ имеет единственный корень на отрезке $[0;1]$.

Решение.

– Если мы перенесем в левую часть оба выражения, что можно будет применить для преобразования выражений?

– Преобразуем уравнение: $(2x+\ln(x+2a))^2-(2x-\ln(x+2a))^2=0$. Видим, что можно применить формулы сокращённого умножения, т.е. разность квадратов. Получим: $4x\cdot 2\ln(x+2a)=0$.

– Когда произведение равно нулю?

– Когда один из множителей равен 0: $4x=0$ или $2\ln(x+2a)=0$.

– Какие условия для a можно увидеть и сколько корней получится?

– Получаем корни: $x=0$ (при условии $a>0$) или $x=1-2a$.

1. При $a<0$ уравнение имеет единственный корень $x=1-2a$, не принадлежащий отрезку $[0;1]$.

2. При $a=0$ уравнение имеет единственный корень $x=1$, принадлежащий отрезку $[0;1]$.

3. При $a>0$ уравнение имеет единственный корень $x=0$ на отрезке $[0;1]$ будет, только если $1-2a\leq 0$, то есть $a\geq\frac{1}{2}$.

Ответ: $a=0$ или $a\geq\frac{1}{2}$.

Пример 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(5x-2)\ln(x+a)=(5x-2)\ln(2x-a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Решение.

– Если мы перенесем в левую часть оба выражения, что можно будет применить для преобразования выражений?

– Перенесем всё в правую часть:

$$(5x-2)\ln(x+a)-(5x-2)\ln(2x-a)=0$$

– Вынесем общий множитель за скобку:

$$(5x-2)(\ln(x+a)-\ln(2x-a))=0$$

– Когда произведение равно нулю?

– Когда один из множителей равен нулю, т.е.

$$5x-2=0 \text{ или } \ln(x+a)-\ln(2x-a)=0$$

– Какие два случая рассмотрим? Какие ограничения есть у логарифма?

– Первый случай: $5x-2=0$ при условиях:

$$\begin{cases}2x-a>0,\\ x+a>0.\end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases}x=\frac{2}{5},\\ 2\cdot\frac{2}{5}-a>0,\\ \frac{2}{5}+a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{5},\\ -\frac{2}{5}<a<\frac{4}{5}.\end{cases}$$

Число $\frac{2}{5}$ лежит на отрезке $[0;1]$, для первого случая получаем:

$$-\frac{2}{5}<a<\frac{4}{5}.$$

– Второй случай: $\ln(2x-a)=\ln(x+a)$

$$\begin{cases}2x-a=x+a,\\ x+a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a,\\ 3a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2a,\\ a>0.\end{cases}$$

Число $x=2a$ лежит на отрезке $[0;1]$, если $0\le a\le\frac{1}{2}$. Тогда для второго случая получаем: $0\le a\le\frac{1}{2}$.

Корень $x=2a$ равен $x=\frac{2}{5}$, если $a=\frac{1}{5}$.

– Какой вывод можем сделать по двум случаям?

– Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$ при

$$-\frac{2}{5}<a\le 0, a=\frac{1}{5},\frac{1}{2}<a<\frac{4}{5}.$$

Ответ: $-\frac{2}{5}<a\le 0, a=\frac{1}{5},\frac{1}{2}<a<\frac{4}{5}$.

Тригонометрические уравнения

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$ имеет решение.

Решение.

– На что похоже данное уравнение?

– Это биквадратное тригонометрическое уравнение.

– В какое уравнение надо и преобразовать и какие условия при этом выполняются?

– Выполним замену переменных: $\cos^2 x = t,\ t \in [0; 1]$. Тогда данное уравнение примет вид: $t^2 - (a+2)t - (a+3) = 0$.

– Теперь это обычное квадратное уравнение. Каким способом можно его решить?

– Чтобы решить получившееся квадратное уравнение с переменной t, найдем его дискриминант: $D = a^2 + 4a + 4 + 4a + 12 = a^2 + 8a + 16 = (a+4)$.

Так как $D \geq 0$, квадратное уравнение имеет решение

$t_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+4)^2}}{2} = \frac{a+2 \pm |a+4|}{2} = \frac{a+2 \pm (a+4)}{2}$;

$t_1 = \frac{a+2+a+4}{2} = \frac{2a+6}{2} = \frac{2(a+3)}{2} = a+3$;

$t_2 = \frac{a+2-a-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

– На что следует обратить внимание?

– У нас было ограничение на t. Число -1 не принадлежит промежутку $[0; 1]$.

– Какое будет следующее действие?

– Выполним обратную замену переменной. Заданное нам тригонометрическое уравнение с параметром примет вид:

$0 \leq a+3 \leq 1$,

$-3 \leq a \leq -2$.

Ответ: $a \in [-3; -2]$.

Пример 2. Найдите все значения параметра *p*, при которых уравнение $6\sin^3 x = p - 10\cos 2x$ не имеет корней.

Решение.

– Обратим внимание, что тригонометрические функции разные, перенесем их в одну сторону и преобразуем:

$$6\sin^3 x + 10\cos 2x = p;$$

$$6\sin^3 x + 10(1 - 2\sin^2 x) = p;$$
$$6\sin^3 x - 20\sin^2 x + 10 = p;$$

– Заметим, что это похоже на кубическое уравнение. Как можно преобразовать это уравнение?

– Выполним замену переменной: $t = \sin x$, $t \in [-1; 1]$, тогда тригонометрическое уравнение примет вид $6t^3 - 20t^2 + 10 = p$.

– Чтобы решить данное уравнение, надо исследовать левую часть.

– Рассмотрим функцию $y = 6t^3 - 20t^2 + 10$ и исследуем ее на наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1; 1]$. $D(y) = R$.

– Находим производную: $y' = 18t^2 - 40t = 18t\left(t - \frac{20}{9}\right), D(y') = R$.

– Определяем критические точки функции: $y' = 0{,}18t\left(t - \frac{20}{9}\right) = 0$

$$t_1 = 0,$$
$$t_2 = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

– На что следует обратить внимание?

– Число $2\frac{2}{9}$ не принадлежит промежутку $[-1; 1]$, поэтому вычисляем значения функции в точке 0 и на концах отрезка:

$$y(0) = 0 - 0 + 10 = 10,$$
$$y(-1) = -6 - 20 + 10 = -16,$$
$$y(1) = 6 - 20 + 10 = -4.$$

– Какой вывод можно сделать?

– $y_{\text{наиб}} = y(0) = 10, y_{\text{наим}} = y(-1) = -16$ на отрезке $[1; -1]$.

– Значит, при $p \in (-\infty; -16) \cup (10; +\infty)$ исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: $p \in (-\infty; -16) \cup (10; +\infty)$.

Пример 3. При каких значениях параметра *a* графики функций

$y = \sin^2 x + a\cos x$ и $y = 3a - 2a^2$ не имеют общих точек?

Решение.

– Как по-другому можно перефразировать задачу?

– Другими словами, нужно найти такие значения параметра a, при которых уравнение $\sin^2 x + a\cos x = 3a - 2a^2$ не имеет корней.

– Обратим внимание, что тригонометрических функции разные. Нужно применить формулы тригонометрических функций и преобразовать уравнение.

– Заменим $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и приравняем обе функции друг к другу.

$$\sin^2 x + a\cos x = 3a - 2a^2$$

Перенесем всё в левую сторону:

$$1 - \cos^2 x + a\cos x + 2a^2 - 3a = 0$$

Сгруппируем и вынесем общий множитель за скобки:

$$\cos^2 x - a\cos x - (2a^2 - 3a + 1) = 0$$

– На что похоже данное уравнение? Как можно его преобразовать?

– Выполним замену переменной: $t = \cos x$, $|t| \leq 1$, тогда тригонометрическое уравнение примет вид $t^2 - at - (2a^2 - 3a + 1) = 0.$

– На уравнение какого вида полученное уравнение похоже? Как его решить?

– Получили квадратное уравнение с параметром a. Найдем корни уравнения с помощью дискриминанта:

$$D = a^2 + 4(2a^2 - 3a + 1) = a^2 + 8a^2 - 12a + 4 = (3a - 2)^2$$

$$t_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{(3a-2)^2}}{2} = \frac{a \pm |3a - 2|}{2}$$

$$t_1 = \frac{a + |3a-2|}{2}, t_2 = \frac{a - |3a-2|}{2}.$$

Так как $|3a - 2| \geq 0,$ то $t_1 \geq t_2$.

– Какие случаи можно рассмотреть?

Случай 1.

Если $t_1 = t_2,$ тогда $|3a - 2| = 0, a = \frac{2}{3}$ и $t_1 = t_2 = \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$.

В этом случае уравнение $\cos x = \frac{2}{3}$ имеет корни.

Случай 2.

Если $t_1 > t_2$. Чтобы уравнения $\cos x = t_1$ и $\cos x = t_2$ не имели корней необходимо и достаточно выполнения одного из трех условий: $t_1 < -1$, $t_2 > 1, t_2 < -1$ и $t_1 > 1$.

Рассмотрим каждое из этих условий.

Условие 1. $t_1 < -1$.

$$\frac{a + |3a - 2|}{2} < -1,$$

$$a + |3a - 2| < -2,$$

$$|3a - 2| < -a - 2,$$

$$2 + a < 3a - 2 < -a - 2,$$

$$4 + a < 3a < -a,$$

$$\begin{cases} 3a < -a, \\ 3a > 4 + a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a < 0, \\ 2a > 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0, \\ a > 2. \end{cases}$$

Система решений не имеет, значит, не существует таких значений а, при которых выполняется условие $t_1 < -1$.

Условие 2. $t_2 > -1$.

$$\frac{a - |3a - 2|}{2} > 1,$$

$$a - |3a - 2| > 2,$$

$$-|3a - 2| > 2 - a,$$

$$|3a - 2| < a - 2,$$

$$-a + 2 < 3a - 2 < a - 2,$$

$$-a + 4 < 3a < a,$$

$$\begin{cases} 3a > 4 - a, \\ 3a < a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\mathrm{a} > 4, \\ 2\mathrm{a} < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{a} > 1, \\ \mathrm{a} < 0. \end{cases}$$

Система решений не имеет, следовательно, не существует таких значений а, при которых выполняется условие $t_2 > 1$.

Условие 3. $t_2 < -1$ и $t_1 > 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{a-|3a-2|}{2} < 1, \\ \dfrac{a+|3a-2|}{2} > 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-|3a-2| < -2, \\ a+|3a-2| > 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -|3a-2| < -2-a, \\ |3a-2| > 2-a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |3a-2| > a+2, \\ |3a-2| > -a+2. \end{cases}$$

1.) $|3a-2| > a+2$, $\left[\begin{array}{l} 3a-2 > a+2, \\ 3a-2 < -a-2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2a > 4, \\ 4a < 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < 0. \end{array}\right.$ $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

2.) $|3a-2| > -a+2$, $\left[\begin{array}{l} 3a-2 > -a+2, \\ 3a-2 < a-2, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4a > 4, \\ 2a < 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a > 1, \\ a < 0. \end{array}\right.$ $a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

– Какой вывод можно сделать?

– Таким образом, $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty), \\ a \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases}$ $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9\sin^2 3x - 24\sin 3x + 16} = -4$.

Решение.

– На что следует обратить внимание?

– Видим, что под вторым корнем стоит квадрат разности. Свернем по формуле: $\sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{(3\sin 3x - 4)^2} = -4$.

– Знаем, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Следовательно, $|\sin 3x - 2| - |3\sin 3x - 4| = -4$.

– Оценим знаки подмодульных выражений: $-1 \le \sin 3x \le 1$,

$$-3 \leq \sin 3x - 2 \leq -1,$$

$$-3 \leq 3\sin 3x \leq 3,$$

$$-7 \leq 3\sin 3x - 4 \leq -1.$$

– Раскроем модули:

$$-\sin 3x + 2 - (-3\sin 3x + 4) = -4,$$

$$-\sin 3x + 2 + 3\sin 3x - 4 = -4,$$

$$2\sin 3x - 2 = -4,$$

$$2\sin 3x = -2,$$

$$\sin 3x = -1,$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in Z.$

2.3 Содержание и результат педагогического эксперимента

Для проверки эффективности разработанной методики до и после проведения элективного курса были проведены контрольные работы.

Входная контрольная работа будет проводиться на первом занятии, чтобы оценить уровень знаний учащихся до прохождения элективного курса. Контрольная работа направлена на проверку базовых знаний по параметрам за 7-9 классы. С помощью этих заданий проверяется знание и понимание важных элементов содержания, владения основными алгоритмами, умение применять знания к решению математических задач. При выполнении заданий учащиеся должны продемонстрировать определенную систему знаний и широту представлений, узнавать стандартные задания в разнообразных формулировках.

Входная контрольная работа:

1. При всех значениях параметра a решить уравнение: $(a^2 - 4)x = a + 2$.

2. При всех значениях параметра a решить уравнение: $|x+3| - a|x-1| = 4$.

3. Найти все a, при каждом из которых все решения неравенства $|x| \leq 2$ удовлетворяют неравенству $2x - a^2 + 5 < 0$.

Критерии оценивания:

За каждую задачу даётся по 4 балла, как и на ЕГЭ профильного уровня.

Таблица 3 – Критерии оценивания

Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или описку.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Максимум за контрольную работу можно набрать 12 баллов. Оценки: «2» - от 0 до 5 баллов, «3» - от 6 до 8 баллов, «4» - от 9 до 10 баллов, «5» - от 11 до 12 баллов.

Решение:

1) При всех значениях параметра a решить уравнение: $(a^2-4)x = a+2$.

Разложим коэффициент при x на множители.

$$(a-2)(a+2)x = a+2$$

Если $a \neq \pm 2$, то уравнение имеет единственное решение: $x = \frac{1}{a-2}$

Если $a = 2$, то уравнение не имеет решений.

Если $a = -2$, то уравнение имеет множество решений $(x \in R)$

2) При всех значениях параметра a решить уравнение: $|x+3| - a|x-1| = 4$.

Разобьем числовую прямую на 3 части точками, в которых выражения под знаком модуля обращаются в нуль и решим 3 системы:

1 случай: $\begin{cases} x < -3 \\ -x - 3 + ax - a = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x = \dfrac{a+7}{a-1}, \text{если } a \neq 1 \end{cases}$$

Найденный x будет решением, если $\frac{a+7}{a-1} + 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{4a+4}{a-1} < 0 \Rightarrow a \in (-1; 1)$.

2 случай: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x + 3 + ax - a = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x = \dfrac{a+1}{a+1} = 1, \text{если } a \neq -1 \end{cases}$$

Найденный x удовлетворяет нужному неравенству, следовательно, является решением при $a \neq -1$. Если же $a = -1$, то решением является любой $x \in [-3; 1]$.

3 случай:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x + 3 - ax + a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = \dfrac{1-a}{1-a} = 1, \text{если } a \neq 1 \end{cases}$$

Найденный x не удовлетворяет нужному неравенству, следовательно, не является решением при $a \neq 1$.

Если же $a = 1$, то решением является любой $x > 1$

Ответ: $x = \frac{a+7}{a-1}$ при $a \in (-1; 1)$; $x \in [-3; 1]$ при $a = -1$; $x \in (1; +\infty)$ при $a = 1$; $x = 1$ является также решением при всех a.

3) Найти все a, при каждом из которых все решения неравенства $|x| \leq 2$ удовлетворяют неравенству $2x - a^2 + 5 < 0$.

Решением неравенства $|x| \leq 2$ является множество $A = [-2; 2]$, а решением неравенства $2x - a^2 + 5 < 0$ является множество $B = \left(-\infty; \frac{a^2-5}{2}\right)$.

Чтобы удовлетворить условию задачи, нужно, чтобы множество A входило в множество B ($A \subset B$). Это условие выполнится тогда и только тогда, когда $\frac{a^2-5}{2} > 2 \Leftrightarrow a^2 > 9 \Leftrightarrow |a| > 3 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Итоговая контрольная работа будет проводиться на последнем занятии, чтобы оценить уровень знаний учащихся, полученных при прохождении элективного курса.

Контрольная работа направлена на проверку таких умений и навыков:

1) Умение анализировать параметрически заданные функции и находить их особые точки, асимптоты, пересечения и т.д.;

2) Умение работать с параметрами уравнений прямых и плоскостей, находить углы между ними, точки пересечения и т.д.;

3) Умение анализировать параметры и находить их характеристики.

В целом, итоговая контрольная работа содержит задачи разной сложности, требующие как расчетов, так и логического мышления и анализа.

Итоговая контрольная работа:

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2} = 0$ имеет ровно два различных корня.

2. Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x^4+(a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$ имеет единственное решение.

3. Найдите все значения α, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a}-2\sin x+1}{\cos^2 x+a+2\sqrt{a}+1}$ содержит отрезок $[1; 2]$.

Критерии оценивания:

За каждую задачу даётся по 4 балла, как и на ЕГЭ профильного уровня.

Таблица 4 – Критерии оценивания

Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или описку.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Максимум за контрольную работу можно набрать 12 баллов. Оценки: «2» - от 0 до 5 баллов, «3» - от 6 до 8 баллов, «4» - от 9 до 10 баллов, «5» - от 11 до 12 баллов.

Решение:

1) Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\frac{9x^2-a^2}{x^2+8x+16-a^2}=0$ имеет ровно два различных корня.

1 способ (аналитический):

$$\begin{cases} 9x^2-a^2=0 \\ x^2+8x+16-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-a)(3x+a)=0 \\ (x+4)^2-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-a=0 \\ 3x+a=0 \end{array}\right. \\ (x+4-a)(x+4+a)\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}a \\ x=-\frac{1}{3}a \end{array}\right. \\ x\neq a-4 \\ x\neq -a-4 \end{cases}$$

x_1и x_2 $-$ должны быть различны

$\Rightarrow \frac{1}{3}a\neq -\frac{1}{3}a \Rightarrow \frac{2}{3}a\neq 0 \Rightarrow\ a\neq 0$

x_1не должен быть равен $a-4$ и $-a-4$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a \neq a - 4 \\ \frac{1}{3}a \neq -a - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 6 \\ a \neq -3 \end{cases}$$

x_2 не должен быть равен $a - 4$ и $-a - 4$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}a \neq a - 4 \\ -\frac{1}{3}a \neq -a - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq 3 \\ a \neq -6 \end{cases}$$

Найдём пересечения:

$a \, \epsilon(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6;\ +\infty)$

Ответ: $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6;\ +\infty)$

2 способ (графический) (Рисунок 39):

$$\begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ (x + 4)^2 - a^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ (x + 4 - a)(x + 4 + a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x \\ a = -3x \end{array}\right. \\ a \neq x + 4 \\ a \neq -x - 4 \end{cases}$$

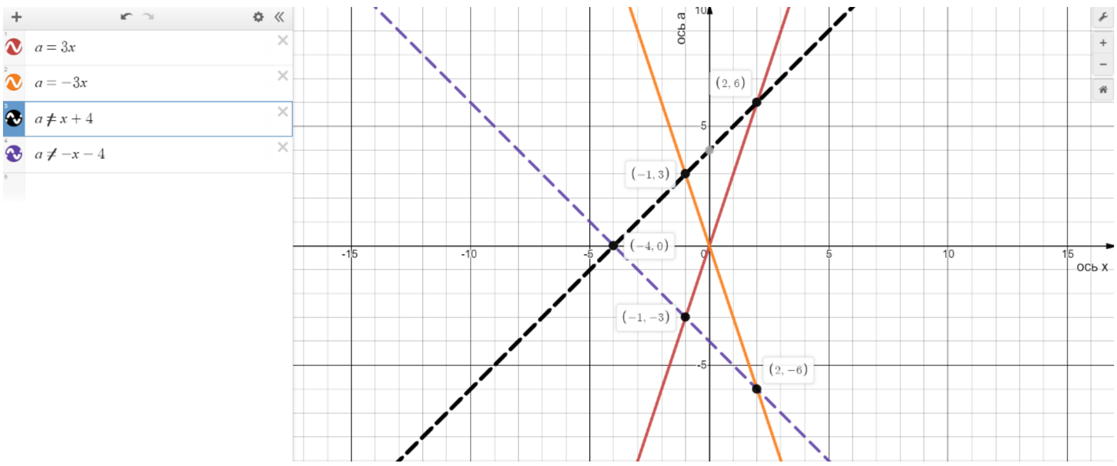


Рисунок 39

При $a < -6$ – 2 решения

$a = -6$ – 1 решение

$-6 < a < -3$ – 2 решения

$a = -3$ – 1 решение

$-3 < a < 0$ – 2 решения

$a = 0$ – 1 решение

$0 < a < 3$ – 2 решения

$a = 3$ – 1 решение

$3 < a < 6$ – 2 решения

$a = 6$ – 1 решение

$a > 6$ – 2 решения

$a \epsilon (-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6;\ +\infty)$

Ответ: $(-\infty;\ -6) \cup (-6;\ -3) \cup (-3; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 6) \cup (6;\ +\infty)$

2) Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$ имеет единственное решение.

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x + a - 5| - |x - a + 5| = 0$$

Пусть $f(x) = \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x + a - 5| - |x - a + 5|$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 + (a-5)^4} - |-x + a - 5| - |-x - a + 5| =$

$$= \sqrt{x^4 + (a-5)^4} - |x - a + 5| - |x + a - 5|$$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \Rightarrow \ f(x)$ – четная функция

Четная функция может иметь единственный корень только если этот корень $x = 0$.

Найдем при каких a $x = 0$ будет решением.

Если $x = 0$, то $\sqrt{0^4 + (a-5)^4} = |0 + a - 5| + |0 - a + 5|$

$$\sqrt{(a-5)^4} = |a - 5| + |a - 5|$$

$$(a-5)^2 = 2|a - 5|$$

$$(a-5)^2 - 2|a - 5| = 0$$

$$|a-5|(|a-5|-2)=0$$

$$|a-5|=0 \text{ или } |a-5|-2=0$$

$$a=5 \qquad \left[\begin{array}{l} a-5=2 \\ a-5=-2 \end{array}\right.$$

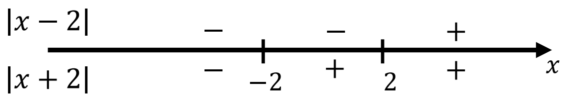
$$\left[\begin{array}{l} a=7 \\ a=3 \end{array}\right.$$

Выясним, при каких a будет единственный корень $x=0$.

Если $a=3$, то

$$\sqrt{x^4+(3-5)^4}=|x+3+5|+|x-3+5|$$

$$\sqrt{x^4+16}=|x-2|+|x+2|$$



Если $x<-2$, то

$$\sqrt{x^4+16}=-x+2-x-2$$

$$\sqrt{x^4+16}=-2x$$

$$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ x^4+16=(-2x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^4+16=4x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x^4-4x^2+16=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ (x^4-4x^2+4)+12=0 \end{cases}$$

Решений нет

Если $-2 \leq x \leq 2$, то $\sqrt{x^4+16}=-x+2+x+2$

$$\sqrt{x^4+16}=4$$

$$x^4+16=16$$

$$x^4=0$$

$x=0$ - единственная точка

Если $x>2$, то $\sqrt{x^4+16}=-x-2+x+2$

$$\sqrt{x^4+16}=2x$$

Решений нет

Если $a=5$, то $\sqrt{x^4+(5-5)^4}=|x+5-5|+|x-5+5|$

$$x^2=|x|+|x|$$

$$x^2-2|x|=0$$

$$|x|(|x|-2)=0$$

$x=0$ или $x=\pm 2$

3 решения $\Rightarrow\ a\neq 5$

Если $a=7$, то $\sqrt{x^4+(7-5)^4}=|x+7-5|+|x-7+5|$

$$\sqrt{x^4+16}=|x+2|+|x-2|$$

Аналогично при $a=3\Rightarrow\ x=0$ – единственное решение

Ответ: $\{3;7\}$

3) Найдите все значения α, при каждом из которых множество значений функции $y=\frac{\sqrt{a}-2\sin x+1}{\cos^2 x+a+2\sqrt{a}+1}$ содержит отрезок $[1;2]$.

Пусть $z=\sin x$, а $f(z)=\frac{\sqrt{a}-2z+1}{1-z^2+(\sqrt{a}+1)^2}$.

Поскольку $|z|\leq 1$ и $1+(1+\sqrt{a})^2\geq 2$, то для любого $a\geq 0$ функция $f(x)$ определенна на всем отрезке $[-1;1]$ и непрерывна на нем. Следовательно, если при некоторых значениях $a\geq 0$ на отрезке $[-1;1]$ существуют такие числа z_1 и z_2, что выполняются неравенства $f(z_1)=1$ и $f(z_2)=2$, то весь отрезок $[1;2]$ будет принадлежать множеству значений данной функции. С другой стороны, понятно, что существование таких z_1 и z_2 необходимо.

Рассмотрим уравнение $\frac{\sqrt{a}-2z+1}{1-z^2+(\sqrt{a}+1)^2}=1$. С учетом того, что $|z|\leq 1$, оно эквивалентно уравнению $z^2-2z-\left(a+\sqrt{a}+1\right)=0$. Дискриминант этого уравнения: $D=4+4(a+\sqrt{a}+1)\geq 0$ при всех значениях a.

Значит, оно имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;1]$ тогда и только тогда, когда значение функции $\varphi(z) = z^2 - 2z - (a + \sqrt{a} + 1)$ хотя бы на одном из концов отрезка $[-1;1]$ неотрицательно:

$$\left[\begin{array}{c} 3 - (a + \sqrt{a} + 1) \geq 0 \\ -1 - (a + \sqrt{a} + 1) \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a + \sqrt{a} - 2 \geq 0 \\ a + \sqrt{a} + 2 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1) \geq 0 \\ a + \sqrt{a} + 2 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$-2 \leq \sqrt{a} \leq 1$$

Откуда $0 \leq a \leq 1$.

Рассмотрим уравнение $\frac{\sqrt{a}-2z+1}{1-z^2+(\sqrt{a}+1)^2} = 2$. С учетом того, что $|z| \leq 1$, оно эквивалентно уравнению $2z^2 - 2z - \left(2a + 3\sqrt{a} + 3\right) = 0$. Дискриминант этого уравнения: $D = 4 + 8(2a + 3\sqrt{a} + 3) \geq 0$ при всех значениях a.

Значит, оно имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;1]$ тогда и только тогда, когда значение функции $\varphi(z) = 2z^2 - 2z - \left(2a + 3\sqrt{a} + 3\right)$ хотя бы на одном из концов отрезка $[-1;1]$ неотрицательно:

$$\left[\begin{array}{c} 4 - (2a + 3\sqrt{a} + 3) \geq 0 \\ -(2a + 3\sqrt{a} + 3) \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2a + 3\sqrt{a} - 1 \geq 0 \\ 2a + 3\sqrt{a} + 3 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c} \left(\sqrt{a} + \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}\right)\left(\sqrt{a} - \dfrac{\sqrt{17} - 3}{4}\right) \geq 0 \\ 2a + 3\sqrt{a} + 3 \leq 0 \end{array}\right.$$

$$-\frac{3+\sqrt{17}}{4} \le \sqrt{a} \le \frac{\sqrt{17}-3}{4}$$

Откуда $0 \le a \le \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$.

Поскольку $\frac{13-3\sqrt{17}}{8} < 1$, получим все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sqrt{a}-2\sin x+1}{\cos^2 x+a+2\sqrt{a}+1}$ содержит отрезок $[1; 2]$: $0 \le a \le \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$.

Ответ: $0 \le a \le \frac{13-3\sqrt{17}}{8}$.

Результаты в начале эксперимента:

Оценки «2» - 8 уч., «3» - 12 уч., «4» - 7уч., «5» - 3 уч.

Результаты в конце эксперимента:

Оценки «2» - 1 уч., «3» - 9 уч., «4» - 12 уч., «5» - 8 уч.

Использование статистического критерия Пирсона:

Таблица 5 – Критерий Пирсона

Оценка	n_k	$n_э$	f_k	$f_э$	$n_k + n_э$	$\frac{1}{n_k + n_э}(f_k - f_э)^2$
2	8	1	0,2667	0,0333	9	0,006055
3	12	9	0,4000	0,3000	21	0,000476
4	7	12	0,2333	0,4000	19	0,001462
5	3	8	0,1000	0,2667	11	0,002527
	30	30	1,0000	1,0000	60	0,010520
$x_э^2$						
9,4680						

Вывод: $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}_{\text{эксп}} > \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}_{\text{кр}}$

Гипотеза подтвердилась, следовательно, элективный курс по решению задач с параметрами будет способствовать формированию у школьников умения решать задания с параметром.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи с параметром часто являются сложными для учащихся и требуют глубокого изучения алгебры и начал анализа. Изучив психолого-педагогическую литературу и проведя анализ учебников и пособий с задачами на параметры были определены принципы, положенные в основу создания и практического наполнения элективного курса.

Подобрана и составлена целостная система заданий, позволяющая не только формировать учебные навыки, но и самым благоприятным образом способствующая развитию системного типа мышления учащихся, показывающая возможности практического применения полученных ими знаний, идей и методов.

Разработанная методика для обучения учащихся решению этих задач может помочь улучшить их общие математические навыки и подготовить их к будущим учебным и профессиональным достижениям.

В ходе исследования были систематизированы основные типы задач с параметрами и методы их решения. Был проведен педагогический эксперимент по проверке разработанной методики, который показал её эффективность. Полученные результаты могут быть использованы педагогами в обучении математике в старшей профильной школе.

Также важным результатом исследования является анализ возможностей учебников и пособий для формирования умений решать задачи с параметрами. Этот анализ может быть полезен для разработчиков учебников и пособий в области математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин, В. В. Задачи с параметрами [Текст] / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич . – Москва: Асар, 1996. – 461 с.
2. Вавилов, В. В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства [Текст] / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 248 с.
3. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ 11 классов [Текст] : учеб. пособие для шк. и кл. с углубл. изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2001. – 287 с.
4. Высоцкий, В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ [Текст] / В. С. Высоцкий. – Москва: Научный мир, 2001. – 316 с.
5. Голубев, В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике [Текст] / В. И. Голубев. – Москва: Илекса, 2007. – 252 с.
6. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами [Текст] / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Киев: РИА „Текст", 1992. – 326 с.
7. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами [Текст] / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир – 3-е изд. доп. и перераб. – Москва: Илекса, 2005. – 328 с.
8. Далингер, В. А. Начала математического анализа в задачах [Текст]: учебное пособие / В. А. Далингер. – Омск: ОмГПУ, 2009. – 312 с.
9. Дорофеев, Г. В. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы [Текст] / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – Москва: Наука, 1976. – 56 с.
10. Ефимова, Е. А. Задачи с параметрами [Текст]: учебное пособие для факультета довузовской подготовки / Е. А. Ефимова. – Самара: СГАУ, 2006. – 64 с.
11. Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи [Текст] / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – Москва: МЦНМО, 2007. – 296 с.

12. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. 1. Математические задачи как средство обучения и развития [Текст] / Ю. М. Колягин. – Москва: Просвещение, 2000. – 132 с.

13. Лунгу, К. Н. Систематизация приемов учебной деятельности студентов при обучении математике [Текст] / К. Н. Лунгу. – Москва: URSS, 2007. – 420 с.

14. Макарычев, Ю. Н. Алгебра. Учебник для 9 класса с углубленным изучением математики [Текст] / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков. – Москва: Просвещение, 2000. – 132 с.

15. Малкова, А. Г. Математика [Текст] : авторский курс подготовки к ЕГЭ / А. Г. Малкова – 4-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2019. – 540 с.

16. Мирошин, В. В. ЕГЭ 2009. Математика. Тренировочные задания. [Текст] / В. В. Мирошин, Т. А. Корешкова, Ю. А. Глазков. – Москва: Экзамен, 2009. – 78 с.

17. Мирошин, В. В. ЕГЭ 2009. Математика. Тренировочные задания. [Текст] / В. В. Мирошин, Т. А. Корешкова, Н. В. Шевелева. – Москва: Эксмо, 2008. – 80 с.

18. Моденов, П. С. Математика [Текст]: пособие для поступающих в ВУЗы / П. С. Моденов, С. И. Новоселов. – Москва: МГУ, 1966. – 137 с.

19. Моденов, В. П. Решение задач с параметрами [Текст] / В. П. Моденов. – Москва: МГУ, 2001. – 68 с.

20. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. Задачник для общеобразовательных школ [Текст] / А. Г. Мордкович, Е. Е. Тульчинская. – Москва: Мнемозина, 1998. – 144 с.

21. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс. Задачник для общеобразовательных школ [Текст] / А. Г. Мордкович, Е. Е. Тульчинская. – Москва: Мнемозина, 1998. – 247 с.

22. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. Задачник для общеобразовательных школ [Текст] / А. Г. Мордкович, Е. Е. Тульчинская. – Москва: Мнемозина, 1999. – 144 с.

23. Мордкович, А. Г. Алгебра 10-11 класс [Текст] : Учебник / А. Г. Мордкович. Мордкович, А. Г. Уравнения и неравенства с параметрами Москва: Мнемозина, 2005. – 92 с.

24. Мордкович, А. Г. Уравнения и неравенства с параметрами. Математика [Текст] / А. Г. Мордкович. – Москва: 1994. –18 с.

25. Мордкович, А. Г. Уравнения и неравенства с параметрами [Текст] / А. Г. Мордкович. – Москва: 1994. – 24 с.

26. Натяганова, В. Л. Методы решения задач с параметрами [Текст] : учебное пособие / В. Л. Натяганова. – Москва: МГУ, 2003. – 368 с.

27. Никольский, С. М. Алгебра и начала анализа. Учебник. 11 класс [Текст] / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – Москва: Просвещение, 2006. – 448 с.

28. Новоселов, С. И. Специальный курс элементарной алгебры [Текст] / С. И. Новоселов. – Москва: Высшая школа, 1956. –152 с.

29. Олехин, С. Н. Специальный курс элементарной алгебры [Текст] / С. Н. Олехин, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. – Москва: МГУ, 1991. – 144 с.

30. Потапов, М. К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. [Текст] : Книга для учителя / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. – Москва: МГУ, 2012. – 256 с.

31. Прокофьев, А. А. ЕГЭ. Математика. Задачи с параметрами (типовое задание 18) [Текст] : Учебно методическое пособие / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов. – Москва: Легион, 2020. – 384 с.

32. Родионов, Е. М. Математика. Решение задач с параметрами [Текст] / Е. М. Родионов. – Москва: НЦ ЭНАС, 2006. – 214 с.

33. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе [Текст] / Г. И. Саранцев. – Москва: Просвещение, 2002. – 224 с.

34. Сергеев, И. Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. [Текст] / И. Н. Сергеев. – Москва: КДУ, 2005. – 358 с.

35. Толковый словарь математических терминов. [Текст] / – Москва: Просвещение, 1967. – 135 с.

36. Тынякин, С. А. Пятьсот четырнадцать задач с параметрами [Текст] / С. А. Тынякин. – Волгоград: 1991. – 95 с.

37. Философский энциклопедический словарь [Текст] / – Москва: ИНФРА М, 1997. – 569 с.

38. Шестаков, С. А. Уравнения с параметром [Текст] / С. А. Шестаков, Е. В. Юрченко. – Москва: Слог, 1993. – 60 с.

39. Ястребинецкий, Г. А. Уравнение и неравенства, содержащие параметры [Текст] / Г. А. Ястребинецкий. – Москва: Просвещение, 1972. – 112 с.