МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

Групповой анализ трехмерной модели динамики популяции амеб

**Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.04.01 Педагогическое образование**
код, направление
**Направленность программы магистратуры
«Математическое образование в системе профильной подготовки»**

Проверка на объем заимствований:
___________% авторского текста

Работа _______________ к защите
рекомендована/не рекомендована

« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике
_____________ Е.А. Суховиенко

Выполнил (а):
студент группы ЗФ-313/131-2-1
Емелин Артем Иванович

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат наук, доцент
_________ Клебанов Игорь Иосифович

**Челябинск
2017**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели фундаментальных законов природы и технических задач формулируются нередко, даже преимущественно, в терминах нелинейных дифференциальных уравнений. Многие из них основаны на втором законе Ньютона, и, следовательно, они описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Таким образом, многие математические модели задач реального мира представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Единственным общим методом, позволяющим решать эти уравнения аналитически, является метод Ли группового анализа, который особенно прост и эффективен в случае уравнений второго порядка.

Идея симметрии пронизывает все математические модели, формулируемые в терминах дифференциальных уравнений. Математический аппарат для нахождения и использования симметрии дифференциальных уравнений, который предоставляет теория непрерывных групп, введен и разработан выдающимся математиком девятнадцатого века Софусом Ли. Ли групповой анализ предлагает общие методы интегрирования линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений аналитически с использованием симметрий. Методы групп Ли также эффективны при нахождении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Фактически, групповой анализ является единственным универсальным и эффективным методом аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе в качестве объекта исследования выбрана математическая модель динамики скопления амеб в трехмерном пространстве.

Целью работы является проведение группового анализа модели динамики скопления амеб.

Для достижения поставленной цели необходимо решить задачи:

1) найти точечные группы преобразований, допускаемые системой дифференциальных уравнений, моделирующей динамику скопления амеб;

2) найти частные инвариантные решения, представляющие интерес для биологии.

Квалификационная работа состоит из двух глав: глава 1 содержит общие сведения о групповом анализе и его возможностях применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям в частных производных; глава 2 посвящена теоретическому обоснованию и непосредственному проведению группового анализа для модели динамики скопления амеб.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ КЛАССИЧЕСКОГО ГРУППОВОГО АНАЛИЗА

§1.1 Общие сведения о группах Ли

Более удобным вариантом будет ввести понятие группы Ли на примере преобразования плоскости $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$, которое задается следующими формулами:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a), \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Сейчас и в дальнейшем будем считать, что все функции обладают достаточной степенью гладкости.

Потребуем, чтобы наше преобразование обладало следующими свойствами:

1) $J = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$ (условие существования обратного преобразования).

2) выберем параметр aтак, что $\begin{cases} \bar{x}(x, y, a = a_0) = x, \\ \bar{y}(x, y, a = a_0) = y, \end{cases} \to T_0.$

3) $\exists T_a^{-1}$.

4) определим композицию преобразований: $(x, y) \overset{T_a}{\to} (\bar{x}, \bar{y}) \overset{T_b}{\to} (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, a) = \varphi(x, y, c), \\ \bar{\bar{y}} = \psi(\bar{x}, \bar{y}, a) = \psi(x, y, c), \end{cases} \quad \text{где } c = f(a, b) - \text{достаточно гладкаяфункция.}$$

Определение. Если данные 4 свойства выполняются, то эти преобразования образуют группу Ли, а параметр a будет называться групповым параметром.

Теорема. Групповой параметр можно выбрать всегда таким образом, чтобы $f(a, b) = a + b$ и $a_0 = 0$. Такой параметр будем называется каноническим.

Пример 1. Группа трансляций $\bar{x} = x + a$:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} + a = x + (a + b).$$

Пример 2. Группа неоднородных растяжений (α – не канонический):

$$\begin{cases} \bar{x} = \alpha x, \\ \bar{y} = \alpha^m y \end{cases}.$$

Произведя замену $\alpha = e^a$, замечаем, что этот параметр уже будет являться каноническим, что напрямую следует из свойств экспоненты:

$$\begin{cases} \bar{x} = e^a x, \\ \bar{y} = e^{ma} y; \end{cases} \quad T_b \cdot T_a = T_{a+b}.$$

Другими примерами групп могут служить трансляции, растяжения, повороты, группа Галилея, группа Лоренца и др. [1,3,4]

Определение. При непрерывном изменении параметра каждая точка плоскости под действием преобразования будет двигаться по какой-то кривой. Эта кривая называется орбитой точки.

Если $\vec{\tau}$ – касательный вектор к орбите в начальной точке, тогда из базовых знаний курса математического анализа нам известно, что этот вектор раскладывается по базису:

$$\tau_x = \xi(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial a} /_{a=0},$$

$$\tau_y = \eta(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial a} /_{a=0}.$$

Иначе говоря, в окрестности значения $a = 0$, используя формулу Тейлора, получаем наше преобразование плоскости в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + a\xi(x,y) + o(a), \\ \bar{y} = y + a\eta(x,y) + o(a). \end{cases}$$

Определение. Пара функций (ξ, η) называется компонентами касательного векторного поля.

Определение. Генератор группы (инфинитезимальный оператор) – это оператор вида $\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$.

Другими словами, если имеем дифференцируемую функция $F(x,y)$ двух переменных, то генератор действует на Fследующим образом:

$$\hat{X}F = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Важность генератора для развития нашей теории мы покажем ниже.

Софус Ли доказал теорему, суть которой в следующем:

Теорема (Фундаментальная теорема Ли): Зная генератор, можно восстановить полную группу преобразований, то есть по бесконечно малому преобразованию можно восстановить конечное преобразование. Для этого нужно решить систему уравнений Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \xi(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x}(a=0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = \eta(\bar{x}, \bar{y}); \quad \bar{y}(a=0) = y. \end{cases}$$

При необходимости более строгую формулировку теоремы и ее доказательство можно найти в любом из указанных источников литературы.

Есть и обратное утверждение: для любого гладкого векторного поля всегда можно найти группу преобразований Ли.

Решим прямую и обратную задачу.

Пример 3. Рассмотрим группу однородных растяжений плоскости:

$$\begin{cases} \overline{x} = e^{a} \cdot x, \\ \overline{y} = e^{a} \cdot y. \end{cases}$$

Решим прямую задачу, то есть найдем генератор группы.

$$\xi = \frac{\partial \overline{x}}{\partial a} /_{a=0} = e^{a} \cdot x /_{a=0} = x.$$

$$\eta = \frac{\partial \overline{y}}{\partial a} /_{a=0} = e^{a} \cdot y /_{a=0} = y.$$

Касательное векторное поле имеет вид: (x, y).

Тогда $\hat{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ –генератор группы однородных растяжений.

Пример 4. Решим задачу, обратную данной, то есть, имея генератор, найдем группу преобразований:

$$\hat{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Решаем уравнения Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{da} = \bar{y}, & \bar{x}(a=0) = x, \\ \dfrac{d\bar{y}}{da} = -\bar{x}; & \bar{y}(a=0) = y. \end{cases}$$

Возьмем первое уравнение и еще раз продифференцируем по параметру a:

$\frac{d^2\bar{x}}{da^2} = \frac{d\bar{y}}{da} = -\bar{x} -$ уравнение гармонических колебаний.

$$\bar{x} = \text{С}_1 cosa + \text{С}_2 sina$$

Из первого уравнения дифференцированием по a найдем y.

Получим:

$$\bar{y} = \frac{d\bar{x}}{da} = -\text{С}_1 sina + \text{С}_2 cosa$$

Используя начальные условия найдем константы:

$$\bar{x}(a=0) = \text{С}_1 = x,$$

$$\bar{y}(a=0) = \text{С}_2 = y$$

Действительно получаем группу поворотов:

$$\begin{cases} \bar{x} = xcosa + ysina, \\ \bar{y} = -xsina + ycosa. \end{cases}$$

Замечание. II способ решения системы уравнений Ли – это экспоненциальное отображение, или экспоненцирование векторного поля.

Определение. Инвариантом группы называется функция $F(x, y)$, вид которой не меняется при групповых преобразованиях: $F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$.

Определение. Группа симметрии (точечная) – это группа преобразований, которая оставляет уравнение неизменным.

Теорема (критерий инвариантности Ли): Необходимое и достаточное условие инвариантности заключается в том, что действие генератора на функцию должно давать 0: $\hat{X}F = 0$, то есть $\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Последнее уравнение эквивалентно рассмотрению уравнения характеристики $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$ – ОДУ (обыкновенное дифференциальное уравнение).[2]

Его решение всегда можно представить в виде $\Phi(x,y)=C$. Функция $\Phi(x,y)$ этого равенства называется базисным инвариантом. Следовательно, любая достаточно гладкая функция $F(\Phi)$, зависящая от базисного инварианта, тоже будет инвариантом.

Пример 5. Рассмотрим однопараметрическую группу Ли G_1, порождаемую оператором $X=\partial_x+3y\partial_y$. Найдем конечные преобразования и общий вид инварианта этой группы. Составляем систему уравнений Ли:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial a}=1, & \bar{x}|_{a=0}=x \\ \dfrac{\partial\bar{y}}{\partial a}=3\bar{y}, & \bar{y}|_{a=0}=y \end{cases}$$

Интегрированием находим преобразования группы G_1в виде $\bar{x}=x+$ $+a,\bar{y}=e^{3a}y$. Для отыскания инвариантов группы G_1необходимо решить уравнение, которое в данном случае имеет вид $F_x+3yF_y=0$ (нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему аргументу). Составление характеристического уравнения дает:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{3y}=>I^1=ye^{-3x}.$$

Таким образом, наиболее общий вид инварианта рассматриваемой группы G_1 есть $F=\Phi(ye^{-3x})$ с произвольной гладкой функцией Ф.

Замечание. Оказывается, для любой однопараметрической группы преобразований плоскости можно ввести канонические перемененные, а именно:

$$(x,y)\to(t,u), \qquad \text{где} \begin{cases} t=t(x,y), \\ u=u(x,y); \end{cases} \ \text{при этом} \ \hat{X}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}\to\frac{\partial}{\partial t}.$$

Другими словами любую однопараметрическую группу подходящей заменой переменных можно привести к группе трансляций вдоль t. Для доказательства достаточно только вспомнить, как дифференцируется сложная функция.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Тогда:

$$\hat{X} = \xi \left(\frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \right) + \eta \left(\frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \right) =$$

$$= \left(\xi \frac{\partial t}{\partial x} + \eta \frac{\partial t}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Потребуем выполнимость следующего условия:

$$\begin{cases} \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \xi \frac{\partial t}{\partial x} + \eta \frac{\partial t}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

Обратив внимание на первое уравнение понимаем, что u является инвариант группы, а следовательно, в качестве u можно взять любой инвариант группы, но логичнее всего взять базисный инвариант.

В качестве tнам подойдет любое частное решение второго уравнения.

Пример 6. Группа поворотов с генератором $\hat{X} = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$.

В качествеu возьмем базисный инвариант

$$u = x^2 + y^2 = r^2.$$

Решаем второе уравнение для t:

$$y \frac{\partial t}{\partial x} - x \frac{\partial t}{\partial y} = 1.$$

Нас будет интересовать такая функцияt, которая зависит только от x:

$$y \frac{dt}{dx} = 1, \qquad \sqrt{r^2 - x^2} \frac{dt}{dx} = 1, \qquad t = \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = arcsin\left(\frac{x}{r}\right).$$

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ t = arcsin\left(\frac{x}{r}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{u} = u, \\ \bar{t} = t + a. \end{cases}$$

Фактически данное замечание означает, что имея некоторое сложное дифференциальное уравнение, мы можем упростить его вид, перейдя к каноническим переменным.

Так, например, если есть ОДУ первого порядка, то введение канонических переменных преобразует его к уравнению с разделяющимися переменными.

Если же дано уравнение второго порядка и нам известна какая-то его однопараметрическая группа, то с помощью канонических переменных можно понизить его порядок.

В случаи уравнений в частных производных, осуществляя переход к каноническим переменным, возможно либо уменьшение числа переменных, либо даже сведение их к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Произведем обобщение введенных понятия для n-мерного пространства.

Рассмотрим точку n-мерного пространства $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда преобразование, которое мы рассмотрим, будет выглядеть так:

$$\overline{x_i} = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, a), i = \overline{1, n}.$$

Генератор группы имеет вид:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \xi_i(x) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a} /_{a=0}.$$

Уравнения Ли запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial \overline{x_i}}{\partial a} = \xi_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}), \ \ \overline{x_i}(a = 0) = x_i.$$

Инвариант группы: $F(\bar{x}) = F(x)$.

Условие инвариантности не меняется: $\hat{X}F = 0$, то есть

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Уравнения характеристик будут выглядеть так:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots = \frac{dx_n}{\xi_n}.$$

Таких уравнений будет ровно $(n-1)$. Значит, будет набор из $(n-1)$ базисных инвариантов $J_1, J_2, \ldots J_{n-1}$. Следовательно, инвариантом группы преобразований n-мерного пространства будет любая функция базисных инвариантов $F(J_1, J_2, \ldots J_{n-1})$.

Введем понятие инвариантного многообразия в n-мерном пространстве.

Пусть имеется n-мерное пространство, в котором задана система уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \qquad \ldots \\ F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \text{где} s < n.$$

Данная система содержит $n - s$ независимых переменных.

Введем следующие требования:

$$\forall x Rg \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x} \right\| = s, \text{где} i = \overline{1, n}, k = \overline{1, s}.$$

Определение. Если это так, то говорят, что в n-мерном пространстве задана $(n-s)$-мерная гиперповерхность, или многообразие размерности $(n-s)$.

Для краткости исходную систему уравнений обозначим буквой M.

Пример 7. Рассмотрим случай, когда $n = 3, s = 1$.

Тогда будем иметь одно уравнение $M: F(x, y, z) = 0$ – это уравнение двумерной поверхности в 3-х мерном пространстве.

Введем понятие инвариантной поверхности (инвариантного многообразия).

Пусть n-мерное пространство допускает однопараметрическую группу с генератором $\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Определение. Гиперповерхность называется инвариантной относительно групповых преобразований, если любая ее точка под действием преобразований группы движется по этой же поверхности (орбита каждой точки принадлежит самой поверхности).

Теорема (критерий инвариантности многообразия): Необходимое и достаточное условие инвариантности заключается в том, что действие генератора группы на каждое уравнение системы в точках, принадлежащих поверхности, должно давать 0: $\hat{X}(F_k)/_M = 0, k = \overline{1,s}$.

Пример 8. $M: F = z - x^2 - y^2 = 0$ – параболоид вращения, осью которого является ось Oz. Он допускает следующую группу симметрий:

$$\begin{cases} x \to e^a x, \\ y \to e^a y, \\ z \to e^{2a} z; \end{cases} \text{ с генератором } \quad \hat{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Воспользуемся критерием инвариантности:

$$\hat{X}(F)/_M = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2z\frac{\partial}{\partial z}\right)(z - x^2 - y^2)/_M = (-2x^2 - 2y^2 + 2z)/_M =$$

$$= 2(z - x^2 - y^2)/_M \equiv 0.$$

Найдем базисные инварианты:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{2z}, \qquad \frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x}, \qquad ln|z| = 2\,ln|x| + ln|C_1|, \qquad \frac{z}{x^2} = C_1.$$

Аналогичным путем получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}, \qquad \frac{z}{y^2} = C_2.$$

Получили 2 базисных инварианта, которые удобнее обозначить следующим образом: $J_1 = \frac{x^2}{z}, J_2 = \frac{y^2}{z}$. Произведем преобразование исходного уравнения:

$$z - x^2 - y^2 = 0 \ (:z)$$

В соответствии с введенными обозначениями базисных элементов полученное уравнение примет вид: $1 - J_1 - J_2 = 0$ – которое является представлением уравнения поверхности через базисные инварианты группы.

Данное преобразование возможно сделать для любой инвариантной поверхности.

Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-го порядка – это функциональное соотношение, которое связывает между собой независимую переменную, зависимую переменную и производные вплоть до n-го порядка: $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.

Определение. Уравнение в частных производных n-го порядка – это уравнение, которое связывает между собой набор независимых переменных, функцию, которая зависит от этих переменных, и частные производные до некоторого порядка p включительно:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n), u_1, u_2, \dots, u_p\right) = 0$$

где u_i – всевозможные частные производные n-го порядка.

Оговорим, что для системы дифференциальных уравнений далее будем пользоваться следующими обозначениями обозначения:

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – набор m зависимых переменных,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – набор n независимых переменных,

$\overrightarrow{u_{(1)}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \overrightarrow{u_{(2)}} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}, \dots$ – всевозможные частные производные 1-го, 2-го, … порядка ($i = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}$).

Система дифференциальных уравнений запишется таким образом:

$$F_\alpha\left(x, u, \overrightarrow{u_{(1)}}, \overrightarrow{u_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{u_{(p)}}\right) = 0, \alpha = \overline{1, s}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать только те уравнения, в которых число уравнений равно числу неизвестных функций, то есть $s = m$.

Теперь перейдем к рассмотрению ключевой идеи Софуса Ли.

Итак, требуется найти все возможные преобразования зависимых и независимых переменных, которые оставляют уравнение неизменным.

Пусть дано ДУ $F\left(x, u, \overrightarrow{u_{(1)}}, \overrightarrow{u_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{u_{(p)}}\right) = 0$.

$\bar{x}, \bar{u}, \overrightarrow{\bar{u}_{(1)}}, \overrightarrow{\bar{u}_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{\bar{u}_{(p)}}$ – новые переменные.

Другими словами, нашей задачей становиться поиск таких замен переменных, при которых вид уравнения в новых переменных не меняется:

$$F\left(\bar{x}, \bar{u}, \overrightarrow{\bar{u}_{(1)}}, \overrightarrow{\bar{u}_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{\bar{u}_{(p)}}\right) = 0.$$

Следует учесть тот факт, что производные тоже будут меняться. Например, $\overrightarrow{\bar{u}_{(1)}} = \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial \overline{x_k}}$, то есть все действия выполняются в новых переменных.

Определение. Если при таких преобразованиях переменных (зависимых и независимых) вид уравнения не меняется, то говорят, что уравнение инвариантно относительно этой замены, или уравнение допускает данную группу преобразований.

Следовательно, необходимо найти все возможные группы преобразований, которые данное уравнение допускает.

Пример 9. Уравнение Бюргерса $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$.

Сразу сказать, какие симметрии допускает это уравнение нельзя.

Задача состоит в том, как вычислить все допустимые преобразования.

Ответ на поставленный вопрос дал Софус Ли в последней четверти XIX века. Его идея (следует отметить тот факт, что Софус Ли был гениальным геометром) состояла в том, чтобы представить себе дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений) как многообразие, но уже не в обычном, а в так называемом продолженном пространстве.

Иначе говоря, Ли предложил рассматривать некое пространство, в котором функции, аргументы и все производные играли уже роль независимых переменных.

Таким образом, Ли впервые понял, что дифференциальное уравнение можно представить геометрически как многообразие в таком продолженном пространстве.

Ключевая идея Ли заключалась в том, чтобы произвести переход в продолженное пространство и представить дифференциальное уравнение в виде многообразия (гиперповерхности). Тогда очевидным становится следующий факт.

Дифференциальное уравнение будет допускать группу преобразований, если гиперповерхность в продолженном пространстве, соответствующая этому ДУ, будет инвариантным многообразием, то есть если любая точка, лежащая на гиперповерхности, под действием преобразований группы останется на ней же.

Так же следует обратить внимание на замечание, которое является следствием вышесказанного: под действием группы преобразований любое решение ДУ будет переходить в его же решение. В частном случае, решение может переходить само в себя. Тогда будем говорить об инвариантном решении.

Фактически во всех модельных задачах, где применяется групповой анализ, ключевую роль играют как раз инвариантные решения.

Перед нами возникает новая задача: получить генератор группы преобразований в продолженном пространстве по уже известному генератору в обычном пространстве.

То есть надо понять, каким образом преобразуются производные при известном преобразовании переменных, причем рассматриваться будут бесконечно малые преобразования.

Пусть имеется генератор некой однопараметрической группы:

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Это означает, что когда параметр $a \to 0$ можно записать формулу инфинитезимального преобразования:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + a\xi(x,y) + o(a), \\ \bar{y} = y + a\eta(x,y) + o(a). \end{cases}$$

Тогда инфинитезимальное преобразование производных запишется следующим образом:

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} + \varphi^x(x, y, y')a + o(a),$$

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi^{xx}(x, y, y', y'')a + o(a),$$

$$\dots$$

Необходимым становиться установление связи между функциями $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ и функциями $\varphi^x(x, y, y'), \varphi^{xx}(x, y, y', y''), \dots$.

Найденная связь и будет являться формулой продолжения.

Пример 9 (продолжение). Для уравнения Бюргерса:

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0$$

узнаем, что будет играть роль продолженного пространства и как будет выглядеть в полном виде второе продолжение.

В уравнение входят первая производная по времени и координате, и вторая – по координате. Это значит, что продолженное пространство в общем виде должно включать все первые и все вторые производные, то есть координатами продолженного пространства будут $(t, u, x, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt})$. Получили, что если пространство, в котором работаем, трехмерно, то продолженное пространство будет восьмимерно.

Тогда генератор группы преобразований будет выглядеть так:

$$\hat{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u}.$$

В этом случае второе продолжение будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{X}^{(2)} = \hat{X} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}.$$

Вообще говоря, неважно, обыкновенное ли дано дифференциальное уравнение, в частных ли производных, система ли уравнений, всегда есть стандартная формула продолжения.

Повторим, что данном случае вопрос заключается в том, как выразить $\varphi^{t}, \varphi^{x}, \varphi^{xx}, \varphi^{tt}, \varphi^{xt}$ через компоненты (ξ, τ, φ) векторного поля, которые мы ищем.

Оказывается, что для этого достаточно умело применять формулу дифференцирования сложной функции.

Хотя вообще говоря, для произвольного продолжения вывод формулы достаточно громоздкий и сложный. Его можно посмотреть в [8].

Запишем общую формулу продолжения без доказательства.

Вначале введем оператор полной частной производной.

Пусть есть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m, \overrightarrow{u_{(1)}}, \overrightarrow{u_{(2)}}, \dots, \overrightarrow{u_{(p)}})$.

Выберем какую-нибудь переменную x_i.

Тогда по определению оператора полной частной производной получим оператор следующего вида:

$$D_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_{(1,j)}} \cdot \frac{\partial u_{(1,j)}}{\partial x_i} + \cdots, \text{где} u_{(1,j)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j}.$$

Другими словами, сначала берем самую обычную производную, а затем дифференцируем как сложную функцию.

Условно говоря, оператор полной частной производной – это оператор, который, действуя на такую дифференциальную функцию, действует по правилу цепочки дифференцирования сложной функции.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}\right) = 0, \alpha = \overline{1, m},$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Генератор группы преобразований будет выглядеть так:

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Нужно продолжить этот оператор вплоть до n-го порядка.

Определение. Формула продолжения выглядит так:

$$\hat{X}^{(p)} = \hat{X} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^I(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}) \frac{\partial}{\partial u_I^j}.$$

где I – мультииндекс (указывает, производную по каким переменным преобразуем),индекс j указывает, какую функцию из зависимых переменных дифференцируем,

$$\varphi_j^I = D_I\left(\varphi_j - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot u_i^j\right) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot u_{I,i}^j,$$

D_I – оператор действия по мультииндексу,

$u_i^j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$,

$u_{I,i}^j = \frac{\partial u_I^j}{\partial x_i}$ (частные производные по x_i).

Теорема (Критерий инвариантности СДУ): Пусть имеется СДУ:

$$M\colon \begin{cases} F_\alpha\left(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(p)}\right) = 0, \\ \alpha = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Необходимое и достаточное условие того, что данная система уравнений допускает группу с генератором $\hat{X}$, состоит в том, чтобы действие n-го продолжения генератора на левые части уравнений в точках, принадлежащих многообразию, дает 0: $\hat{X}^{(p)} F_\alpha/_M \equiv 0, \alpha = \overline{1, m}$.

Определение. Уравнение $\hat{X}^{(p)} F_\alpha/_M \equiv 0, \alpha = \overline{1, m}$ называется определяющим уравнением. С помощью него получим все необходимые нам функции

Идея такая: когда запишутся определяющие уравнения, в левой части будут стоять полиномы по производным, а производные уже будут рассматриваться как независимые переменные. Учтем, что полином обращается в ноль тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех независимых переменных равны нулю.

Таким образом, получаем систему более простых уравнений. Эту систему уравнений (они тоже будут дифференциальными) для определения всех ξ_i и φ_j и будем называть системой определяющих уравнений.

Забегая вперед, скажем, что данная система всегда является переопределенной, а это означает то, что уравнений будет больше, чем неизвестных. Эти уравнения всегда будут линейными, значит, всегда будут иметь решение.

Могут возникать ситуации, когда будут только тривиальные решения (только нулевые значения для ξ_i, φ_j). Данный факт будет означать, что уравнение не содержит не каких симметрий. Групповой анализ к таким уравнениям не применим, так как раз уж нет симметрий, то и не чего анализировать.

Однако, существует интересная техника. Иногда уравнение можно, как говорят, погрузить в более общую модель, то есть считать уравнение частным случаем какой-то более общей системы, которая уже имеет симметрии. Здесь групповой анализ снова работает.

Продемонстрируем на примере уравнения теплопроводности алгоритм составления и решения системы определяющих уравнений.

Пример 9 (продолжение). $M: u_t + uu_x - u_{xx} = 0$, $u = u(x,t)$ - уравнение Бюргерса.

Следовательно, генератор группы будем искать в следующем виде:

$$\hat{X} = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Тогда второе продолжение будет выглядеть так:

$$\hat{X}^{(2)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}.$$

Подействуем вторым продолжением на уравнение Бюргерса, при этом все производные рассматриваются как независимые переменные.

Тогда ненулевыми будут только те слагаемые генератора, в которых идет дифференцирование по u_t, u_x и u_{xx}:

$$\hat{X}^{(2)}(u_t + uu_x - u_{xx}) = \varphi^t + u\varphi^x + u_x\varphi - \varphi^{xx}.$$

Тогда критерий инвариантности запишется так:

$$(\varphi^t + u\varphi^x + u_x\varphi - \varphi^{xx})/_{u_{xx}=u_t+uu_x} \equiv 0.$$

Задача свелась к вычислению $\varphi^t, \varphi^x, \varphi^{xx}$ и, заменив $u_{xx} = u_t + uu_x$, к получению определяющих уравнений, которые будут дифференциальными уравнениями относительно ξ, τ и φ, а эти ДУ уже легко решаются.

По формуле продолжения получим следующее выражение для φ^t, φ^x и φ^{xx}:

$$\varphi^t = D_t(\varphi - \xi \cdot u_x - \tau \cdot u_t) + \xi \cdot u_{xt} + \tau \cdot u_{tt} = D_t\varphi - u_t D_t\tau - u_x D_t\xi =$$
$$= \varphi_t + u_t(\varphi_u - \tau_t) - u_x\xi_t - u_t^2\tau_u - u_t u_x \xi_u,$$

Здесь мультииндекс $I = (t)$,

$$\varphi^x = D_x\varphi - u_t D_x\tau_t - u_x D_x\xi = \varphi_x - u_t\tau_x + u_x(\varphi_u - \xi_x) - u_t u_x\tau_u - u_x^2\xi_u$$

$\varphi^{xx} = D_x D_x(\varphi - \xi \cdot u_x - \tau \cdot u_t) + \xi \cdot u_{xxx} + \tau \cdot u_{xxt} = D_x\varphi^x - u_{tx}D_x\tau - u_{xx}D_x\xi + \xi \cdot u_{xxx} + \tau \cdot u_{xxt} = \varphi_{xx} + u_t(\varphi_u - 2\xi_x - \tau_{xx}) + u_x(2\varphi_{xu} - \xi_{xx} + u\varphi_u - 2u\xi_x) - 2u_{tx}\tau_x - u_t^2\tau_u + u_x^2(\varphi_{uu} - 2\xi_{xu} - 3u\xi_u) - u_t u_x(2\tau_{xu} + 3\xi_u + u\tau_u) - 2u_x u_{tx}\tau_u - u_t u_x^2\tau_{uu} - u_x^3\xi_{uu}.$

Далее находим разность $(\varphi^t + u\varphi^x + u_x\varphi - \varphi^{xx})/_{u_{xx}=u_t+uu_x} \equiv 0$ и приравниваем все коэффициенты при одинаковых комбинациях производных к нулю:

$1: \varphi_t + u\varphi_x - \varphi_{xx} = 0,$. (1)

$u_t: 2\xi_x + \tau_{xx} - \tau_t - u\tau_x = 0,$ (2)

$u_x: \varphi - 2\varphi_{xu} + \xi_{xx} + u\xi_x - \tau_x = 0,$ (3)

$u_x^2: 2u\xi_u + 2\xi_{xu} - \varphi_{uu} = 0,$ (4)

$u_{tx}: 2\tau_x = 0,$ (5)

$u_t u_x: 2(\tau_{xu} + \xi_u) = 0,$ (6)

$u_x u_{tx}: 2\tau_u = 0,$ (7)

$u_t u_x^2 : \tau_{uu} = 0,$ (8)

$u_x^3 : \xi_{uu} = 0,$ (9)

Из уравнений 5-9 следует $\tau = \tau(t), \xi = \xi(t, x)$. Тогда уравнение 4 упрощается и принимает вид $\varphi_{uu} = 0$. Следовательно, функция φ линейна по переменной $u: \varphi = b_1(t, x)u + b_2(t, x)$. В результате подстановки выражения для φ в 1 и расщепления по переменной и получаем $b_2(t, x) = C_1 x + C_2, b_1(t, x) = C_3 - C_1 t$. Подстановка функции $\varphi = C_1 x + C_2 + (C_3 - C_1 t)u$ в 3 позволяет определить $\xi = (C_1 t - C_3)x + C_2 t + C_4$. Из уравнения 2, принимающего вид $2\xi_x - \tau_t = 0$, находим τ. Таким образом, решение системы определяющих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t^2 - 2C_3 t + C_5, \\ \xi &= (C_1 t - C_3)x + C_2 t + C_4, \\ \varphi &= C_1 x + C_2 + (C_3 - C_1 t)u \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, удалось вычислить компоненты касательного векторного поля, то есть найти полную группу симметрий.

Мы искали однопараметрические группы, но когда нашли генератор, то видим, что он содержит 5 произвольных констант. Значит, на самом деле в общем случае получаем 5-параметрическую группу.

Итак, если есть 5-параметрическая группа, то можно поочередно каждый параметр считать единицей, а все остальные – нулями. Тогда получим так называемые базисные генераторы.

Выпишем базисные генераторы для уравнения Бюргерса:

$$C_1 = 1: \hat{X}_1 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x} - (x + tu) \frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_2 = 1: \hat{X}_2 = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_3 = 1: \hat{X}_3 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_4 = 1: \hat{X}_4 = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$C_5 = 1: \hat{X}_5 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Каждому генератору соответствует конечное однопараметрическое преобразование:

$\hat{X}_1$: $\bar{x} = \frac{x}{1-ax}, \bar{t} = \frac{t}{1-at}, \bar{u} = u - a(ut + x)$;

$\hat{X}_2$: $\bar{x} = x + ta, \bar{t} = t, \bar{u} = u - a$;

$\hat{X}_3$: $\bar{x} = e^a x, \bar{t} = e^{2a} t, \bar{u} =$
$e^{-a} u$ (неоднородноерастяжениепоx , t , u);

$\hat{X}_4$: $\bar{x} = x + a, \bar{t} = t, \bar{u} = u$ (трансляцияпоосих);

$\hat{X}_5$: $\bar{x} = x, \bar{t} = t + a, \bar{u} = u$ (трансляцияповремени).

Таким образом, найдены все преобразования, которые оставляют уравнение инвариантным. Получилась достаточно богатая группа преобразований, где каждому генератору соответствует свое однопараметрическое преобразование (их всего 5).

Возникает вопрос, нельзя ли объединить все эти 5 однопараметрических групп в одну 5-параметрическую группу преобразований? Оказывается, можно. Для этого нужно воспользоваться аппаратом алгебр Ли.

Для более подробного ознакомления с этим аппаратом можно обратиться к источнику [5], где он описан довольно просто.

Для начала введем необходимое для дальнейшего изучения понятие коммутатора двух операторов.

Определение. Пусть есть произвольные операторы X_1, X_2. Тогда по определению коммутатором называется следующая разность:

$$[X_1, X_2] = X_1 \cdot X_2 - X_2 \cdot X_1 \neq 0 \text{ (в общем случае).}$$

Другими словами, если коммутатор действует на какую-либо функцию F, то получаем на выходе:

$$[X_1, X_2](F) = X_1 \cdot X_2(F) - X_2 \cdot X_1(F).$$

Теперь рассмотрим (по аналогии с векторным пространством) некоторое -мерное пространство операторов, то есть такое пространство L, в котором можно выбрать n линейно независимых базисных операторов $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, и тогда любой другой оператор этого пространства может быть записан в виде линейной комбинации базисных операторов: $\forall X \in L: X = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot X_i$.

Теперь можно ввести понятие алгебры Ли.

Определение. Пространство является алгеброй Ли, если оно замкнуто относительно действия коммутатора, то есть: $\forall (X, Y) \in L: [X, Y] \in L$.

Это условие верно и для базисных операторов, поэтому можно написать, что для любой пары генераторов $\forall (X_i, X_k)$ из базиса коммутатор $[X_i, X_k]$ можно представить в виде линейной комбинации базисных же операторов:

$[X_i, X_k] = \sum_{l=1}^{n} C_{ik}^{l} \cdot X_l$, где C_{ik}^{l} – структурные константы алгебры Ли.

Таким образом, чтобы проверить, является ли некий набор операторов алгеброй Ли, нужно построить таблицу коммутаторов.

Пример 9 (продолжение). Ответ на вопрос, составляют ли преобразования, которые допускают уравнения Бюргерса, многопараметрическую группу, мы получим тогда, когда убедимся, что операторы образовывают базис некоторой алгебры Ли. [8]

Для этого нужно найти коммутаторы всех пар и убедиться, что в результате выполнения операции коммутирования будут получены операторы, которые принадлежат пространству L^5 с базисными операторами $X_i (i = 1, \dots, 5)$ вида.

Для вычисления будем использовать формулу (1.120), которая в покомпонентной записи ($X_1 = \xi_1^i \partial_{x^i}, X_2 = \xi_2^i \partial_{x^i}, i = 1, \dots, N$) имеет вид

$$[X_1, X_2] = \left(\left(X_1 \xi_2^i \right) - \left(X_2 \xi_1^i \right) \right) \frac{\partial}{\partial_{x^i}}.$$

Так, например, для операторов X_2, X_3 имеем

$[X_2, X_3]\left[\left((t\partial_x - \partial_u)2t - (2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u) * 0\right)\partial_t + \left((t\partial_x - \partial_u)x - \right.\right.$ $2t\partial t + x\partial x - u\partial u * t\partial x + (t\partial x - \partial u - u - 2t\partial t + x\partial x - u\partial u * -1\partial x = t - 2t\partial x + \partial u = - t\partial x + \partial u = -X3 \epsilon L5$.

Результаты вычислений приведены в следующей таблице, где коммутаторы операторов $[X_i, X_j]$ содержатся на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Таблица 1.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	0	$-2X_1$	$-X_2$	$-X_3$
X_2	0	0	$-X_2$	0	$-X_4$
X_3	$2X_1$	X_2	0	$-X_4$	$-2X_5$
X_4	X_2	0	X_4	0	0
X_5	X_3	X_4	$2X_5$	0	0

Теорема: Множество генераторов преобразований симметрии ДУ (СДУ) всегда образует базис алгебры Ли.

Причина состоит в том, что определяющие уравнения линейны.

Строгое доказательство этого факта было дано еще самим Ли (он и ввел понятие этой алгебры, которая в дальнейшем уже стала носить его имя). Его также можно посмотреть в [7,8].

Таким образом, вместо того, чтобы говорить о группе преобразований ДУ, можно говорить об алгебре Ли этого уравнения.

§1.2 Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим возможности группового анализа применительно к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Уже говорилось о том, что практически все методы интегрирования ОДУ, которые входят в учебники, находят свое обоснование в групповом анализе.

Естественно начать с самого простого случая – с ОДУ первого порядка, разрешенного относительно производной: $y' = f(x, y)$. Это уравнение всегда можно переписать в следующем виде:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – функции, обладающие достаточной степенью гладкости.

Софус Ли доказал, что групповой анализ позволяет решать такие уравнения двумя способами.

1) Если данное уравнение допускает группу симметрий с генератором $\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}$, то оно сразу же имеет интегрирующий множитель следующего вида:

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N}.$$

Это означает, что после умножения уравнения на μ получаем уравнение в полных дифференциалах. Следовательно, в неявном виде получим решение $F(x, y) = C$.

2) Второй способ решения уравнения – переход к каноническим переменным, то есть в этом случае оператор $\hat{X}$ сводится к трансляции: $(x, y) \to (t, u)$

$$\begin{cases} \xi \dfrac{\partial u}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ \xi \dfrac{\partial t}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial t}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

После перехода к каноническим переменным уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными.

В случае ОДУ второго порядка, разрешенного относительно второй производной: $y'' = f(x, y, y')$, действуют следующим образом.

Пусть это уравнение допускает однопараметрическую группу с генератором:

$$\hat{X} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда переходом к каноническим переменным порядок уравнения можно понизить на единицу.

Если уравнение допускает двумерную алгебру Ли:

$$\hat{X}_1 = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\hat{X}_2 = \xi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y},$$

то уравнение можно проинтегрировать полностью по алгоритму Ли, то есть перейти к каноническим переменным, что приведет алгебру Ли к одной из четырех стандартных форм. В новых переменных уравнение также примет форму одной из четырех стандартных форм, каждая из которых легко интегрируется [7].

Что касается уравнений более высокого порядка, то здесь ситуации намного сложнее. На сегодняшний день достаточно хорошо разобраны уравнения 3-го и 4-го порядка [6].

Пример 10. Рассмотрим уравнение $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$.

Легко увидеть, что оно допускает группу однородных растяжений:

$$\begin{cases} \bar{x} = e^a x, \\ \bar{y} = e^a y. \end{cases}$$

Генератор этой группы $\hat{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, то есть $\xi = x,\ \eta = y$.

1) Строим интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{2x^2y + y(y^2 - 3x^2)} = \frac{1}{y(y^2 - x^2)}.$$

Получим после умножения исходного уравнения на μ следующее:

$$\frac{2x}{y^2 - x^2}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y(y^2 - x^2)}dy = 0,$$

$$P = \frac{2x}{y^2 - x^2}, \qquad Q = \frac{y^2 - 3x^2}{y(y^2 - x^2)}.$$

Удостоверившись, что $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{-4xy}{(y^2+x^2)^2}$, перейдем стандартным образом к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = \dfrac{2x}{y^2 - x^2}, \\ \dfrac{dF}{dy} = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y(y^2 - x^2)}. \end{cases}$$

Интегрирование первого уравнения дает общий вид решения:

$$F(x, y) = -ln|y^2 - x^2| + P(y).$$

Дифференцирование $F(x, y)$ по y и дальнейшая подстановка во второе уравнение системы позволяет найти вид функции $P(y)$:

$$P(y) = 3ln|y| + C.$$

Таким образом, решением исходной системы уравнений является функция:

$$F(x, y) = ln\left|\frac{y^3}{y^2 - x^2}\right| + C.$$

2) Перейдем к каноническим переменным.

$$\begin{cases} x\dfrac{du}{dx} + y\dfrac{du}{dy} = 0, \\ x\dfrac{dt}{dx} + y\dfrac{dt}{dy} = 1. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы и получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \qquad ln|x| = ln|y| + C, \qquad u = C = \frac{y}{x}.$$

Для решения второго уравнения системы возьмем в качестве t следующее частное решение: $t = t(x)$. Тогда получим следующее уравнение с очевидным частным решением:

$$x\frac{dt}{dx} = 1, \qquad t = ln|x|.$$

Делаем подстановку $y = x \cdot u(x)$ в исходное уравнение:

$$2x^2udx + (x^2u^2 - 3x^2)(udx + xdu) = 0.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $dt = \frac{dx}{x}$, окончательно получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(u^3 - u)dt + (u^2 - 3)du = 0,$$

$$\frac{(u^2 - 3)du}{u^3 - u} = -tdt.$$

Разложение левой части на простейшие дроби и дальнейшее интегрирование обеих частей дает следующий ответ: $C = e^{-t} \cdot \frac{u^2-1}{u^3}$. Переход от переменных (u, t) к переменным (x, y):

$$u = \frac{y}{x}, t = ln|x|,$$

приводит к такой окончательной записи решения:

$$C = \frac{y^2 - x^2}{y^3}.$$

§1.3 Групповой анализ уравнений в частных производных

Перейдем к интегрированию уравнений в частных производных. Для определенности будем все объяснять на примере следующего уравнения не выше второго порядка для функции двух переменных$u = u(x, t)$:

$$F(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{tx}) = 0.$$

Пусть это уравнение допускает группу симметрий с генератором:

$$\hat{X} = \xi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Тогда можно, решая уравнения Ли, получить конечные преобразования:

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(x, t, u, a), \\ \bar{t} = \bar{t}(x, t, u, a), \\ \bar{u} = \bar{u}(x, t, u, a). \end{cases}$$

Появляются 2 замечательные возможности.

1) Можно «размножать» решения, поскольку группа всегда одно решение переводит в другое решение. Этот алгоритм достаточно прост.

Пусть известно какое-либо решение $u = \Phi(x, t)$.

Тогда в новых переменных эту формулу можно переписать так:

$$\bar{u} = \Phi(\bar{x}, \bar{t}).$$

Теперь подставим в это равенство явные выражения, которые связывают новые переменные и старые:

$$\bar{u}(x, t, u, a) = \Phi\big(\bar{x}(x, t, u, a), \bar{t}(x, t, u, a)\big).$$

Это уравнение уже можно разрешить относительно u и тем самым получить новое решение.

2) Умение находить групповые инвариантные решения.

На примере выбранного уравнения это делается следующим образом.

Сначала найдем инварианты группы:

$$\xi \frac{\partial J}{\partial x} + \tau \frac{\partial J}{\partial t} + \varphi \frac{\partial J}{\partial u} = 0.$$

Для этого составляем уравнения характеристик:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\varphi}.$$

В результате получим два базисных инварианта: J_1, J_2.

Теперь делается простой шаг – переход от переменных (u, x, t) к базисным инвариантам (J_1, J_2): $(u, x, t) \to (J_1, J_2)$. В этом случае ищется один базисный инвариант как функция другого: $J_1 = f(J_2)$. В результате уменьшается число переменных.

В самых простых случаях можно свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Далее составляется уравнение для функции f, оно уже будет ОДУ.

Если это ОДУ будет решаться, то получим групповое инвариантное решение, либо, по крайней мере, это уравнение можно будет решить численно. Другими словами хоть аналитически, хоть численно это решение найдется.

Исторически физики задолго до появления группового анализа знали о таких решениях (особенно специалисты в области газо- и гидродинамики): они имели дело с автомодельными решениями. А в дальнейшем уже стало понятно, что автомодельные решения – это решения, которые инвариантны относительно группы растяжений.

Уже после работ Л.В. Овсянникова выяснилось, что автомодельные решения – лишь очень маленький класс всего множества групповых инвариантных решений.

Пример 9 (продолжение) $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$, $u = u(x,t)$ - уравнение Бюргерса.

Рассмотрим подробно случай алгебры X_3. На первом шаге осуществляем построение базиса инвариантов этой алгебры. Для этого решаем уравнение.

$$X_3\big(F(t,x,u)\big) = 0,$$

или, что то же самое, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{2t} = \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u},$$

которая имеет такие первые интегралы:

$$x^2 t^{-1} = C_1, \quad ux = C_2.$$

Следовательно, базис инвариантов алгебры X_3составляют функции

$$\omega = x^2 t^{-1}, \qquad w = xu.$$

Поэтому полагаем$w = \varphi(\omega)$,откуда получаем

$$u = x^{-1}\varphi(\omega), \qquad \omega = x^2 t^{-1}.$$

Подстановка полученного значения функции u в уравнение Бюргерса приводит к уравнению

$$4\omega^2 \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + 2\omega\varphi\frac{d\varphi}{d\omega} - \varphi^2 + \omega(\omega - 2)\frac{d\varphi}{d\omega} + 2\varphi = 0,$$

Перейдем далее к построению инвариантных решений уравнения Бюргерса.

В общем случае нам не удалось проинтегрировать это уравнение. Но оно имеет такие частные решения: $\varphi = 2$, $\varphi = \omega$, $\varphi = 2 - \omega$.

В соответствии с этим получаем такие решения уравнений в частных производных, которые инвариантны относительно группы симметрий растяжений:

$$u = 2x^{-1}\,, \qquad u = -xt^{-1}\,, \qquad u = 2x^{-1} - xt^{-1}.$$

Возникает следующий интересный момент. С одной стороны, можно построить такие инвариантные решения относительно любого генератора. С другой стороны, раз генераторы образуют алгебру Ли, то любая линейная комбинация генераторов даст новый генератор. Значит, относительно него тоже можно построить инвариантные решения.

ГЛАВА 2. ТРЕХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СКОПЛЕНИЯ АМЕБ.

§2.1 Построение одномерной и трехмерной моделей.

Амеба – одноклеточный организм размером около десяти микрон ($\mathbf{10^{-3}}$см), обитающий в почве и передвигающийся в ней с помощью ложноножек, т.е. частей своего тела. Питаются амебы в основном бактериями, поглощая их вместе с землей (если пищи достаточно, то амебы размножаются делением на две части).

Известно, что динамика развития их сообщества – достаточно большого количества амеб, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга, – бывает весьма сложной. Например, в зависимости от внешних условий амёбы могут собираться в огромные (до сотен тысяч штук) скопления, которые начинают двигаться как единое целое, хотя индивидуальность каждой амебы сохраняется. Замечено, что это макроскопическое «организованное» движение происходит в направлении к более высокой концентрации некоторого химического вещества, вырабатываемого самими амебами.

Математическая модель динамики скопления амеб базируется на следующих предположениях[9]:

1) расстояние между амебами мало в сравнении с размерами их скоплений (сотни микрон), их можно рассматривать как «сплошную среду» и вводить концентрацию $N(x, y, z, t)$ – число амеб в единице объема;

2) динамика скопления амеб – процесс одномерный, т.е. концентрация амеб и другие величины являются функциями только координаты x и времени t;

3) амебы не рождаются и не умирают в процессе макроскопического движения, т.е. характерное время движения (несколько часов) мало по отношению к характерным временам размножения и жизни амеб;

4) индивидуальное движение амеб при отсутствии стимулирующих

внешних воздействий (пища, тепло и т.д.) беспорядочно, хаотично; каждая амеба с равной вероятностью может двигаться как вправо, так и влево;

5) если в среде есть «притягивающее» химическое вещество, то к собственному неупорядоченному движению амеб добавляется их направленное движение в область с большой плотностью этого вещества.

Составим уравнение баланса амеб в элементе среды dx за время dt, используя «закон сохранения» их числа (предположение 3). В этом случае общее число амеб в объеме dx (площадь поперечного сечения единична) изменяется лишь из-за разности потока амеб $W(x,t)$ на левой и правой границах элемента. Величина $W(x,t)$ – это число амеб, пересекающих единичную поверхность за единичное время. Искомое уравнение будет

$$\{\bar{N}(x,t + dt) - \bar{N}(x,t)\}dx = \{\bar{W}(x,t) - \bar{W}(x + dx,t)\}dt,$$

где $\bar{N}$, $\bar{W}$– некоторые средние значения величин на малых промежутках dx, dt. Устремляя dx и dt к нулю, приходим к дифференциальному уравнению баланса числа амеб:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial W}{\partial x}.$$

Величина $W = W_c + W_d$ складывается из двух составляющих W_c и W_d. Часть W_c общего потока формируется за счет хаотического движения амеб, и поэтому его можно записать через градиент их концентрации: $W_c = -\mu\frac{\partial N}{\partial x}$,

Здесь $\mu > 0$ – некоторый коэффициент, характеризующий рассматриваемую среду.

Часть W_d описывает направленный поток амеб, она тем больше, чем больше градиент плотности «притягивающего» вещества: $W_d = \eta N\frac{\partial \rho}{\partial x}$.

Здесь $\eta > 0$ – некоторая постоянная, $\rho(x,t)$ – плотность вещества, а множитель N перед градиентом означает, что при заданном градиенте величины ρ составляющая потока W_d пропорциональна концентрации амеб в данной точке. Объединяя выражения для W_c , W_d и подставляя их в уравнение баланса, получаем

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial N}{\partial x} - \eta N \frac{\partial \rho}{\partial x}\right)$$

В уравнении две неизвестные функции: N и ρ. Поэтому необходимо получить, пользуясь законом сохранения вещества, уравнение баланса для величины ρ. При этом следует учесть, что скорость выделения химического вещества пропорциональна концентрации амеб. Также надо учитывать распад вещества, скорость которого пропорциональна его концентрации. Таким образом, в единичном объеме в единицу времени появляется и исчезает количество вещества, равное $f = \alpha N - \beta \rho$, где $\alpha > 0\,, \beta > 0$ – константы, характеризующие соответственно скорость его выделения амебами и скорость распада (в этом состоит отличие модели для амеб, в которой они не умирают и не рождаются). Изменение плотности вещества в элементарном объеме среды происходит также и вследствие разности его потоков на левой и правой границах элемента. Оно диффундирует в среде из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией подобно тому, как тепло распространяется от более нагретых участков теплопроводной среды к менее нагретым. Это движение создает, согласно закону Фика, поток W_ρ, равный

$$W_\rho = D \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$D > 0$ – коэффициент диффузии. Итак, уравнение баланса вещества имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial W_\rho}{\partial x} + f,$$

или учитывая выражения для W_ρ и f,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta \rho$$

Составим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu\dfrac{\partial N}{\partial x} - \eta N\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha N - \beta\rho \end{cases} \quad (1)$$

Она вместе с входными данными $\mu, \eta, \alpha, \beta, D$ служит моделью динамики скопления амеб при сделанных выше предположениях.

В трехмерном случае система уравнений (1) имеет вид:

$$\begin{cases} N_t = a\Delta N - b\,div(N grad\rho) \\ \rho_t = c\Delta\rho + eN - f\rho \end{cases}, \quad (2)$$

где Δ - лапласиан.

Система уравнений (2) выводится аналогично системе (1) на основе трехмерного уравнения непрерывности.

§2.2 Точечные группы, допускаемые моделью (2).

Вычислим точечные группы Ли, допускаемые системой уравнений 2. Перепишем систему уравнений (2) в декартовых координатах (2*):

$$\begin{cases} N_t - a(N_{xx} + N_{yy} + N_{zz}) + bN(\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) + b(N_x\rho_x + N_y\rho_y + N_z\rho_z) = 0 \\ \rho_t - c(\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) + fm - eN = 0 \end{cases}$$

Будем искать генератор группы Ли в виде:

$$X = \xi_1\partial_x + \xi_2\partial_y + \xi_3\partial_z + \xi_4\partial_t + \eta_1\partial_N + \eta_2\partial_\rho,$$

где все компоненты касательного векторного поля являются функциями зависимых и независимых переменных.

Расчет допускаемой алгебры Ли по стандартному алгоритму, подробно описанному в главе 1, с использованием специализированного математического пакета GeM[10] приводит к системе определяющих уравнений (3):

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\xi_1 = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_1 = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\xi_4 = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\xi_1 = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\xi_2 = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\xi_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi_2 = -\frac{\partial}{\partial y}\xi_1$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\xi_3 = -\frac{\partial}{\partial z}\xi_1$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\eta_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\xi_4 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\xi_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\xi_3 = -\frac{\partial}{\partial z}\xi_2$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\eta_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\xi_4 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\xi_3 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\eta_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_4 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_1 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_3 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\eta_2 = -\eta_2 f$$
$$\frac{\partial}{\partial N}\xi_4 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial N}\xi_1 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial N}\xi_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial N}\xi_3 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial N}\eta_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\xi_4 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\xi_1 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\xi_2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\xi_3 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho}\eta_2 = 0$$
$$\eta_1 = 0$$

Решение системы (3) дает восьмимерную алгебру Ли с генераторами:

$$X_1 = y\partial_x - x\partial_y$$
$$X_2 = z\partial_x - x\partial_z$$
$$X_3 = z\partial_y - y\partial_z$$
$$X_4 = \partial_x$$
$$X_5 = \partial_y$$
$$X_6 = \partial_z$$
$$X_7 = \partial_t$$
$$X_8 = e^{-ft}\partial_m$$

С геометрической точки зрения эти генераторы соответствуют вращениям (X_1, X_2, X_3), трансляциям (X_4, X_5, X_6, X_7) и калибровочному преобразованию(X_8).

Таблица коммутаторов имеет вид:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	X_3	$-X_2$	X_5	$-X_4$	0	0	0
X_2	$-X_3$	0	X_1	X_6	0	$-X_4$	0	0
X_3	X_2	$-X_1$	0	0	X_6	$-X_5$	0	0
X_4	$-X_5$	$-X_6$	0	0	0	0	0	0
X_5	X_4	0	$-X_6$	0	0	0	0	0
X_6	0	X_4	X_5	0	0	0	0	0
X_7	0	0	0	0	0	0	0	0
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0

§ 2.3 Частное инвариантное решение

3.1. Рассмотрим инвариантные решения порождаемое трехмерной подалгеброй (4 генераторы) описывающее сферически симметричное распределение амеб в пространстве.

$$\begin{cases} N_t - a\left(N_{rr} + \dfrac{2N_r}{r}\right) + bN\left(\rho_{rr} + \dfrac{2\rho_r}{r}\right) + bN_r\rho_r = 0 \\ \rho_t - c\left(\rho_{rr} + \dfrac{2\rho_r}{r}\right) - eN + f\rho = 0 \end{cases},$$

где r —полярный радиус.

Инвариантность системы (2) относительно поворотов и трансляции по шкале времени свидетельствует о наличии стационарного сферически симметричного решения, которое является основным предметом нашего дальнейшего изучения.

Численное решение системы (2) в случае $N_t = \rho_t = 0$ и сферической симметрии приводит к следующим результатам.

В зависимости от значений параметров и начальных условий возможны следующие стационарные распределения амёб в пространстве.

1. Быстрое монотонное убывание числа амёб в единице объема с ростом полярного радиуса. Иными словами, амёбы концентрируются в конечном объеме (Рисунок 1).

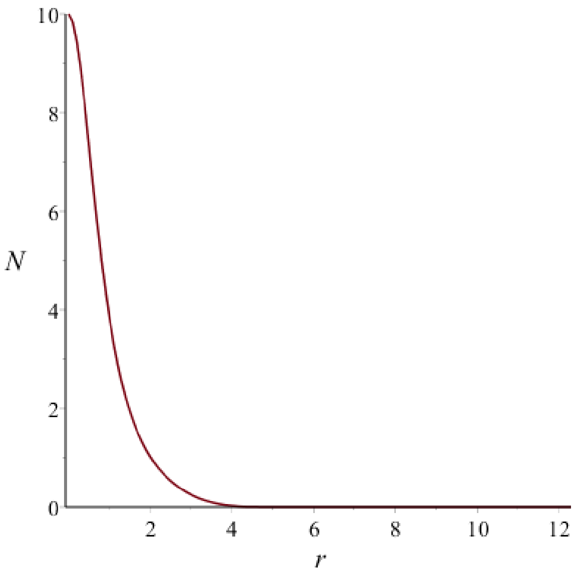

Рисунок 1. Зависимость числа амёб N в единице объема от полярного радиуса r при следующих значениях параметров и начальных условиях:

$$a = 10, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad e = 10, \quad f = 1$$

$$N(0) = 10, \quad \rho(0) = 20, \quad N'(0) = 1, \quad \rho'(0) = 1$$

2. Затухающие пространственные колебания с выходом на «режим насыщения» (Рисунок 2).

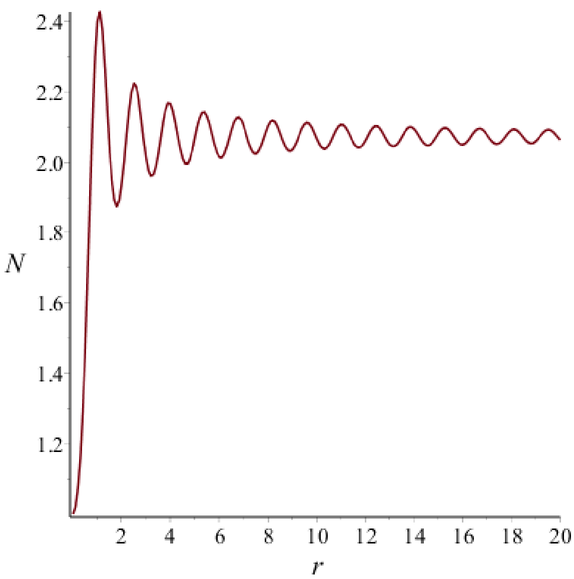

Рисунок 2. Зависимость числа амёб N в единице объема от полярного радиуса r при следующих значениях параметров и начальных условиях:

$$a = 10, \quad b = 10, \quad c = 1, \quad e = 10, \quad f = 1$$

$$N(0) = 1, \quad \rho(0) = 20, \quad N'(0) = 1, \quad \rho'(0) = 1$$

3. Однородное распределение амёб в пространстве (Рисунок 3).

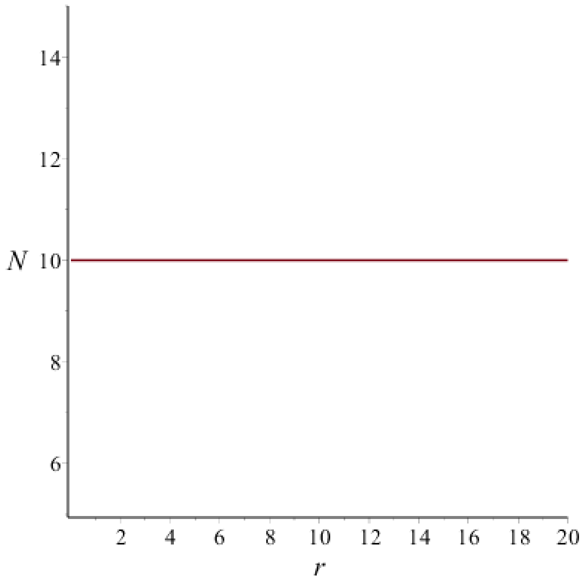

Рисунок 3. Зависимость числа амёб N в единице объема от полярного радиуса r при следующих значениях параметров и начальных условиях:

$$a = 1, \quad b = 10, \quad c = 1, \quad e = 10, \quad f = 1$$

$$N(0) = 10, \quad \rho(0) = 100, \quad N'(0) = 0, \quad \rho'(0) = 0$$

Другие виды распределений амёб в пространстве в ходе численных экспериментов не обнаружены.

ВЫВОДЫ.

1. Впервые вычислены группы точечных преобразований допускаемые трехмерной моделью динамики популяции амеб.

2. Изучено сферически симметричное инвариантное стационарное решение.

3.На основе численного анализа модельной системы уравнений, описывающей стационарное сферически симметричное распределение амеб в пространстве установлено, что в зависимости от значений концентрации притягивающего вещества и плотности амеб (а также градиентов этих величин) в центре сферического распределения, возможны три типа стационарного распределения амеб:

- равномерное распределение
- быстрое монотонное убывание с увеличением расстояния от центра (концентрация в конечном объеме)
- затухающие пространственные колебания с выходом на «режим насыщения».

Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области математического моделирования и биофизики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grigoriev, Y.N. et al., Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics, Lect. Notes Phys. 806 (Springer, Dordrecht 2010).

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965.

3. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание, 1989.

4. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.Х. Ибрагимов. – М.: Знание, 1991.

5. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования / Перевод с англ. И.С. Емельяновой. Нижний Новгород: издательство Нижегородского госуниверситета, 2007.

6. Ибрагимов Н.Х., Руденко О.В. Принцип использования симметрий в теории нелинейных волн / Акустический журнал, том 50, № 4. – М., 2004. – с. 481-495.

7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

8. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.

9. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи.Методы.Примеры. – 2-е изд., испр.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.

10. Shevyakov A.F. Symbolic Computation of Local Symmetries of Nonlinear and Linear Partial and Ordinary Differential Equations, Math. Comput. Sci., 2010; 4, pp. 203–222.