МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика формирования у старшеклассников логических приёмов мышления при решении уравнений и неравенств

Выпускная квалификационная работа по направлению
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»
Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
73,65 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«26» марта 2021 г.
и. о. зав. кафедрой математики и МОМ
________ Шумакова Е.О.

Выполнил (а):
Студент (ка) группы ОФ-513-086-5-1
Шакирова Ирина Альфридовна
Научный руководитель:
Доцент, к.п.н., доцент
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Одними из основных принципов математического образования считается обучения математике как предмету всеобщего образования и приоритет развивающей функции в обучении математике. Одной из ведущих целей обучения математике выступает развитие мышления у старших школьников. Изучение математике владеет для этого большие ресурсы, обусловленные особенностями самого предмета исследования - базы математической науки. Одновременно в этот период при организации учебного процесса, имеющего целью совершенствования мышления обучающихся, нужно применить то важное, что накоплено в психологии и педагогике по вопросам развития мышления человека.

В пояснительной записке программы для общеобразовательных учебных заведений по математике прописаны цели обучения математики, а конкретнее формирование логических приёмов мышления у обучающихся. У старшеклассников имеется основа для последующего целенаправленного формирования логических приёмов мышления [19]. Пиаже Ж. считал, что мышление окончательно формируется к 14-16 годам, приводит к мысли, что действительно целенаправленное формирование у обучающихся старших классов логических приёмов мышления (операций по Пиаже) вполне вероятно и заключается в увеличении степени их сформированности [18].

Проблема формирования у школьников логических способов мышления рассматривалась исследователях во всевозможных контекстах:

– становление закономерных способов мышления при изучении высшей математики (Калошина И. П., Харичева Г.И.);

– выстраивание математических понятий (Блох А.Я., Груденов Я.И., Метельский Н.В., Репьев В.В., Рупасов К.А., Слепкань З.И.);

– обучение доказательствам математических суждений (Ананченко К. О., Артемов А. К., Далингер В.А., Минковский В.Л., Саранцев Г. И., Столяр А.А.);

– формирование учебно-познавательной деятельности (Волович М. Б., Епишева О. Б., Крупич В.И., Лурье И. А.);

– привитие логической культуры (Болтянский В.Г., Дорофеев Г. В., Никольская И. Л.).

В данных работах выявлена потребность особого формирования способов мышления, включая логические приёмы, показаны сами приёмы, потенциальные упражнения усвоения ими, время, а также сроки их исследования. Но никто не анализируют вопрос методики формирования логических приемов мышления. Упор производится на овладение математического содержания. В некоторых работах демонстрируется возможность использования логических способов мышления при изучении геометрического материала, но материал неоправданно никак не применяется [7].

Из этого можно сделать вывод о необходимости целенаправленного формирования логических приемов мышления, которое должно стать одной из приоритетных задач при изучении математики.

С точки зрения возраста изучаемой категории обучающихся формирование логических приёмов представлено:

– в основной школе (10-11 классы) (Воинова И.В., Голикова Т. В., Середа Т.Ю. и др.)

– у студентов колледжа (с 15–16 лет) (Абдрахманова И.В.);

– у студентов вуза (Калошина И. П., Харичева Г.И.).

Формированию закономерных способов мышления на уровне среднего (полного) образования написано мало работ. Тем не менее, при обучении в старших классах, нехватка внимания к данной проблеме приводит к перегрузке обучающихся. Это исходит из того, что задачи и примеры по содержанию становятся более многообразными, возникают всевозможные пути к их решению, увеличивается размер теоретического материала, возрастает абстрактность его изложения в учебниках. В случае если ученики не овладеют логическими приемами мышления, то им потребуется выучивать большее количество материала, нежели осознать принцип его построения, структуру доказательства в зависимости от типа математического суждения и пр. В основном общем образовании обучить данному невозможно из-за того, что возможности логически размышлять, пользуясь абстрактными понятиями, осуществлять прямые и обратные операции, излагать и проверять гипотетические предложения присущи юношескому возрасту.

Косвенным признаком усвоения логическими способами считаются умение решать задачи, не решаемые без абстрагирования от определённых условиях, прописанной в фабуле, проведения синтеза условия, выполнения аналитических умозаключения и другого. Без обобщения нельзя сформулировать прием решения класса аналогичных задач.

Тема «Уравнения и неравенство» изучается и дополняется весь курс математики средней и старшей школы. Её превосходство пред иными темами – в односложности, конкретности. Помимо этого, при решении уравнений и неравенств применяется теория равносильности, сформулированная в понятиях и терминах математической логики. Уравнения и неравенства решаются через нисходящий и восходящий анализ, синтез, аналогию, выполняется их группировка, что подразумевает применение определённых логических способов мышления [30].

Противоречия подчеркиваются актуальностью проблемы, складывающейся в нехватки методики целенаправленного развития у старшеклассников логических приемов мышления в курсе алгебры и начал анализа. Отталкиваясь от данной проблемы, была сформирована тема: «Методика формирования у старшеклассников логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств».

Объектом исследования – процесс обучения алгебре и началом анализа в 10-11 классах.

Предмет исследования – развитие у старшеклассников логических приемов мышления при изучении уравнений и неравенств.

Цель исследования: усовершенствование методики формирования у школьников старших классов логических приёмов мышления при решении уравнений и неравенств и написать методические рекомендации по данной теме.

Гипотеза исследования: развитие логического мышления будет эффективным, если использовать составленные старшеклассниками алгоритмы и учитывать методические рекомендации.

Из цели и гипотезы вытекают следующие **задачи исследования:**

1) провести исследование психолого-педагогической деятельности и методической литературы согласно теме исследования;

2) раскрыть основные понятия и определения по исследуемой теме

3) найти критерии и описать уровни сформированности логических способов мышления у старшеклассников;

4) разработать методику целенаправленного формирования логических приемов мышления при решении уравнений и неравенств

5) разработать методические рекомендации.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

1.1 Изучение проблемы формирования мышления в психологии и педагогике

Логический способ мышления – прием, которым обучающиеся реализуют интеллектуальную деятельность. Так как интеллектуальная деятельность – это «внутренний» процесс, в таком случае о сформированности логического способа мышления можно говорить только по внешним признакам, формой которых считается прием учебной деятельности. Под приемами учебной деятельности будем понимать последовательность действий, предназначенных для исполнения логических способов мышления, что задается посредством алгоритмические предписания. Любой логический способ мышления осуществляется посредством метода учебной деятельности.

В психологии при образовании интеллектуальных действий особо отмечают полные и неполные ориентировочные принципы. Полными ориентировочными основами могут служить предписания алгоритмического типа. Но так как логический прием мышления формируется нами, следом за Леонтьевым А. Н., Кабановой Е. Н.-Меллер и др., посредством интеллектуальной деятельности, то для создания его применяются полные ориентировочные основы действия (Гальперин П. Я., Талызина Н. Ф.) [9], которые включают не только примеры воздействия, однако и большинство предписаний на правильное выполнение действий с новым материалом. Вместе с тем обучающийся получает определенную способность исследовать материал с точки зрения будущего воздействия. В нашем исследовании полные ориентировочные основы действий использованы в виде приемов учебной деятельности, представляющие собой алгоритмические указания для обучающихся по выполнению определенного логичного способа мышления [4].

Анализ соответствующей литературы (Колягин Ю. М., Метельский Н.В., Пойа Д., Крупич В.И., Саранцев Г. И., Фридман Л. М., Лунгу К.Н., Махмутов М.И.) выявил, что мышление складывается и исследуется писателями в методике преподавания математики в ходе решения математических примеров и задач. Так, например, решение уравнений и неравенств содержит отыскание метода, требуемого для выполнения установленной цели и исполнение действия, характеризуемой данной целью. Процесс решения задачи осуществляется посредством методом учебной деятельности. Удачность решения задач, по Лунгу К.Н., в значительной степени обуславливается адекватностью содержания уравнений и неравенств, методам и элементы мышления. В различных примерах могут потребоваться различные элементы (закономерные способы) мышления и их соотношения [27].

Моисеева В.Н. выделяет три уровня и три критерия сформированности логического способа мышления по сущностным характеристикам и взаимосвязью с методом учебной деятельности. (Таблица 1).

Таблица 1 - Уровни и критерии сформированности логического мышления

Критерии / Уровни	Умение обучающегося предоставить формулировку определённого логического способа мышления и сформулировать очерёдность действий (способов учебной деятельности) его выполнения	Выполнение способов учебной деятельности, соответствующих логичному приему мышления (число правильно выполненных примеров в % от общего числа примеров)	Способность переместить логичный прием мышления в новое условие
1	*2*	*3*	*4*
1) репродуктивный	Обучающийся не способен предоставить определение логичного способа	Обучающийся осуществляет способы учебной деятельности с содействием	Обучающийся может осуществить логический приём согласно схеме в

Продолжение таблицы 1

1	*2*	*3*	*4*
	мышления и выразить очерёдность шагов (способы учебной деятельности) его выполнения	педагога согласно алгоритмическим предписаниям шагов (правильное решение от 1–19% от количества рекомендованных примеров)	стандартных условиях
2) продуктивный эмпирический	Обучающийся обладает пониманием об логичном способе мышления и очерёдности шагов его решения, способен выразить собственными словами формулировку логического способа и схему его решения	Обучающий осуществляет способы учебной деятельности без содействия педагога и алгоритмических предписаний шагов (правильное решение 20–50% от количества рекомендованных заданий)	Обучающийся может осуществлять прием без помощи схемы в стандартных условиях
3) продуктивный теоретический	Обучающийся может предоставить определение конкретного логичного способа мышления и сформулировать очерёдность шагов его решения	Обучающийся осмысленно выполняет приёмы учебной деятельности (правильное решение 51–100% от количества рекомендованных примеров)	Обучающийся может осуществить приём без помощи схемы в нестандартных условиях

В процессе изучения литературы была выявлена модель процесса формирования логических приёмов мышления, которая содержит 4 этапа.

1 этап. Подготовительный

Цель: ознакомление обучающихся с определениями и схемой исполнения логических способов мышления

Действия педагога: инструктаж обучающихся (формулировка определения, структур исполнения логических способов мышления – приёмов учебной деятельности).

Действия обучающихся: запись и чтение определений, формирование словаря.

Итог: повторение определения определённого логического способа мышления и способность сформулировать очерёдность операций его исполнения (понимание операций обучающегося).

2 этап. Обучающий

Цель: усвоение структуры способов; развитие умений осуществлять способы согласно схеме.

Действия педагога: обучение закономерным способам мышления в математике (деятельность согласно примеру). Эффективный контроль и редактирование хода исполнения учебной деятельности.

Действия обучающегося:

а) осуществление закономерных способов мышления согласно примеру (согласно предписаниям и определениям);

б) самостоятельное пошаговое осуществление закономерных способов мышления;

в) осуществление закономерных способов мышления при решении задач; произнесение этапов схемы исполнения способов.

Итог: осмысление выполнения способов логической деятельности, сформированность умения осуществлять логические способы мышления согласно схеме.

3 этап. Закрепляющий

Цель: развитие навыка исполнения закономерных способов мышления в стандартных условиях (без применения схемы).

Деятельность педагога: подготовка к решению приёмов учебной деятельности в стандартных условиях.

Деятельность обучающегося: пошаговое осуществление способов в отсутствии обращения к рекомендациям. Повторение методик исполнения способов без использования словаря.

Итог: Развитость умения исполнения логических способов; способность осуществлять способы в стандартных условиях.

4 этап. Практический

Цель: перемещение закономерных способов мышления в новые условия.

Деятельность педагога: подготовка к умению применять различные логические приёмы мышления в зависимости от содержания исследуемого материала или задачи; организация деятельности согласно использованию логических способов мышления при изучении математических тем, отличных от тем обучающего и закрепляющего этапов, то есть применение полученных знаний и умений нестандартной ситуации.

Деятельность обучающегося: пошаговое осуществление способов при решении примеров без помощи рекомендаций; решение предложенных примеров согласно определённым правилам; использование усвоенных логических способов мышления; перенесение способностей осуществлять логические способы мышления в новых условиях [9].

Итог: способность логически мыслить в нестандартных условиях.

1.2 Приёмы мышления

Мышление – это важнейшая способность к познанию существенных свойств и связей (причинно-следственных, структурно-функциональных, пространственных, временных и др.) объектов, выходящих за рамки чувственной информации и практического опыта человека.

Процесс мышления непосредственно связан с физиологией человека (строением и работой мозга) и языком. Опосредованный характер мышления заключается в том, что человек благодаря мышлению познает скрытые свойства, связи и отношения предметов.

Язык – определенная знаково-символическая система, в которой сохраняется и передается информация.

Основными приемами (операциями) мышления являются:

1. Сравнение.

В ходе обучения приёму школьники должны овладеть следующими умениями:

– выделение признаков;

– установление общих признаков;

– выделение основания для сравнения;

– сопоставление по данному основанию.

Также сравнение может идти по таким характеристикам как:

– по качественным (цвет, форма);

– по количественным: больше-меньше, длиннее- короче, выше-ниже и т.п.

Данным приём можно использовать на любом этапе урока.

2. Анализ и синтез.

Анализ – это мысленное расчленение предмета или явления образующие его части, выделение в нем отдельных частей, признаков и свойств.

Синтез – это мысленное соединение отдельных элементов, частей и признаков в единое целое. Используется в основном при решении задач.

3. Обобщение.

Обобщение – приём мышления, при котором мысленно отделяют (записывают) общее свойство для нескольких уравнений или неравенств либо включают уравнения или неравенства в один общий класс, обладающими общими свойствами.

Умения необходимые для овладения этого приёма:

– относить конкретный объект к заданному взрослым классу и, наоборот, конкретизировать общее понятие через единичные (действие отнесения);

– группировать объекта на основе самостоятельно найденных общих признаков и обозначать образованную группу словом (действия обобщения и обозначения) группировку в уме;

– учащиеся мысленно объединяют предметы и явления в группы по тем общим и существенным признакам, которые выделяются в процессе абстрагирования.

4. Классификация.

Это мысленное распределение предметов на классы в соответствии с наиболее существенными признаками. Для проведения классификации необходимо уметь анализировать материал, сопоставлять (соотносить) друг с другом отдельные его элементы, находить в них общие признаки, осуществлять на этой основа обобщение, распределять предметы по группам на основании выделенных в них и отраженных в слове – названии группы – общих признаков. Таким образом, осуществление классификации предполагает использование приемов сравнения и обобщения.

5. Абстрагирование и конкретизированние.

Это закономерный приём мышления, при котором отделяют один признак в уравнении либо неравенстве.

Конкретизирование-это способ мышления, при котором происходит выделении серии уравнений либо неравенств, решаемые одним методом, или переходом от общего класса уравнений к частному случаю уравнению или неравенства.

6. Закономерность.

Для успешного решения подобных задач необходимо развивать у детей умение обобщать признаки одного ряда и сопоставлять эти признаки с обобщенными признаками объектов второго ряда. В процессе выполнения этих операций и осуществляется поиск решения задачи. Важно обратить внимание на развитие у ребенка умения обосновывать свое решение, доказывать правильность или ошибочность этого решения, выдвигать и проверять собственные предположения (гипотезы).

Из анализа учебно-методической литературы следует, что в качестве понятий подобранных приёмов и в алгоритмических приёмах учебной работы при решении уравнений и неравенств были выбраны следующие:

Анализ – закономерный приём мышления, с помощью которого совершается мысленное разделение уравнения либо неравенства на смысловые части в установленном порядке, изучение каждой части в отдельности (отбор пути решения).

Модель:

1. Разбить уравнение или неравенство на смысловые части (обнаружить состав уравнения либо неравенства; обнаружить

алгебраические операции в уравнении либо неравенстве; установить вид функций – определить степень уравнения либо неравенства или степень в уравнении, либо неравенства; выявить закономерные структуры уравнения либо неравенства).

2. Изучить в отдельности каждую смысловую часть (при каких значениях имеет смысл выражение, находящееся в уравнении либо неравенстве, какие следствия возможно вытекают из данного уравнения либо неравенства.

3. Если необходимо ввести уравнение либо неравенство в связи и отношения с иными уравнениями, либо неравенствами, с известными теоремами (теоремы-равносильности, уравнения следствия).

Например, решить уравнение $\sqrt{x^4-156}=10$ согласно данному алгоритму.

Анализ:

– уравнение содержит под знаком корня неизвестную, значит дано иррациональное уравнение;

– неизвестное х в четвёртой степени, значит уравнение сводится к степенному уравнению;

– из определения иррационального уравнения:

$$\sqrt{f(x)}=a \iff \begin{cases} a \geq 0, f(x) \geq 0, \\ f(x) = a^2; \end{cases};$$

$$a^4=b;$$

$$x = \pm\sqrt[4]{b}\,.$$

Синтез – закономерный закон мышления, характеризующийся сочетанием результатов изучения смысловой части уравнения или неравенства в единое целое, решение уравнения либо неравенства.

Модель:

1) решить уравнение либо неравенство (по плану анализа) либо выполнить действия, найти решение уравнения или неравенства согласно алгоритму;

2) выбрать корни, которые удовлетворяют условиям существованиям выражения, входящих в исходное уравнение или неравенство (ОДЗ);

3 записать ответ.

Например, дано уравнение $\sqrt{x^4 - 156} = 10$.

Синтез:

1) $\sqrt{f(x)} = a \iff \begin{cases} a \geq 0 \\ f(x) = a^2 \end{cases}$, так как 10>0, то $\sqrt{x^4 - 156} = 10 \iff x^4 - 156 = 100$;

2) $x^4 = b \iff x = \pm\sqrt[4]{b}, x^4 = 256 \iff x = \pm\sqrt[4]{4^4}, x = \pm 4$;

3) Так как под знаком арифметического корня находится положительное число ($x^4 \geq 0, \forall x \epsilon R, x^4 - 156 > 0$) , то данные числа являются корнями данного уравнения.

Ответ: -4; 4.

Обобщение – закономерный приём мышления, при котором мысленно отделяют (записывают) общее свойство для нескольких уравнений либо неравенств и включаю уравнения, либо неравенства в один класс, обладающий выделенным свойством.

Модель:

1) изучить ряд уравнений или неравенств на содержание общих свойств, сравнить и решить их;

2) выделить одно свойство;

3) объединить уравнения либо неравенства, имеющие выделенное свойство, в один класс;

4) записать общую формулу, полученного класса уравнений и неравенств либо общую формулу хода решения класса уравнений, либо неравенств.

Например, запишите общую формулу записи неравенств, если это возможно (рисунок 1).

$0{,}2^x \le \frac{1}{125}$ (1) $0{,}4^x \le 0{,}16$ (4)

$(\frac{1}{9})^x \le 9$ (2) $(\frac{1}{7})^x \le \frac{1}{49}$ (5)

$36^x \le \frac{1}{6}$ (3)

Рисунок 1- Неравенства.

Обобщение:

– данные неравенства показательные, вид неравенств схож «≤», основание степени во всех уравнениях меньше единицы (а <1), таким образом, любое из данных неравенств можно привести к основанию 0 <а <1;

– выделим общее свойство для данных неравенств: показательное неравенство имеющее основание больше нуля, но меньше единицы, вид неравенства «≤»;

– данными свойствами обладают неравенства под цифрами 1, 2, 4, 5;

– общая формула: $\left(\frac{1}{a}\right)^x \le \left(\frac{1}{a}\right)^b$, $a > 1$.

Абстрагирование – закономерный приём мышления, при котором отделяют один признак в уравнении либо неравенстве.

Модель:

1) выделить какой-либо признак (существенное свойство) в уравнение либо в неравенстве;

2) разделить уравнение либо неравенство на различные элементы (смысловые части и пр.), при этом не сосредотачивая внимание на другие признаки в неравенстве или уравнении, решить уравнение либо неравенство.

Например, предложите метод решения данных неравенств, применяя модель «абстрагирования» (рисунок 2).

$$25^x - 5^{x+1} - 8 > 0 \ (1)$$
$$49^x - 5 \cdot 7^x - 6 \leq 0 \ (2)$$
$$12^x - 12^{2x} \geq 0 \quad (3)$$

Рисунок 2 - Квадратные неравенства

Абстрагирование

В каждом из неравенства есть 2 слагаемых, отличных от остальных показателем степени, после преобразования (привидение выражений к общему основанию с различными степенями), получаем неравенства похожие на квадратные. Выделим свойство как основа абстракции – схожие структуры показательного неравенства с квадратным неравенством (рисунок 3).

$$5^x - 5 \cdot 5^x - 8 > 0 \quad \Rightarrow \ a^x = t, t > 0$$
$$7^{2x} - 5 \cdot 7^x - 6 \leq 0 \quad a^{2x} = t^2 \ \Rightarrow at^2 + bt + c > 0$$
$$12^x - 12^{2x} \geq 0$$

Рисунок 3 – Решение квадратных неравенств

Конкретизирование – закономерный способ мышления, при котором происходит выделение серии уравнений либо неравенств, решаемые одним методом, или переходом от общего класса уравнения к частому случаю уравнения либо неравенства.

Модель:

1) выделить уравнения либо неравенства, имеющие общую структуру либо общий метод решения;

2) выбрать за основу конкретизации одно общее свойство;

3) выбрать уравнения либо неравенства, имеющие выбранное свойство, в отдельную группу;

4) изучить отдельную группу как возможный частный случай.

Например, конкретизировать какой-нибудь класс неравенств из данных (рисунок 4).

$$5^x > 25 \quad (1) \qquad 16 - x < 3^x \quad (4)$$
$$7 < 49^x \quad (2) \qquad 81 < 9^{2x} \quad (5)$$
$$4^X > 3 - x \quad (3) \qquad 6^x > x + 3 \quad (6)$$

Рисунок 4 – Показательные неравенства

Конкретизирование:

1) данные неравенства обладают схожей структурой $a^x > b$ или $a^x > f(x)$ либо каждое неравенство содержит показательную функцию, в неравенствах 1,2,5 и имеет вид $a^x > b$, где сравнивается показательная функция и константа, а в неравенства 3,4,6 показательная функция сравнивается с линейной функцией $a^x > f(x)$;

2) выделим свойство: сравнение показательной функции с линейной;

3) получим группу неравенств $a^x > f(x)$ 3,4,6;

4) сделаем общую запись этих уравнений.

$a^x > f(x)$, где *f(x)* – любая функция, кроме $f(x) = a^x \Longrightarrow$ графический способ решения.

1.3 Способы и методы развития логического мышления на уроках математики в старшей школе

Для старшеклассников свойственно формирование критического мышления или же другими словами – логики. Раньше обучающийся слепо полагал на авторитетность педагога и учебника, но в данном возрасте он сам удостоверяется в правильности этого утверждения, предложения. Это значимое свойство мышления необходимо совершенствовать – это значит, что необходимо отходить от привычки сомневаться, дискутировать, противоречить, защищать заведомо неверные предложения, упрямиться. Одним из средств развития логического мышления считается обнаружение и опровержение ошибок в суждении. Важной характерной чертой в развитии старшего школьного возраста является развитие интенсивного, самостоятельного логического мышления. Данный возраст считается наиболее подходящим, более восприимчивым для формирования подобного мышления. Доверие к интеллектуальным способностям обучающегося как нельзя правильнее отвечает возрастным отличительным чертам школьника, потому что это означает высокую оценку их умственным знаниям. Разумно стимулировать творческое мышление школьников, больше ставить задач для самостоятельного сравнения объектов, обнаруживать сходства и различия, приходить к выводу и обобщению.

Эмоциональный навык способен негативно оказывать воздействия в процессе обучения старшеклассника. Данный процесс следует корректировать. Только в этом случае можно показать обучающемуся, что несущественные свойства объектов многообразны, а существенные свойства всегда измены. Установлено, что интенсивная самостоятельная деятельность мысли наступает лишь тогда, когда перед школьниками появляется проблема, вопрос. В связи с чем педагог и родителя обучающегося должны стремиться осуществить обучение таким образом, чтобы перед учащимися чаще встречались проблемы различной трудности, так называемое проблемное обучение, что побуждает к самостоятельному решению этих проблем (вывод формул, законов, самостоятельное доказательство теорем). Овладевая научным познанием в старшем звене, старшеклассники усваивают и определяют подходы по процессу и итогу учебно-познавательной деятельности. Данный подход при целенаправленном его создании становится успехом школьника, стилем его мышления.

Задача учителя – вооружить обучающегося принципами норм реализации познавательной деятельности. Для формирования логического мышления нужна постановка проблемы перед обучающимися, вызывающей рассмотрения нового анализа, нового осмысления. Дальнейшие действия педагога должны быть ориентированы на организацию решения проблемы, то есть самостоятельный поиск решения обучающимися. Во-первых, педагог должен стать участником совместного поиска, но никак не руководителем. Он может высказывать собственные суждения по поводу тех или иных действий старшеклассника, однако все его предложения и мнения должны быть раскрыты для логического анализа и оценки также как и действия обучающегося. Во-вторых, реальный поиск обучающимися, а не навязывания им «правильного пути». Наконец, когда задача решена, т. е. искомый метод действия найден и закреплён, педагогу предстоит организовать оценку найденного решения. Она призвана узнать в какой мере пригоден найденный метод для решения других проблем [6].

Подобные задачи должны быть сконструированы педагогом вместе с обучающимися путём видоизменений исходной задачи, в процессе решения которой был найден данный способ. Важно распределение функций между педагогом и обучающимся, но не распределение между ними последовательных этапов решения учебной проблемы, т. е. работа принимает совместный вид деятельности.

Чётко скоординировать деятельность старшеклассника способен только педагог, основываясь на прогностическую оценку способностей обучающегося. Таким образом, роль обучающегося заключается не в чётком выполнении предписании педагога, а в более полной реализации формируемых им предпосылок для поиска. Подобное разделение обязательств между педагогом и обучающемся обусловливает вид взаимоотношений между ними и строятся согласно типу делового партнёрства и сотрудничества. При этом обучающийся вступает во взаимоотношения с другими старшеклассниками, значит, его деятельность должна происходить в рамках группового учебного диалога. Подобная модель организации учебного процесса оказывает воздействие на коммуникативные качества.

Коллективный отбор единого смысла будущей работы придаёт ей характер общения. Такое общение требует обмена идеями о предмете, эмоциями, порождаемыми данным предметом, его оценками. Одновременно происходит активное усваивание основных коммуникативных умений: способность обосновать свою мысль и правильно воспринять идею собеседника, при этом формируется логическое мышление. Мышление формируется в самом процессе освоения и использования знаний и действий, российскими методистами (Мильруд и Невская) были выделены методы формирования логического мышления на уроках:

– с помощью проблемных ситуаций;

– реализация принципа коммуникативности на уроке.

Для эффективного протекания мышления нужна прочная основа – наличие определённых умений, когда обучающийся может их использовать при решении новых задач и творчески применять при возникновении умственных трудностей, т. е. при столкновении с задачами проблемного характера. Логическое мышление обслуживает постановку цели, ориентировку в условии проблемы, формирование плана, репродуктивную – исполнительскую часть решения [17].

Исследование математики связано с накоплением различных данных, а это формирует культуру умственной деятельности. Обучающиеся пользуются учебниками, словарями, справочниками и т. д. Что даёт возможность им овладеть обширными набором средств извлечения информации. Можно вести математический словарь, составлять опорные конспекты и схемы согласно темам, выписывать основные формулы «шпаргалки» и т. п.

Важным признаком культуры интеллектуального труда считается подготовка к решению проблем, домашних задач. Составление плана ответа, опорных конспектов, подбор информации повышает подготовленность к интеллектуальной деятельности. Культура интеллектуальной деятельности увеличивается путём достижения компьютерной грамотности, изучение информационных технологий, ознакомление с интернет-ресурсами.

Организовать учебную работу эффективно можно в различных формах, которые станут способствовать формированию внутренней (познавательной) мотивации обучающихся. Педагогу необходимо включать в обучение следующие разновидности деятельности:

– обсуждение разных альтернатив решения одной и той же учебной задачи;

– знакомство с разными точками зрения согласно одной проблеме;

– вопросу, исследование рекомендованных позиций;

– предложение обучающимся заданий, направленных на поиск увлекательных умственных задач;

– обучение старшеклассника самостоятельному конструированию логических задач;

– создание условий выбора задач различной трудности с целью их решения;

– создание ситуаций умственного соперничества среди обучающихся либо в группах одного класса [12].

Для формирования логического мышления обучающихся старших классов существует множество способов и приёмов. Это примеры на нахождении закономерности и отличий, логические задачи и примеры, ребусы. Базовой моделью урока, сконцентрированного на формирование логического мышления старшеклассников может быть следующий пример:

1) разминка – общепсихологический тренинг;

2) развитие психологических элементов развития (память, мышление, внимание);

3) выполнение развивающих задач;

4) решение творческих заданий с неожиданным поворотом.

Обучающиеся предпочитают обнаруживать закономерности в подобных задачах, как в (рисунке 5):

$$2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad 3x^2 - x + 2 = 0;$$

$$5x^2 + 14x - 3 = 0,\ 5x^2 + 8x - 4 = 0;$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0,\ x^2 + 8x - 4 = 0.$$

Рисунок 5 – Уравнения.

Либо же решить задачу о неравенствах: о числах a и b известно, что $a > b$. Среди приведённых неравенств выберите верные:

1) $a - b < -3$;
2) $b - a < 1$;
3) $b - a < 2$;
4) верно 1, 2 и 3.

Логическое мышление – это мышление, которое мобилизует работу всех частей освоения – внимания, памяти, воображения, что составляет базу умственных способностей обучающихся, привлекает обучающегося в познавательную работу, стимулируя его логическое формирование [25].

Таким образом, для эффективного преподавания математики в старшей школе, для освоения и осмысления учебного материала у старшеклассников должны быть сформированы три элемента мышления:

– высокий уровень примитивных мыслительных процессов (анализ, синтез, сравнение, обобщение, отделение главного, систематизация);

– высокий уровень активности, раскованности мышления, проявляющейся в создании большого количества идей, появлении нескольких вариантов решений задачи, высокоорганизованной и целенаправленного мышления, проявляющегося в выделении основных существенных явлениях, в применении общих методик рассмотрения задачи или примера.

Высокая степень умственных способностей, логическое мышление у обучающегося необходимы для успешной учебной деятельности.

Учителя и родители обучающегося должны помнить о том, что умственные возможности — это запас знаний, с которыми обучающийся отправляется во взрослую жизнь, с помощью которых выберет и освоит будущую специальность.

1.4 Роль уравнений и неравенств в логическом развитии обучающихся

Решение уравнений и неравенств составляет существенную долю школьного курса математики. Это говорит о том, что уравнения и неравенства обширно применяется во всевозможных разделах математики, в постановлении важных практических задачах.

Уравнения и неравенства представляют собой интерес для изучения, так как с их помощью записываются важнейшие задачи. При изучении любой темы уравнений и неравенств могут быть применены результативные способы закрепления материала, углубления, расширения и повторения теоретического материала, с целью формирования творческой математической работы обучающихся. Операции над числами и свойства этих операций, функций и свойств этих функций, метрическое соотношения между компонентами геометрических тел, а также тождество и тождественное преобразование находят отражение в упражнениях на решение уравнений и неравенств. К примеру, познакомившись с распределительным законом умножения, обучающиеся могут использовать его к решению различного вида уравнений.

При решении уравнений часто выявляется один вопрос: может ли уравнение иметь отрицательный корень? Для ответа на этот вопрос необходимо применить свойства степени рациональных чисел, что будет способствовать развитию логического мышления у обучающихся. Можно разнообразить формы упражнений (решить уравнение или неравенство по заданным условиям задачи, составить два уравнения или неравенства по заданной задаче, решить уравнение или неравенство рациональным способом) содействует формированию сообразительности, нестандартному мышлению и инициативности обучающегося [25].

Графическое решение уравнений и неравенств показывает важность применения аналитической геометрии, что способствует формированию пространственного мышления. Решение задач из разнообразных областей математики с помощью уравнений и неравенств создаёт понимание о единстве математики и относительном её разделении на алгебру и геометрию.

Очень важен метод уравнений и неравенств в решении жизненных задач. Такие как, связанные с производством, экономикой домашнего хозяйствования, со смежными дисциплинами может быть одним из результативных методов реализации принципа взаимосвязи с обучением математики и жизнью, подготовки обучающихся к самостоятельному выбору будущей специальности.

Истоки алгебраических способов решения практических задач связаны с Древнем миром. Из истории математики установлено, что существенная доля задач математического характера решались египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX-VI вв. до н. э.), обладала расчётным видом. Но в это раннее время появились задачи, в которых искомые величины задавались определёнными условиями, призывающим к составлению уравнения либо системы уравнения. Сначала, с целью решения подобных задач использовались арифметические способы. В последующем стали образовываться первые алгебраические представления. Сперва был основан способ решения текстовых задач. Он в последующем стал базой для отделения алгебраического компонента и его независимого изучения. В результате длительного поиска сформировали язык современной алгебры (использование букв, применение, внедрение знаков арифметических действий, скобок и т. д.).

На границе XVI-XVII вв. алгебра как своеобразная часть математики, обладающая своим предметом, способом, сферы приложения, была уже ранее сформирована. Последующее её развитие, вплоть до нашего времени, заключалась в совершенствовании методов, расширении сферы приложении, уточнения определения и связей их с понятиями иных разделов математики. В этом процессе всё яснее становилось, какую значимость представляют понятия уравнения в системе алгебраических определений [30].

Изобретение координатного метода (Декарт Р. XVII в.), развитие аналитической геометрии дало возможность использовать алгебру не только к задачам, связанным с числовой прямой, но и к исследованию различных геометрических фигур. Это направление линии развития укрепила положение уравнения как основного алгебраического определения, которое связывалось с тремя главными сферами своего функционирования:

1) уравнение как средство решения текстовых задач;
2) уравнение как формула, служащая в алгебре объектом исследования;

3) уравнение как формула, которой формируются числа или координаты точек плоскости(пространства), являющееся его решением

Таким образом, уравнение как общематематическое понятие многообразно, при этом ни один из нюансов невозможно устранить из рассмотрения, особенно если разговор идёт о проблемах математического образования.

Важность и обширность материала, связанного с определением уравнения, его исследовании в современной методики математики сформировано в содержательно-методическую линию – линия уравнений и неравенств. Здесь рассматриваются проблемы развития определений уравнений и неравенств, общих и частных способов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой, функциональной и иными линиями школьного курса математики. Области возникновения и функционирования определения уравнения в алгебре соответствуют 3 основных линии развития уравнений и неравенств в школьном курсе математики:

– практическая направленность уравнений и неравенств раскрывается основным способом при исследовании алгебраического метода решения текстовых задач. Данный способ обширно используется в школьной математике, так как сопряжен с обучением приемам, используемых в приложении математики. Практическая значимость уравнений и неравенств обуславливается тем, что они применяются в математическом моделировании;

– теоретико-математическая направленность уравнений и неравенств раскрывается в двух аспектах:

1) в исследовании более важных классов уравнений и неравенств;

2) в исследовании общих понятий и методах, относящихся в целом.

Эти аспекты необходимы в курсе школьной математики.

– для уравнений и неравенств свойственна направленность на формирование взаимосвязей с остальным содержанием курса математики.

Это направление тесно связано с числовой линией. Каждая числовая область, которая рассматривается в алгебре и начале математического анализа, за исключением области действительных чисел, появляются в связи с решением какого-либо уравнения или неравенства. Связь уравнений и неравенств с числовой линией двухсторонняя. Противоположное воздействие проявляется в том, что любая вновь внедрённая числовая область расширяет возможности составления и решения разных уравнений и неравенств. Например, введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел даёт возможность записывать корни не только у уравнений вида $x^n = b$, где b – неотрицательное рациональное число, но и различных квадратных уравнений с рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом [14].

Уравнения и неравенства непосредственно связаны и с функциональной линией. Один из важнейших таких связей – это приложение методов, разрабатывающихся в уравнениях и неравенствах, к исследованию функций (например, задания на определение области значения функции, корней и знакопостоянство и т. д.). С другой стороны, функциональная линия значительно влияет на содержание уравнений и неравенств и на способ её изучения. В частности, функциональные представления служат базой для графической наглядности к решению и изучению уравнений и неравенств.

Также необходимо выделить связь уравнений и неравенств с алгоритмической линией. Сама сущность определения алгоритм, может быть, выделено в анализе процесса решения уравнений и неравенств различных классов. Влияние алгоритмичной линии на уравнения и неравенства состоит в способности применения её определений для описания алгоритма решения уравнения и неравенства различных классов.

Таким образом, рассмотрев теоретические основы формирования логического мышления у старшеклассников, мы пришли к выводу о том, что модель процесса формирования логических приёмов мышления содержит 4 этапа: подготовительный, обучающий, закрепляющий и практический.

Мышление складывается и исследуется различными авторами в методике преподавания математики в ходе решения математических примеров и задач. Также, были выбраны три уровня и три критерия сформированности логического способа мышления по сущностным характеристикам и взаимосвязью с методом учебной деятельности – это репродуктивный, продуктивный эмпирический и продуктивный теоретический.

Возрастные и психологические особенности обучающихся показали, что главное новшество данного возраста – это утверждение собственного внутреннего мира. Около старшеклассников возникает желание к самореализации, что приводит к возникновению новых общественных потребностей, таких как отыскать своё место, выделиться и осуществлять конкретную роль в обществе [25].

Для эффективного преподавания математики в старшей школе, для освоения и осмысления учебного материала у старшеклассников должны быть сформированы три элемента мышления: высокий уровень мыслительных процессов, высокий уровень активности и раскованности мышления.

Глава 2. Методические основы развития математического мышления старшеклассников при решении уравнений и неравенств.

2.1. Учебно-методическая линия «Уравнения и неравенства» в школьных учебниках алгебры и начал анализа.

Тема «Уравнения и неравенства» рассматривается в школьном курсе на протяжении всех лет обучения, усложняясь с каждым классом всё больше. Проблемы, возникающие с этой темой связанны с тем, что большое количество классификаций уравнений и неравенств существует, в соответствии с этим и к каждому типу уравнений и неравенств нужен свой подход к решению. Несмотря на это, задачи по данной теме представлены в ЕГЭ, как в первой части, так и во второй профильного и базового уровня), в олимпиадных задачах и во вступительных испытаниях некоторых вузов, где еще сохранились такие условия поступления. Поэтому в настоящее время данная тема вызывает повышенный интерес.

При решении примеров по данной теме у обучающихся повышаются навыки логического мышления, формируется механизм решения уравнений и неравенств различного типа и класса сложности. Данные навыки важны в жизни, так как помогают человеку нестандартно мыслить в сложных ситуациях, принимать быстрое решение. Они пригодятся не только на ЕГЭ и в жизни, но и во многих современных профессиях [7].

Включение этих задач в ЕГЭ вполне обоснованно, поскольку позволяет проверить у учащихся:

– знание основных формул, методов и фактов школьной алгебры;

– уровень развития логического мышления;

– сформированность математических понятий и применение из при решении различного рода заданий;

– правильность и логичность обоснование именно данного алгоритмы при решении примера.

Рассмотрим список федерального перечня учебников, рекомендуемых к использованию при реализации программ среднего общего образования, сформированный Министерством просвещения РФ от 28 декабря 2018 года, и актуального по сей день с учетом поправок от 08 мая и 22 ноября 2019 года. Учебники по алгебре и начале математического анализа для 10 и 11 классов разделяют на базовый и профильный уровни. По базовому уровню рекомендуется следующий список учебников:

– алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В. и др.;

– алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) Муравин Г.К., Муравина О.В.;

– алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н.Н. и др.;

– алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) Погорелов А. В.;

– алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровень) Мордкович А. Г., Семёнов П. В. и др.;

– и другие авторы из ГОСТ.

Был проведён анализ самых часто используемых учебно-методических комплектов учебников в школе базового и профильного уровня на наличии разного вида уравнений и неравенств, а также присутствии чёткого алгоритма решения уравнения и неравенства (Приложение 2).

Проведём анализ учебников базового уровня.

Учебник для 10-11 класса «Алгебра и начала математического анализа» Мордкович А.Г. Во 2 главе отдельно рассматривается тема «Тригонометрические уравнения», а в 8 главе – «Уравнения и неравенства».

Эта глава начинается с темы «Равносильность уравнений», где подробно расписан алгоритм решения примера в 3 этапа: технический, анализ решения и проверка.

Например, решить уравнение $-2x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

Решение. Первый этап – технический. На этом этапе осуществляются преобразования заданного уравнения и нахождение корней последнего (самого простого) уравнения.

Решение:

$$-2x + 1 = 3\sqrt{x-1};$$

$$(-2x + 1)^2 = (3\sqrt{x-1})^2;$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 9(x-1);$$

$$4x^2 - 4x + 1 - 9x + 9 = 0;$$

$$4x^2 - 13x + 10 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{8} \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1{,}25.$$

Второй этап – анализ решения. Здесь выполняются равносильные преобразования и анализируется их правильное выполнение. В нашем примере в процессе решения 1раз использовалось равносильное уравнение – возведение в квадрат. Отсюда следует, что расширилась область определения уравнения, поэтому решённое квадратное уравнение на последнем шаге 1 этапа является уравнением следствием для исходного уравнения. Необходимо сделать проверку.

Третий этап – проверка. Подставим поочерёдно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

Если x = 2, то получаем $-2 \cdot 2 - 3\sqrt{2-1} + 1 = 0$ – неверное равенство.

Если $x = 1{,}25$ то получаем $-2 \cdot 1{,}25 - 3\sqrt{1{,}25 - 1} + 1 = 0$, т. е. неверное равенство.

Ответ: корней нет [18].

Учебник Калмагоров А.Н., Абрамов А. М., Дудницын Ю.П. «Алгебра и начало математического анализа» начинается с 1 главы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств». В данной главе рассматривается ход решения без обозначения конкретного алгоритма, только указания к объяснению решения примера. В отдельной 5 главе рассматривается параграф «Уравнения, неравенств, системы уравнений и неравенств». В каждом пункте рассматривается определённый вид уравнения и неравенства. В теории алгоритмов решения данных примеров нет, только набор данных примеров [10].

Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В. и др. «Алгебра и начало математического анализа», содержание которого состоит из видов функций, где рассматриваются все свойства данных функций, в т.ч. её уравнения и неравенства. Отдельно рассматривается тема «Тригонометрические уравнения», где отдельно не рассматривается основных алгоритмов при решении уравнений и неравенств, единственное есть указание к ходу решения [2].

Например, решить неравенство $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0;$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} > 0;$$

$$\frac{3x+3-2x+2}{(x-1)(x+1)} > 0;$$

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+1)} > 0;$$

Решая последнее неравенство методом интервалов (рисунок 6), получим $-5 < x < -1$.

$$x > 1$$

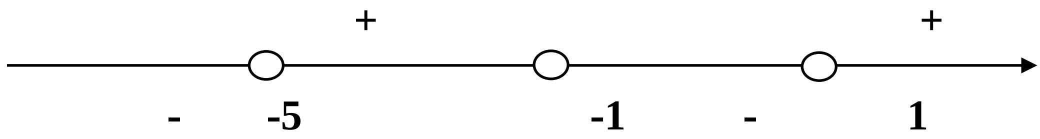

Рисунок 6 – Метод интервалов

Мерзляк А.Г. «Алгебра и начало математического анализа» рассматривает уравнения и неравенства с темы «Иррациональные уравнения и неравенства». Отдельной главой 3 изучается «Тригонометрические уравнения и неравенства», но конкретного алгоритма решения примеров нет, есть только решение с пояснением [16].

Далее рассмотрим учебники, предназначенные для профильного уровня.

Колягин М. Ю., Сидоров Ю. В., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е., Шабунин М.И. и др. «Алгебра и начало математического анализа» рассматривает сначала показательное, иррациональное и логарифмические уравнения и неравенства и только после тригонометрические уравнения. Есть теория, по окончании которой даются примеры с пояснением и решению алгоритмов решения уравнений и неравенств [11].

Например, $2cos^2x + cos\,x + 3 = 0$.

Заменяя $cos\,x$ на t , получаем

$$2t^2 - t + 3 = 0;$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4};$$

$$t_1 = -1\,, t_2 = 1{,}5\,;$$

Откуда $cos\,x = -1$ и $cos\,x\ =\ 1{,}5$.

Уравнения cos x = 1,5 не имеет корней, а уравнение cos x = -1 имеет следующие корни:

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n, n \in Z$.

Мордкович А. Г. «Алгебра и начало математического анализа» 10 класс рассматривает во 4 главе «Тригонометрические уравнения» такие темы как «Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства», где рассматриваются все тригонометрические функции (sin, cos, tg, ctg) в отдельных параграфах. В последнем параграфе этого пункта рассматриваются методы решения тригонометрических уравнений:

– метод замены переменной;

– метод разложения на множители;

– однородные тригонометрические уравнения [19].

Для однородных уравнений отдельно прописан алгоритм решения уравнения (рисунок 7).

Алгоритм решения уравнения

$$a\,sin^2x + b\,sin\,x\,cos\,x\ + c\,cos^2x\ = 0$$

1) Посмотреть, есть ли в уравнении член $a\,sin^2x$.

2) Если член $a\,sin^2x$ в уравнении содержится (т.е. а $\neq$ 0), то уравнение решается делением обеих его частей на cos^2x и последующим введением новой переменной $z = tg\,x$.

3) Если член $a\,sin^2x$ в уравнении не содержится (т.е. а $\approx$ 0), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносится $cos\,x$.

Рисунок 7 – Алгоритм решения уравнения

Мерзляк А.Г. «Алгебра и начало математического анализа» уравнения начинают рассматриваться в главе «Степенная функция» и первым рассматриваются иррациональные уравнения и неравенств. Отдельно отводится внимание главе «Тригонометрические уравнения», где нет основного алгоритма решения, но есть пояснения к ходу решения разобранного примера [16].

Исходя из рассмотренных учебников по алгебре и начал математического анализа 10-11 класса, можно сделать вывод, что в большинстве учебников не представлены чёткие алгоритмы решения уравнения и неравенства, а только имеются дополнительные комментарии к ходу решения. В связи с чем была выявлена проблема в нехватке алгоритмов для решения уравнений и неравенств, и мы решили их разработать совместно с обучающимися.

2.2 Формирование логического мышления у старшеклассников как одна из целей обучения

При изучении научной литературы были выбраны следующие опорные мыслительные операции – анализ, синтез, обобщение, абстракция и конкретизация, благодаря чему у старшеклассника будет формироваться логическое мышление при решении уравнений и неравенств.

Рассмотрим календарно-тематическое планирование на тему «Уравнения и неравенства» в 10-11 классе. На всю главу выделяется 16 часов в 10 классе, из них на «Иррациональные уравнения и неравенства» отводится 1 и 2 этап., «Решение логарифмических уравнений и неравенств» и «Показательные уравнения и неравенства» - 3 и 4 этапы. Время на целенаправленное развитие логического мышления у школьников не выделяется, так как это осуществляется непрерывно на протяжении всего курса алгебры и начале математического анализа.

В соответствии с психологическими особенностями формирования старшеклассников и модели развития логических способов мышления была разработана методика, которая проходила в несколько этапов, состоящих их определённых компонентов: мотивационный, операционно-исполнительский, контрольно-оценочный.

На подготовительном этапе необходимы базовые знания и умения обучающихся к нахождению способа решения и применения алгоритма, поэтому старшеклассникам рекомендуется сделать запись в тетрадь либо сформировать словарь и т.п.

На обучающем и закрепляющем этапе старшеклассники изучают приёмы учебной деятельности, в которых создаются алгоритмы для развития логических способов мышления при решении уравнений и неравенств с их помощью. В рамках урока идёт развитие логических способов мышления. Для любого логического приёма необходима серия подобранных уравнений и неравенств, которые будут разделены по уровням трудности – базовые и профильные.

Рассмотрим задания для обучающего этапа, которые нужно решать только при понимании логического способа мышления и схемы выполнения способа. Здесь примеры могут такого типа, как найти ошибки при решении уравнения или неравенства, используя схему логического способа мышления, определить логический способ мышления при решении примера и т.п. Составить план решения примера, применяя схемы выполнения логического способа мышления и решить его.

Например, решить пример, используя любой из рассмотренных способов логического мышления

$$\sqrt{x^2 - 9} = 4.$$

Решение:

1) в данном уравнении имеется корень, под которым содержится неизвестная, следовательно дано иррациональное уравнение;

2) применяем область допустимых значений (ОДЗ) и получаем ограничения для переменной: $x^2 - 9 \geq 0$;

3) вспоминаем определение квадратного корня и подставляем эти условия в систему, решаем её.

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ x^2 - 9 = 4^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+3) \geq 0, \\ x^2 = 25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+3) \geq 0, \\ x = \pm 5. \end{cases}$$

Ответ: ± 5, был использован метод анализа.

Теперь рассмотрим примеры для закрепляющего этапа. Тут могут быть задания такого типа: решите пример абстрагируясь от свойств уравнения или неравенства и запишите его общий вид, каким логическим способом мышления необходимо воспользоваться, чтобы решить его.

Например, напишите конкретизацию для какого-нибудь уравнения $|f(x)| = \varphi(x)$, установив такие требования для $\varphi(x)$, чтобы получить отдельный вид уравнений с модулем, обладающие своим способом решения, отличного от принятого (по определению). Предложите возможный метод решения

Например, $|f(x)| = -f(x)$, то есть $\varphi(x) = -f(x)$. Тогда решение $|f(x)| = -f(x) \iff f(x) \leq 0$.

На практическом этапе нужно было решить заранее подобранные примеры из учебников и сборников. На этом этапе предлагалось решить примеры без использования различных схем решения, а опираясь лишь на свой опыт и знания.

Например, найти наименьший корень у уравнения

$$\lg(x^2) = lg(-2x + 4).$$

Решение:

1) заменить исходное уравнение равносильной системе;

Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 > 0, \\ -2x + 4 > 0, \\ x^2 - 4x + 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x < 2, \\ x = \pm 2. \end{cases}$$

2) находим 1 решение системы – это -2. Следовательно, он и будет наименьшим.

Ответ: -2.

2.3. Апробация выведенных алгоритмов для развития логического мышления у школьников на практике

Основной этап эксперимента проходил в 2020-2021 учебном году в 11 классе в МАОУ Лицей №142 г. Челябинска. В эксперименте принимал участие 11-1 класс из 24 человек (13 мальчиков и 11 девочек). Был использован комплексный тип исследования.

Первый этап – конкретизирующее исследование. У всех старшеклассников были установлены исходные уровни сформированности закономерных способов мышления: уровень IQ, представление учащихся о логических способах мышления, анализ журнала успеваемости учащихся. Тестирование проводилось в 11-1 классе на 24 старшеклассников.

Рассмотрим пример тестирования для обучающихся базового и профильного уровня, составленного с помощью электронных ресурсов ЯКласс и РЭШ (Таблица 2).

Таблица 2 – Пример тестирования.

Базовый уровень	Профильный уровень
1	*2*
1) решить уравнение $\frac{1}{x-6} = \frac{-3}{x+2}$	1) решить уравнение $\sqrt{48 + 14x} = x$
2) $\frac{1}{x+4} = \frac{x}{9}$	2) $\frac{3}{x-9} = (\frac{3}{x-9})^{-1}$

Продолжение таблицы 2

1	*2*
3) $\frac{1}{7x+8} = \frac{1}{3x-20}$	3) $\operatorname{ctg}(2-3x) = \operatorname{ctg}(4x-5)$
4) решить неравенство $7^{2x} + 49^{x+2} \leq 7^6$	4) решить неравенство $3^{x^2+2x} > 9^{16-x}$
5) $log_{112}\, x > log_{112}(3x-4)$	5) $log_{78}\, x > -2$

Цели данного этапа: доказательство необходимости исследования технологии развитии логических способов мышления; выявление закономерных способов мышления, применяемых при исследовании уравнений и неравенств; установление степени сформированности логических способов мышления (анализ, синтез, конкретизирование, абстрагирование и обобщение). В результате тестирования были выявлены высокие проценты обучающихся, имеющих репродуктивный уровень.

Второй этап – формирующий эксперимент. Опираясь на фоновые характеристики степени сформированности логических приёмов мышления, на распространённую ошибку решения уравнений и неравенств определённого вида, а именно: иррациональные, показательные и логарифмические, были разработаны алгоритмы решения для каждого вида уравнения и неравенства.

Алгоритмы решения уравнений и неравенств

Для того чтобы применить определённый алгоритм решения того или иного уравнения или неравенства, сперва необходимо определить его вид: показательное, иррациональное или логарифмическое.

1. Показательное.

Алгоритм решения показательного уравнения:

1) левую и правую часть уравнения привести к степеням с одинаковым основаниями вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где а > 0 ,а $\neq 1$;

2) опустить основания степени и заменить исходное уравнение равносильным: $f(x) = g(x)$;

3) решить получившееся уравнение и записать ответ.

Например, решить данное уравнение: $2^{2x-64} = 64$.

1) $2^{2x-64} = 2^6$;

2) $2x - 64 = 6$;

3) $2x = 70$;

$x = 35$.

Ответ: 35.

Алгоритм решения показательного неравенства

1) выбрать способ решения данного неравенства:

- приведение степеней к одному основанию;

- вынесение общего множителя за скобки;

- метод почленного деления;

- функционально-графический метод;

- метод приведения к квадратному неравенству.

2) сравниваем основание степени с единицей и переходим к равносильному неравенству по правилу: если а > 1, то знак неравенства не меняется, а если 0<а<1 , то знак неравенства меняется на противоположный;

3) решаем неравенство относительно показателя и записываем ответ.

Например, $2^x \geq 8$.

1) приведение степеней к общему основанию: $2^x \geq 2^3$;

2) а > 1 → $x \geq 3$;

3) $x \epsilon [3; \infty)$.

Ответ: $x \epsilon [3; \infty)$.

2. Иррациональные.

Алгоритм решения иррационального уравнения

1) найти область допустимых значений (далее – ОДЗ) уравнения;

2) избавиться от иррациональности – возвести в одну и ту же степень обе части уравнения $(\sqrt[n]{f(x)})^k = (g(x))^k$;

3) перейти к равнозначному уравнению и решить его

f(x)= $(g(x))^k$;

4) сделать проверку корней по ОДЗ и записать ответ.

Например, $\sqrt{x+5} = 2$:

1) Область допустимых значений (ОДЗ): $x + 5 > 0$, $x > -5$

2) $(\sqrt{x+5})^2 = 2^2$;

3) $x + 5 = 4$;

$x = -1$;

4) -1 >” -5 → $x = -1$ – корень;

Ответ: -1.

Алгоритм решения иррационального неравенства:

1) определить к какому виду неравенству соответствует исходное

$\sqrt{f(x)} < g(x)$, $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$, $\sqrt{f(x)} > g(x)$;

2) заменить данное неравенство равносильной системой (Таблица 3):

Таблица 3 - Равносильная система.

1	*2*
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$

Продолжение таблицы 3

1	*2*
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x) < 0,\\ f(x) \geq 0;\end{cases}\\ \begin{cases}g(x) \geq 0,\\ f(x) > g^2(x).\end{cases}\end{array}\right.$

3) решить и записать ответ.

Например, $\sqrt{x-5} < x-5$:

1) $\sqrt{f(x)} < g(x)$;

2) $\begin{cases}x-5 \geq 0,\\ x-5 > 0,\\ x-5 < x^2-10x+25.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x \geq 5,\\ x > 5,\\ x^2-11x+30 < 0.\end{cases}$

D = 121-120=1 > 0 → 2 корня;

$x_1 = 6$; $x_2 = 5$;

$\begin{cases}x \geq 5,\\ x > 5,\\ 5 < x < 6.\end{cases}$

Ответ: (5;6).

3. Логарифмическое.

Алгоритм решения логарифмического уравнения

1) найти ОДЗ уравнения;

2) выбрать 1 из методов решения:

– по определению;

– метод замены переменной;

– метод потенцирования;

– метод логарифмирования.

3) решить уравнение;

4) проверить корни по ОДЗ и записать ответ.

Например, $log_{23}(2x+1) + log_{23} x = log_{23}(x+2)$:

1) ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x>0, \\ x+2>0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x>-\frac{1}{2}, \\ x>0, \\ x>-2. \end{cases}$$

2) метод потенцирования;

3) $log_{23}((2\,x+1)x) = log_{23}(x+2)$;

$$2x^2+x=x+2;$$

$$2x^2=2;$$

$$x^2=1;$$

$$x=\pm 1;$$

4) $x_1 = 1\, -$ входит в ОДЗ ; $x_2 = -1\, -$ не входит в ОДЗ .

Ответ: 1.

Алгоритм решения логарифмического неравенства:

1) найти ОДЗ;

2) привезти неравенство к одному основанию логарифмов в виде

$$\log_a f(x) >/< log_a\, g(x);$$

3) сравнить с основание степени с единицей и перейти к равнозначному по правилу: если a >1, то знак неравенства не меняется, а если 0<a<1 , то знак неравенства меняется на противоположны, и получаем неравенства вида

$$f(x) > g(x) \text{ или } f(x) < g(x);$$

4) решаем неравенство относительно показателя;

5) проверяем получившиеся интервалы по ОДЗ и записываем ответ.

Например, $log_2(2x+1) > 4$;

1) ОДЗ: $2x+1>0,\qquad x>-\frac{1}{2}$;

2) $log_2(2x+1) > log_2 16$;

3) $a > 1 \Rightarrow 2x+1>16$;

4) $2x>15$;

$x > 7{,}5;$

5) $x > 7{,}5$ - входит в ОДЗ.

Ответ: $(7{,}5; +\infty)$.

Для повышения качества усвоения материала и его закрепления, были предложены следующие примеры, требующие применения данных алгоритмов:

- $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{14-x}$;
- $\sqrt{x-12} = 15$;
- $\sqrt{x+1} > -3$;
- $\sqrt{x^2-12} = 2$;
- $\sqrt{x-2} = x-2$;
- $\sqrt{x^3-x-12} < x$;
- $7^{x+2} + 7^x = 343$;
- $25 \cdot 5^{x-1} + 5^x < 0$;
- $64^{5x+1} = (\frac{1}{8})^{6-4x}$;
- $(\frac{1}{9})^{2+3x} < 81^{x-1}$;
- $128 \cdot 16^{2x+1} = 8^{3-2x}$;
- $16^x - 8 \cdot 2^x \geq 0$;
- $log_{49}(x^2 - 15x) = 2$;
- $log_{21} x + log_{21} 1(x-1) \leq 1$;
- $2\, lg(-x) = 1 + lg(x+4)$;
- $\log_{0,51}(2x-4) \geq \log_{0,51}(x+1)$;
- $(log_{15} x)^2 + log_{15} x - 2 = 0$;
- $log_{\frac{1}{17}}(x+1) \geq log_{\frac{1}{17}}(3-x)$.

Первоочередной задачей урока является углубление и расширения знаний по курсу математики 11 класса, подготовка обучающихся к ЕГЭ базового и профильного уровня. Рассмотрит тематическое планирование (Таблица 4).

Таблица 4 – Тематическое планирование

№ урока	Тема урока	Количество часов
1	Показательная функция, её свойства и график	3
2	Показательные уравнения	2
3	Показательные неравенства	2
4	Контрольная работа по теме «Показательные уравнения и неравенства».	1

Для эффективного применения разработанных алгоритмам обучающим был проведён урок на применение алгоритмов при решении уравнений и неравенств для определённых видов.

Данные констатирующего эксперимента дали возможность установить цель основного эксперимента: формирование закономерных способов мышления, повышение уровня развития логических приёмов мышления у старшеклассников. Существенно увеличивается процент обучающихся, имеющих результативный теоретический уровень.

В ходе прохождения практики был проведён урок на составление алгоритма решения показательного неравенства, в котором старшеклассники сами его разработали (Приложение 1).

Третий этап – завершающий. На этом этапе была проведена проверка эффективности разработанной методики у обучающихся, повышения уровня развития закономерных способов мышления при решении уравнений и неравенств. В этот же день на втором уроке была проведена К.р. на выявление эффективности сформированного алгоритма и итога эксперимента.

Задания для проверки были выбраны из наиболее популярных интернет-источников таких как: Решу ЕГЭ Д.Гущина, РЭШ, ЯКласс.

Образец контрольного среза полученных знаний (Таблица 5).

Таблица 5 – Контрольная работа

Задания для базового уровня	Задания для профильного уровня
1) решить неравенство $3^{-x+3} > 3$	1) решить неравенство $6^x + (\frac{1}{6})^x > 2$
2) $3^x + 10 \cdot 3^{-x} \leq 11$	2) $2^x \leq 4 \cdot 2^x$
3) $0{,}5^x \geq 2$	3) $4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leq 0$
4) $2^{x^2} \leq 64 \cdot 2^x$	4) $\frac{9^x - 3^x - 90}{3^x - 82} \leq 1$
5)* $\frac{2}{5^x - 1} + \frac{5^x - 2}{5^x - 3} \geq 2$	5)* $2^{2x+4} - 16 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+1} + 16 \leq 0$

Также была выполнена статистическая обработка данных. Основные результаты обучающихся (Таблица 6).

Таблица 6 – Статистическая обработка данных

Уровни сформированности логического приёма мышления	Контрольная группа			
	Начало эксперимента		Конец эксперимента	
	Кол-во уч.	%	Кол-во уч.	%
1-й Репродуктивный	5	20,83	3	12,5
2-й Продуктивный эмпирический	11	45,83	9	37,5
3-й Продуктивный теоретический	8	33,34	12	50

Данные эксперимента показали, что количество учащихся на каждом уровне изменилось, что свидетельствует о динамики развития обучающихся. Так, на репродуктивном и продуктивно-эмпирическом уровне количество обучающихся уменьшилось на 2, а на продуктивно-теоретическом увеличилось на 4 человек. Даже в процентном соотношении видно, что 50 % старшеклассников находится на продуктивно-теоретическом уровне, что на 16,66 % больше, чем до начала эксперимента.

Для более наглядной картины посмотрим динамику развития логического мышления на диаграмме представленной на (рисунок 3).

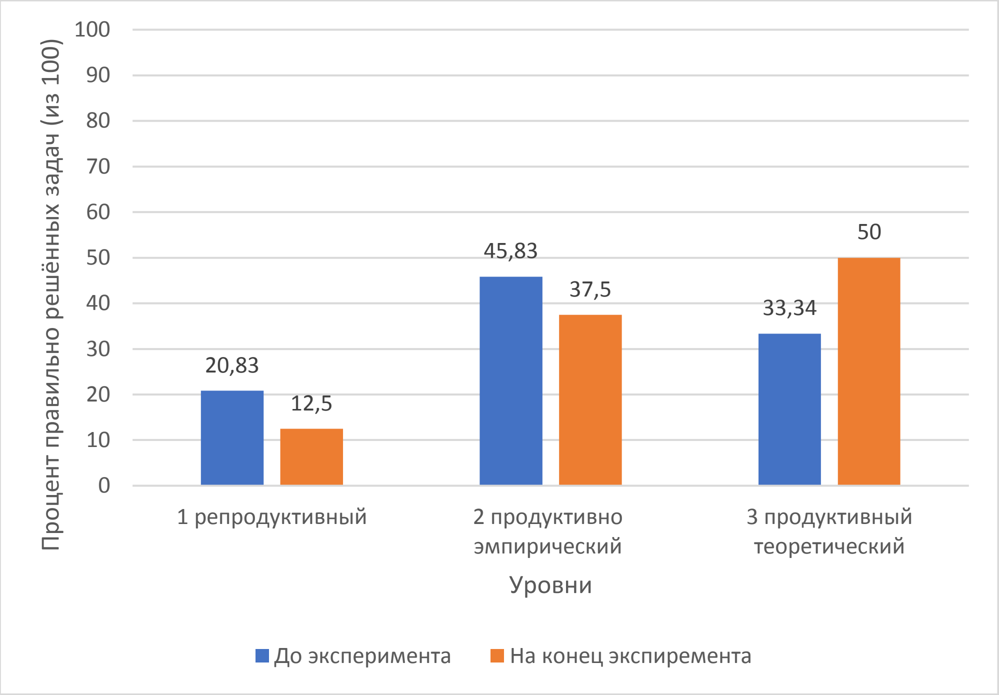

Рисунок 3 – Динамика сформированности логического мышления

На рисунке 3 показано процентное соотношение правильно решённых задач на обнаружении уровня сформированности логических приёмов мышления в начале и конце эксперимента. Данное соотношение демонстрирует позитивную динамику развития закономерных способов мышления при использовании алгоритмов для решения уравнений и неравенств.

2.4 Методические рекомендации

Предлагаемые алгоритмы позволяют сформировать у обучающихся логические приёмы мышления при решении уравнений и неравенств определённого вида: иррациональные, показательные и логарифмические. Также данные алгоритмы позволяют у учащихся развить нестандартные способы мышления, которые позволят совмещать 2 алгоритма на одном трудном примере.

Целью создания алгоритмов является:

– помочь обучающимся в решении уравнений и неравенств, вызывающие наибольшую трудность в решении;

– развить логическое мышление.

Данные алгоритмы могут быть внедрены на уроках алгебры в 10–11 классах при изучении таких тем, как «Иррациональные уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства», «Показательные уравнения и неравенства». Так же можно использовать данные алгоритмы при внеурочной деятельности, на курсах подготовки к ЕГЭ, на занятиях математического кружка и иных форм работы со старшеклассниками.

В алгоритмах представлено 6 схем решения как уравнений, так и неравенств. Для того чтобы пользоваться данными алгоритмами, обучающиеся должны иметь начальные сведения об иррациональных, показательных и степенных уравнений и неравенств, так как алгоритмы содержат обобщающий характер и требуют знания уже полученных тем.

Ко всем алгоритмам подобран пример, который расписан по порядку действия обучающегося согласно предложенной схеме. Также обучающийся сам в праве изменять или дополнять данные алгоритмы, а также создавать свои для остальных видов уравнен

Из исследованной практики преподавания, статистических сведений, приобретённых в ходе исследования, позволил сделать заключение об эффективности нами разработанной технологии (алгоритмы) и подтвердить гипотезу исследования.

Таким образом, анализ учебно-методической литературы показал, что на практике в школе нет чёткого алгоритма решения уравнения или неравенства, и из тематического планирования было выявлено, что для развития логического мышления времени на уроках не отводится. Отсюда была выявлена необходимость в разработке алгоритмов для решения уравнений или неравенств, которые способствуют логическому развитию мышления у старшеклассников.

Была разработана методика на основе модели развития логических способов мышления в соответствии с психологическими особенностями формирования, заключающимся в прохождении нескольких этапов, на которых определены компоненты (мотивационный, операционно-исполнительский и контрольно-оценочный). Из анализа учебно-методической литературы следует, что в качестве понятий подобранных приёмов и в алгоритмических приёмах учебной работы при решении уравнений и неравенств были выбраны следующие: анализ, синтез, конкретизирование и абстрагирование.

Далее был проведён эксперимент, где была выявлена эффективность в использовании алгоритмов при решении уравнений и неравенств в качестве формирования логического мышления. Этим мы подтвердили гипотезу исследования и эффективность нашей разработки.

Проанализировав собственную работу по применению алгоритмов при решении уравнений и неравенств, были разработаны следующие методические рекомендации:

1) составление и апробация алгоритмов при решении уравнений и неравенств;

2) проверка материала с помощью самостоятельных и контрольных работ и мини-диктантов на знание алгоритмов и формул;

3) решение тренировочных уравнений и неравенств (с сайта Решу ЕГЭ) с разбор всевозможных типичных ошибок;

4) решение уравнений и неравенств со всевозможных сборников по подготовке к ЕГЭ (с использованием и без алгоритмов);

5) разбиение задний по уровню сложности базовые и профильные;

6) проведение диагностических работ в виде пробных ЕГЭ;

7) обучение заполнение решения 2 части для уравнений и неравенств.

Знания, приобретённые в процессе эксперимента, были математически и статистически доказаны, что даёт возможность выразить мнение о положительной динамики развития у обучающихся логических способов мышления при решении уравнения и неравенств.

Качественное исследование работ экспериментальной группы позволило определить, что усвоение программного материала у старшеклассников протекает в наиболее высоком уровне. Динамика числовых характеристик распределения экспериментальной группы по уровням сформированности закономерных способов мышления и общей успеваемости продемонстрировала позитивные результаты, что даёт основание говорить о присутствии взаимосвязи и влияния рассматриваемых явлениях.

Из исследовательской практики преподавания, статистических сведений, приобретённых в ходе исследования, позволил сделать заключение об эффективности нами разработанных алгоритмов и подтвердить гипотезу исследования.

Таким образом, анализ учебно-методической литературы показал, что на практике в школе нет чёткого алгоритма для решения уравнений и неравенств. Отсюда была выявлена необходимость в совместной разработке со старшеклассниками алгоритмов решения уравнений и неравенств, которые способствуют логическому развитию у старшеклассников.

Была разработана методика на основе модели развития логических способов мышления в соотвествии с психологическими особенностями формирования, заключающихся в прохождении в несколько этапов, на которых определены компоненты (мотивационный, операционно-исполнительский и контрольно-оценочный). Из анализа учебной литературы следует, что в качестве понятий подобранных приёмов и в алгоритмических приёмах учебной работы при решении уравнений и неравенств были выбранны следующие: анализ, синтез, абстрагирование и конкретизирование.

Далее был проведён эксперимент, где была выявлена эффективность в использовании алгоритмов при решении уравнений и неравенств в качестве формирования логического мышления. Этим мы подтвердили гипотезу и исследование эффективности нашей работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе изучения данной темы было теоретически подтверждено и экспериментом доказаны следующие результаты.

Исследование учебно-методической литературы приводит к заключению о том, что метод составления уравнений и неравенств, по сравнению с другими методами решения примеров, имеет большую обобщённость. В качестве главной операции мыслительного процесса мы возьмём обобщение, которое выражается в выделении значительных свойств метода и применяемых определений, т. е. содержательное обобщение. При мышлении в математическом материале, а точнее при решении математических задач содержательное обобщение считается базой математического мышления. Таким образом, задачи на составление уравнений и неравенств можно применять как способ развития логического мышления старшеклассников.

Формирование логического мышления школьников возможно в процессе организованной педагогом и их учебной работы по решению уравнений и неравенств. Подобранные алгоритмы для решения уравнения и неравенств, переходящие в учебные задачи, которые дают возможность осуществить учебную деятельность, в процессе которой старшеклассники выделяют общее правило для решения подобных примеров. Самое главное в этом процессе – это самостоятельный анализ примеров обучающимися, условия задач и их особенности. Выделение и освоение обучающимися единого принципа решения уравнений и неравенств содействует развитию содержательного обобщения, который содействует формированию логического мышления у старшеклассников [26].

В ходе решения уравнений и неравенств у старшеклассников были выявлены теоретические черты, такие как анализ, рефлексия и мысленный план решения, что позволило сделать вывод о формировании у них логического способа мышления. Анализ выражался в применение данного метода на весь класс таких же примеров, что позволяет выделить в примере значимые отношения и предоставляет возможность сформулировать правило или метод решения. Чтобы проверить наличие рефлексии при решении примера у школьника, можно посмотреть применяет ли он общий метод решения для данного класса уравнения или неравенства, определяя их внутреннюю взаимосвязь. Чтобы проверить выполняет ли обучающийся мысленное решение примера, можно сказать по сделанному целенаправленному выбору способа решения уравнения или неравенства в уме.

Использованные материалы работы дают возможность прийти к выводу, что поставленная цель достигнута. В осуществлении развивающей функции преподавания возможно эффективное применение задач, решаемых составлением уравнений или неравенств. Разработка алгоритмов решения уравнений и неравенств на основе психологического анализа оказывает эффективное влияние на успешность развития логического мышления старшеклассников, что подтверждено было с помощью эксперимента [8].

Алгоритмы для решения уравнений и неравенств в качестве средства развития логического мышления по разработанной нами методики, можно расширить. Однако, для использования в учебной деятельности следует искать и другие средства развития логического мышления.

При рассмотрении теоретических основ формирования мы выявили, что модель формирования логического мышления состоит из 4 этапов: подготовительный, обучающийся, закрепляющий и практический. Также выделили 3 уровня и 3 критерия сформированности логического способа мышления по основным характеристикам и взаимосвязью с методом учебной деятельности: репродуктивный, продуктивный эмпирический и продуктивный теоретический.

При работе со старшеклассниками нужно учесть их возрастные особенности – это утверждение собственного внутреннего мира. В этот период у них возникает желание к самореализации, что приводит к возникновению новых общественных потребностей, таких как найти своё место, индивидуальность и нести конкретную роль в обществе.

Для эффективного преподавания математики у старшеклассника должно быть сформировано 3 элемента мышления: высокий уровень элементарных мыслительных процессов, высокий уровень активности и раскованности мышления.

Для развития логического мышления у старшеклассников были разработаны алгоритмы решения уравнений и неравенств: анализ, синтез, обобщение, абстрагирование и конкретизирование. Эффективность данных алгоритмов можно сказать по проведённому эксперименту, где чётко прослеживается позитивная динамика развития закономерных способов логического мышления.

Таким образом, процесс расширения сфер областей математики оказывает влияние на определение основных проблем методики преподавания математики. Способы математики являются орудием решения значительного количества обширной области задач. Появление математических методов какой-либо сфере деятельности людей порождает серьёзные изменения в структуре этой сферы. Из-за этого способность владеть математическими понятиями делается важным большому кругу специалистов. В этот период с целью развития условий для эффективной индивидуальной работы человека требуется его развитие, формирование интеллекта и мышления. Следовательно теоретическое мышление взаимосвязанное с понятиями и способами необходимо человеку с целью функционирования и активного приспособления в настоящем времени. Его развитие содействует осуществлению принципу гуманизации образования, принципа приоритета формирующей функции преподавания математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Адамар, Ж.** Исследование психологии процесса изобретения в области математики // Перевод с французского. / Ж. Адамар. – Москва : Современное радио – 2020. – 152 с.

2. **Алимов, Ш. А.** Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11кл. общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов. – Москва: Просвещение. – 2017. – 123 с.

3. **Вавилов, В. В**. Задачи по математике. Алгебра / В. В.Вавилов. – Москва : Наука. – 2017. – 432 с.

4. **Выгодский, Л.С.** Орудие и знак в развитии ребёнка / В книге: Педагогическая психология / Л.С. Выгодский. – Москва : Педагогика-Прогресс. – 2016. – 393 с.

5. **Гнеденко, Б.В.** Математика и математическое образование в мире / Б.В. Гнеденко. – Москва : Просвещение. – 2015. – 192 с.

6. **Горнштейн, П.И.** Экзамен по математике и его подводные рифы / П.И. Горнштейн. – Москва : Илекса. – 2018. – 236 с.

7. **Горнштейн, П.И.** Задачи с параметрами. / П.И. Горнштейн, В. Полонский, М. Якир. – Киев: РИА «Текст» МП «Око». – 2018. – 288 с.

8. **Давыдов, В. В.** Виды обобщения в обучении: Логико-психологические проблемы построения учебных предметов / В. В. Давыдов. – Москва : Педагогика. – 2020. – 424 с.

9. **Кабанова-Миллер, Е. Н.** Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Миллер. – Москва : Знание (Новое в жизни, науке. Серия «Педагогика и психология», 1981, №6.). – 2018. – 96 с.

10. **Колмагоров, А.Н.**, Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 класса общеобразовательных учреждений / А. Колмагорова, А. М. Абрамов, Ю.П. Дудицын Н., – 7-е изд., доп. – Москва : Просвщение. – 2016. – 110 с.

11. **Колягин, Ю. М.** Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник. Для учащихся общеобразовательных учреждений

(профильный уровень) / Ю. М. Колягин. – 8-е изд. стер. – Москва : Мнемозина. – 2017. – 178 с.

12. **Кудрявцев, Л. Д.** Современная математика и её преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – 2 изд. – Москва : Наука. – 2015. –176 с.

13. **Леонтьев, А.Н.** Деятельность. Сознание. Личность / А.Н. Леонтьев. – Москва : Политиздательство. – 1975. – 304 с.

14. **Магина, А.** Решение уравнений с применением оригинальных приёмов / А. Магина. – Москва : Мнемозина. – 2019. – 37 с.

15. **Махмутов, М.И.** Проблемное обучение: Основные вопросы теории / М.И. Махмутов. – Москва : Педагогика. – 2015. – 367 с.

16. **Мерзляк, А.Г.** Алгебра и начала математического анализа: 10 класс: учебник для общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В. М. Поляков. – Москва. – 2017. – 397 с.

17. **Ляпин, С.Е.** Методика преподавания математики. Пособие для учителей математики 8-10 классов средней школы / С.Е. Ляпина. – Ленинград: Учпедгиз. – 1956. – 654 с.

18. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала анализа 10-11 классы. Для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – 8-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2007. – 330 с.

19. **Мордкович, А. Г.** Алгебра и начала математического анализа. Учебник для учащихся образовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов. – 7-е изд., стер. – Москва : Мнемозина. – 2019. – 390 с.

20. **Муравин, Г.К.** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В.Муравина. – 5-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа. – 2018. – 285 с.

21. **Муравин, Г.К**. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа.

Углубленный уровень. 11 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 3-е изд., стереотип. – Москва: Дрофа. – 2017. – 167 с.

22. Решу ЕГЭ: www.ege.sdamgia.ru . – Москва 2021. - URL: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=275. – Текст: электронный.

23. Российская электронная школа: www.resh.edu.ru . – Москва 2021. – URL: https://resh.edu.ru/subject/51/ . – Текст: электронный.

24. Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей /Составители Н.С.Антонов, В.А.Гусв. – Москва : Просвящение. – 2015. – 304 с.

25. **Пискунова, А.И**. Теория и практика педагогического эксперимента / А.И. Пискунова. – Москва : Педагогика. – 2019. – 208 с.

26. **Теплов, Б. М.** Проблемны индивидуальных различий / Б. М. Теплов. – Москва : Дрофа. – 2019. – 536 с.

27. **Фридман, Л.М.** Дидактические основы применения задач в обучении / Л.М. Фридман. – Москва.: Просвещение. – 2019. –54 с.

28. **Шабунин, М.И** Математика для поступающих. Уравнения и системы уравнений / М.И. Шабунин. – Москва : Аквариум. –2017. –189 с.

29. **Шабунин М.И**. Математика для поступающих в вузы. Неравенства и системы неравенств / М.И. Шабунин. – Москва : Аквариум. – 2017. – 256 с.

30. **Ястребицкий, Г.А.** Задачи с параметрами / Г.А. Ястребицкий. – Москва.: Просвещение. – 2018. – 128 с.

ПРИЛРОЖЕНИЕ 1

Технологическая карта урока

Урок алгебры по теме «Показательные неравенства» 11класс

Задача урока: закрепление изученного материала

Цели урока:

– обучающая: повторение понятия «показательные неравенства» и методов их решения;

– развивающая: умение проводить анализ и синтез, устанавливать причинно-следственные связи между изучаемыми объектами и внутри изучаемого объекта; умение проводить поиск решения задачи, выбирать оптимальное решение; умение работать с учебным текстом, навыки самоконтроля, взаимоконтроля;

– воспитательная: воспитание умения организовывать и планировать свою деятельность, воспитание навыков самоконтроля и взаимоконтроля.

Планируемые результаты

– *предметные:* умение решать показательные неравенства, сформировать представление учащихся об алгоритмах и его применении при решении показательных уравнений и неравенств;

– *личностные:* формирование познавательного интереса, формировать ответственное отношение к обучению, готовность к саморазвитию, самообразованию;

– *метапредметные*:

1. *Регулятивные:* умение самостоятельно определять цели обучения, ставить и формулировать новые задачи в учебе и познавательной деятельности; умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, корректировать свои действий в соответствие с изменяющейся ситуацией.

2. *Коммуникативные:* владение устной и письменной речью.

3. *Познавательные:* устанавливать причинно-следственные связи, строить умозаключение (индуктивное) и делать выводы.

Методы обучения: объяснительно-иллюстративный.

Формы работы: комбинированная.

УМК: Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / [Мордкович А. Г.и др.] – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 384 с.

Тип урока: урок повторения пройденного материала

План урока:

1. Организационный момент (1 мин).
2. Самостоятельная работа (10 мин).
3. Формирование алгоритма (10 мин).
4. Закрепление алгоритма (20 мин).

5. Сообщение домашнего задания (1 мин).

6. Рефлексия (3 мин) (Таблица 1.1).

Таблица 1.1 - Урок.

Этап урока	Деятельность учителя	Содержание урока	Деятельность учеников	Формируемые УУД
1	*2*	*3*	*4*	*5*
1.Организация начала урока	Приветствует учащихся, проверяет готовность кабинета к проведению урока, проверка отсутствующих	– Добрый день, ребята!	Приветствие, включение в деловой режим урока.	*Регулятивные:* *Коммуникативные:* умение слушать и вступать в диалог. *Познавательные:*
2. Актуализация знаний	Проведение самостоятельной работы по прошедшему материалу	а) $3^{x} < 9$; б) $0{,}5^{x} \geq 2$; в) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$.	Решают самостоятельную работу	*Регулятивные:* целеполагание, планирование, прогнозирование. *Коммуникативные:* владение устной и письменной речью *Познавательные:* самостоятельное исследование, поиск, формулирование познавательной цели; рефлексия способов и условий действия.

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
3. Работа по теме урока	– Давайте выведем общий алгоритм решения показательного неравенства, ответив предварительно на несколько вопросов – Какие вы знаете способы решения показательного неравенства? – Какое общее правило решения показательного неравенства связанного с основанием степени ? – А теперь сформулируйте общий алгоритм решения показательного неравенства и выясним их общие методы и пункты решения.	Выводится общий алгоритм решения показательного неравенства.	Отвечают на вопрос учителя и формируют алгоритм. 1. Выбрать способ решения данного неравенства: - приведение степеней к одному основанию - вынесение общего множителя за скобки - метод почленного деления - функционально-графический метод	*Регулятивные:* умение формулировать и аргументировать свое мнение *Коммуникативные:* владение устной и письменной речью *Личностные:* смыслообразование.

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
			- метод приведения к квадратному неравенству 2 .Сравниваем основание степени с единицей и переходим к равносильному неравенству по правилу: если а > 1, то знак неравенства не меняется, а если 0<a<1 , то знак неравенства меняется на противоположный. 3. Решаем неравенство относительно показателя и записываем ответ.	
4. Закрепление материала	– Решим несколько неравенств различного уровня сложности и решим строго по алгоритму	Решается неравенство строго по алгоритму. $$\left(\frac{1}{2}\right)^{2+3x} < 8^{x-1}.$$ 1. Какой выберем способ решения из предложенных? (первый)	Решают неравенство по алгоритму	*Регулятивные:* умение формулировать и аргументировать свое мнение *Коммуникативные:* владение устной и письменной речью

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5
		$(\frac{1}{2})^{2+3x} < (\frac{1}{2})^{-3(x-1)}$; 2. *a <1* ⇒ $2 + 3x < -3x + 1$; 3. 3x+3x < 1 – 2; 6x < -1; $x < -\frac{1}{6}$. №1405 а) $2^x + 2^{x+2} \leq 20$; $2^x(1 + 4) \leq 2 \ \rightarrow \ 2^x$; $2^x \leq 2^2 \ \rightarrow$ a > 1 → $x \leq 2$. в) $(\frac{1}{5})^{3x+4} + (\frac{1}{5})^{3x+5} > 6$; $(\frac{1}{5})^{3x+4} \cdot (1 + \frac{1}{5}) > 6$; $(\frac{1}{5})^{3x+4} \cdot \frac{6}{5} > 6 \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} > 5$; $(\frac{1}{5})^{3x+4} > (\frac{1}{5})^{-1}$; a < 1 → $3x + 4 < -1$;		*Познавательные:* устанавливать причинно-следственные связи

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
		$x < -1\frac{2}{3}$. №1410 а) $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 1$; $19^{\frac{2x-3}{x+2}} \geq 19^0$; а > 1 → $\frac{2x-3}{x+2} \geq 0$; $\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > 1{,}5. \end{array}\right.$ №1411 а) $5^{\frac{x}{x+3}} \leq 5$; а > 1 → $\frac{x}{x+3} \leq 1$; $\frac{x}{x+3} - 1 \leq 0$; $\frac{-3}{x+3} \leq 0$; $x \geq -3$; г) $(0{,}21)^{\frac{3x+4}{x-8}} < 0{,}21$; а < 1 → $\frac{3x+4}{x-8} > 1$; $\frac{3x+4-x+8}{x-8} > 0$ $\frac{2(x+6)}{x-8} > 0$; $x \leq -6$; $x \geq 8$.		
5. Д/З	– д/з: №1411 (б,в) , 1410(б,в).	Задание на дом.	Записывают д/з и задают вопросы по нему	*Познавательные:* поиск и выделение информации

Продолжение таблицы 1.1

1	*2*	*3*	*4*	*5*
				Регулятивные: оценка – осознание уровня и качества усвоения материала; контроль. *Личностные:* нравственно-этическое оценивание, смыслообразование. *Коммуникативные:* умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.
6. Рефлексия	– Ребята, помог ли вам алгоритм при решении неравенств? – Будите ли вы его использовать в дальнейшем? – С какими трудностями вы столкнулись при использовании алгоритма? – Есть ли у вас ещё вопросы ?	Ведение устной беседы и завершение урока.	Отвечают учителю на вопросы по ходу урока.	*Регулятивные:* умение формулировать и аргументировать свое мнение *Коммуникативные:* владение устной речью *Познавательные:* устанавливать причинно-следственные связи

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сравнение учебников

Рассмотрим ученики базового и профильного уровня в сравнении с их содержанием (Таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Сравнение учебников.

Базовый уровень				
Учебники	Наличие четких алгоритмов	Комментарии к ходу решения	Наличие задач на развитие логического мышления	Наличие однотипных задач
Мордкович А.Г.	+	+	+	-
Колмагоров А.Н.	-	+	-	+
Алимов Ш.А. и др.	-	-	+	+
Мерзляк А.Г.	-	+	-	+
Профильный уровень				
Колягин М.Ю. и др.	-	-	+	+
Мордкович А.Г.	+	+	+	-
Мерзляк А.Г.	-	+	-	+