Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный педагогический университет»

Е.Н. ЭРЕНТРАУТ

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Учебное пособие
Второе издание, дополненное

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике
Министерства образования РФ (Челябинское отделение)
в качестве **учебного пособия**
для спецкурсов и факультативных занятий со школьниками

Челябинск
2004

УДК 51(07)
ББК 74.262
Э 75

Э 75 Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников: Учебное пособие. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2004. – 119 с.
ISBN 5-85716-532-6

В пособии представлен большой набор задач с практическим содержанием: экономического характера, отражающих проблемы окружающей среды, взятых из смежных с математикой учебных предметов – физики, химии, биологии, экологии, экономики, географии. Все задачи рассмотрены с целью проиллюстрировать практическое применение производной и интеграла и вызвать интерес учащихся к этому разделу курса.

Пособие позволяет улучшить организацию изучения основ математического анализа в школе и в вузе. Оно включает задачи прикладного характера из учебников Германии и может быть использовано учителями школ, преподавателями математического анализа и методики преподавания математики, а также студентами в ходе педагогической практики.

Во втором издании пособие пополнено новыми задачами. Кроме того, исправлены все замеченные опечатки и погрешности первого издания.

Работа поддержана грантом РФФИ – Урал № 04-01-96069.

Научный редактор:	М.М. Кипнис, д-р физ.-мат. наук, профессор
Рецензенты:	Г.А. Свиридюк, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой мат. анализа ЧелГУ
	С.М. Воронин, канд. физ.-мат. наук, доцент

ISBN 5-85716-532-6

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математические задачи с практическим содержанием – это такие задачи, которые связаны с применением математики в технике, физике, химии, экономике, биологии, медицине, экологии, а также в быту. В этом пособии рассмотрены задачи, которые можно решить с помощью производной и интеграла. Эти задачи не совсем обычны как по форме изложения, так и по применяемым методам решения.

Пособие состоит из пяти разделов. В первый раздел включены задачи из алгебры и геометрии, во второй – из физики, в третий – из экономики, в четвёртый – из биологии и химии, в пятый – задачи, связанные с экологическими проблемами. Каждый раздел состоит из трёх частей:

1. Применение производной.
2. Задачи на экстремум.
3. Применение интеграла.

Одним из важнейших понятий математического анализа является производная функции. Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной. В геометрии производная характеризует крутизну графика, в механике – скорость неравномерного прямолинейного движения, в биологии – скорость размножения колонии микроорганизмов, в экономике – отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат), в химии – скорость химической реакции.

В приложениях математики к решению конкретных задач приходится иметь дело с величинами, числовые значения которых получены путём измерений и, следовательно, точное их значение неизвестно. Если исходные данные содержат погрешности измерений, то применение точных методов вычислений нецелесообразно. Для упрощения и облегчения вычислений в таких случаях лучше использовать приближённые методы. Теоретической основой одного из простейших приёмов приближённых вычислений является понятие дифференциала. Приближённое значение приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy, причём $dy = y'(x)dx$. (См. блок задач **А)**.

Среди многих задач, решаемых с помощью производных, наиболее важной является задача нахождения экстремума функции и связанная с ней задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения соответствующих функций.

Функция может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Чтобы найти точки экстремума функции $y = f(x)$ нужно:

1) найти производную y' и критические точки, в которых $y' = 0$ или не существует, а сама функция непрерывна, и которые лежат внутри области определения функции;

2) определить знак y' слева и справа от каждой критической точки:

если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

а) y' меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 есть точка максимума;

б) y' меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 есть точка минимума;

в) y' не меняет знака, то в точке x_0 нет экстремума.

Иногда проще исследовать критические точки, где $y' = 0$, по знаку второй производной. Для этого необходимо найти вторую производную y'' и определить ее знак в каждой критической точке x_0:

♦ если $y''(x_0) > 0$, то x_0 точка минимума;

♦ если $y''(x_0) < 0$, то x_0 точка максимума;

♦ если $y''(x_0) = 0$, то такую критическую точку можно исследовать, изучая поведение первой производной в окрестности этой точки.

Говоря об экстремальных задачах, мы имеем в виду задачи школьного курса математики, которые связаны с понятиями наибольшего, наименьшего, наилучшего, наиболее выгодного.

Чтобы решить задачу на оптимизацию, нужно:

1) выразить оптимизируемую величину как функцию некоторой переменной и найти область определения этой функции;

2) найти критические точки, лежащие внутри области определения, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида);

3) вычислить значения функций на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$;

4) сравнить полученные значения функции: самое большее из них будет наибольшим значением, а самое меньшее – наименьшим значением функции на всей области определения.

Примечание: если стационарная точка одна, принадлежащая области определения, то иногда достаточно определить знак второй производной в этой точке и если, например, вторая производная в этой точке больше нуля, а необходимо найти наименьшее значение, то в этой точке оно и будет; если точек две или более, то необходимо вычислить значения функции на концах и в стационарных точках.

Ко всем предложенным задачам в пособии даны решения. Некоторые задачи взяты из учебников Германии для школ (гимназий).

Следует отметить, что автор данной работы не стремился подбирать числовые данные в задачах с целью упрощения вычислительных процедур, поэтому при решении некоторых задач приходится проводить довольно громоздкие вычисления. Такие задачи рекомендуется решать, применяя правила приближённых вычислений.

Заметим, что многие задачи можно решить другими способами, однако наша цель показать применение элементов математического анализа.

Предлагаемые в пособии задачи помогут учителю в иллюстрации математических фактов и обосновании того значения, которое имеет внедрение достижений передовой науки, новой технологии и научной организации труда в промышленном и сельскохозяйственном производстве, а также в повышении производительности труда, снижении себестоимости продукции, режиме экономии, повышении качества производимой продукции.

В задачах, встречающихся на практике, часто функция не дается готовым выражением. В таких случаях по условию задачи нужно составить соотношение, связывающее функцию с тем переменным, от которого зависит максимум или минимум функции.

Главная цель написания этого пособия – показать школьникам, интересующимся физикой, биологией, химией и т.д., как можно использовать элементы математического анализа в соответствующей области науки.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Применение производной при решении задач из алгебры и геометрии

Предметом математического анализа является изучение переменных величин и зависимостей между ними. Понятие о функции и о пределе переменной величины составляет основу математического анализа. Ставя перед собой задачу исследовать свойства функций, мы должны уметь строить график исследуемой функции.

Умения строить графики функции и их читать, т.е. определять промежутки монотонности, экстремальные значения и другие характеристики функции по её графику – важный элемент математической культуры. Эти умения необходимы будущему технику, экономисту, инженеру, врачу. Во многих задачах график является лишь вспомогательным элементом решения. Отсюда и появляется необходимость познакомить учащихся с полным планом исследования и построения графиков. Общее исследование функций и построение их графиков удобно выполнять по следующей схеме:

1. Найди область определения функции.
2. Исследуй функцию на периодичность.
3. Исследуй функцию на четность.
4. Найди точки пересечения графика с осями координат.
5. Найди точки разрыва, найди асимптоты.
6. Исследуй функцию на экстремум.
7. Исследуй направление выпуклости графика функции, найди точки перегиба.
8. Используя все полученные результаты, построй график функции.

Задача 1

Определите, при каких значениях a уравнение $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$ имеет ровно два корня.

Решение

Представим данное уравнение в виде равенства двух функций.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 3 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = -a.$$

Исследуем функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 3$ при помощи производной и построим схематически её график.

1. Функция дифференцируема при любом $x \in R$ как целая рациональная функция.

2. Функция не является периодической.

3. Функция не является чётной и не является нечётной, т.к.

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x)^2 - 36(-x) - 3 = -2x^3 - 3x^2 + 36x - 3,$$

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

4. Найдём точку пересечения графика с осью ординат $x = 0$, $y = -3$.

5. Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна. Невертикальных асимптот график функции также не имеет, так как при $x \to \infty$ угловой коэффициент

$$k = \lim_{x \to \infty} x^3 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{36}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = \infty.$$

6. Найдём критические точки функции, её промежутки возрастания и убывания, экстремумы. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36.$ Следовательно, $f'(x) = 0$ в точках $x = -2$, $x = 3$, которые являются критическими. Найдём вторую производную: $f''(x) = 12x - 6$. Определим знаки второй производной в стационарных точках. Имеем

$f''(-2) < 0$, следовательно, $x = -2$ есть точка максимума;

$f''(3) > 0$, следовательно, $x = 3$ есть точка минимума.

$$f(-2) = 41, \quad f(3) = -84.$$

7. Исследуем функцию на выпуклость. Заметим, что $f''(x) = 0$ лишь при $x = \frac{1}{2}$. Так как в интервале $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ имеем $f''(x) < 0$, то на этом интервале функция выпукла вверх; так как на промежутке $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ имеем $f''(x) > 0$, то на этом промежутке функция выпукла вниз, а $x = \frac{1}{2}$ - точка перегиба. Воспользовавшись полученными результатами, построим график функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 3$.

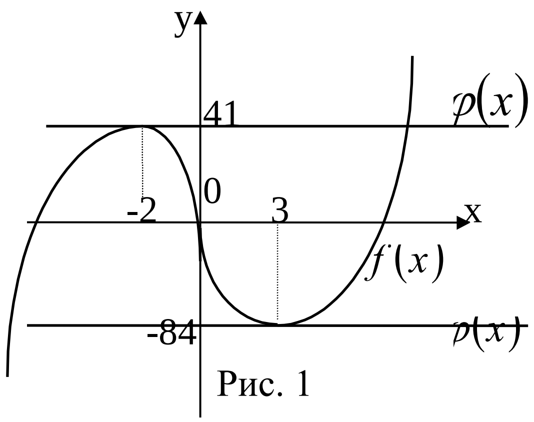


Рис. 1

График функции $\varphi(x) = -a$ есть прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами $(0; -a)$. Графики имеют две общие точки при $(-a) = 41$, т.е. $a = -41$ и $(-a) = -84$, т.е. $a = 84$. Таким образом, данное уравнение имеет ровно два различных корня при $a = -41$ и $a = 84$ (рис. 1).

Задача 2

Докажите, что уравнение $3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0$ имеет только один действительный корень.

Решение

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15$ и найдём её интервалы монотонности. Имеем

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2).$$

Производная $f'(x)$ обращается в нуль в четырёх точках: $-2, -1, 1, 2$. Эти точки разбивают числовую прямую на пять промежутков:

$$(-\infty;-2), \quad (-2;-1), \quad (-1;1), \quad (1;2), \quad (2;+\infty).$$

На каждом из указанных промежутков производная сохраняет постоянный знак. Отсюда заключаем, что на каждом из этих промежутков функция $y = f(x)$ монотонна, т.е. или возрастает, или убывает. Тогда график функции на каждом из указанных промежутков может пересекать ось абсцисс не более чем в одной точке. Это значит, что функция $y = f(x)$ на каждом из рассматриваемых промежутков может иметь не более одного корня, причём корни функции могут быть в тех и только тех промежутках, на концах которых функция имеет разные по знаку значения. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-2) < 0, \quad f(-1) < 0,$$
$$f(1) > 0, \quad f(2) > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Так как $f(x)$ имеет различные знаки только на концах промежутка $(-1;1)$, то заданное уравнение имеет лишь один действительный корень, лежащий внутри этого интервала.

Задача 3

Вычислите приближённое значение: 1) $\sqrt[4]{17}$; 2) $arctg\, 0{,}98$; 3) $\sin 29^0$.

Решение

Если требуется вычислить $f(x_1)$ и проще вычислить $f(x_0)$, $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютному значению разности

$x_1 - x_0 = dx$ можно заменить приращение функции её дифференциалом по формуле $f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx$ и отсюда найти приближённое значение искомой величины по формуле

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx \qquad (1)$$

1) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ при $x = 17 = x_1$. Пусть $x_0 = 16$, тогда $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$,

$$f'(x_0) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Bigg|_{x=16} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32}, \qquad dx = x_1 - x_0 = 1.$$

Подставляя в формулу (1), получим

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)dx = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031.$$

2) Пусть $arctg\,0{,}98$ есть частное значение функции $y = arctg\,x$ при $x = 0{,}98 = x_1$. Пусть $x_0 = 1$, тогда

$$y(x_0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(x_0) = \frac{1}{1+x^2}\Bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}, \quad dx = x_1 - x_0 = -0{,}02.$$

Пользуясь формулой (1), найдём:

$$arctg\,0{,}98 \approx y(x_0) + y'(x_0)dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$$

3) Полагая, что $\sin 29^0$ есть частное значение функции $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{180} \cdot 29 = x_1$ и что $x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \; y'(x_0) = \cos x\big|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx = x_1 - x_0 = \frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{180};$$

$$\sin 29^0 \approx y(x_0) + y'(x_0)dx = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}4848.$$

Задача 4(А)[*]

Вычислите приближённо объём сферического слоя, если известно, что радиус внутренней поверхности $R = 0{,}5$ м, а толщина равна 0,1 м (см. рис.2).

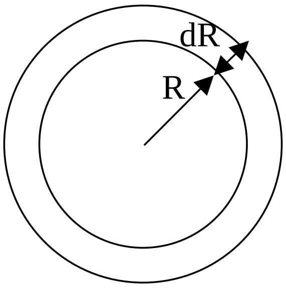


Рис. 2

Решение

Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Объём сферического слоя есть приращение объёма шара, вызванное изменением радиуса от 0,5 до 0,6 м. Приращение объёма шара заменяем дифференциалом:

$$\Delta V \approx dV = \frac{4}{3}\pi 3R^2 dR = 4\pi R^2 dR.$$

Подставим числовые значения $R = 0{,}5, \quad dR = 0{,}1$. Имеем

$$\Delta V \approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}01 = 0{,}314 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Задача 5 (геометрический смысл производной)

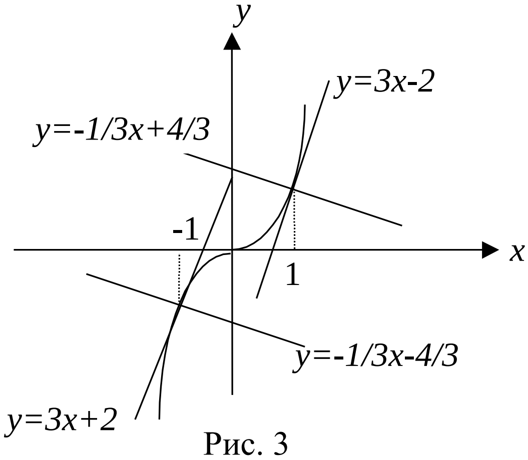


Рис. 3

Найдите уравнения касательных и нормалей к кривой $y = x^3$ в точках с абсциссами $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ (см. рис 3).

Решение

Уравнение касательной к кривой в точке $(x_0;\, f(x_0))$ –

[*] См. введение.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2)$$

Уравнение нормали к кривой в точке $(x_0; f(x_0))$ –

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (3)$$

Найдём значения функции $f(x) = x^3$ при $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$: $f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Так как $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, то $f'(-1) = 3,\ f'(0) = 0,\ f'(1) = 3$. Подставив найденные значения функции и её производной в (2) и (3), получим уравнения касательных и нормалей.

Касательные и нормали имеют соответственно уравнения:

а) в точке с абсциссой $x_1 = -1$: $y = 3x + 2$ и $y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$;

б) в точке с абсциссой $x_2 = 0$: $y = 0$ и $x = 0$;

в) в точке с абсциссой $x_3 = 1$: $y = 3x - 2$ и $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

Задача 6 (решение одной геометрической задачи с помощью производной из ЕГЭ)

Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса.

Решение

Площадь поверхности сферы вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$. По условию она равна 100π, отсюда следует, что $R = 5$.

Так как длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна $C = 2\pi R_1 = 6\pi$, то $R_1 = 3$. Выберем систему координат так, как показано на рис. 4. Известно, что $CO = R = 5$, $CL = R_1 = 3$.

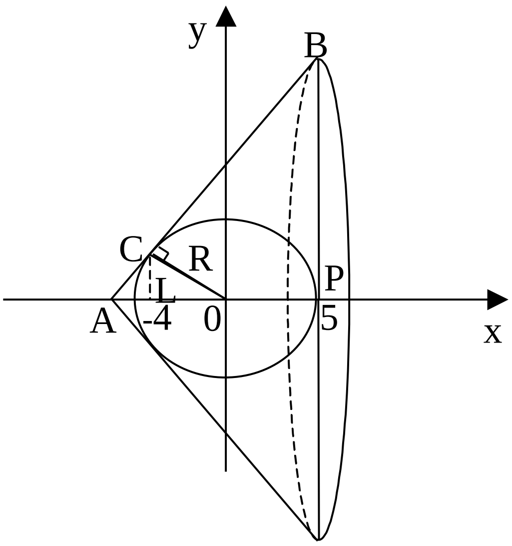


Рис. 4

Используя теорему Пифагора, найдём OL. Имеем

$$OL = \sqrt{R^2 - R_1^{\,2}} = \sqrt{25-9} = 4,$$

следовательно, точка L имеет координаты $L(-4{,}0)$. Нас интересует ордината точки B, так как BP - это радиус основания конуса. Заметим, что точка B лежит на прямой AB, которая является касательной к окружности в точке $C(-4{,}3)$. Уравнение окружности радиуса $R = 5$ имеет вид $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Нас интересует часть окружности, расположенная выше оси абсцисс: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Найдём уравнение касательной к этой кривой и вычислим значение функции в точке $x = 5$.

Воспользуемся формулой (2), для этого найдём $y(x_0)$, $y'(x_0)$:

$$y(-4) = \sqrt{5^2 - (-4)^2} = 3.$$

Так как $y'(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$, то $y'(-4) = \frac{4}{3}$.

Таким образом, уравнение касательной имеет вид

$$y = 3 + \frac{4}{3}(x+4) = \frac{4}{3}x + 8\frac{1}{3},$$

$$\text{отсюда } y(5) = 3 + \frac{4}{3}(5+4) = 15.$$

Следовательно, радиус основания конуса равен 15.

Задачи на экстремум

Задача 7

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x-2)$ на отрезках: а) $[-8;-1]$, б) $[-1;1]$.

Решение

Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и имеет производную $f'(x)=\dfrac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}$ на всей числовой прямой, кроме $x=0$:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)+x^{\frac{2}{3}}=\frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{3x}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Критическими точками данной функции будут $x=0$ и $x=0{,}8$.

а) На отрезке $[-8;-1]$ данная функция возрастает, т.к. $f'(x)>0$ для всех $x\in[-8;-1]$. Следовательно, на отрезке $[-8;-1]$ функция принимает наименьшее значение при $x=-8$, а наибольшее при $x=-1$:

$$f_{наим}=f(-8)=-40,\qquad f_{наиб}=f(-1)=-3.$$

б) Обе критические точки функции принадлежат отрезку $[-1;1]$. Следовательно, наибольшее и наименьшее значения данной функции на $[-1;1]$ находятся среди значений:

$$f(-1)=-3;\qquad f(0)=0;\qquad f(0{,}8)\approx-1{,}03;\qquad f(1)=-1.$$

Наименьшее значение функция принимает при $x=-1$, а наибольшее при $x=0$. При этом $f_{наим}=-3$, $f_{наиб}=0$.

Задача 8

Найдите наибольшую площадь прямоугольника, вершины которого находятся в начале декартовой системы координат, на положительной полуоси $0x$, на положительной полуоси $0y$ и на параболе $y = 4 - x^2$.

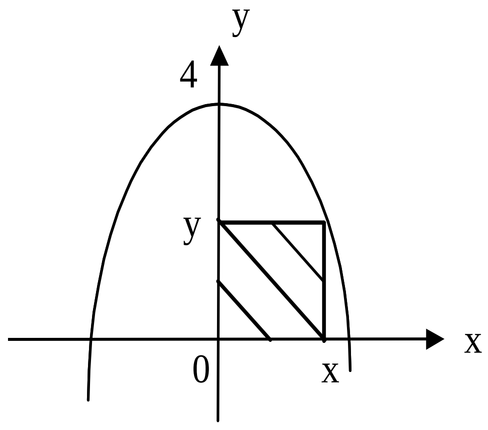


Рис. 5

Решение

Обозначим стороны прямоугольника через x и y. Тогда его площадь $S = x \cdot y$ (рис. 5). Выразим y через x, исходя из того, что одна из вершин находится на параболе $y = 4 - x^2$. Заменяя y в выражении площади, имеем $S(x) = x \cdot (4 - x^2)$, где x, согласно условию задачи, изменяется на отрезке $[0; 2]$. Следовательно, $0 \le x \le 2$. Ищем далее наибольшее значение функции $S(x)$ на указанном отрезке. $S'(x) = (4 - x^2) + x \cdot (-2x) = 4 - 3x^2$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Учитывая область определения, получаем лишь одну критическую точку $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. $S''(x) = -6x$; т.к. $S''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$, то функция S в критической точке $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ достигает наибольшего значения. Следовательно, $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$.

Задача 9

Для каких двух положительных чисел, произведение которых равно восьми, сумма наименьшая.

Решение

Предположим, что x и y - искомые числа, тогда сумма: $S = x + y$. Из условия известно: $x \cdot y = 8$ выразим $y = \frac{8}{x}$. Подставим в $S = x + y$, получим функцию $S(x) = x + \frac{8}{x}$, где $x > 0$. Исследуем функцию: $S'(x) = 1 - \frac{8}{x^2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = -2\sqrt{2}$; $x_2 < 0$. Подставим x_1 в $S''(x) = \frac{16}{x^3}$. Получим $S''\left(2\sqrt{2}\right) > 0$. Следовательно, функция имеет наименьшее значение. Итак: при $x = 2\sqrt{2}$; $y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ достигается наименьшая сумма: $S = 4\sqrt{2}$.

Задача 10 [17,184]

Кривая CD задана уравнением $f(x) = \frac{7}{16}x^2 + 2$. Для какой точки Q, лежащей на кривой CD, площадь прямоугольника $RBPQ$, показанная на рис.6, будет наибольшая?

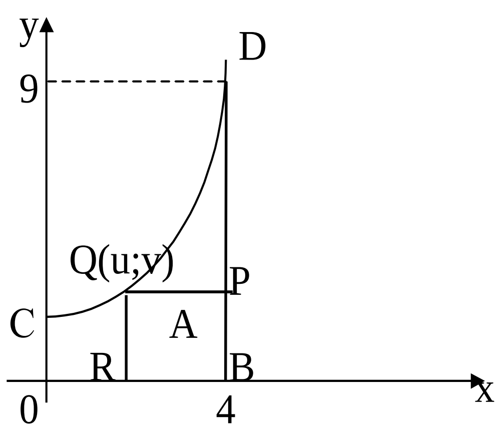


Рис. 6

Решение

Решение приводится из учебника [17]. Площадь прямоугольника A равна: $A = (4 - u) \cdot v$.

1. Промежуточные значения:

$v = f(u)$.

2. Исследуемая функция:

$$A(u) = (4 - u) \cdot \left(\frac{7}{16}u^2 + 2\right) = -\frac{7}{16}u^3 + \frac{7}{4}u^2 - 2u + 8, \text{ где } 0 \le u \le 4.$$

Исследуем на экстремум: $A'(u) = -\frac{21}{16}u^2 + \frac{7}{2}u - 2$. Следовательно,

$A'(u) = 0$ при $u_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{21}\sqrt{7}$, $\quad u_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{21}\sqrt{7}$. Вычислим

$$A''(u) = -\frac{21}{8}u + \frac{7}{2}.$$

$A''(u_1) = \frac{1}{2}\sqrt{7} > 0$, $\quad A''(u_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{7} < 0$. Таким образом при u_2 достигается локальный максимум. Вычислим $A(u_2) = \frac{200}{27} + \frac{8}{189}\sqrt{7} \approx 7{,}52$. Значения в крайних точках: $A(0) = 8$; $A(4) = 0$. Так как $A(0) > A(u_2)$ то наибольшая площадь будет достигнута, когда точка будет находиться на кривой CD в точке $Q(0;2)$.

До сих пор мы занимались исследованиями функций, заданных определёнными уравнениями. Однако чаще всего уравнение не задаётся, его приходится составлять по данным задачи.

Задача 11

Какой из прямоугольников с периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Решение

Прямоугольников с периметром $2p$ имеется бесконечное множество. Наша задача - выделить из этого множества прямоугольников прямоугольник, площадь которого будет наибольшей. Если через x обозначить длину одной из сторон прямоугольника, то длина другой стороны равна $p - x$, а площадь S такого прямоугольника равна

$x(p-x)$. Найдём критические точки функции $S = x(p-x)$, $x \in [0; p]$. $S' = p - 2x$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \frac{p}{2}$. Т.к. $S'' = -2 < 0$, функция S в критической точке достигает наибольшего значения. Следовательно, площадь $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$ будет наибольшей, а искомый прямоугольник – квадрат со стороной $\frac{p}{2}$.

Задача 12 [17,188]

Из круга радиуса r вырезают симметричную звезду (см. рис. 7а), и четыре вершины A, B, C, D соединяют в вершину, образуя правильную пирамиду, в основании которой – квадрат (см. рис.7б). Какой наибольший объём возможен?

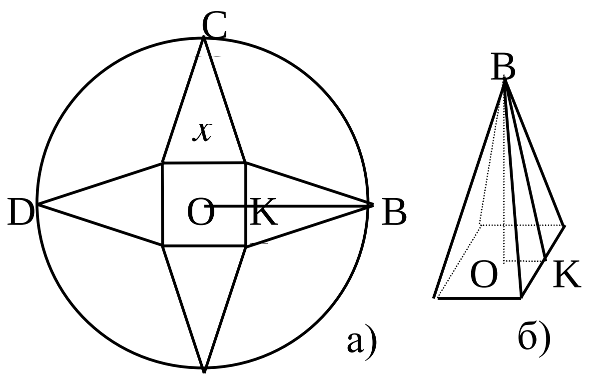


Рис. 7

Решение

Пусть сторона квадрата x, тогда объём пирамиды будет равен (см. рис. 7б) $V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot OB$. Рассмотрим треугольник OBK (см. рис.7б): $OK = \frac{x}{2}$, $BK = r - \frac{x}{2}$.

Следовательно, $OB = \sqrt{BK^2 - OK^2} = \sqrt{\left(r - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{r^2 - rx}$.

Имеем $V(x) = \frac{1}{3}x^2\sqrt{r^2 - rx}$, где $0 \le x \le r$. Фигуру на рис. 7б можно выстроить только при условии $0 \le x \le r$. Исследуем эту функцию:

$V'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\sqrt{r^2-rx}-x^2\frac{r}{6\sqrt{r^2-rx}}=\frac{4xr^2-5x^2r}{6\sqrt{r^2-rx}}$, где $0\le x\le r$. Следовательно, $V'(x)=0$ при $x=0$ и $x=\frac{4r}{5}$. При этом $V(0)=0$, $V\left(\frac{4}{5}r\right)=\frac{16\cdot r^3}{75\sqrt{5}}$, $V(r)=0$. Следовательно, объем пирамиды будет наибольшим при $x=\frac{4}{5}r$.

Задача 13

Найдите наибольший объём цилиндра, вписанного в данный конус.

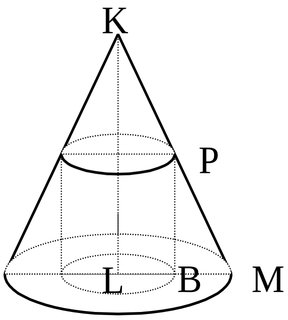


Рис. 8

Решение

Пусть задан конус с высотой H и радиусом R (рис. 8). Обозначим через h высоту цилиндра и через r радиус основания цилиндра, вписанного в данный конус. Обозначим $BM=x$. Тогда

$h=PB=x\cdot \operatorname{tg}K\hat{M}L=x\cdot\frac{H}{R}$ и $r=R-x$. Объём цилиндра V равен $\pi r^2 h$. В нашем случае $V(x)=\pi(R-x)^2\frac{xH}{R}$. Определим, при каком значении x объём цилиндра будет принимать наибольшее значение. Найдём производную $V'(x)$:

$$V'(x)=\frac{\pi H}{R}(R-x)^2+\frac{\pi H}{R}x\cdot 2\cdot(R-x)(-1)=\frac{\pi H}{R}(R-x)(R-x-2x)=$$

$=\frac{\pi H}{R}(R-x)(R-3x)$. Следовательно, $V'(x)=0$ при $x=\frac{R}{3}$. При

$x < \frac{R}{3}$ производная $V'(x) > 0$ и $V'(x) < 0$ при $x > \frac{R}{3}$. Следовательно, в точке $x = \frac{R}{3}$ функция $V(x)$ имеет максимум. Так как x может меняться от нуля до R, причём $V(0) = V(R) = 0$, то число $V\left(\frac{R}{3}\right) = \frac{4}{27}\pi HR^2$ является наибольшим значением объёма вписанных цилиндров.

Задача 14 [17,188]

В шар вписана правильная треугольная призма, в основании которой лежит правильный равносторонний треугольник. Какой наибольший объём может иметь призма?

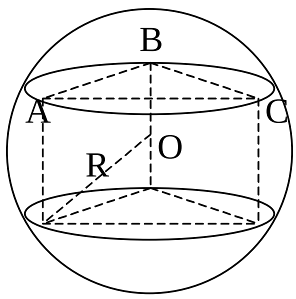


Рис. 9

Решение

Радиус шара обозначим R, длину стороны равностороннего треугольника – a, расстояние от центра шара до плоскости, содержащей основание призмы – h. Так как в основании призмы лежит правильный треугольник ABC (рис. 9), то его площадь равна: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Треугольник вписан в круг, тогда круг имеет радиус, равный $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Если M – центр круга, то из треугольника OAM выразим a. Имеем: $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + h^2 = R^2$. Следовательно, $a = \sqrt{3\cdot\left(R^2 - h^2\right)}$. Находим объём призмы как функцию переменной h: $V_{приз}(h) = S_{ABC}\cdot 2h = 3\left(R^2 - h^2\right)\cdot 2h = 6R^2h - 6h^3$, где $0 < h < R$.

Ищем критическую точку найденной функции: $V'_{приз}(h) = 6R^2 - 18h^2$.

Следовательно, $V'_{приз}(h) = 0$ при $h_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$. $V''(h) = -36h$, $V''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) < 0$.

Очевидно, что при $h = h_0$ функция имеет наибольшее значение. Получаем, что наибольший возможный объём рассматриваемых треугольных призм равен $\frac{4R^3}{\sqrt{3}}$.

Применение интеграла

Задача 15

Доказать неравенство $\sin 20^\circ < \frac{7}{20}$.

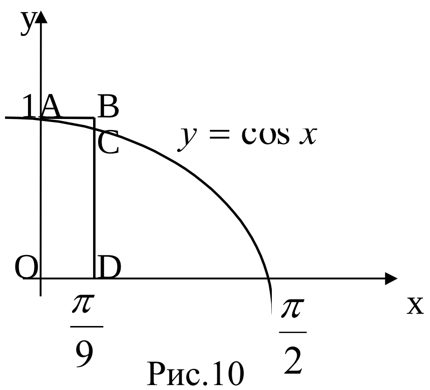


Рис.10

Решение

$$\sin 20^\circ = \sin\frac{\pi}{9} = \int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos x dx = S,$$

где S - площадь криволинейной трапеции OACD (см. рис. 10), а площадь прямоугольника OABD (содержащего криволинейную трапецию OACD) равна $S_1 = \frac{\pi}{9}$. Поэтому $\sin 20^\circ < \frac{\pi}{9}$.

Задача 16

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x + 5$ и $y = x + 1$ (см. рис. 11).

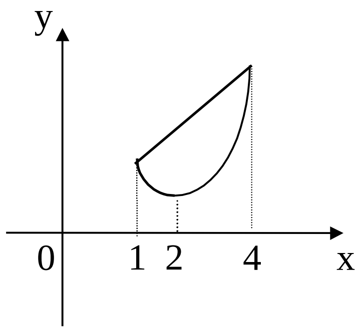


Рис. 11

Решение

Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = x + 1$ и $y = x^2 - 4x + 5$, для этого решим уравнение $x + 1 = x^2 - 4x + 5$. Из квадратного уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ находим $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Искомую площадь находим по формуле: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \quad (*)$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ – заданные непрерывные функции, а S площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам

$$a \le x \le b, \quad f_1(x) \le y \le f_2(x).$$

$$S = \int_1^4 \left(x + 1 - \left(x^2 - 4x + 5\right)\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= -\frac{1}{3}(64 - 1) + \frac{5}{2}(16 - 1) - 4(4 - 1) = -21 + 37{,}5 - 12 = 4{,}5.$$

Задача 17

На рис. 12 изображена фигура, ограниченная линиями $y_1 = -x^2 + 6x - 5$, $y_2 = -x^2 + 4x - 3$ и $y_3 = 3x - 15$. Найдите площадь этой фигуры.

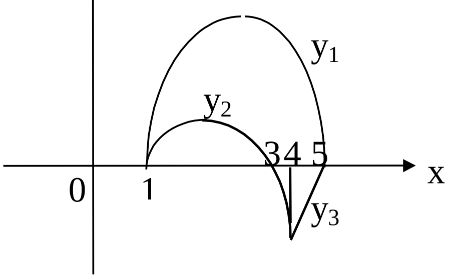


Рис. 12

Решение

Найдем абсциссы точек пересечения данных парабол с осью $0x$. Для этого решим два уравнения $-x^2 + 6x - 5 = 0$ и $-x^2 + 4x - 3 = 0$. Корнями первого уравнения являются числа $x=1$, $x=5$, а корнями второго уравнения являются числа $x=1$, $x=3$. Для определения абсциссы точки пересечения y_2 и y_3 решим уравнение $-x^2+4x-3=3x-15$. Находим, что $x_1=-3$, $x_2=4$, т.е. $x=4$. Вычислим площадь:

$$S=\int_1^5\left(-x^2+6x-5\right)dx-\int_1^4\left(-x^2+4x-3\right)dx-\int_4^5(3x-15)dx=\frac{73}{6}.$$

Задача 18 (вычисление длины дуги кривой)

Вычислите длину дуги полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2,-1)$ и $B(5,-8)$ (см. рис. 13).

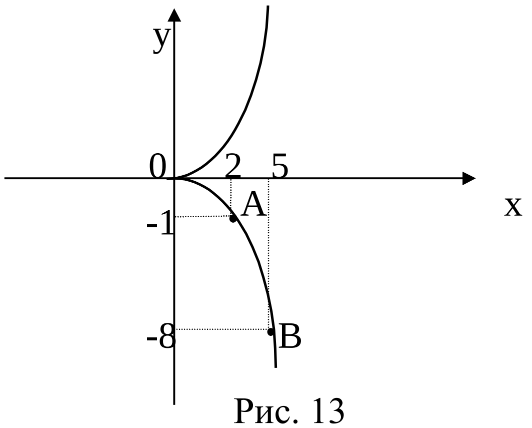


Рис. 13

Решение

Длина дуги в прямоугольной системе координат определяется формулой

$$L_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+(x')^2}\,dy.$$

Разрешаем данное уравнение относительно y и находим y': $y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}}$; $y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}$. Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична оси $0x$; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси $0x$. Подставляя в формулу, получим

$$L_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5\approx 7{,}63.$$

Задача 19 (вычисление объёма тела по площадям параллельных сечений)

Вычислите объём пирамиды, площадь основания которой равна S, а высота H (рис.14).

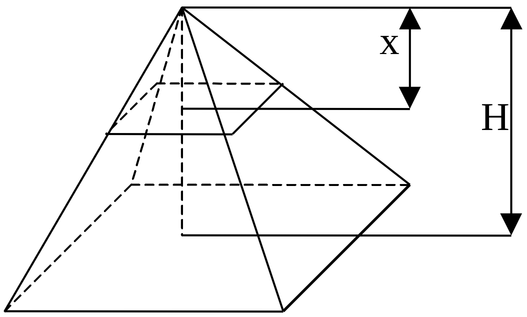


Рис. 14

Решение

Вычислим объём пирамиды по формуле: $V=\int_a^b S(x)dx$ (4),

где $S(x)$ – площадь поперечного сечения. Так как $\frac{S(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2}$, то

$S(x)=\frac{S}{H^2}x^2$. Следовательно, $V=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{1}{3}SH.$

Задача 20 (вычисление объёма тела вращения) [18,242]

Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=3$.

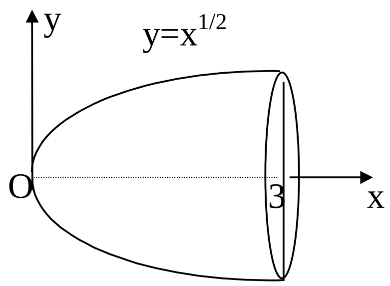


Рис. 15

Решение

Вычислим объём полученного тела (см. рис. 15) по формуле:

$V=\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2dx$, где $S(x)=\pi\cdot f^2(x)$ из формулы (4). Имеем

$V=\pi\cdot\int_0^3 xdx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\pi\left[\frac{9}{2}-0\right]=\frac{9}{2}\pi$, т. е. тело имеет объём около 14,14 кубических единиц.

ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

При решении задач этого раздела используются формулы, приведённые в таблице 1.

Таблица 1

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A– работа F– сила N– мощность x – перемещение t – время	$F(x) = A'(x)$ $N(t) = A'(t)$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$ $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)dt$
m– масса тонкого стержня x– координата точки стержня ρ – линейная плотность	$\rho(x) = m'(x)$	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)dx$
q – электрический заряд I – сила тока t – время	$I(t) = q'(t)$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$
S – перемещение v – скорость t – время	$v(t) = S'(t)$	$S = \int_{t_1}^{t_2} v_1(t)dt$
Q– количество теплоты c – теплоёмкость t – время	$c(t) = Q'(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

Механический смысл производной. Рассмотрим уравнение неравномерно прямолинейного движения $S = f(t)$, определенное на множестве (α, β). Зафиксируем последовательно два момента времени t_0 и t_1. Обозначим $\Delta t = t_1 - t_0$.

Средней скоростью движения, соответствующей некоторому промежутку времени Δt, называется отношение пройденного за этот промежуток пути ΔS к Δt: $v_{ср} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Средняя скорость не характеризует движение в определенные моменты времени. Для того, чтобы найти скорость движения в данный момент t_0, необходимо уменьшать промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$. Чем меньше промежуток Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в данный момент, т.е. от мгновенной. Точное значение скорости $v_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Учитывая и определение производной, заключаем, что производная от пути по времени равна скорости неравномерно прямолинейного движения в данный момент t_0, т.е. мгновенной скорости при $t = t_0$.

Производная в физике и технике

Задача 1

Движение определяется уравнением $S = 2t^2 - t + 1$ (t в секундах, S в метрах). Найти скорость движения при $t = 5$с. В какой момент времени скорость была равна нулю?

Решение

Получаем $v(t) = S'(t) = 4t - 1, \quad v(5) = 4 \cdot 5 = 20$ м/с.

Если $v = 0$, то $4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1/4$ с.

Задача 2 [17,35]

Вид склона сбоку приближённо описывается функцией $y = \sqrt{x}$ (единичный отрезок равен 5 м). Скат AB (см. рис. 16) составляет угол 14^0 с горизонталью.

1) Где начинается подъём на склон, где он заканчивается на территории склона?

2) Какова длина подъёма?

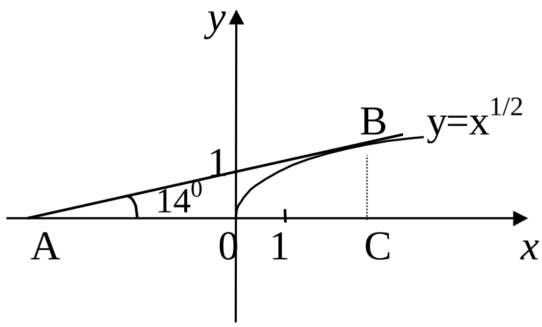


Рис. 16

Решение

Представим подъём в виде части прямой AB. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b.$ Так как скат на склоне составляет 14^0, то

$$k = \mathrm{tg}14^0 \approx 0{,}25 = \frac{1}{4}.$$

С другой стороны прямая AB является касательной к функции $y = \sqrt{x}$, следовательно, $k = y'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Имеем $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$. Отсюда следует, что $x = 4$, а $y = \sqrt{4} = 2$. Подставим координаты точки в уравнение $y = \frac{1}{4}x + b$ и найдем b. Отсюда $b = 1$. $y = \frac{1}{4}x + 1$ – есть уравнение касательной к функции $y = \sqrt{x}$ в точке B (4; 2).

Прямая $y = \frac{1}{4}x + 1$ пересекает ось абсцисс в точке A при $y = 0$, то $x = -4$. Расстояние от начала подъёма до склона 20 м.

Таким образом, подъём закончится от его начала на расстоянии в 20 м и на высоте 10 м. Длина всего пути будет найдена из прямоугольного треугольника ABC. Имеем по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{40^2 + 10^2} = 10\sqrt{17} \approx 41{,}23 \text{ м.}$$

Задача 3 [17,180]

При извержении вулкана камни горной породы выбрасываются перпендикулярно вверх с начальной скоростью $v_0 = 120$ м/с. Какой наибольшей высоты достигнут камни, если сопротивлением ветра пренебречь?

Решение

Вещество выбрасывается перпендикулярно вверх. Высота камня h, как функция времени такова: $h(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$,($h$ в метрах; t в секундах). Отсюда следует: $h'(t) = v(t) = v_0 - g \cdot t$. В верхней точке: $v(t) = 0$. Известно, что $g = 9{,}8$ м/с^2. Следовательно, $0 = 120 - 9{,}8 \cdot t$ и отсюда $t \approx 13$. Продолжительность подъёма составляет 13 сек. Тогда $h(13) = 120 \cdot 13 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 13^2 = 745$ м, т. е. камни горной породы достигнут уровня 720 м от края вулкана.

Задача 4

Масса радиоактивного вещества в момент времени t выражается по формуле $m = M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, где T – постоянная (так называемый период полураспада), а M – первоначальная масса вещества, т.е. масса вещества в момент времени $t = 0$. Докажите, что скорость распада вещества в момент времени t_0 пропорциональна массе вещества m_0 в этот момент времени.

Решение

Так как $\frac{1}{2} = e^{-\ln 2}$, то получаем

$$m = M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = M\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{T}} = Me^{-\frac{\ln 2}{T}t}.$$

Скорость распада, т.е. скорость изменения массы вещества относительно времени, есть производная массы по времени: $v = \frac{dm}{dt}$. Находим

$$v = \left(Me^{-\frac{\ln 2}{T}t}\right)' = Me^{-\frac{\ln 2}{T}t}\left(-\frac{\ln 2}{T}\right) = -\frac{\ln 2}{T}M\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{T}} = -\frac{\ln 2}{T}M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

В момент времени t_0 имеем $v = -\frac{\ln 2}{T} \cdot M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_0}{T}} = -\frac{\ln 2}{T} \cdot m_0$. Таким образом, скорость радиоактивного распада в момент времени t_0 пропорциональна количеству вещества в этот момент времени: $v = km_0$, где $k = -\frac{\ln 2}{T}$.

Задача 5

Количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0°С до t°С, определяется формулой $Q = t + 2 \cdot 10^{-5}t^2 + 3a \cdot 10^{-7}t^3$. Теплоёмкость воды при $t = 100^\circ$С равна 1,013. Найдите значение параметра a.

Решение

Теплоёмкость $c(t) = Q'(t) = 1 + 4 \cdot 10^{-5}t + 9a \cdot 10^{-7}t^2$. Так как при $t = 100$ значение $c(t) = 1{,}013$, отсюда получаем уравнение относительно a. Имеем $1+4\cdot10^{-5}\cdot100+9a\cdot10^{-7}\cdot100^2=1{,}013$. Следовательно, $a=1$.

Задача 6 [19,193]

Лестница длиной 5 м приставлена к стене таким образом, что верхний её конец находится на высоте 4 м (рис. 17). В некоторый момент времени лестница начинает падать, при этом верхний конец приближается к поверхности земли с постоянным ускорением 2 м/с^2. С какой скоростью удаляется от стены нижний конец лестницы в тот момент, когда верхний конец находится на высоте 2 м?

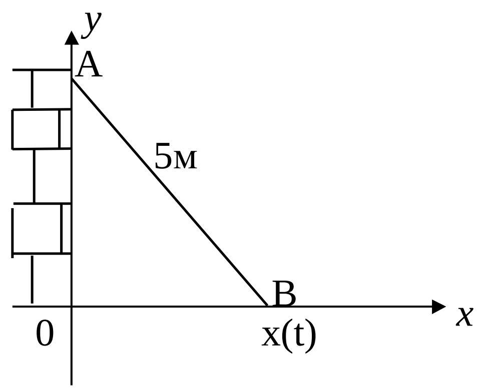


Рис. 17

Решение

Пусть верхний конец лестницы находится в момент времени t на высоте $y(t)$, $y(0)=4$, а нижний конец находится на расстоянии $x(t)$ от основной стены. Тогда высота описывается формулой

$y(t)=4-\dfrac{at^2}{2}=4-t^2$, где $t>0$. Для нахождения момента времени t, когда $y(t)=2$, имеем уравнение $4-t^2=2$. Следовательно, $t=\sqrt{2}$. По теореме Пифагора расстояние $x(t)=\sqrt{25-\left(4-t^2\right)^2}=\sqrt{9+8t^2-t^4}$,

скорость этого изменения $v(t)=x'(t)=\dfrac{8t-2t^3}{\sqrt{9+8t^2-t^4}}$.

При $t=\sqrt{2}$ эта скорость равна $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$ м/с.

Задачи на экстремум

Задача 7

Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $S(t)=5t+2t^2-\frac{2}{3}t^3$, S – путь в метрах, t – время в секундах. В какой момент времени t скорость движения будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

Решение

Нас интересует скорость движения. Мгновенная скорость движения v есть производная пути S по времени t, т.е. $v=S'$. Функция имеет вид: $v(t)=5+4t-2t^2$. Эту скорость будем теперь рассматривать как функцию времени. Очевидно, $0<t$. Производная $v'(t)=-4t+4$ обращается в нуль в единственной точке $t=1$. Это значение и доставляет v максимальное значение, так как $v''(t)=-4$.
При $t=1$ скорость движения будет наибольшей: $v(1)=7$ м/с.

Задача 8

Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $W=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E – электродвижущая сила элемента, r – внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия W была наибольшей?

Решение

Так как нас интересует сопротивление цепи, то рассмотрим функцию $W(R)=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$. Очевидно, $R>0$. Исследуем эту функцию на экстремум: $W'(R)=\dfrac{E^2r-E^2R}{(r+R)^3}$. Следовательно, $W'(R)=0$ при $R=r$. Определим знак второй производной в этой точке: $W''(R)=E^2\left(\dfrac{2R-4r}{(r+R)^4}\right)$, $W''(R)\big|_{R=r}=E^2\left(\dfrac{2r-4r}{(2r)^4}\right)<0$. Следовательно, при $R=r$ отдаваемая элементом энергия будет наибольшей.

Задача 9

Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединённых сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Решение

Пусть r – сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединённых сопротивлений x и y. Тогда $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{r}$. С другой стороны, из условия задачи имеем: $x+y=R$. Выразим одну из переменных: $y=R-x$. Получили функцию: $r(x)=\dfrac{x(R-x)}{R}$, где $0<x<R$. Исследуем эту функцию на экстремум: $r'(x)=\dfrac{R-2x}{R}=0$. Следовательно, $x=\dfrac{R}{2}$. Определим знак второй производной в этой точке: $r''(x)\big|_{x=-\frac{R}{2}}=-\dfrac{2}{R}<0$, $\dfrac{R}{2}\in(0,R)$. Таким образом, $r(x)$ принимает максимальное значение при $x=\dfrac{R}{2}$.

Задача 10

Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, э.д.с. которого равна E, а внутреннее сопротивление и сопротивление подводящих проводов в сумме равны r. Какое сопротивление R должен иметь прибор, чтобы в нем выделялась максимальная мощность?

Решение

По закону Ома для полной цепи ток равен $I = \dfrac{E}{R+r}$, а по закону Джоуля – Ленца мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна $P(R) = I^2 R = \dfrac{E^2 R}{(R+r)^2}$. Исследуем на экстремум: $P'(R) = \dfrac{E^2 (r-R)}{(R+r)^3}$. Следовательно, $P'(R) = 0$ при $R = r$. Определим знак второй производной в этой точке $P''(R) = \dfrac{-E^2 (4r - 2R)}{(R+r)^4} < 0$ при $R = r$. Наибольшее значение полезной мощности равно $P_{\max} = \dfrac{E^2}{4r}$.

Задача 11

Лампа висит над центром круглого стола радиуса R (рис. 18). При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?

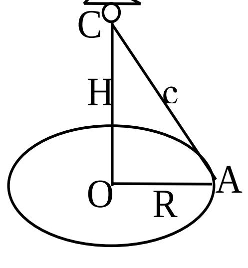


Рис. 18

Решение

Пусть предмет находится в точке A. Из условия задачи имеем: $E = k\dfrac{\cos\alpha}{c^2}$, где $c = \sqrt{H^2 + R^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{H}{c}$. Определим функцию: $E(H) = k\dfrac{H}{\left(\sqrt{H^2 + R^2}\right)^3}$, где $H > 0$. Исследуем её на экстремум: $E'(H) = k\dfrac{R^2 - 2H^2}{\sqrt{\left(H^2 + R^2\right)^5}}$. Следовательно, $E'(H) = 0$ при $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$. Определим знак второй производной в этой точке:

$$E''\left(H = \frac{\sqrt{2}}{2}R\right) = \frac{6H^3 - 9HR^2}{\sqrt{\left(H^2 + R^2\right)^7}} = \frac{3R^3\left(2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}R^2\right)^7}} < 0,$$

т.к. числитель меньше нуля. Итак, освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей, т.е. достигнет наибольшей величины, когда высота лампы над столом составит $H = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$.

Задача 12

Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.

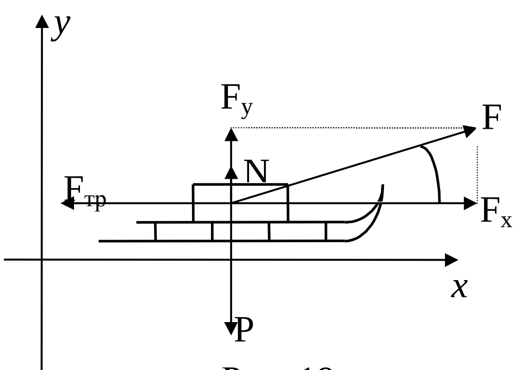


Рис. 19

Решение

Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие F_x и F_y (см. рис. 19). Сила нормального давления саней и вертикальной составляющей силы F: $N = P - F\sin\alpha$, поэтому сила трения $F_{тр} = kN = k(P - F\sin\alpha)$. Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x = F_{тр}$, то есть $F\cos\alpha = k(P - F\sin\alpha)$. Отсюда находим силу F как функцию угла α: $F(\alpha) = \dfrac{kP}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$. $F'(\alpha) = \dfrac{kP(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{(k\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$. Следовательно, $F'(\alpha) = 0$ при $k = tg\alpha$.

Определим знак второй производной в этой точке:

$$F''(\alpha) = \frac{(k^2+2)\sin^2\alpha - 2k\sin\alpha\cos\alpha + (2k^2+1)\cos^2\alpha}{(k\sin\alpha + \cos\alpha)^3}.$$

При $tg\alpha = k$ имеем $\alpha = arctgk$; $\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. Поэтому $F'' = \dfrac{k^4 + 2k^2 + 1}{\sqrt{(k^2+1)^5}} > 0$. Следовательно, сила F будет минимальной. При этом минимальное значение силы F равно $F_{\min} = \dfrac{kP}{\sqrt{1+k^2}}$.

Из решения этой задачи можно сделать практический вывод: когда необходимо везти на санях груз по дороге с большим коэффициентом трения (например, если дорога посыпана песком), нужно тянуть сани за короткую веревку. Если же коэффициент трения мал, веревка должна быть длинной.

Задача 13

В точке A прямолинейного рычага второго рода, находящейся на расстоянии d сантиметров от его точки опоры, подвешен груз P килограммов. Собственный вес рычага составляет k килограммов на каждый сантиметр его длины. Какой длины должен быть этот рычаг, чтобы сила F, приложенная к его другому концу и уравновешивающая груз и собственный вес рычага, имела наименьшую величину?

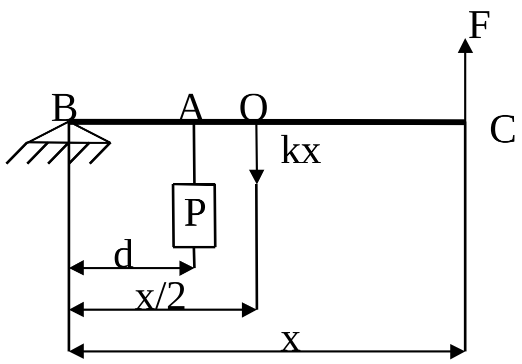


Рис. 20

Решение

Пусть длина рычага равна x сантиметрам. Тогда его собственный вес составляет kx килограммов и приложен на расстоянии $\frac{x}{2}$ сантиметров от точки опоры (см. рис. 20). На основании закона равновесия рычага имеем $Pd + kx\cdot\frac{x}{2} = Fx,\ F(x) = \frac{Pd}{x} + \frac{kx}{2}$, где $x > 0$. Исследуем функцию на экстремум: $F'(x) = -\frac{Pd}{x^2} + \frac{k}{2}$. Следовательно, $F'(x) = 0$ при $x = \pm\sqrt{\frac{2Pd}{k}}$. Т.к. $x > 0$, то определим знак второй производной в точке $x = \sqrt{\frac{2Pd}{k}}$. Имеем: $F''\left(\sqrt{\frac{2Pd}{k}}\right) = 2\cdot\left.\frac{Pd}{x^3}\right|_{x=\sqrt{\frac{2Pd}{k}}} > 0$.

Следовательно, $F_{наим} = \sqrt{2Pdk}$. Этот рычаг должен иметь длину $x = \sqrt{\frac{2Pd}{k}}$ см.

Задача 14

Между экраном и расположенной на расстоянии l от него светящейся точкой требуется поместить собирательную линзу, чтобы получить на экране изображение этой точки. Определите наибольшее допустимое для этой цели фокусное расстояние линзы и соответствующее расстояние линзы от светящейся точки.

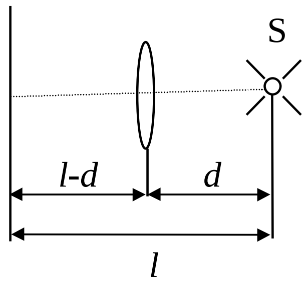


Рис. 21

Решение

Обозначим искомое фокусное расстояние линзы буквой F, а соответствующее расстояние линзы от светящейся точки – буквой d (см. рис. 21). Тогда расстояние от линзы до экрана составит $l-d$. Поэтому, полагая в формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ величину $f=l-d$, получим, что $\frac{1}{d}+\frac{1}{l-d}=\frac{1}{F}$, откуда после сокращения найдём, что $F(d)=-\frac{1}{l}d^2+d$, где $0<d<l$. Исследуем на экстремум: $F'(d)=-\frac{2d}{l}+1$. Следовательно, $F'(d)=0$ при $d=\frac{l}{2}$. Так как $F''(d)=-\frac{2}{l}<0$, то F достигает наибольшей величины при $d=\frac{l}{2}$ и $F_{наиб}=\frac{l}{4}$.

Задача 15 [18,215]

Известно, что прочность балки T с прямоугольным сечением изменяется прямо пропорционально ширине b и квадрату высоты h

(см. рис. 22). Таким образом, $T = k \cdot b \cdot h^2$.

а) Каковы должны быть размеры сечения балки наибольшей прочности, если балка выпилена из круглого бревна данного диаметра $d = 60$ см. Как выбрать b и h? Вычислите отношение $h : b$.

б) Для прогиба d балки длины l, ширины b и высоты h с нагрузкой L имеем $d = c \cdot L \cdot \dfrac{l^3}{h^3 b}$. Как изменится прогиб, когда l, h и b удвоятся?

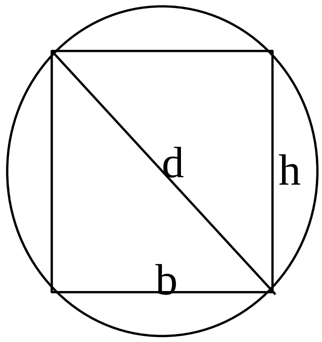


Рис. 22

Решение

а) По условию задачи прочность $T = k \cdot b \cdot h^2$, но $h^2 = d^2 - b^2$. Отсюда

$$T(b) = k \cdot \left(d^2 b - b^3\right), \text{ где } b > 0.$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$T'(b) = \left(d^2 - 3b^2\right) \cdot k.$$

Следовательно, $T'(b) = 0$ при $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

Определим знак второй производной в этой точке:

$$T''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = -6 \cdot k \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} < 0.$$

Следовательно, при $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ прочность балки будет наибольшей.

Найдём h. Имеем $h = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot d$, так как $d = 60$ см, то $h = 60 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ см. Итак, $b = \dfrac{60}{\sqrt{3}}$ см, $h = 60 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ см. Отношение $\dfrac{h}{b} = \sqrt{2}$.

б) Эту часть задания мы предлагаем решить самостоятельно.

Задача 16

На стене висит картина. Нижний конец её на 75см, а верхний на 3м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

Решение

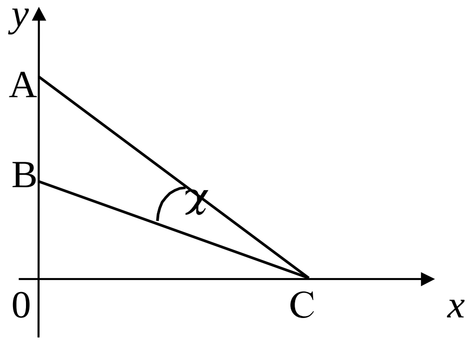


Рис. 23

Пусть глаз наблюдателя находится в точке $C\ (x;0)$, верхний край картины – в точке $B(0;a)$, нижний край – в точке $A(0;b)$ (см. рис. 23), $a = 3$ м, $b = 0{,}75$ м. Тогда

$AC = \sqrt{x^2 + b^2}$, $BC = \sqrt{x^2 + a^2}$, по теореме косинусов

$$AB^2 = (a-b)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\alpha =$$

$$= \left(x^2 + b^2\right) + \left(x^2 + a^2\right) - 2\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)\cdot\left(x^2 + b^2\right)} \cdot \cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha = \dfrac{x^2 + b^2 + x^2 + a^2 - (a-b)^2}{2\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)\cdot\left(x^2 + b^2\right)}} = \dfrac{x^2 + ab}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)\cdot\left(x^2 + b^2\right)}}$.

Поскольку $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, а на этом промежутке $\cos\alpha$ убывает, то задача сводится к нахождению точки минимума функции

$f(x) = \dfrac{x^2 + ab}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)\cdot\left(x^2 + b^2\right)}}$ на промежутке $(0;+\infty)$. Производная

$$f'(x) = \frac{(a-b)^2\left(x + \sqrt{ab}\right)x\left(x - \sqrt{ab}\right)}{\left(\left(x^2 + a^2\right)\cdot\left(x^2 + b^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Таблица 2

x	$\left(0; \sqrt{ab}\right)$	$\sqrt{ab}$	$\left(\sqrt{ab}; \infty\right)$
f'	$-$	0	$+$
f	убыв.	min	возр.

Критическая точка $x = \sqrt{ab} \in (0,+\infty)$. Исследуем эту критическую точку по знаку производной $f'(x)$ слева и справа от неё, как это показано в таблице, убеждаемся, что критическая точка $x=\sqrt{ab}$ есть точка минимума. Таким образом наблюдатель должен стоять на расстоянии $\sqrt{0{,}75\cdot 3}$ м=1,5 м от стены.

Применение интеграла

Задача 17 (о вычислении пути)

Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=3+3t^2$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 секунд.

Решение

По формуле находим $S=\int\limits_0^5\left(3+3t^2\right)dt=\left(3t+t^3\right)\Big|_0^5=15+125=140$ м.

Задача 18

Имеется неоднородный стержень длины l. Какова масса куска стержня, если линейная плотность ρ стержня выражается законом $\rho(x)=3x-\sin 2x,\ \ x\in[0,l]$?

Решение

По формуле из таблицы находим:

$$m=\int\limits_0^l(3x-\sin 2x)dx=\left(\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^l-\int\limits_0^l 2\sin x\cos x dx=\frac{3l^2}{2}-2\int\limits_0^l\sin x d(\sin x)=$$

$$=\frac{3l^2}{2}-\left(\sin^2 x\right)\Big|_0^l=\frac{3l^2}{2}-\sin^2 l.$$

Задача 19

Камень подброшен вертикально вверх с крыши здания высотой 20 м. Какова начальная скорость камня, если через 1 с он находился на высоте 30 м?

Решение

Пусть камень подброшен вертикально вверх со скоростью v_0. Скорость камня равна $v(t) = v_0 - gt,$ где $g -$ ускорение свободного падения. Камень будет лететь вверх до момента времени $t = 1$с. Положив в формуле $S = \int\limits_a^b v(t)dt$ $v(t) = v_0 - gt,\ a = 0,\ b = 1,$ $S = 30 - 20 = 10$м, получим

$$10 = \int\limits_0^1 (v_0 - gt)dt = \left. \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) \right|_0^1 = v_0 - \frac{g}{2}.$$

Следовательно, $v_0 = 10 + \frac{g}{2} = 14{,}9$ (м/с), где $g = 9{,}8$ м/с^2.

Задача 20 (о силе давления жидкости)

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдите силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м $\times$ 0,7 м.

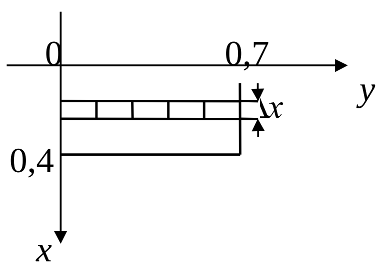


Рис. 24

Решение

Выберём систему координат так, чтобы оси $0y$ и $0x$ соответственно содержали верхнее основание и вертикальную стенку аквариума (см. рис. 24).

Для нахождения силы давления воспользуемся формулой

$P = g\rho\int\limits_a^b xf(x)dx$, где g – ускорение силы тяжести, ρ – плотность жидкости. Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x) = 0{,}7, x \in [0;0{,}4]$. Следовательно,

$$P = 1000g\int\limits_0^{0,4} 0{,}7 \cdot xdx = 700g\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,4} = 56g.$$

Имеем $P \approx 548{,}8$ Н ($g \approx 9{,}8$ м/с^2)

Задача 21 [18,239]

Сила в 2 Н растягивает пружину на 4 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 4 см.

Решение

По закону Гука $F = kx$, т.е. сила, растягивающая пружину на величину x, пропорциональна этому растяжению. Из условия $2 = k \cdot 0{,}04$ находим коэффициент растяжения k, он равен 50. По формуле находим

$$A = \int\limits_0^{0,04} 50xdx = 25x^2\Big|_0^{0,04} = 0{,}04\,\text{Дж}.$$

Задача 22

При растяжении пружины на 5 см затрачена работа в 29,43 Дж. Насколько растянется пружина, если затратить работу в 9,81 Дж.

Решение

Выразим все величины в СИ: $x_0 = 0$ м, $x_1 = 0{,}05$ м, $A_1 = 29{,}43$ Дж, $A_2 = 9{,}81$ Дж. Подставляя соответствующие данные в формулу для работы, получим:

$$29{,}43=\int_0^{0{,}05}kxdx,\quad 29{,}43=\frac{kx^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05},\quad 29{,}43=k\frac{0{,}0025}{2}.$$

Следовательно, $k=23544$. Далее $A_2=k\int_0^{x_2}xdx$. Подставим данные в

эту формулу: $9{,}81=23544\int_0^{x_2}xdx, 9{,}81=23544\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x_2}$. Отсюда следует,

что $x_2=\sqrt{\frac{9{,}81\cdot 2}{23544}}=0{,}000833\approx 0{,}0287$ м.

Задача 23

Пирамида Хеопса представляет собой правильную четырёх-угольную пирамиду высотой 146,6 м, а в основании которой - квадрат со стороной 232 м (см. рис. 25). Она построена из камня, плотность которого 2,5 г/см^3 . Найдите работу, затраченную при постройке (учитывая лишь подъем).

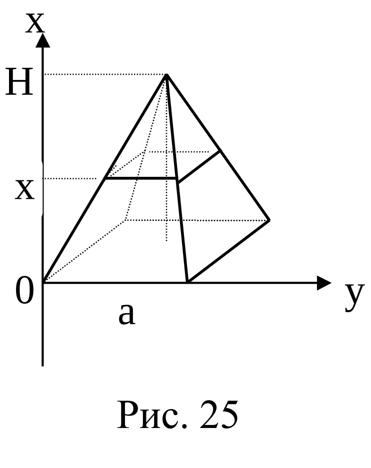


Рис. 25

Решение

Проведём вертикально вверх ось x с началом у основания пирамиды. По этой оси будем измерять высоту подъёма камней. Решим задачу в общем виде, а в ответ подставим числовые значения. Пусть высота пирамиды равна H, сторона основания a, плотность камня ρ. Обозначим через $A(x)$ работу, которую надо совершить для постройки пирамиды от основания до высоты x. Найдём сначала сторону у квадрата, получающегося в горизонтальном сечении пирамиды на высоте x. Из подобия треугольников получаем $\frac{H-x}{H}=\frac{y}{a}$, откуда $y=\frac{a}{H}(H-x)$. Рассмотрим тонкий слой пирамиды, расположенный на расстоянии x от основания. Пусть толщина слоя будет dx. Слой можно приблизительно считать параллелепипедом. Масса его dm равна $dm=\rho y^2 dx=\rho\cdot\frac{a^2}{H^2}(H-x)^2 dx.$ При подъёме этого слоя на высоту x была проделана работа $dA,$ равная $dA=(gdm)\cdot x,$ где ρ – плотность камня, а $g=9{,}8$ м/с^2. Имеем: $dA=g\rho\cdot\frac{a^2}{H^2}x(H-x)^2 dx.$

Отсюда $A=\int_0^H dA=g\rho\frac{a^2}{H^2}\int_0^H x(H-x)^2 dx=\frac{g\rho a^2}{H^2}\int_0^H\left(xH^2-2Hx^2+x^3\right)dx=$

$$=\frac{g\rho a^2}{H^2}\left(H^2\frac{x^2}{2}-2H\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H=\frac{g\rho a^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2}-\frac{2H^4}{3}+\frac{H^4}{4}\right)=\frac{g\rho a^2}{12}H^2.$$

Подставляя числовые данные $a=232$ м, $H=146{,}6$ м, $\rho=2{,}5$ г/см^3=2,5 т/м^3, получаем, что $A\approx 2{,}37\cdot 10^{12}$ Дж $\approx 2{,}4\cdot 10^5$ тонно-километров.

Задача 24

Газ заключён в цилиндр с подвижным поршнем. Вычислите работу, совершаемую газом при увеличении высоты части цилиндра, заключающей газ, от значения, равного h_1, до значения, равного h_2 (температура газа t постоянна).

Решение

Допустим, что радиус цилиндра равен r (см. рис. 26). Обозначив через h высоту цилиндра и через $V=V(r)$ его объём, получим:

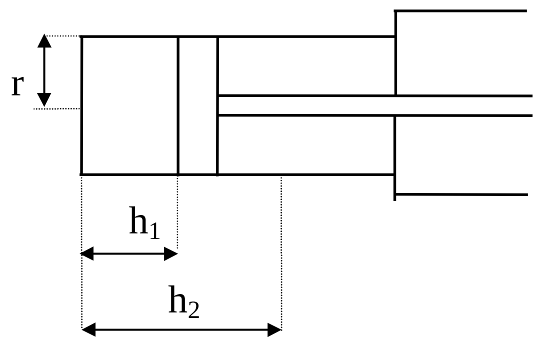


Рис. 26

$V = \pi \cdot r^2 h.$

Найдём силу $F(h)$, действующую на поршень. Для этого воспользуемся законом Бойля – Мариотта $pV = k$, где V – объём газа, p – давление, а $k = p_0 v_0$ – постоянная величина. Давление газа $p = \frac{k}{v}$. Площадь поршня равна $\pi \cdot r^2$. Следовательно, сила, с которой газ давит на поршень, равна $\frac{\pi r^2 k}{V}$. Поставив в это равенство вместо V его значение, получим: $\pi \cdot r^2 \cdot p = \frac{\pi r^2 k}{\pi r^2 h} = \frac{k}{h}$. Тогда

$$F(h) = \frac{k}{h}. \qquad A = \int_{h_1}^{h_2} \frac{k}{h} dh = k \ln h \Big|_{h_1}^{h_2} = k(\ln h_2 - \ln h_1) = k \ln \frac{h_2}{h_1}.$$

Задача 25 [18,240]

Чтобы поднять спутник массой $m = 1000$ кг на высоту h м (h – расстояние до центра Земли), мы должны преодолеть силу притяжения Земли F. Сила притяжения уменьшается с возрастанием высоты спутника. По закону притяжения Ньютона ($h > r;$ радиус $r \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м): $F(h) = 4 \cdot 10^{17} \cdot \frac{1}{h^2}$ (h в метрах; F в Ньютонах). Найдите работу W, затраченную на то, чтобы вывести спутник на высоту $H = 30000$ км от поверхности Земли (рис. 27) и на высоту при $H \to +\infty$.

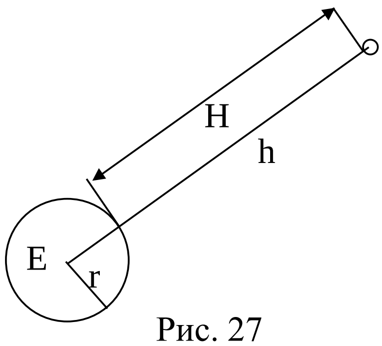


Рис. 27

Решение

На тело массой $m = 1000$ кг, находящегося на расстоянии h от Земли, действует сила земного притяжения $F(h) = 4 \cdot 10^{17} \cdot \frac{1}{h^2}$, где $h > r$ и $r \approx 6{,}4 \cdot 10^6$м. Мы вычислим работу, которую нужно проделать, чтобы преодолеть притяжение Земли. Чтобы тело достигло высоты H, должна быть совершена работа:

$$W = 4 \cdot 10^{17} \int_r^H \frac{1}{h^2} dh = 4 \cdot 10^{17} \left[-\frac{1}{h} \right]_r^H = 4 \cdot 10^{17} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{H} \right) = 4{,}9 \cdot 10^{10} \text{ Нм.}$$

Отсюда следует для $H \to +\infty$:

$$\lim_{H \to +\infty} W = \lim_{H \to +\infty} 4 \cdot 10^{17} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{H} \right) = \frac{4 \cdot 10^{17}}{r} = 6{,}3 \cdot 10^{10} \text{ Нм.}$$

Задача 26

Найдите работу за промежуток времени $\left[0, \frac{2\pi}{w} \right]$ переменного тока, изменяющегося по формуле $I = I_0 \sin wt$, если сопротивление цепи равно R.

Решение

Мощность в случае постоянного тока выражается формулой $W = I^2 R$, поэтому по формуле из таблицы 1 имеем

$$A = I_0^2 R \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \sin^2 wt dt = \frac{I_0 R \pi}{w}.$$

Следовательно, средняя мощность переменного тока равна

$$W_{cp} = \frac{A}{2\pi/w} = \frac{I_0^2}{2}.$$

Задача 27

Электрический заряд e_0, сосредоточенный в точке $x = 0$, отталкивает заряд e из точки $x = a$ в точку $x = b$. Вычислите работу силы отталкивания. *Указание.* По закону Кулона сила взаимодействия зарядов в вакууме равна $F = \dfrac{e_0 e}{x^2}$, где x – расстояние между зарядами.

Решение

$$A = e_0 e \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -e_0 e \frac{1}{x}\Big|_a^b = e_0 e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Задача 28

Сила тока в цепи с конденсатором меняется по закону $I = 10\cos t$, где амплитуда тока $I_{\max} = 10$ А. Найдите заряд, накапливающийся на пластинках конденсатора с начального момента $t_0 = 0$ до момента времени

а) $t = \dfrac{\pi}{2}$ (с); б) $t = \pi$ (с).

Решение

По определению сила тока есть производная заряда по времени. Чтобы найти заряд, нужно найти интеграл $q = \int_0^t I dt$. В результате заряд на пластинах конденсатора.

а) $q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 10\cos t dt = 10\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 10$ К; б) $q = \int_0^{\pi} 10\cos t dt = 10\sin t\Big|_0^{\pi} = 0.$

Конденсатор первую четверть периода заряжается, вторую четверть периода разряжается, и к концу полупериода заряд равен нулю.

Задача 29 [19,143]

В бурильную скважину вставлен стержень длиной 2 м. Площадь сечения стержня A=30 см^2. Какую массу воды, имеющую плотность ρ г/см^3, можно извлечь (считается объём воды, находящийся в стержне длиной 2 м)? Плотность воды зависит от высоты подъёма x см: $\rho(x) = 0{,}024 \cdot e^{-0{,}0048\,x}$. Какое количество воды поднимется на поверхность?

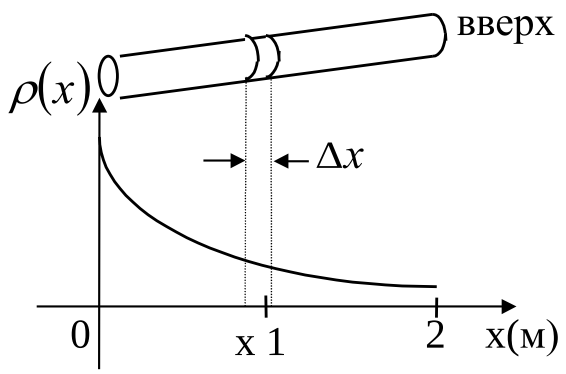


Рис. 28

Решение

Изобразим цилиндр с объёмом $\Delta V = A \cdot \Delta x.$ При изменении на маленькое расстояние Δx плотность изменится на малую величину (см. рис. 28). Вода в этом цилиндре имеет вес $\Delta m = \rho(x) \cdot \Delta V = \rho(x) \cdot A \cdot \Delta x.$

Масса всей воды в бурильном стержне будет равна:

$$m = \int_0^{200} \rho(x) \cdot A dx = \int_0^{200} 0{,}024 \cdot e^{-0{,}0048\,x} \cdot 30 dx = \left[-150 \cdot e^{-0{,}0048\,x}\right]\Big|_0^{200} =$$

$$= -150 \cdot \left(e^{-0{,}96} - 1\right) \approx 93 \text{ г.}$$

Задача 30 [19,143]

Через одну трубку (см. рис. 29) с внутренним радиусом $r = 3$ см льётся вода. Её скорость v м/с зависит от радиуса x струи воды: $v(x) = 2\left(9 - x^2\right)$. Определите объём воды, который пройдёт через эту трубку за 5 сек.

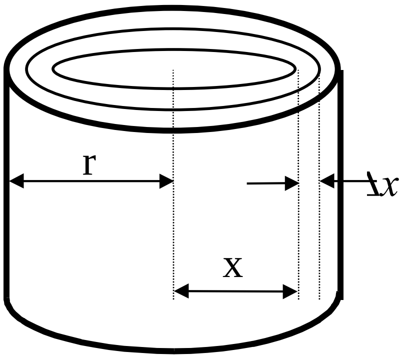


Рис. 29

Решение

$$V = 5\int_0^{0,03} 2\pi \cdot x \cdot 2\left(9 - x^2\right)dx =$$

$$= 20\pi \cdot \left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^{0,03} = 180\pi 10^{-4} \times$$

$$\times\left(4{,}5 - \frac{9 \cdot 10^{-4}}{4}\right) \approx 0{,}25 \text{ м}^3.$$

Задача 31

Реактивный самолёт в течение 20 с увеличил свою скорость от 240 до 720 км/ч. Считая движение равноускоренным, найти ускорение и путь, пройденный самолётом за это время.

Решение

Из условия задачи следует, что

$$v_0 = \frac{240 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = \frac{200}{3} \text{ м/с};$$

$$v_1 = \frac{720 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = 200 \text{ м/с}.$$

Скорость равноускоренного движения в зависимости от ускорения a и времени t описывается формулой $v = at + v_0$. Отсюда

$$a = \frac{v - v_0}{t} \approx 6{,}7 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Для нахождения пути, пройденного самолётом, воспользуемся равенством $\frac{ds}{dt} = v,$ откуда $\frac{ds}{dt} = v_0 + at; ds = \left(v_0 + at\right) \cdot dt;$

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(v_0 + at\right)dt = \left(v_0 t + \frac{at^2}{2}\right)\Bigg|_{t_1=0}^{t_2=20} \approx 2{,}7 \cdot 10^3 = 2{,}7 \text{ км}.$$

ЗАДАЧИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Экономический смысл производной. Возьмём производственную функцию, определяющую соответствие между величиной затрат x и величиной получаемого продукта $y = f(x)$. Обозначим через Δx изменение затрат от некоторого значения x до величины $x + \Delta x$. Тогда $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ – новое значение массы продукта, соответствующее затратам в размере $x + \Delta x$, а $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – добавочный продукт, полученный в результате роста затрат на величину Δx. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения величины продукта, или средняя отзывчивость производственной функции, соответствующая величине затрат в размере Δx. Вычисляя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, получаем $y' = f'(x)$. В этом и состоит экономический смысл производной. В экономической литературе $f'(x)$ называют предельным продуктом, считая, что $f(x)$ – масса продукта, x – затраты на его производство.

Применение производной

Задача 1

Привес животного y (кг) в зависимости от скормленной массы кукурузы c (кг) (при 12%-ном уровне содержания белка в рационе) определяется формулой $y = -3{,}062 + 0{,}433 \cdot c - 0{,}0001 \cdot c^2$. Найдите величину привеса (отзывчивость), приходящуюся на единицу массы зерна кукурузы, если масса скормленного зерна $c = 50$ кг.

Решение

Найдём производную $y'(c) = 0{,}433 - 0{,}0002 \cdot c$. Определим

$$y'(50) = 0{,}423.$$

Задачи на экстремум

Задача 2[19,142]

Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости x (км/ч) при движении на четвёртой передаче приблизительно описывается функцией f:

$$f(x) = 0{,}0017x^2 - 0{,}18x + 10{,}2; \ \ x \geq 30.$$

При какой скорости расход горючего будет наименьший? Какова наименьшая величина расхода?

Решение

Исследуем расход горючего с помощью производной: $f'(x) = 0{,}0034x - 0{,}18$. Следовательно, $f'(x) = 0$ при $x \approx 53$. Определим знак второй производной в критической точке: $f''(x) = 0{,}0034 > 0$. Следовательно, расход горючего при скорости 53 км/ч будет наименьшим. $f(53) \approx 5{,}43$л. т. е. на 100 км потребуется 5,43 литра бензина при движении со скоростью 53 км/ч .

Задача 3[19,142]

Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t) = 0{,}15t^3 - 2t^2 + 200$, где t – месяцы, U – миллионы. Исследуйте оборот предприятия.

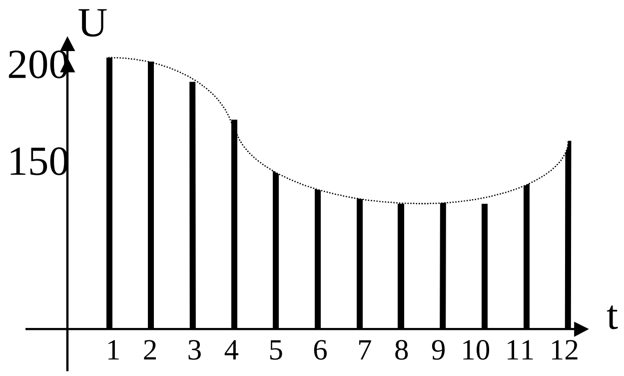


Рис. 30

Решение

Исследуем оборот предприятия с помощью производной: $U'(t)=0{,}45t^2-4t$; $U''(t)=0{,}9t-4$; $U'''(t)=0{,}9$. Момент наименьшего оборота найдём при $U'(t)=0$, т. е. при $t=8{,}9$. Наименьший оборот был на девятом месяце . Первая производная показывает экстремальное изменение оборота. Из $U''(t)=0$ следует $t=4{,}4$. Так как $U'''(t)>0$, то предприятие на пятом месяце имеет сильное снижение оборота (см. рис 30).

Точки перегиба важны в экономике, так как по ним можно определить, в какой конкретно момент произошло изменение.

Так, например, учитывая результаты предыдущей задачи, можно сделать следующие выводы:

1. В начале исследуемого периода у предприятия было снижение оборота;
2. Предприятие пыталось выйти из этого состояния и для этого использовало определённые средства; На пятом месяце (точка перегиба) что-то было предпринято и предприятие стало выходить из кризиса, а на девятом месяце стало набирать обороты.

Таким образом, проанализировав ситуацию, мы можем определить, какие методы помогли выйти из кризиса.

Следующий блок задач позволяет производителю получить наиболее выгодный для себя результат, имея от этого дополнительный доход.

Задача 4

Из круглого бревна радиуса R выпилить прямоугольную балку так, чтобы количество отходов было наименьшим (см. рис. 31).

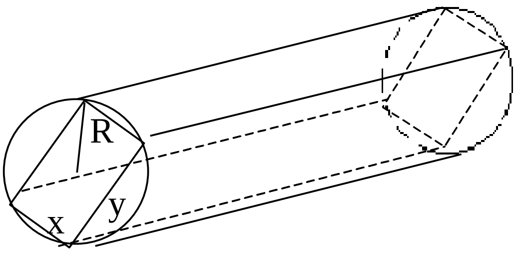


Рис. 31

Решение

Количество отходов определяется площадью той части в сечении бревна, которая не входит в прямоугольник. Поэтому задачу можно переформулировать: в круг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади. Если x и y – стороны прямоугольника, S – площадь прямоугольника, то $S = xy$. Если прямоугольник вписан в круг, то $x^2 + y^2 = 4R^2$. Следовательно, $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, где $x > 0$. Найдём производную $S'(x)$: $S'(x) = \dfrac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \sqrt{2}R$. Исследуем функцию в этой точке на экстремум, для этого определим знак второй производной в этой точке: $S''(x) = \dfrac{-12R^2x + 2x^3}{\sqrt{\left(4R^2 - x^2\right)^3}}$, то $S''\left(\sqrt{2}R\right) < 0$. Следовательно, функция в этой точке достигает своего наибольшего значения. Таким образом, количество отходов будет наименьшим, если в сечении – квадрат.

Задача 5

Консервная банка имеет форму прямого кругового цилиндра. Каково должно быть соотношение между диаметром основания и высотой цилиндра, чтобы при данной ёмкости V на производство банки пошло наименьшее количество жести?

Решение

Оптимизируемая величина S – площадь полной поверхности цилиндра. Выразим её как функцию радиуса r основания цилиндра. Если H – высота цилиндра, то из формулы $V=\pi r^2 H$ получаем $H=\dfrac{V}{\pi r^2}$. Тогда $S(r)=2\pi r^2+2\pi rH=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$. Нам нужно выяснить, при каком значении $r>0$ функция $S(r)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$ принимает наименьшее значение. Для этого найдём производную. Имеем $S'(r)=2\pi\cdot 2r-2V\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{4\pi r^3-2V}{r^2}$. Следовательно, $S'(r)=0$ при $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. Это единственная критическая точка. Определим знак второй производной в этой точке: $S''(r)=\dfrac{4\pi r^3+4V}{r^3}$, $S''\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)>0$. Следовательно, в этой точке функция достигает наименьшего значения. Далее имеем

$$H=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{Vr}{\pi r^3}=\frac{Vr}{\pi\cdot\dfrac{V}{2\pi}}=2r.$$

Это означает, что высота цилиндра равняется диаметру основания. Итак, при данной ёмкости на производство банки пойдёт наименьшее количество жести, если банку изготовить в виде равностороннего цилиндра (цилиндр называется равносторонним, если его осевое сечение – квадрат).

Задача 6 [19,14]

Необходимо проложить трубу из A в B. Затраты по прокладке трубы составляют вдоль улицы за 1 метр 600 DM (DM – денежная единица Германии до 2001 года) и через улицу – 1000 DM за метр.

а) Определите расположение пункта D так, чтобы расходы по прокладке трубы из A в B через D были по возможности минимальны.

б) Сравните минимальные расходы с расходами при прокладке трубы по прямой из A в B, а также из A в B через C (см. рис. 32).

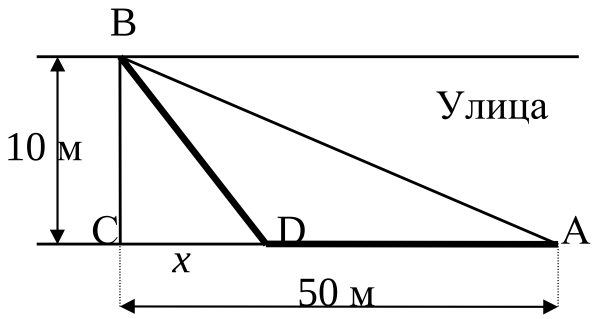


Рис. 32

Решение

Введём систему координат таким образом, чтобы начало координат было в точке $C(0,0)$. Пусть точка D имеет координаты $(x,0)$, тогда, прокладывая трубы, мы проделаем путь $AD+DB$ и затратим соответствующую сумму:

$$f(x)=(50-x)\cdot 600\ +\sqrt{x^2+10^2}\cdot 1000,\ \text{где}\ 0\le x\le 50.$$

Исследуем эту функцию на экстремум, для этого вычислим первую производную и приравняем к нулю. Имеем $f'(x)=-600+\dfrac{1000x}{\sqrt{x^2+100}}$.

Следовательно, $f'(x)=0$ при $x=\dfrac{15}{2}=7\dfrac{1}{2}$.

Вычислим расходы при прокладке труб из A в B по прямой – это значение функции при $x=50$ и из A в B через C – это при $x=0$.

$f(0)=50\cdot 600+10\cdot 1000=30000+10000=40000\ DM$;

$$f\left(\frac{15}{2}\right)=\left(50-\frac{15}{2}\right)\cdot 600+\sqrt{\frac{225}{4}+100}\cdot 1000=25500+12500=38000\ DM;$$

$$f(50)=\sqrt{2500+100}\cdot 1000=10000\cdot\sqrt{26}\approx 50990\ DM.$$

а) При $x=\dfrac{15}{2}$ расходы будут наименьшими.

б) Через точку C расходы будут дороже на 2000 DM, а напрямую – дороже на 12990 DM.

Задача 7

Выбрать место для постройки моста через реку, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

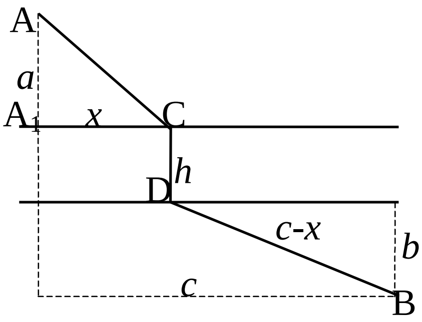


Рис. 33

Решение

Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (см. рис. 33). Расстояния a, b, c и h согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном в плане месте, то длина дороги между пунктами A и B равна $l=AC+h+DB.$ Выбрав за независимую переменную x расстояние A_1C, получим $AC=\sqrt{a^2+x^2}, DB=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$ и $l=\sqrt{a^2+x^2}+h+\sqrt{b^2+(x-c)^2}$, где x изменяется на отрезке $[0;c]$.

Теперь найдём наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0;c]$. $l'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\dfrac{x-c}{\sqrt{b^2+(x-c)^2}}$. Следовательно, $l'(x)=0$ при

$x_1 = \dfrac{ac}{a-b}$ и $x_2 = \dfrac{ac}{a+b}$. Точка x_1 лежит вне отрезка $[0; c]$: при $a > b,\ x_1 > c$; при $a < b,\ x_1 < 0$. Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и c, так как при этом $x_2 > 0$ и $\dfrac{a}{a+b} < 1$, т. е. $x_2 < c$.

Таблица 3

x	0	x_2	c
l'	—	0	+
l	убыв.	$\smile$ min	возр.

Внутри отрезка $[0; c]$ функция $l(x)$ имеет одну критическую точку x_2. Исследуя эту критическую точку по знаку производной $l'(x)$ слева и справа от неё, как это показано в таблице 3, убеждаемся, что точка x_2 есть точка минимума. Следовательно, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние

$$A_1C = \frac{ac}{a+b}.$$

Здесь мы исследовали критическую точку по знаку производной $l'(x)$ слева и справа от неё (см. таблицу 3). Этот способ более эффективен в данном случае, т. к. гораздо труднее вычислить вторую производную.

Задача 8

Окно имеет форму прямоугольника, дополненного полукругом (см. рис. 34). Периметр окна равен P. При каком отношении сторон прямоугольника окно будет пропускать больше света?

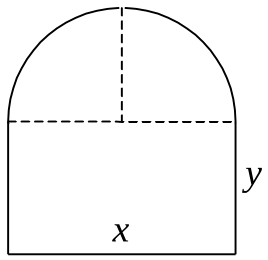


Рис. 34

Решение

Обозначим длины сторон прямоугольника x и y; тогда площадь окна $S = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2$. Но x и y связаны соотношением $x + 2y + \pi\frac{x}{2} = P$. Следовательно,

$$S(x) = x\left(\frac{P}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\frac{x^2}{8} \text{ или } S(x) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 + \frac{P}{2}x, \text{ где } x > 0.$$

Чтобы окно пропускало много света, необходимо чтобы оно имело наибольшую площадь. Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x + \frac{P}{2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \dfrac{P/2}{1 + \frac{\pi}{4}} = \dfrac{2P}{4 + \pi}$.

Так как $S''(x) = -\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) < 0,$ то $S(x)$ достигает наибольшего значения при $x = \dfrac{2P}{4 + \pi}$, $y = \dfrac{P}{4 + \pi}$. Таким образом, высота прямоугольной части окна должна быть в два раза меньше ширины.

Задача 9

Для 15 откормочных совхозов некоторой области была получена производственная функция $f(x) = 199{,}2 + 67{,}6x + 0{,}14x^2$, где $f(x)$ – затраты на откорм свиней, тыс. руб.; x – валовой привес, тыс. ц. Найти минимальную себестоимость 1 центнера свинины.

Решение

Составим функцию себестоимости

$$S(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{199{,}2}{x}+67{,}6+0{,}14x.$$

Найдём производную $S'(x)=-\frac{199{,}2}{x^2}+0{,}14$. Отсюда $S'(x)=0$ при $x=\sqrt{1422{,}8}\approx 37{,}7$ тыс. ц. Проверим, является ли при данном x себестоимость минимальной. Для этого найдём вторую производную и определим знак второй производной в критической точке $S''(x)=\frac{2\cdot 199{,}2}{x^3}>0$ при $x=37{,}7$. Отсюда следует, что $S(x)$ имеет наименьшую себестоимость. Общие затраты на производство свинины $f(37{,}7)=2946{,}7$ (тыс. руб.). Одна тыс. ц. свинины стоит $S(x)=\frac{2946{,}7}{37{,}7}=78{,}16$ тыс. руб. на тыс. ц.

Задача 10 [17,185]

400 – метровая беговая площадка состоит из двух параллельных прямых и двух полукругов. Какой радиус должен иметь полукруг, для того, чтобы игровая площадка (см. рис. 35) имела наибольшую площадь?

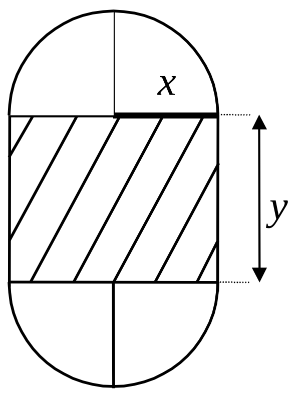


Рис. 35

Решение

Игровая площадка имеет форму прямоугольника со сторонами $2x$ и y. Площадь определяется по формуле $S=2x\cdot y$. Из условия известно, что длина беговой дорожки равна 400 метрам. Имеем $400=2\pi x+2y$. Следовательно, $y=200-\pi x$. Теперь найдем наибольшее значение функции

$$S(x) = 2x \cdot (200 - \pi x), \text{ где } x > 0.$$

Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = 2 \cdot (200 - 2\pi x)$. Отсюда $S'(x) = 0$ при $x = \dfrac{100}{\pi}$. $S''(x) = -2\pi < 0$ при $x = \dfrac{100}{\pi}$. При $x = \dfrac{100}{\pi}$ и $y = 100$ достигается наибольшее значение площади игровой площадки.

Задача 11

Спортплощадку площадью 0,9 гектара, имеющую форму прямоугольника, необходимо огородить с севера и юга деревянным забором, с востока и запада – проволочным. Установка 1 метра деревянного забора обходится в 500 рублей, проволочного – в 200 рублей. На строительство выделено 120000 рублей. Достаточно ли этой суммы?

Решение

Обозначим через x длину северной стороны, через y – длину восточной. Тогда $x \cdot y = 9000$ (м^2) и стоимость S (в рублях) строительства будет равна $S = 1000x + 400y$. Найдём наименьшее значение

$$S(x) = 1000x + 400y = 1000x + \frac{400 \cdot 9000}{x} = 1000\left(x + \frac{3600}{x}\right), \text{ где } x > 0.$$

Исследуем функцию на экстремум: $S'(x) = 1000\left(1 - \dfrac{3600}{x^2}\right)$. Отсюда, $S'(x) = 0$ при $x = 60$. Определим знак второй производной в точке $x = 60$. Имеем $S''(x) = \dfrac{7200000}{x^3} > 0.$

Если $x = 60$, то $y = 150$. Определим, какая сумма потребуется при этих размерах. $S = 1000 \cdot 60 + 400 \cdot 150 = 120000$ рублей.

Следовательно, выделенной на строительство суммы будет достаточно только в том случае, если с севера и юга спортплощадка будет иметь длину 60 метров, а с востока и запада – 150 метров.

Задача 12

Из квадратного листа жести со стороной 3 м требуется изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объёма.

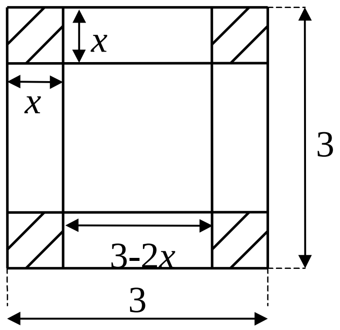


Рис. 36

Решение

Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата (см. рис. 36). Так как в основании бака квадрат, то $0 < x < 3/2$ и объём бака будет определяться по формуле

$$V(x) = (3-2x)^2 x, \text{ где } 0 < x < 3/2.$$

Таким образом, задача свелась к отысканию наибольшего значения функции $V(x)$ на отрезке $(0;3/2)$. Исследуем функцию на экстремум: $V'(x) = 9 - 24x + 12x^2$. Отсюда $V'(x) = 0$ при $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$. Рассмотрим далее значения функции в точках $x_0 = 0$, $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1/2$. Имеем $V(0) = 0$, $V(1/2) = 2$, $V(3/2) = 0$. Итак, при $x = 1/2$ м объём бака будет наибольшим.

Задача 13

На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строками) S см^2. Ширина полей на странице слева и справа должна быть равна k см, а сверху и снизу – d см (см. рис. 37). Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

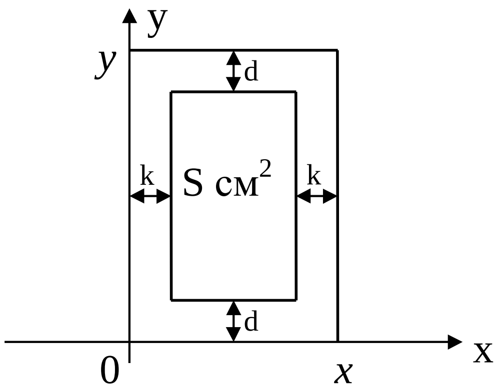


Рис. 37

Решение

Пусть ширина страницы x см, а высота – y см. Из условия задачи имеем $S=(x-2k)(y-2d)$. Выразим y. Отсюда $y=\dfrac{S}{x-2k}+2d.$

Для того чтобы страницы были наиболее выгодные, необходимо исследовать функцию $S(x)=x\cdot\left(\dfrac{S}{x-2k}+2d\right)$ на наименьшее значение (в целях экономии бумаги), где $x>0$.

Имеем $S'(x)=\dfrac{-2kS}{(x-2k)^2}+2d.$ Отсюда $S'(x)=0$ при $x=\sqrt{\dfrac{kS}{d}}+2k.$

Определим знак второй производной в критической точке:

$$S''(x)=\frac{4kS}{(x-2k)^3},\qquad S''\left(\sqrt{\frac{kS}{d}}+2k\right)=\frac{4\sqrt{d^3}}{\sqrt{kS}}>0.$$

Следовательно, $S(x)$ будет наименьшим при

$$x=\sqrt{\frac{kS}{d}}+2k,\ y=\sqrt{\frac{dS}{k}}+2d.$$

Задача 14 [19,189]

Пакет 1 литра молока имеет форму параллелепипеда. Пакет изготовлен из специального куска бумаги. На рисунке 38 показано, как происходит складывание пакета. При каких значениях x и h будет затрачено меньше бумаги?

Решение

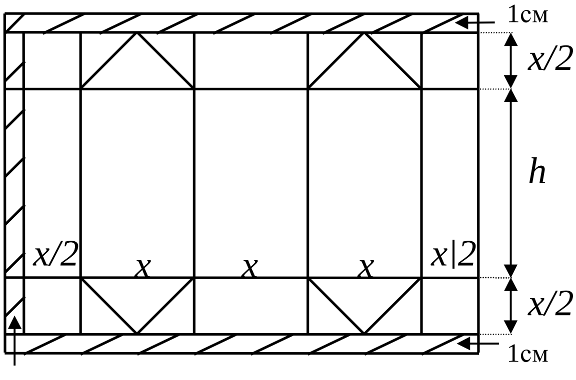


Рис. 38

Из рисунка видно, что в основании параллелограмма находится квадрат со стороной x см. Пакет должен иметь объём, равный 1 литру = 1000 см^3. Тогда $1000 = x^2 \cdot h$. Отсюда , $h = \dfrac{1000}{x^2}$. На один пакет будет затрачено $S(x) = 4x(x+h) = 4x^2 + \dfrac{4000}{x}$, где $x > 0$. Расстоянием, оставленным для склеивания, можно пренебречь. Исследуем эту функцию на наименьшее значение. $S'(x) = 8x - \dfrac{4000}{x^2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = \sqrt[3]{500} \approx 7{,}9$. Так как $S''(7{,}9) = 8 + \dfrac{8000}{(7{,}9)^3} > 0$, то при $x = 7{,}9$ и $h = 16$ бумаги потребуется меньше.

Применение интеграла

В этом разделе даны приложения определённого интеграла к решению математических задач с экономическим содержанием. Продукция, произведённая рабочим в интервале времени от a до b часов рабочего дня, вычисляется по формуле $y = \int\limits_a^b f(x)dx,$ где $f(x)$ – производительность труда рабочего в момент времени x, отсчитываемый от начала рабочего дня.

Задача 15

Дневная производительность труда (за 7 рабочих часов) рабочего машиностроительного завода описывается функцией $y = -0{,}09t^2 + 0{,}28t + 10{,}06,$ где t – время в часах, y – количество продукции. Сколько продукции производит рабочий за один год (260 рабочих дней)?

Решение

Найдём количество продукции за 1 рабочий день:

$$\int_0^7 \left(-0{,}09t^2 + 0{,}28t + 10{,}06\right)dt = \left(-0{,}03t^3 + 0{,}14t^2 + 10{,}06t\right)\Big|_0^7 = 66{,}99 \text{ ед. пр.}$$

За один год будет произведено $66{,}99 \cdot 260 = 17417$ ед. продукции.

Задача 16

Поступление товара на склад определяется функцией $v_1 = 75 - 0{,}5x + 0{,}008x^2,$ а отпуск товара торгующим организациям определяется функцией $v_2 = 60 - 0{,}6x + 0{,}004x^2,$ где x – номер рабочего дня. Найдите запас товара, который образовался за 60 рабочих дней.

Решение

Прирост запаса товара в день с номером x равен:

$v_{зап} = v_1 - v_2 = 15 + 0{,}1x + 0{,}004x^2.$Тогда запас товара за 60 дней

$$Q = \int_0^{60} \left(15 + 0{,}1x + 0{,}004x^2\right)dx = \left[15x + \frac{0{,}1x^2}{2} + \frac{0{,}004x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{60} = 1368 \text{ ед. тов.}$$

Задача 17

Радиозавод выпускает в год 31000 радиоприёмников, в каждый последующий год выпуск радиоприёмников увеличивается на 500 шт. Определите сумму амортизационных отчислений за 10 лет при норме амортизации, равной 1% от себестоимости выпускаемой продукции. Себестоимость одного радиоприёмника 50 руб.

Решение

Из условия задачи следует, что выпуск радиоприёмников описывается функцией $y = 31000 + 500x,$ где $x-$ время в годах. Тогда объём выпуска v этой продукции за 10 лет $v = \int\limits_0^{10} (31000 + 500x)dx.$

Амортизационные отчисления равны:

$$\int\limits_0^{10} \frac{1\% \cdot 50}{100\%}(31000 + 500x)dx = 0{,}5\left[31000x + 500\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^{10} = 167500 \text{ руб.}$$

Задача 18

Вычислите объём тела вращения, образованного в результате вращения вокруг оси $0x$ фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0,$ $x = 0,$ $x = 2$, где x и y измерены в метрах (см. рис. 39). Сколько потребуется рейсов пятитонного грузовика для перевозки груза, заполняющего этот объём, если масса 1м^3 равна 400 кг?

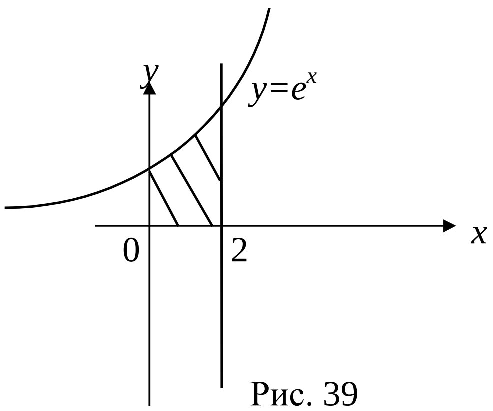


Рис. 39

Решение

Объём равен

$$V = \pi\int\limits_0^2 \left(e^x\right)^2 dx = \pi\frac{1}{2}e^{2x}\Bigg|_0^2 == \frac{\pi}{2}\left(e^4 - 1\right) \text{ м}^3$$

Учитывая тот факт, что 1 м^3 груза равен 400 кг, имеем

$\frac{\pi}{2}\left(e^4 - 1\right) \cdot 400 = 1{,}57 \cdot 53{,}9 \cdot 400 = 33849{,}2$ кг вес всего груза. Так как грузовик пятитонный, то потребуется $33849{,}2/5000 \approx 6{,}7$ рейсов, т.е.

7 рейсов.

Задача 19 [19,82]

Дно канала (рис. 40), имеющего длину 2 км, описано уравнением параболы $y=\frac{1}{8}x^2$. Единичный отрезок равен 1 м.

а) Вычислите объём канала.

б) Сколько воды будет в канале, когда он заполнится на половину высоты?

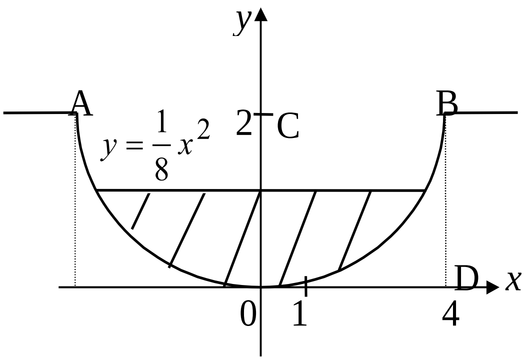


Рис. 40

Решение

а) Канал имеет длину 2км =2000 м. Найдём объём канала: $V=S_{AOB}\cdot 2000$.

$$S_{AOB}=2\cdot(S_{OCBD}-S_{OBD})=$$

$$=2\cdot\left(8-\int_0^4\frac{1}{8}x^2dx\right)=16-\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4=10\frac{2}{3}\text{ м}^2.$$

Следовательно, $V=\frac{64000}{3}\approx 21333$ м^3.

б) Надо найти площадь заштрихованной фигуры и умножить на длину канала. Найдём абсциссу точки пересечения прямой $y=1$ и параболы $y=\frac{1}{8}x^2$; $x=\pm\sqrt{8}$.

$$V=2\left(\sqrt{8}-\int_0^{\sqrt{8}}\frac{1}{8}x^2dx\right)2000=4000\left(\sqrt{8}-\left.\frac{x^3}{24}\right|_0^{\sqrt{8}}\right)=4000\frac{2\sqrt{8}}{3}\approx 7467\text{ м}^3.$$

Такой объем воды потребуется для заполнения канала на половину высоты.

Задача 20 [19,82]

Дуга под мостом описана уравнением параболы. Въезд под мост изображён на рисунке 41. Единичный отрезок равен 1 м. Ширина моста 4 метра. Сколько щебня придётся завезти производителю?

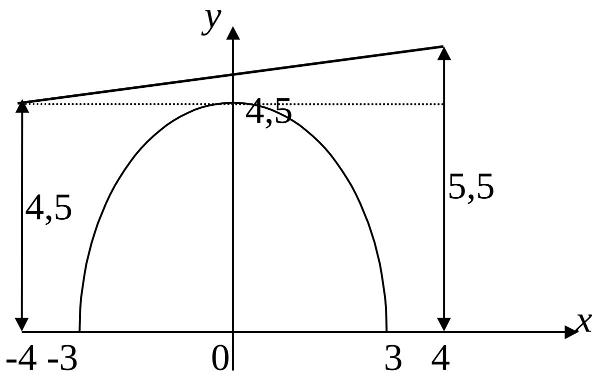


Рис. 41

Решение

Уравнение параболы имеет вид: $y = -kx^2 + 4{,}5$.

Парабола проходит через точку $(3;0)$. Следовательно, $k = \frac{1}{2}$. Отсюда $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5$. Площадь фигуры под дугой будет вычислена следующим образом:

$$S = 2 \cdot \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4{,}5 \right) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{6} + 4{,}5x \right) \Bigg|_0^3 = 18 \text{ м}^2.$$

Объём фигуры между мостом и аркой после расширения будет равен:

$$V = \left(\frac{4{,}5 + 5{,}5}{2} \cdot 8 - 18 \right) \cdot 4 = (40 - 18) \cdot 4 = 88 \text{ м}^3.$$

Итак, щебня понадобится 88 м^3.

Задача 21 [19,82]

Уличные рабочие монтируют мостовую из бетонных колодок длиной 0,5 метров. Её форма изображена на рисунке 42. Единичный отрезок равен 1 дм.

а) Вычислите площадь колодки.

б) 1 м^3 бетона весит 2,8 т. Сколько весит колодка?

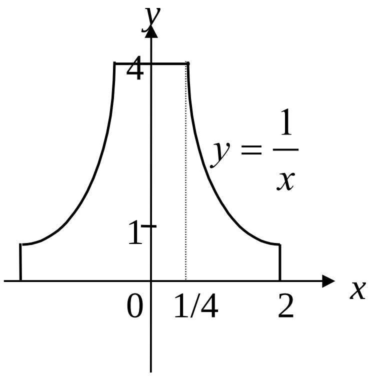


Рис. 42

Решение

а) Колодка состоит из двух одинаковых частей, каждая часть – из прямоугольника и криволинейной трапеции. Прямая $y=\frac{1}{x}$ пересекается с прямой $y=4$ в точке $x=\frac{1}{4}$. Тогда площадь колодки равна:

$$S=2\left(4\frac{1}{4}+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{1}{x}dx\right)=2\left(1+\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{2}\right)=2(1+3\ln 2)\approx 6{,}158 \text{ дм}^2.$$

б) Колодка имеет объём $V=S\cdot 5$, где 5 дм = 0,5 м. Имеем

$$V=6{,}158\cdot 5=30{,}79 \text{ дм}^3 = 0{,}03079 \text{ м}^3.$$

Вес колодки равен $P=0{,}03079\cdot 2{,}8=0{,}086212$т = 86,212 кг.

ЗАДАЧИ ИЗ БИОЛОГИИ И ХИМИИ

Биологический смысл производной. Пусть зависимость между числом особей популяции микроорганизмов y и временем t её размножения задана уравнением $y=p(t)$. Пусть Δt – промежуток времени от некоторого начального значения t до $t+\Delta t$. Тогда $y+\Delta y=p(t+\Delta t)$ – новое значение численности популяции, соответствующее моменту $t+\Delta t$, а $\Delta y=p(t+\Delta t)-p(t)$ – изменение числа особей микроорганизмов.

Отношение $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ является средней скоростью размножения или, как принято говорить, средней производительностью популяции. Вычисляя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$, получаем $y' = p'(t)$, или производительность жизнедеятельности популяции микроорганизмов в момент времени t.

Химический смысл производной. Пусть дана функция $m = m(t)$, где m – количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию в момент времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ – средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Применение производной в биохимии

Задача 1

Зависимость между количеством x вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = A\left(1 + e^{-kt}\right)$, где A – начальное количество вещества. Определите скорость химической реакции в момент времени t.

Решение

Имеем $v = x'(t) = -Ak \cdot e^{-kt}$.

Задача 2

Пусть популяция в момент времени t с насчитывает $p(t)$ особей $p(t) = 3000 + 100t^2$. Найдите скорость роста популяции:

а) в произвольный момент t;

б) в момент $t = 1$с.

Решение

Имеем а) $v = p'(t) = 200t$, б) $p'(1) = 200$.

Задача 3(А)*

Закон накопления сухой биомассы у винограда сорта Шасла определяется уравнением $y = 0{,}03x - 0{,}0004x^2$, где x – число дней от распускания почек, y – накопление биомассы в кг на 1 куст. Равенство отражает зависимость величин x и y как средний результат массовых наблюдений. Выясните, как изменится сухая биомасса при изменении x от 50 до 60 дней.

Решение

Изменение биомассы – это приращение биомассы, заменим его дифференциалом: $\Delta y \approx dy = \left(0{,}03x - 0{,}0004x^2\right)' dx = (0{,}03 - 0{,}0008x)dx.$

Подставляем числовые значения $x = 50$, $dx = 10$. Имеем

$$dy = (0{,}03 - 0{,}0008 \cdot 50) \cdot 10 = -0{,}1 \text{ кг.}$$

Биомасса уменьшится на 0,1 кг.

Задача 4(А)*

Опытным путём установлено, что массу животного при установившемся режиме откорма можно считать функцией времени откорма t, если $t \geq 49$ дней. $P(t) = 5\sqrt{t}$, где P – масса в кг, t – время в днях. Найдите привес животного за 10 дней, начиная с 64-го дня кормления.

Решение

Привес животного равен приращению массы $\Delta P,$ которое заменяем дифференциалом dP:

$$\Delta P \approx dP = P'dt = \frac{5}{2\sqrt{t}}dt, \quad dP = \frac{5\cdot 10}{2\cdot 8} = \frac{50}{16} = 3{,}125 \text{ кг.}$$

Задача 5

Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением $m = m_0 e^{-kt},$ где k – положительная постоянная, m – количество вещества в момент времени t. Найдите скорость v разложения вещества и выразите её как функцию m.

Решение

$$m'(t) = -km_0 e^{-kt} = -km.$$

Задача 6

Зависимость урожайности y (ц/га) зерна кукурузы от количества азотного удобрения x (кг/га действующего вещества) выражается формулой $y = -0{,}0021x^2 + 0{,}936x + 49{,}84.$ Постройте график и сделайте выводы.

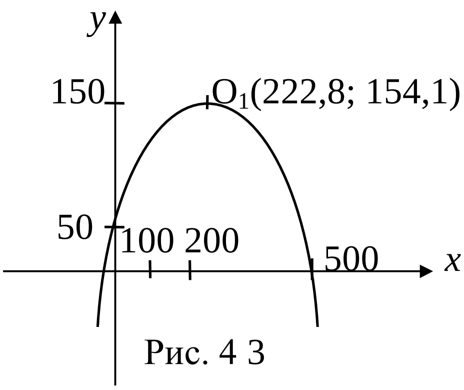


Рис. 4 3

Решение

График уравнения изображён на рис. 43. Вершина параболы лежит в точке $O_1(222{,}8; 154{,}1).$ По графику можно проанализировать изменение урожайности. Так, вблизи точки $x = 222{,}8$ функция изменяется очень медленно. При значениях $x > 222{,}8$ увеличение количества азотных удобрений становится невыгодным. Это значение x зависит от соотношений цен на кукурузу и удобрение. Правильно составленная функция, изучение и анализ графика даёт возможность более глубоко познать соответствующий процесс и грамотно им управлять.

Задачи на экстремум

Задача 7

Зависимость суточного удоя y в литрах от возраста коров x в годах определяется уравнением $y(x) = -9{,}53 + 6{,}86x - 0{,}49x^2$, где $x > 2$. Найдите возраст дойных коров, при котором суточный удой будет наибольшим.

Решение

Исследуем функцию на экстремум: $y'(x) = 6{,}86 - 0{,}98x.$ $y'(x) = 0$ при $x = \frac{6{,}86}{0{,}98} = 7$; так как $y''(x) = -0{,}98 < 0$, то при $x = 7$ функция имеет максимум. Следовательно, при $x = 7$ суточный удой будет наибольшим, $y(7) = 14{,}48$ литров.

Задача 8

Реакции организма на два лекарства как функции времени t (время выражается в часах) выражаются функциями $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

Решение

Исследуем первую функцию на экстремум: $r_1'(t) = e^{-t} - te^{-t} = e^{-t}(1-t)$. Отсюда $r_1'(t) = 0$ при $t = 1$. Так как $r_1''(t) = -2e^{-t} + te^{-t} < 0$, то у первого лекарства будет достигнута максимальная реакция при $t=1$. Исследуем вторую функцию: $r_2'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=e^{-t}\left(2t-t^2\right)$. Отсюда $r_2'(t)=0$ при $t_1=0$ и $t_2=2$. Вычислим вторую производную $r_2''=e^{-t}\left(t^2-4t+2\right)$. При $t_1=0$ имеем $r_2''=2e^0=2>0$, поэтому достигается наименьшее значение. При $t_2=2$ имеем $r_2''=\dfrac{1}{e^2}(4-8+2)<0$, поэтому достигается наибольшее значение. Следовательно, максимальная реакция организма на два лекарства будет равна соответственно $r_1(1)=\dfrac{1}{e}$, $r_2(2)=\dfrac{4}{e^2}$. Так как $r_2(2)>r_1(1)$, то у второго лекарства максимальная реакция выше.

Задача 9

В химических лабораториях часто практикуется изготовление конусообразных фильтров из кружков пропускной бумаги. С этой целью сектор *OACB* кружка (см. рис. 44) складывается и оставшийся от кружка сектор *OAMB* свёртывается в боковую поверхность конуса. При какой величине угла *AOB* конусообразный фильтр, полученный таким образом из кружка радиуса r, имеет наибольший объём?

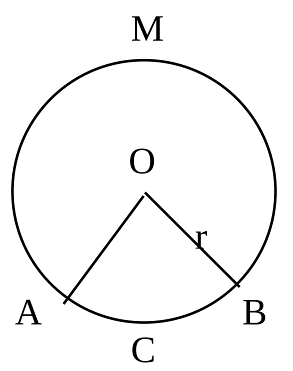


Рис. 44

Решение

Объём полученного конусообразного фильтра выражается формулой: $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot x^2\sqrt{r^2-x^2}$, где x – радиус окружности, длина которой равна длине дуги *AMB*. Исследуем функцию $V(x)=\dfrac{1}{3}\pi x^2\sqrt{r^2-x^2}$, где $0<x<r$, на экстремум. Для этого вы-

числим первую производную, приравняем её к нулю и найдём точки, подозрительные на экстремум: $V'(x)=\frac{\pi x}{3}\left(\frac{2r^2-3x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)$. Следовательно, $V'(x)=0$ при $x_1=0$ и $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}r$. Определим знак второй производной в критических точках. Для этого вычислим вторую производную.

$$V''(x)=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(r^2-x^2\right)^3}}\cdot\left(2r^4-9x^2r^2+6x^4\right).$$

Таким образом $V''(0)>0$, $V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)<0$. Видим, что в точке x_2 функция достигает наибольшей величины. Но так как $2\pi x=\cup AMB=\frac{\pi r\left(360^0-\angle AOB\right)}{180^0}$, $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}r$. Следовательно, V достигает наибольшей величины, когда $\angle AOB\approx 66^0$.

Задача 10

Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода (O_2). Требуется найти концентрацию (O_2), при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

Решение

В условиях практической необратимости скорость реакции $2NO+O_2+2NO_2$ выражается формулой $v=kx^2y$, где x - концентрация NO в любой момент времени, y – концентрация O_2, k – константа скорости реакции, не зависящая от концентрации реагирующих компонентов и зависящая только от температуры. Концентрацию газов будем выражать в объёмных процентах. В этом случае $y = 100 - x,\ v(x) = kx^2(100 - x)$, где $0 < x < 100$.

Производная $v'(x) = k(200x - 3x^2)$. Следовательно, $v'(x) = 0$ при $x = 66{,}67$. В этой точке $v''(x) = k(200 - 6x) < 0$.

Скорость реакции наибольшая, когда $x = 66{,}67\%, y = 33{,}33\%$.

Задача 11

Реакция организма на введённое лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y = f(x) = x^2(a - x)$, где a – некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Решение

Очевидно, $0 < x < a$. Имеем $f'(x) = 2ax - 3x^2$ Следовательно, $f'(x) = 0$ при $x = \frac{2}{3}a$. В этой точке $f''\left(\frac{2}{3}a\right) = -2a < 0$, то $x = \frac{2}{3}a$ – тот уровень дозы, который даёт максимальную реакцию.

Задача 12

В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону $p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2}$, где t выражается в часах. Найдите максимальный размер этой популяции.

Решение

Исследуем функцию на экстремум: $p'(t)=\dfrac{1000\left(100-t^2\right)}{\left(100+t^2\right)^2}$.

Отсюда $p'(t)=0$ при $t=10$. Так как $p''(t)=\dfrac{-600000t+2000t^3}{\left(100+t^2\right)^3}$ и $p''(10)<0$, то при $t=10$ будет достигнут максимальный размер популяции и он будет равен $p(10)=1000+\dfrac{1000\cdot 100}{100+100}=1050.$

Задача 13

К яблоне полетел шмель со скоростью v_1 м/мин. Одновременно к другой яблоне полетела пчела со скоростью v_2 м/мин. При этом шмелю нужно было преодолеть расстояние в $2a$ м, а пчеле – расстояние в $2b$ м. Предположим, что траектории их полёта – взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке, делящей пополам путь шмеля и путь пчелы. Найдите формулу, выражающую зависимость расстояния y между шмелём и пчелой от времени x их полёта. Установите момент, когда в полёте шмеля и пчелы расстояние между ними достигает наименьшего значения.

Решение

Пусть O – точка пересечения траекторий шмеля и пчелы. Тогда через время x расстояния шмеля и пчелы от точки O будут соответственно равны $\pm\left(xv_1-a\right)$ и $\pm\left(xv_2-b\right)$. Отсюда, по теореме Пифагора, расстояние между шмелём и пчелой через время x будет $f(x)=\sqrt{\left(xv_1-a\right)^2+\left(xv_2-b\right)^2}$, $f'(x)=0.$ Следовательно, $v_1\left(xv_1-a\right)+v_2\left(xv_2-b\right)=0$. Отсюда найдём x:

$$x = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Исследуем функцию на экстремум, для этого определим знак второй производной в точке, подозрительной на экстремум:

$$f''(x) = \frac{(v_2 a - v_1 b)^2}{\sqrt{(xv_1 - a)^2 + (xv_2 - b)^2}}; \quad f''\left(\frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}\right) > 0.$$

Таким образом расстояние между шмелём и пчелой будет наименьшее в момент времени $x = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}$.

ПРОБЛЕМА: крысы заполонили Челябинск

За последние 10 лет численность грызунов выросла в 5 раз и достигла 1 миллиона особей (!) Арифметика простая: получается, по одной крысе на каждого жителя. За год одна пара крыс способна воспроизвести 50 штук себе подобных. По словам эпидемиологов, крысы являются переносчиками 40 болезней, в том числе и клещевого энцефалита. Уже сегодня создалась реальная угроза распространения чумы, бешенства, туляремии. Предлагаем составить задачу по приведённым данным и решить её.

Задача 14 [19,110]

Количество популяции полевых мышей развивается по закону $f'(t) = 0{,}07 \cdot f(t)$, где $f(t)$количество мышей в момент времени t (месяцы).

а) За какое время популяция вырастет со 170 полевых мышей до 3000?

б) С какой скоростью размножаются мыши?

Решение

а) Функция $f(t)$ имеет вид: $f(t) = c \cdot e^{kt}$. Из условия следует, что $k = 0{,}07$. При $t = 0$ $\quad f(t) = 170$. Следовательно, $f(t) = 170 \cdot e^{0{,}07t}$. $3000 = 170 \cdot e^{0{,}07t}$. Отсюда $t \approx 41$мес.

б) Мыши размножаются со скоростью $v(t) = 0{,}07 \cdot 170 \cdot e^{0{,}07t}$ в месяц.

Точки перегиба важны в биохимии, так как они определяют условия, при которых некоторая величина, например скорость процесса, наиболее (или наименее) чувствительна к каким - либо воздействиям.

Задача 15

Новый вид ядохимиката проходит испытание на определённом виде грызунов. Для исследования была набрана группа из 200 грызунов, которым в течение 20 дней в пищу добавлялся яд в определённом количестве. Исследования показали, что количество грызунов после каждого приёма яда можно описать функцией $y(t) = \dfrac{t^3}{3} - 5t^2 + 200, \quad 0 \le t \le 20.$ Определите эффективную стратегию применения яда.

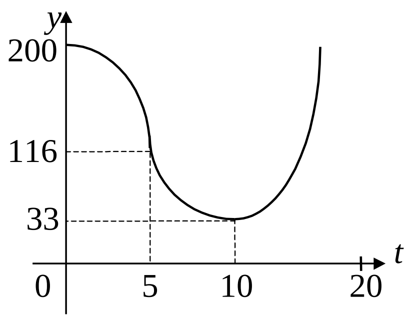


Рис.45

Решение

Исследуем на экстремум функцию

$$y(t) = \frac{t^3}{3} - 5t^2 + 200, \quad 0 \le t \le 20.$$

$y'(t) = t^2 - 10t.$ Следовательно,

$y'(t)=0$ при $t=0$ или $t=10$. Определим знак второй производной в точке подозрительной на экстремум: $y''(t)=2t-10$, $y''(10)>0$. Отсюда следует, что при $t=10$ функция принимает наименьшее значение.

Найдём точки перегиба: $y''(t)=0$. Отсюда $t=5$. Так как на промежутке $[0,5)$ $y''(t)<0$, то функция на этом интервале выпукла вверх. На интервале $(5,20]$ $y''(t)>0$, поэтому функция выпукла вниз. Таким образом, $t=5$ – точка перегиба и можно сделать вывод, что функция на интервале $[0,5)$ медленно убывала, а на интервале $(5,10]$ её скорость возросла и она резко стала убывать, и при $t=10$ достигла своего наименьшего значения. На интервале от 10 до 20 функция стала снова возрастать (см. рис. 45). Следовательно, на этой стадии требуется сменить яд, так как организм грызунов приспособился и побудил организм к резкому увеличению размножения вида. Таким образом, самый эффективный период можно назвать от 5 до10 дней.

Применение интеграла

Задача 16

На 1 га земли требуется 60 т навоза и 120 кг минеральных удобрений. Сколько удобрений надо внести на участок (см. рис. 46), если он ограничен линиями $7x-2y=3$, $5x+y=7$, $y=0$?

Решение

Вычислим площадь участка. Построим прямые и заштрихуем искомый участок. Две прямые пересекаются.

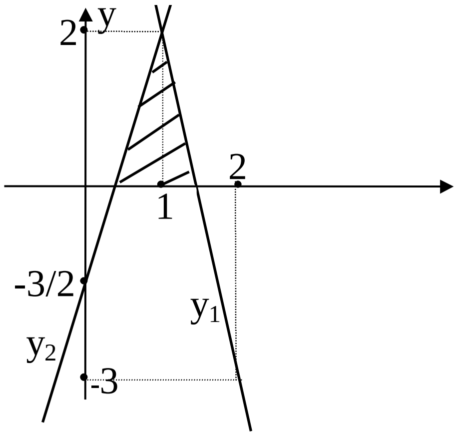


Рис. 46

Найдём точку пересечения:

$$\begin{cases} 5x + y = 7 \\ 7x - 2y = 3 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что $x = 1,\ y = 2$. Обозначим первую прямую $y_1 = 7 - 5x$, вторую $y_2 = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}$. Тогда искомая площадь будет найдена следующим способом:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{7}}^{1}(7x-3)dx + \int\limits_{1}^{\frac{7}{5}}(7-5x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{7x^2}{2} - 3x\right)\Bigg|_{\frac{3}{7}}^{1} + \left(7x - \frac{5x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{\frac{7}{5}} = \frac{34}{35}.$$

По условию задачи удобрения рассчитаны на 1 га. $\frac{34}{35}$ км^2= $\frac{3400}{35}$ га.

Итак, минеральных удобрений понадобится $\frac{3400}{35} \cdot 0{,}12 = 11{,}66$ т, а навоза $\frac{3400}{35} \cdot 60 = 5828{,}57$ т.

Задача 17

Высота кучи зерна равна 2,5 м, а длина окружности её основания 20 м. Куча в плоскости $x0y$ приближённо описывается как парабола. Масса 1 м^3 зерна равна 750 кг. Какова масса зерна в куче?

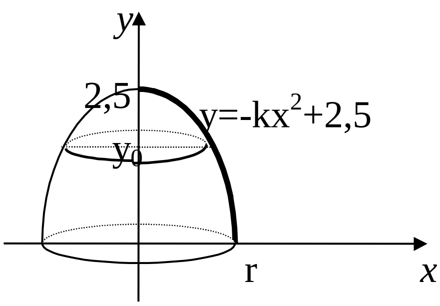


Рис. 47

Решение

Изобразим кучу зерна в плоскости $x0y$ в виде параболы (рис. 47). Ветви параболы направлены вниз и, следовательно, уравнение имеет вид

$y = -kx^2 + 2{,}5$. Длина окружности равна $C = 2\pi r$. В нашем случае равна 20 м. Следовательно, её радиус равен $r = \dfrac{10}{\pi}$. Зная, что парабола проходит через точку $\left(\dfrac{10}{\pi}, 0\right)$, найдём коэффициент k. Получим $k = \dfrac{2{,}5 \cdot \pi^2}{100}$. Уравнение параболы имеет вид $y = -\dfrac{2{,}5 \cdot \pi^2}{100} \cdot x^2 + 2{,}5$. Найдём объём этой кучи. Для этого выразим x из уравнения параболы $x = \pm 10\sqrt{\dfrac{2{,}5 - y}{2{,}5\pi^2}}$. Эта куча получена вращением дуги параболы $x = 10\sqrt{\dfrac{2{,}5 - y}{2{,}5\pi^2}}$, отмеченной на рисунке, вокруг оси $0y$. Тогда объём будет найден по формуле $V = \pi \int\limits_{y_1}^{y_2} [x(y)]^2 \, dy$. Имеем

$$V = \frac{100\pi}{2{,}5\pi^2} \int\limits_0^{2{,}5} (2{,}5 - y)\,dy = \frac{40}{\pi} \cdot \left(2{,}5y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2{,}5} = \frac{40}{\pi} \cdot \frac{6{,}25}{2} \approx 39{,}8 \text{ м}^3.$$

Масса зерна в куче равна $39{,}8 \cdot 750 \approx 30$ т.

В следующих задачах будем считать, что численность организмов $N(T)$ как функция времени T описывается формулой

$$N(T) = N(t_0) + \int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt,$$ где $v(t)$ – скорость размножения.

Задача 18 [19,110]

В начале наблюдения питательный раствор содержал 3000 бактерий. Исследования показали, что в следующий промежуток времени скорость, с которой размножаются бактерии, была $v = 420 \cdot e^{0,14t}$. Определите соответствующую функцию роста. Когда питательный раствор содержал 18000 бактерий? Определите прирост бактерий за промежуток времени от начала наблюдения до 20 часов.

Решение

Число бактерий растёт со временем, следовательно, $k > 0$. По условию $N'(t) = kN(t), \quad v(t) = N'(t)$ Следовательно,

$$N(t) = \int_0^t 420 \cdot e^{0,14t} dt = 3000 \cdot e^{0,14t}$$

Полагаем в этой формуле $N(t) = 18000$, получаем $18000 = 3000 \cdot e^{0,14t}$.Следовательно, $t = 12,8$часов. Через 12,8 часов число бактерий в питательном растворе станет 18000.

За промежуток времени от начала наблюдения до 20 часов количество бактерий станет равным

$$N(T) = 3000 + \int_0^{20} 420 \cdot e^{0,14t} dt = 3000 + 3000\left(e^{2,8} - 1\right) \approx 48914.$$

Задача 19 [19,150]

Некоторый вид вредителей размножается в лесу в определённый период времени экспоненциально. В начале исследования их количество оценивалось в $2,0 \cdot 10^4$особей. Через 6 дней их количество удвоилось. Каждый день один вредитель поедает 4 см^2 листвы. Сколько листвы съедят вредители за 20 дней?

Решение

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания численность многих популяций растет экспоненциальна, т. е. $N(t)=ae^{kt}$, где t – дни. Учитывая начальные условия, имеем: при $N(0)=2\cdot10^4$, $a=2\cdot10^4$; $N(6)=4\cdot10^4$. Следовательно, $e^{6k}=2$. Отсюда $k=\dfrac{\ln 2}{6}$. Функция имеет вид $N(t)=2\cdot10^4\cdot e^{\frac{\ln 2}{6}t}=2\cdot10^4\cdot 2^{\frac{t}{6}}$, где $0\le t\le 20$. Так как каждый вредитель съедает за день 4 см^2 листвы, то за 20 дней листвы будет съедено

$$\int_0^{20} 4\cdot 2\cdot10^4\cdot 2^{\frac{t}{6}}dt=\left.\frac{8\cdot10^4\cdot 2^{\frac{t}{6}}\cdot 6}{\ln 2}\right|_0^{20}=\frac{48\cdot10^4}{\ln 2}\left(2^{\frac{20}{6}}-1\right)\approx 5460869 \text{ см}^2$$

$$5460869 \text{ см}^2\approx 546\,\text{м}^2.$$

ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ЭКОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОБЛЕМАМИ

Применение производной

Задача 1

Колорадский жук наносит урон сельскому хозяйству, т. к. его плодовитость колоссальна. В среднем одна самка откладывает до 500 яиц. В благоприятный летний сезон количество жуков приближённо можно определить по формуле $500(x-25)^2$, а в неблагоприятный $300(x-25)$ (период развития жука из яйца составляет примерно 25 дней). Опишите закон, по которому определяется количество жуков, произведённых одной самкой, если в летнем сезоне благоприятных дней было примерно половина. Постройте график. Сделайте практические выводы.

Предлагаем решить самостоятельно.

Задачи на экстремум

Задача 2

Часть нефтепровода длиной l, закреплённая между двумя опорами, деформируется под действием равномерно текущей по нему нефти. Нагрузка, с которой нефть давит на нефтепровод, равна Q, величина деформации (прогиба) в точке, находящейся на расстоянии x от его левой опоры, выражается по формуле $f(x)=\dfrac{Qx^2(l-x)^2}{24EIl}$, где числа E и I зависят от материала, из которого изготовлен нефтепровод и формы его поперечного сечения. При каком значении x деформация нефтепровода (прогиба) будет максимальной?

Решение

Пусть x – координата точки нефтепровода, тогда величина прогиба будет равна $f(x)=\dfrac{Qx^2(l-x)^2}{24EIl}$, $x\in(0;l)$. Исследуем $f(x)$ на наибольшее значение на отрезке $[0;\,l]$. $f'(x)=\dfrac{Qx(x-l)\left(x-\frac{l}{2}\right)}{6EIl}$. Следовательно, $f'(x)=0$ при $x_1=0$, $x_2=l$, $x_3=\dfrac{l}{2}$. Два значения совпали с концами отрезка. Вычислим значения на концах отрезка и в точке x_3, а затем сравним их. Получаем $f(0)=0$, $f(l)=0$,

$f\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{Ql^3}{384EI}$. Следовательно, при $x=\frac{l}{2}$ прогиб нефтепровода будет наибольшим и может произойти экологическая катастрофа.

Задача 3

В Челябинской области ежегодно выбрасывается в водоёмы миллион кубометров неочищенных вод. При постройке канала водоочистительных сооружений необходимо использовать канал с наибольшей площадью сечения, которое по форме представляет равностороннюю трапецию (боковые стороны и одно из оснований равны) (см. рис. 48). При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

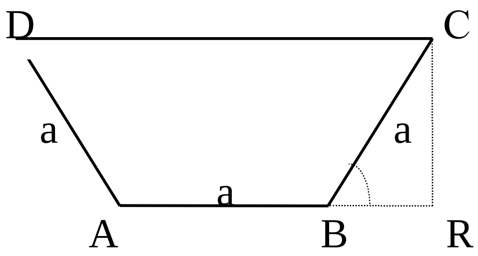


Рис. 48

Решение

Обозначим меньшее основание трапеции через a, угол наклона боковых сторон через $\angle CBR=\alpha$, площадь сечения через S. По условию $AB=AD=BC=a.$ Из треугольника BCR найдём $BR=a\cos\alpha.$ Тогда $CD=a+2a\cos\alpha,$ высота трапеции равна $CR=a\sin\alpha$. Определим площадь трапеции: $S=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$ Чтобы найти наибольшее значение площади $S=S(\alpha),$ найдём критические точки, принадлежащие интервалу $(0;\pi/2)$. Найдём производную $S'(\alpha)=a^2\left(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1\right)$. Следовательно, $S'(\alpha)=0$ при $\alpha_1=\pi/3,$ $\alpha_2=\pi.$ Интервалу $(0;\pi/2)$ принадлежит только критическая точка $\alpha_1=\pi/3,$ найдём

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2,\quad S(0)=0,\quad S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2.$$

Таким образом, площадь сечения канала является наибольшей, если угол наклона боковых сторон равен 60^0.

Задача 4

Каковы должны быть размеры свинцового контейнера (см. рис. 49) для хранения радиоактивных отходов, чтобы на его изготовление ушло минимальное количество свинца? Дно контейнера квадратное, объём равен 64 м^3.

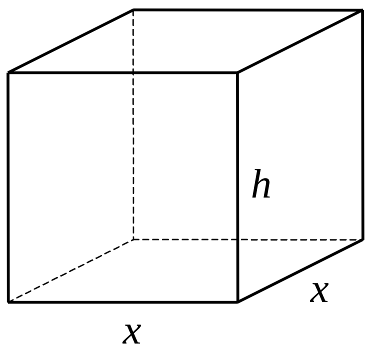


Рис. 49

Решение

Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Так как в основании контейнера квадрат, а контейнер имеет и дно и крышку, то нам потребуется на изготовление 4 боковых поверхности и 2 нижних. $S = 2x^2 + 4hx$. Известно, что $V = 64\ м^3$, следовательно, $h = \dfrac{64}{x^2}$. Запишем функцию $S(x) = 2x^2 + 4x\dfrac{64}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{256}{x}$, где $x > 0$.

Исследуем эту функцию на экстремум: $S'(x) = 4x - \dfrac{256}{x^2}$. Следовательно, $S'(x) = 0$ при $x = 4$. Так как $S''(4) = 4 + \dfrac{256 \cdot 2}{4^3} > 0$, то при $x = 4, \quad h = 4$ потребуется минимальное количество свинца.

Задача 5

Для ликвидации утечки нефти в порту ночью нужно осветить место аварии. Для этого на высоту h нужно поднять фонарь над центром площадки (рис. 50), представляющей собой квадрат со стороной a

метров, чтобы в средних точках каждой из сторон этого квадрата освещённость достигла наибольшей величины. Освещённость выражается формулой $T = \dfrac{k\cos\alpha}{|FK|^2}$, где k – число, определяющее мощность фонаря, FK – расстояние от фонаря до средней точки стороны квадрата. Найдите высоту h, при которой освещённость будет максимальной.

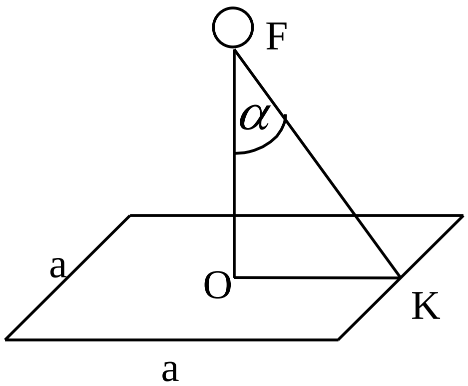


Рис. 50

Решение

Известно, что $OF = h,\ OK = \dfrac{a}{2}.$

Следовательно, $|FK|^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{4}.$

$$\cos\alpha = \frac{OF}{FK} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + a^2}}.$$

Получили функцию $T(h) = \dfrac{k\cdot 2h\cdot 4}{\sqrt{4h^2+a^2}\cdot\left(4h^2+a^2\right)} = \dfrac{8kh}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\right)^3}}$, где $h>0$. Исследуем её на экстремум: $T'(h) = \dfrac{8k\left(a^2-8h^2\right)}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\right)^5}}$. Следовательно, $T'(h)=0$ при $h = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$. Так как

$$T''(h) = \frac{8k}{\sqrt{\left(4h^2+a^2\right)^7}}\cdot\left(96h^3 - 36ha^2\right) \text{ и}$$

$$T''\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{8k}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2}+a^2\right)^7}}\cdot\left(\frac{96a^3}{16\sqrt{2}}-\frac{36a^3}{2\sqrt{2}}\right)<0,$$

то освещённость будет наибольшей при $h=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Задача 6

Для хранения радиоактивных отходов при перевозке разработали специальный контейнер. Отходы помещают в резервуар, имеющий форму правильной треугольной призмы заданного объёма V. Призму помещают в цилиндр. Призма и цилиндр сделаны из соединений свинца и специальных биодобавок, а между стенками цилиндра и призмы находится вакуум. Найдите наименьшую площадь поверхности такого цилиндра.

Решение

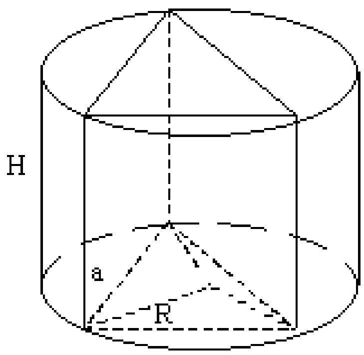


Рис. 51

Высоту призмы обозначим H, длину стороны основания a, радиус описанного цилиндра R (см. рис. 51). Этот радиус равен радиусу окружности, описанной около основания призмы, а поскольку основание – правильный треугольник, то $R=a/\sqrt{3}$. По условию имеем $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2H=V$.

Следовательно, $H=\frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. Площадь поверхности цилиндра равна $S(a)=2\pi R^2+2\pi RH=\frac{2\pi}{3}\left(a^2+\frac{4V}{a}\right)$, где $a>0$. Находим критическую точку этой функции: $S'(a)=\frac{2\pi}{3}\left(2a-\frac{4V}{a^2}\right)$. Следовательно, $S'(a)=0$ при $a=\sqrt[3]{2V}$. Так как $S''(a)=\frac{2\pi}{3}\left(2+\frac{8V}{a^3}\right)$ и $S''\left(\sqrt[3]{2V}\right)=\frac{2\pi}{3}\left(2+\frac{8V}{2V}\right)>0$, то функция $S(x)$ имеет наименьшее значение при $a=\sqrt[3]{2V}$ и оно равно $2\pi\sqrt[3]{4V^2}$.

Применение интеграла

Задача 7 [19,128]

Скорость роста населения как функция времени задана функцией $f(t)=a\cdot e^{-bt}-c$ (см. рис. 52). Время t измеряется в годах. При этом $f(0)=5\cdot 10^5$, $f(10)=2\cdot 10^5$ и при $t\to\infty$ будет $f(t)\to -10^5$.

а) Определите a, b, c.

б) Определите с помощью интеграла изменение количества населения за время от $t=0$ до $t=20$.

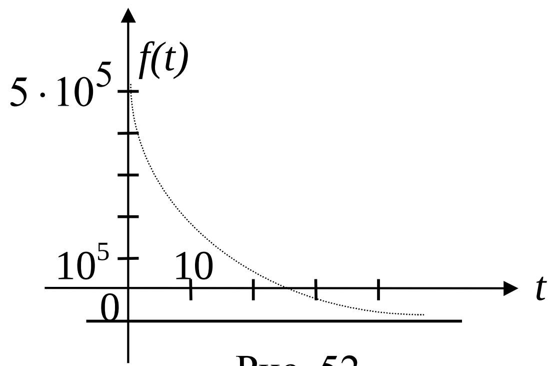


Рис. 52

Решение

а) $f(t)\to -10^5$ при $t\to\infty$, поэтому $-10^5=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{a}{e^{bt}}-c\right)=-c.$

Следовательно, $c=10^5$.

Из условия $f(0)=5\cdot 10^5$ следует, что $a-10^5=5\cdot 10^5$. Следовательно, $a=6\cdot 10^5$.

Из $f(10)=2\cdot 10^5$ имеем $6\cdot 10^5 e^{-10b}-10^5=2\cdot 10^5$. Следовательно, $b=\frac{\ln 2}{10}$. Имеем $f(t)=6\cdot 10^5 e^{-\frac{\ln 2}{10}t}-10^5$.

б) Скорость роста численности населения есть производная от количества населения F по времени t. Через 20 лет, при условии, что за начальное время будет принято $t=0$ (время отсчёта):

$$F(20)=5\cdot 10^5+10^5\int_0^{20}\left(6e^{-\frac{\ln 2}{10}t}-1\right)dt=10^5\left(5-\frac{60e^{-\frac{\ln 2}{10}t}}{\ln 2}\Bigg|_0^{20}-t\Big|_0^{20}\right)=$$

$$=10^5\left(5+\frac{60}{\ln 2}\left(1-e^{-2\ln 2}\right)-20\right)\approx 45\cdot 10^5.$$

Задача 8 [19,142]

Водохранилище имеет форму котла, полученного вращением функции $f(x)=\frac{1}{4}x^2$, где $0\le x\le 4$, вокруг оси $0y$ (см. рис. 53). Хранилище заполнено до краёв. Какая работа была затрачена при этом? Известно, что x и y определены в метрах, сила тяжести для 1 м^3 воды приблизительно равна 10^4Н.

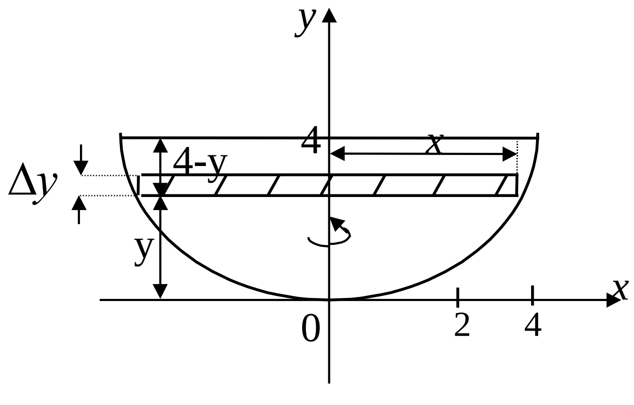


Рис. 53

Решение

Слой воды имеет форму цилиндра на высоте y, радиус x и толщину Δy. Сила тяжести слоя высоты (в Н):

$\Delta F=\pi x^2\Delta y\cdot 10^4=\pi\cdot 4y\cdot\Delta y\cdot 10^4.$

При поднятии слоя будет совершена работа: $\Delta W = \Delta F(4-y) = 4\cdot 10^4 \pi \cdot y(4-y)\Delta y$.При заполнении пустого хранилища водой будет затрачена работа (в Дж):

$$W = \int_0^4 4\cdot 10^4 \cdot \pi \cdot y(4-y)dy = 4\cdot 10^4 \pi \cdot \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^4 \approx 1{,}3\cdot 10^6 \text{ } Дж.$$

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1

Шоссе проходит через речку. Мост имеет форму параболы $y = px^2$. Каким нужно сделать уклон насыпи к мосту, чтобы переход с моста на насыпь был плавный? Длина моста $l = 20$ м, стрела провеса $f = 0{,}5$ м (см. рис. 54)?

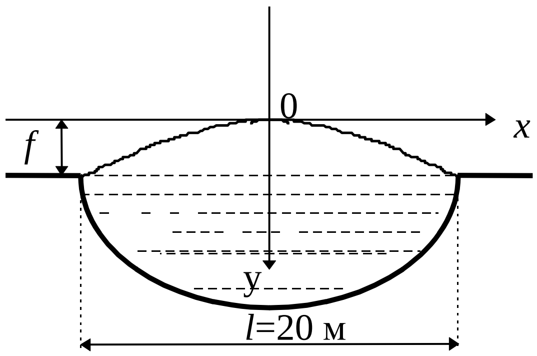


Рис. 54

Решение

Направление подхода к мосту должно совпадать с направлением касательной к профилю моста на конце его. Задача сводится к нахождению углового коэффициента касательной к графику функции $y = px^2$ в точке $x = 10$. Значение p определяют из условия, что парабола проходит через точку с координатами $(10; 0{,}5)$. Следовательно, $p = 0{,}005$. Обозначим величину угла наклона касательной через α. Тогда $tg\alpha = y'(10) = 0{,}1$. Следовательно, $\alpha = arctg\, 0{,}1 \approx 6^0$.

Задача 2

Группа спортсменов организовала на берегу моря следующее соревнование. Стартуя из точки А (см. рис. 55) на берегу моря, каждый спортсмен должен достичь буйка В, расположенного на расстоянии $l = 120$ м от берега. Береговую линию можно считать прямой; расстояние от старта А до основания перпендикуляра ВС, опущенного на эту линию, равно $L = 200$ м. Каждый спортсмен имеет право пробежать любое расстояние по берегу от старта А по направлению к основанию перпендикуляра ВС, а затем плыть к буйку. Победителем считается тот, кто доплывет до буйка В быстрее всех. Из какой точки берега наиболее выгодно начать плыть к буйку спортсмену, который знает, что при беге по песчаному берегу его скорость равна 13 км/ч, а скорость плавания – 5 км/ч.

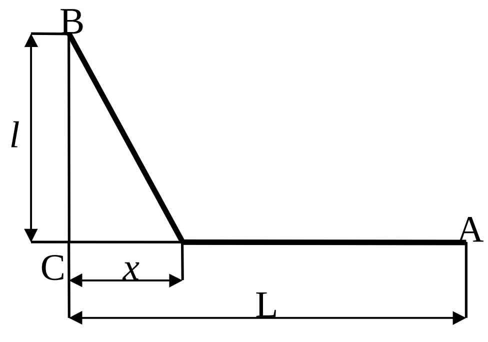


Рис.55

Решение

Пусть x – расстояние от точки С до того места, откуда спортсмен начинает плыть к буйку. Тогда спортсмен пробегает расстояние $L - x,$ а проплывает расстояние $\sqrt{l^2 + x^2}$. Общее время движения от старта А до буйка В равно $t(x) = \dfrac{L - x}{v_1} + \dfrac{\sqrt{l^2 + x^2}}{v_2}$, где $0 \le x \le L.$ Исследуем эту функцию на экстремум: $t'(x) = -\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{x}{v_2 \cdot \sqrt{l^2 + x^2}}$. Отсюда, $t'(x) = 0$ при $x = l\dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$. Определим знак второй производной в этой точке: $t''\left(l\dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}\right) = \dfrac{l^2}{v_2\sqrt{\left(l^2 + x^2\right)^3}} > 0.$

Подставляя численные значения всех величин, получим $x_m = 50$ м.

Задача 3

Бортовые огни малых судов можно различить в море на расстоянии до 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях от корабля B, который идет на запад со скоростью 7 миль в час. Будут ли корабли друг от друга на расстоянии, достаточном для приема бортовых сигналов?

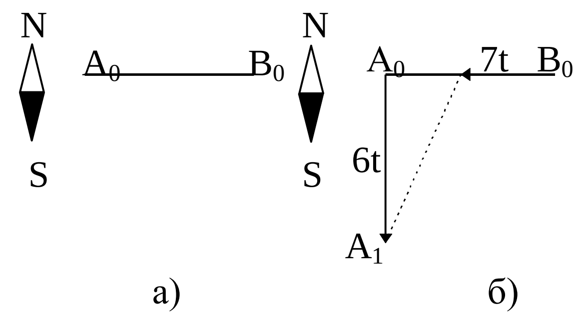


Рис. 56

Решение

Рассмотрим положение кораблей A и B в настоящее время (см. рис. 56,а). Через t часов корабли займут новое положение (см. рис. 56,б): первый окажется в точке A_1, $|A_0A_1| = 6t$ миль, второй – в точке B_1, $|B_0B_1| = 7t$ миль. В момент t расстояние d между кораблями будет составлять

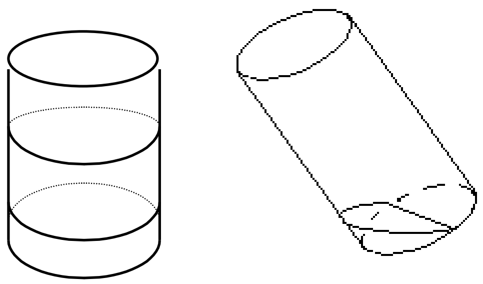
$$d(t) = |A_1B_1| = \sqrt{|A_0A_1|^2 + |A_0B_1|^2} = \sqrt{(6t)^2 + (5-7t)^2} = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}.$$

Исследуем функцию $d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25},$ где $t > 0$ на экстремум. Имеем $d'(t) = \dfrac{170t - 70}{2\sqrt{85t^2 - 70t + 25}}$. Отсюда $d'(t) = 0$ при $t = \dfrac{7}{17}$ ч. Найдем вторую производную и определим знак второй производной в критической точке $d''(t) = \dfrac{80100}{4\sqrt{(85t^2 - 70t + 25)^3}} > 0$ при $t = \dfrac{7}{17}$. Итак, наименьшее расстояние, на котором друг от друга могут оказаться корабли A и B, составляет примерно $d\left(\dfrac{7}{17}\right) = \sqrt{85 \cdot \dfrac{49}{289} - 70 \cdot \dfrac{7}{17} + 25} = \sqrt{\dfrac{180}{17}} \approx 3{,}25$ мили, что значительно больше 1 мили. Следовательно, принимать друг от друга сигналы бортовых огней они не смогут.

Задача 4

Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» – «Это очень просто, – ответила соседка. – Наклони кастрюлю, постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли у края, до которого поднялась крупа, и зажми ее пальцем. До этого уровня надо налить воду!» – «Так ведь пшена можно насыпать побольше или поменьше, да и кастрюли бывают разные – широкие, узкие», – усомнился Сережа. «Все равно, мой способ годится в любом случае», – гордо ответила соседка. Докажите, что соседка права: отношение объемов воды $V_в$ и крупы $V_{кр}$ по ее рецепту для любой цилиндрической кастрюли получается одинаковым. Найдите, чему равно это отношение.

Решение



а) Рис. 57 б)

На рис. 57,а) изображена стоящая кастрюля, а на рис. 57, б) – кастрюля, наклоненная так, как советовала соседка. Поместим исследуемую модель в систему координат, чтобы основание цилиндра (кастрюли) лежало в плоскости XOY, а центр основания O стал началом координат. Через точку x на оси OX, $x \in [-R;R]$ строим сечение тела (т.е. горки из крупы внутри кастрюли) плоскостью, перпендикулярной оси OX и параллельной оси OY. Треугольник, получившийся в сечении (см. рис. 58), обозначим

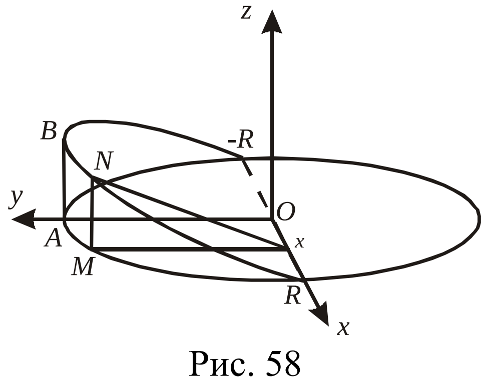


Рис. 58

через MNx. Очевидно, что $\Delta MNx \sim \Delta ABO$. Тогда $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{Mx}{AO}$, т.е.

$\frac{MN}{h} = \frac{y}{R}$ и $MN = \frac{hy}{R}$. Значит, $S_{MNX} = 0{,}5MN \cdot Mx = hy^2 / 2R$. Учитывая, что точка M принадлежит окружности радиуса R и имеет координаты (x, y), получаем $x^2 + y^2 = R^2$, т.е. $y^2 = R^2 - x^2$. Тогда $S(x) = S_{MNx} = h(R^2 - x^2)/2R$. Отсюда $V_{кр} = 2\int_0^R \frac{h(R^2 - x^2)}{2R} dx = \frac{2}{3} hR^2$.

Но $V_в = V_ц - V_{кр} = \pi R^2 h - \frac{2}{3} R^2 h = \frac{R^2 h}{3}(3\pi - 2)$. Значит, $\frac{V_в}{V_{кр}} = \frac{3\pi}{2} - 1$.

Эта величина не зависит от размера цилиндра (кастрюли).

Задача 5

Максимальное удаление от поверхности Земли (в апогее) Ю. А. Гагарина (12 апреля 1961 г.) при полете на корабле «Восток–1» было 302 км, минимальное (в перигее) – 175 км. Определить площадь поверхности Земли, которую он видел, находясь в каждом из этих положений.

На уроках географии и астрономии ученики узнали, что радиус Земли равен 6370 км, апогея – расстояние наиболее удаленной точки орбиты искусственного спутника от поверхности Земли, а перигея – расстояние ближайшей точки орбиты искусственного спутника от поверхности Земли.

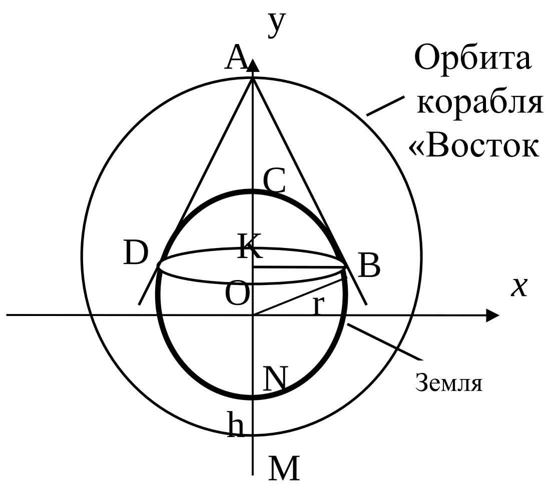


Рис. 59

Решение

Пусть $|AC| = H$ – высота апогея, $|MN| = h$ – высота перигея, r – радиус Земли (см. рис.). В апогее (из точки A, см. рис. 59) Ю. А. Гагарин мог видеть сферическую поверхность сегмента $BDCB$. Эта площадь поверхности образована вращением вокруг оси $0y$ дуги окружности CB и определяется формулой $S = 2\pi \int\limits_{B_y}^{C_y} x\sqrt{1+(x')^2}\,dy$, где x выразим из уравнения окружности $x^2 + y^2 = r^2$. Тогда $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ – уравнение дуги CB. Следовательно, $x' = \dfrac{-y}{\sqrt{r^2 - y^2}}$, $(x')^2 = \dfrac{y^2}{r^2 - y^2}$. Имеем

$$S = 2\pi \int\limits_{B_y}^{C_y} \sqrt{r^2 - y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}}\,dy = 2\pi \cdot r \int\limits_{B_y}^{C_y} dy =$$

$$= 2\pi \cdot r \cdot y\Big|_{B_y}^{C_y} = 2\pi \cdot r \cdot \left(C_y - B_y\right) = 2\pi \cdot r \cdot |KC|$$

Из прямоугольного треугольника ABO находим

$|BO|^2 = |AO| \cdot |OK|$, откуда $|OK| = \dfrac{|BO|^2}{|AO|} = \dfrac{r^2}{r + H}$. Так как

$|KC| = |OC| - |OK| = r - \dfrac{r^2}{r + H} = \dfrac{rH}{r + H}$, то $S = 2\pi r \dfrac{rH}{r + H} = \dfrac{2\pi r^2 H}{r + H}$, т.е.

$$S \approx \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6370^2 \cdot 302}{6370 + 302} \approx 115 \cdot 10^5 \text{кв. км.}$$

Таким же образом решается задача для точки M, т.е. для точки перигея.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Масса дрожжей в сахаре увеличивается за каждый час на 3%. Если начальная масса составляет 1г, то после t ч роста масса равна $m(t)=1{,}03^t$. Найдите приближённое значение массы после 10 мин. роста.
2. Радиус основания бурта картофеля конической формы 5 м. Как изменится вес картофеля в бурте, если его высота увеличится на 165 м? (1 м^3 картофеля весит примерно 4 ц). Ответ: ≈157,1 ц.
3. Функция $x(t)=1000+500\left(1-2^{-t}\right)$соответствует непрерывному росту популяции бактерий от начального размера $x(0)=1000$ до предельного $x(t)=1500$. Чему равны численные значения популяции в моменты времени $t=1,\ 2,\ 3, \ldots, 10$. Постройте график.
4. Шар, объём которого $\frac{32\pi}{3}$, вписан в конус. Найдите высоту конуса, если радиус его основания равен $2\sqrt{3}$. Ответ: 6.
5. Высота конуса равна 6, а его объём равен 144π. Найдите площадь полной поверхности куба, вписанного в конус. Ответ: 96 ед. кв.

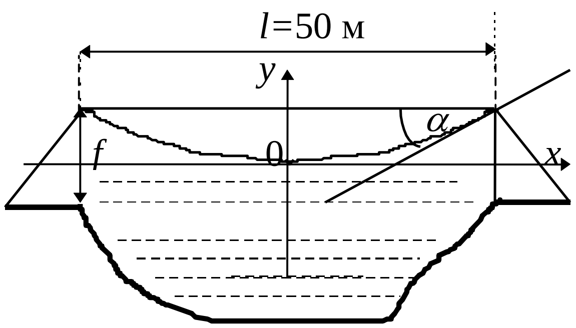


Рис. 60

6. Цепь висячего моста располагается по дуге параболы $y = px^2$. Пролет моста имеет длину 50 м, а стрела провеса $f = 5$ м. Определить величину угла провеса α в крайней точке моста (см. рис. 60). Ответ: $tg\alpha = 0{,}4$.

7. Профиль подъема шоссе имеет форму кривой $y = \dfrac{x}{1+x}$ $\quad (x \geq 0)$.

Определите величину угла наклона шоссе в его начале. Ответ: 45°.

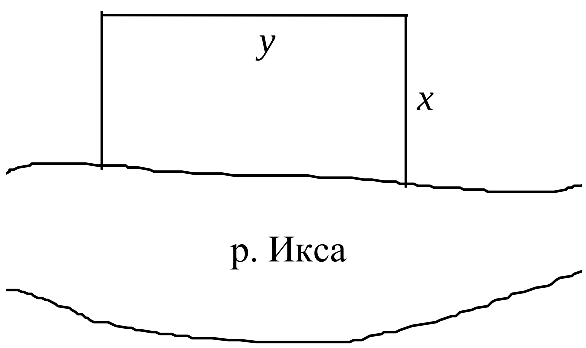


Рис. 61

8. Из луговых земель, расположенных на берегу реки Икса, фермер решил отвести под овощные культуры 8 га. Найдите ширину и длину участка прямоугольной формы (см. рис. 61), отводимого под овощные культуры, чтобы на ограждение этого участка израсходовать наименьшее количество строительного материала. Ответ: $x = 200$ м, $y = 400$ м.

9. Число 12 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей. Ответ: 12=1+11.

10. К заводской стене нужно пристроить помещение прямоугольной формы под новый цех. Каково должно быть соотношение ширины к длине нового цеха, чтобы на его строительство израсходовать наименьшее количество строительного материала? Ответ: 1:2. Длина нового цеха параллельна заводской стене.

11. Сила тока в цепи определяется по закону Ома $I = \dfrac{U}{R + R_1}$, где R – внешнее, а R_1 – внутреннее сопротивление. Мощность, выделяющаяся в нагрузке R, выражается формулой $P = I^2 R = \dfrac{U^2 R}{(R + R_1)^2}$. Вычислите значение R, при котором мощность будет наибольшая. Ответ: $R = R_1$.

12. Найдите кинетическую энергию тела, движущегося с ускорением $a = t^2 - 2t + 2$ в момент времени $t = 3$ с, если масса тела равна 2 кг, а скорость тела при $t = 0$ равна 1 м/с. Ответ: $E = \dfrac{mv^2}{2} = 49$ Дж.

13. Внутреннюю поверхность резервуара ёмкостью 4 м^3 с квадратным основанием, открытого сверху, нужно покрыть оловом. Каков должен быть размер резервуара, чтобы израсходовать минимальное количество олова? Толщиной стенок пренебречь. Ответ: $2 \times 2 \times 1$м^3.

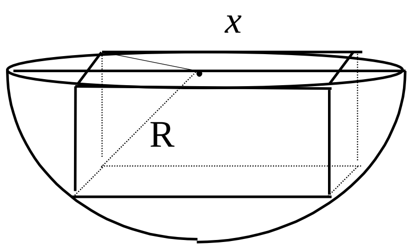


Рис. 62

14. В котлован полусферической формы, с радиусом R, помещён резервуар формы параллелепипеда для хранения нефтепродуктов (см. рис. 62). Каковы должны быть размеры прямоугольного дна резервуара, чтобы прямоугольник имел наибольшую площадь? Ответ: квадрат со стороной $R\sqrt{2}$.

15. Под экспериментальные посадки ценных культур решили огородить участок прямоугольной формы длиной 144 м и шириной 24 м, а затем разделить его пополам перпендикулярно длине. Но с це-

лью экономии средств на постройку забора решили найти наиболее выгодный размер участка. Найдите длину и ширину нового участка такой же площади и экономию средств, если 1 погонный метр забора стоит 225 руб. Ответ: 72 и 48 м; 16200 руб.

16. Стоимость топлива, необходимого для движения океанского танкера, пропорциональна кубу его скорости и составляет 10 руб. в час при скорости 10 узлов (1 у=1852 м/ч). Все другие виды расходов составляют 40 руб. в час. Найдите экономию средств при движении с наиболее выгодной скоростью, если до порта назначения 1000 морских миль. Ответ: 237 руб. 79 коп.

17. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найдите размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислите стоимость рва, если погонный метр его обходится в 50 коп. Ответ: 180×180 м^2, 360 руб.

18. Скорость роста y популяции x задана формулой $y = 0{,}001x(100 - x)$. При каком размере популяции эта скорость максимальна? Какова равновесная популяция, т. е. популяция, для которой скорость равна нулю? Ответ: при $x = 50$, $y_{\max} = 2{,}5$; $x = 100$, $y_{\min} = 0$.

19. Требуется построить канал, имеющий в сечении форму равнобедренной трапеции, основание и боковые стороны которого имеют по 8 м. Какова должна быть ширина канала, чтобы он вмещал наибольшее количество воды? Ответ: 16 м.

20. Имеется кусок проволоки длиной 160 м. Этой проволокой требуется огородить прямоугольный участок земли так, чтобы площадь

участка была наибольшей. Найдите размеры сторон участка. Ответ: $x = y = 40$.

21. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей? Ответ: Части должны быть одинаковых масс. Указание: надо найти наименьшее значение функции $y(x) = x^2 + (M - x)^2$.

22. Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью 40000 м^2. Затраты на постройку одного дома жилой площадью S складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. При строительстве дома жилой площадью 400 м^2 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо строить домов, чтобы затраты были наименьшими? Ответ: 25 домов. Указание: задача сводится к определению наименьшего значения функции $L(S) = \left(\frac{1600}{\sqrt{S}} + \sqrt{S}\right)$.

23. Мощность, затрачиваемая на движение парохода, пропорциональна кубу его скорости. Найдите наиболее экономичную скорость парохода при движении против течения, скорость которого равна a км/ч. Ответ: $v = 1{,}5 \cdot a$. Указание: работа, затрачиваемая на прохождение пароходом 1 км со скоростью v (км/ч) относительно воды, равна $A(v) = \frac{kv^3}{v - a}$.

24. Имеется батарея с внутренним сопротивлением r. Какое сопротивление надо подключить к батарее, чтобы выделяемая на нем мощность была наибольшей? Ответ: $R = r$. Указание: мощность,

выделяемая на сопротивлении R, равна $P(R) = I^2 R = \left(\frac{E}{R+r}\right)^2 R.$

25. Из трех резисторов, соединенных параллельно, составлена электрическая цепь. Известно, что сопротивление первого резистора в 9 раз больше сопротивления второго. При последовательном соединении этих резисторов сопротивление цепи равно R. Найдите сопротивления резисторов, при которых сопротивление исходной цепи будет наибольшим?

26. Три конденсатора, соединенных параллельно, образуют батарею емкостью C. Найдите емкости конденсаторов, при которых емкость батареи, полученной при последовательном соединении этих же конденсаторов, будет наибольшей, если известно, что $C_2 : C_3 = 2{,}25$.

27. При движении теплохода по озеру расходы N в рублях на 1 км пути определяются по формуле $N(v) = av^3 + \frac{b}{v}$, где v – скорость теплохода (в км/ч), a и b – определяемые из опыта коэффициенты. Найдите скорость теплохода, при котором расходы будут наименьшими, если $a = 0{,}001$ и $b = 60$. Ответ: $v \approx 14{,}1$ км/ч, а расходы N снижаются до 2,8 рубля на 1 км пути.

28. Дождевая капля, первоначальная масса которой m_0, а начальная скорость равна 0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, теряя ежесекундно массу k. Через сколько секунд после падения кинетическая энергия $E(t)$ капли будет наибольшей? Указание: если учитывать начальную скорость v_0 падения капли, то функция $E(t)$ имеет вид: $E(t) = \frac{(m_0 - kt) \cdot (v_0 + gt)^2}{2}$.

29. Требуется изготовить открытый сверху бак объемом V с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры бака, чтобы длина свариваемых швов была наименьшей?

30. Из всех треугольников с данным основанием a и данным углом α при вершине найдите треугольник с наибольшей биссектрисой, проведенной к основанию. Ответ: наибольшую биссектрису имеет равнобедренный треугольник.

31. На горизонтальной плоскости лежит кирпич массы m. С какой наименьшей (по модулю) силой и под каким углом к плоскости надо его тянуть, чтобы он сдвинулся с места, если коэффициент трения равен k? Указание: пусть мы тянем кирпич под углом φ к плоскости. Тогда для наименьшего значения $\left|\vec{F}\right|$, при котором кирпич сдвинется с места, должно выполняться соотношение $\left|\vec{F}\right|\cos\varphi = k\left(mg - \left|\vec{F}\right|\sin\varphi\right)$. Откуда $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{kmg}{\cos\varphi + k\sin\varphi}$. Наименьшего значения эта функция (от φ) достигает при $tg\varphi = k$, откуда $\varphi = arctgk$, $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}$.

32. Все вершины правильной треугольной призмы принадлежат сфере радиуса R. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Ответ: $H = 2R\sqrt{3}$. Указание: из равенства $R^2 = H^2/4 + l^2/3$ (l – сторона основания призмы), $V = \sqrt{3}\cdot l^2 H/4$, находим $V(H) = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(4HR^2 - H^3\right)$.

33. Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара

равен R. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Ответ: $H = R\sqrt{3}$. Указание: из формул $r^2 + H^2 = R^2$ (r – радиус основания цилиндра, H – его высота), $V = \pi \cdot r^2 H$ следует $V(H) = \pi \cdot H\left(R^2 - H^2\right)$.

34. Из всех конусов, описанных около данного шара, найти тот, который имеет наименьший объем. Ответ: $H = 4R$.

35. Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь расположен на берегу). Если матрос может делать пешком по 5 км/час, а на веслах по 4 км/час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? Ответ: Матрос должен пристать к берегу в 3 км от лагеря.

36. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости движения v км/ч выражается следующими формулами:

1) на асфальте $f = 14{,}5 + 0{,}25v$,

2) на хорошем шоссе $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$,

3) на булыжной мостовой $f = 29 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{15}v^2$,

4) на мягкой грунтовой дороге $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$. Определить для тех случаев, когда это возможно, скорость, при которой сопротивление будет наименьшим. Ответ. 1) Функция линейная, минимума нет, 2) $v = 10$ км/ч, 3) $v = 5$ км/ч, 4) $v = 11{,}25$ км/ч.

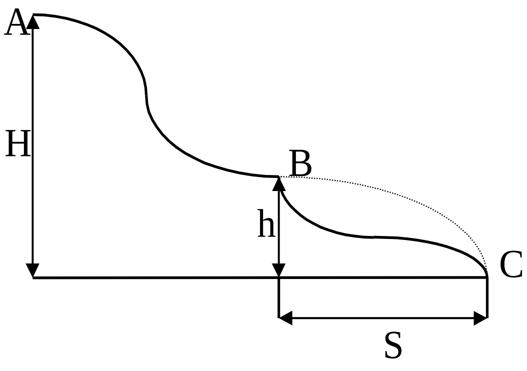


Рис. 63

37. Верхняя точка трамплина находится на высоте H над землей, а на высоте h трамплин обрывается (рис. 63). Какой должна быть высота h при заданной высоте H, чтобы лыжник, съехав с трамплина, мог пролететь наибольшее расстояние S (считая по горизонтали)? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ: $h_{опт} = \frac{H}{2}$, $S_{\max} = H$. Мы получили, что дальность полета определяется величинами h и H, то есть зависит только от конструкции трамплина. Если бы это было так на самом деле, то не было бы смысла проводить соревнования по прыжкам с трамплина, так как дальность полета всех лыжников была бы одинаковой. В действительности, чем выше мастерство лыжника, тем меньшую долю энергии он потеряет из-за трения и сопротивления воздуха. Мастерство лыжника сильно влияет на дальность полета.

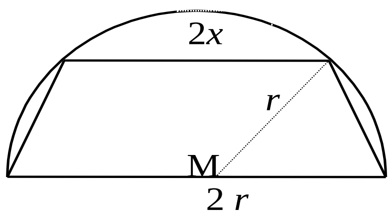


Рис. 64

38. Из полукруглого листа железа, радиус которого 4 дм, требуется вырезать равнобедренную трапецию максимальной площади (рис. 64).

39. Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейной шоссейной дороги, должен доставить геологов в населенный пункт, расположенный на шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к вездеходу, до населенного пункта равно 45 км.

По пересеченной местности вездеход идет со скоростью 44 км/ч, а по шоссе – со скоростью 55 км/ч. На каком расстоянии от населенного пункта вездеход должен выехать на шоссе, чтобы время движения было наименьшим?

40. На территории целинных земель строят элеватор в пункте A на расстоянии h км от ближайшей железнодорожной магистрали. Расстояние BC от ближайшей станции этой магистрали до основания перпендикуляра AC, проведённого из пункта A к линии этой железной дороги, равно d км. Участок BC железной дороги прямолинейный. На этом участке требуется выбрать пункт D, чтобы от него построить прямолинейную железнодорожную узкоколейную ветку DA к элеватору (см. рис. 65). На каком расстоянии от пункта C должен находиться пункт D, чтобы проезд по трассе $BD + DA$ со средней скоростью v км/ч на участке BD и со средней скоростью v_1 км/ч на участке DA $(v_1 < v)$ длился наименьшее время? Ответ: $DC = \dfrac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ км.

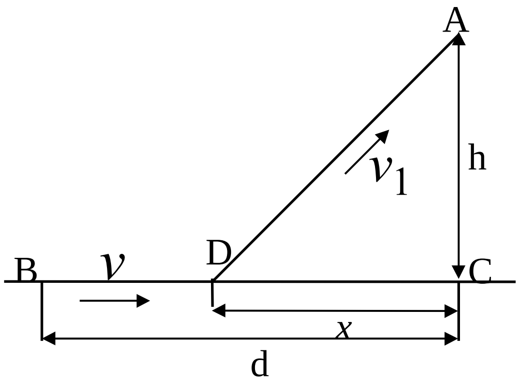


Рис. 65

41. Из куска жести, форма и размеры которого (в дм) показаны на рис. 66, вырезать прямоугольник с наибольшей площадью. Ответ: прямоугольник будет иметь наибольшую площадь, когда точ-

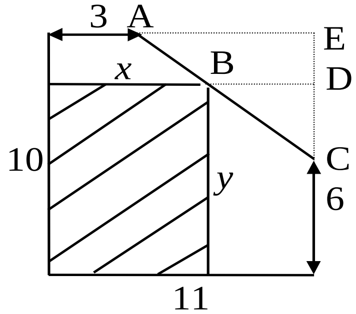


Рис. 66

ка B совпадает с точкой C; $S_{наиб} = 66$ (дм^2).

42. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным направлениям. В 9 ч расстояние между ними 20 миль, а в 9 ч 36 мин – 15 миль и в 9 ч 55 мин – 13 миль. В какой момент времени расстояние между пароходами минимально и каково это расстояние? Ответ: примерно через 80 мин после 9 ч, т.е. в 10 ч 20 мин расстояние между пароходами будет минимально и составит 12 миль.

43. Расстояние от песчаного карьера до кирпичного завода, расположенного на прямолинейной автомагистрали, равно 30 км. Песчаный карьер удален от этой магистрали на 24 км. Строительный кооператив взял подряд на строительство подъездной дороги от карьера к автомагистрали. На каком расстоянии от кирпичного завода должна находиться развилка дорог, чтобы время доставки грузов от карьера до завода было наименьшим, если известно, что автомашины могут развивать на магистрали скорость 52 км/ч, а на подъездной дороге – 20 км/ч?

44. Данное положительное число c представить в виде двух слагаемых так, чтобы куб первого слагаемого при умножении на квадрат второго дал наибольшее произведение. Ответ: $\frac{3}{5}c$; $\frac{2}{5}c$.

45. Какой нужно взять размер цилиндрического сосуда ёмкостью π м^3, открытого сверху, чтобы на его изготовление потребовалось наименьшее количество материала? Ответ: $r = h = 1$ м.

46. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 108 м^3 таким образом, чтобы суммарная площадь поверх-

ности дна и стенок была минимальной. Ответ: $x = 6$ м, $h = 3$ м.

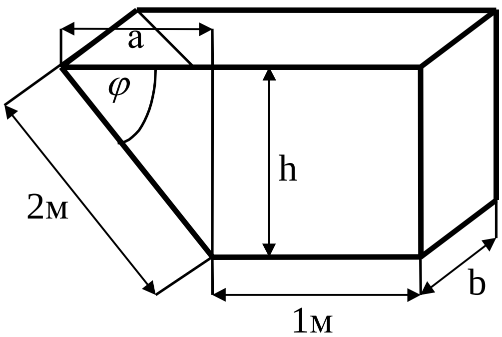


Рис. 67

47. На рисунке 67 изображен контейнер для мусора. Чтобы он имел наибольший объем, передняя стенка (при заданной ширине b) должна иметь максимально возможную площадь. Определите угол φ так, чтобы площадь S этой стенки была наибольшей.

48. Равнобедренный треугольник данного периметра p вращается около основания. Какие следует выбрать основания и высоту треугольника, чтобы объём тела вращения был наибольшим? Ответ: $x = \dfrac{p}{4}$; $h = \dfrac{p\sqrt{2}}{4}$.

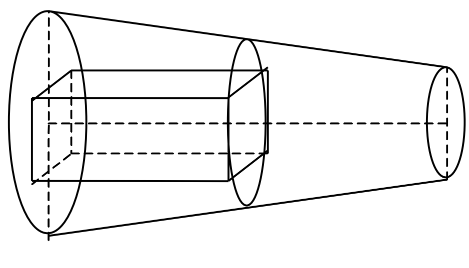


Рис. 68

49. Бревно длиной 20 дм имеет форму усеченного конуса с диаметрами оснований 2 дм и 1 дм. Требуется вырубить из бревна брус с квадратным поперечным сечением и наибольшим объемом, ось которого совпадала бы с осью бревна (см. рис. 68). Ответ: вырубить из данного бревна брус наибольшего объема нужно так: удалить верхнюю (более тонкую) часть бревна, чтобы осталось бревно высотой $13\frac{1}{3}$ дм, а затем из полученного бревна вырубить брус с квадратным поперечным сечением.

50. Два прямолинейных шоссейных пути пересекаются в пункте C под углом 60^0. К пункту C одновременно отбыли две автомашины: одна со скоростью 1 км/мин – из пункта A, расположенного на одном из этих шоссе на расстоянии 60 км от C, и вторая – со скоростью 0,5 км/мин – из пункта B, находящегося на другом из этих двух шоссе на расстоянии 40 км от C. Через сколько минут после своего отбытия автомашины окажутся на наименьшем расстоянии одна от другой и каково это расстояние? Ответ: 10 км.

51. Шест, имеющий в длину l метров, требуется разрезать на три части, чтобы, установив их на земле взаимно перпендикулярно, получить остов для шалаша в форме треугольной пирамиды. Какую длину должна иметь каждая из этих частей, чтобы объём шалаша оказался наибольшим? Ответ: $x = y = z = \frac{l}{3}; V_{наиб} = \frac{l^3}{162}$.

52. При проектировании цеха по переработке плодоовощной продукции планируется строительство нескольких одинаковых холодильных камер, каждая из которых имеет форму правильной четырёхугольной призмы объёмом 144 м^3. Для облицовки боковых стенок камеры используют материал, цена которого 150 руб., а для облицовки дна – 200 руб. за один квадратный метр. При каких размерах холодильной камеры стоимость её облицовки будет наименьшей? Ответ: сторона основания призмы равна 6 м, высота 4 м.

53. При небрежной транспортировке рулонов типографской бумаги на их поверхности появляются трещины, в результате чего образуется так называемый бумажный срыв, идущий в отходы. Очевидно, что эти отходы тем меньше, чем меньше полная поверхность рулона

при данном её объёме. Исследуйте, при каком соотношении между диаметром и длиной (т. е. образующей) рулона срыв бумаги будет (при данной глубине трещин и при данном объёме этого рулона) наименьшим. Ответ: $H = 2R$.

54. Известно, что расход топлива пропорционален кубу скорости судна и составляет 22 руб. в час при скорости 10 узлов. Содержание экипажа и амортизационные отчисления составляют 110 руб. в час. Найдите наиболее экономичную скорость равномерного движения и вычислите дополнительную прибыль, если известно, что расстояние до порта назначения 1500 морских миль. Ответ: 13, 6 узлов; 1564 р.

55. Проектируется туннель, имеющий своим поперечным сечением прямоугольник, завершённый полукругом, диаметр которого равен ширине этого прямоугольника. Определите высоту туннеля и ширину прямоугольной части его поперечного сечения так, чтобы этот туннель имел при данной своей длине l и данном периметре $2p$ своего поперечного сечения наибольший объём.

56. Требуется покрасить цинковыми белилами наружную поверхность резервуара цилиндрической формы объёмом 785 м^3. При каком размере резервуара расходуется минимальное количество краски? Вычислите стоимость покраски резервуара, если стоимость краски и покраски 1 м^2 стоит 10 руб. Ответ: $r = 5$ м; $h = 10$ м.

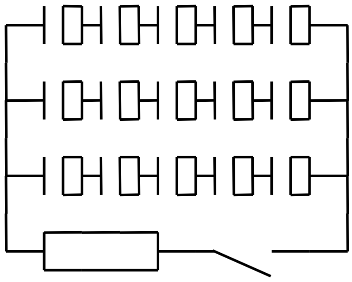


Рис. 69

57. Имеется N одинаковых электрических элементов. Из них можно несколькими способами составить батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем получен-

ные группы (числом $\dfrac{N}{n}$) – параллельно. Сила тока, даваемого такой батареей, определяется формулой $I = \dfrac{NnE}{NR + n^2 R_1}$, где E – э. д. с. одного элемента, R_1 – его внутреннее сопротивление, а R – внешнее сопротивление. При каком числе n (см. рис. 69) батарея даст ток наибольшей силы?

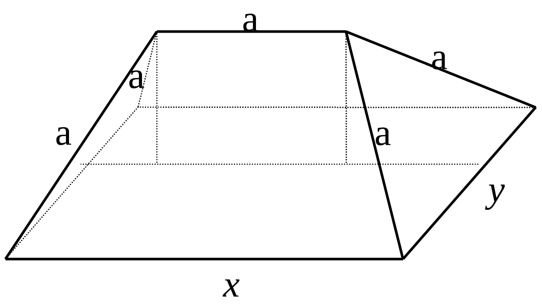


Рис. 70

58. Требуется построить дом с определенной жилой площадью S так, чтобы объем каркаса крыши, формы указанной на рисунке 70, был наибольшим. Длина пяти ребер $a = 5$ м. Ответ: $x = y$.

59. Найдите из множества кривых, соответствующих неопределённому интегралу $\int (3x-2)dx$, кривую, которая проходит через точку (-3; 4).

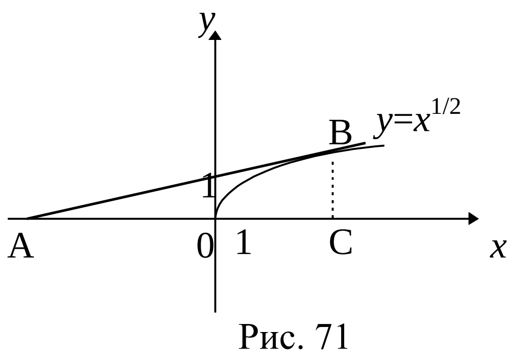


Рис. 71

60. Вид склона сбоку приближённо описывается функцией $y = \sqrt{x}$ (единичный отрезок равен 5 м). Скат AB (см. рис. 71) составляет угол 14^0 с горизонтом. Пристраивают подъём. Сколько потребуется щебня, если известно, что ширина подъема должна быть 4 м?

61. Рост численности насекомых некоторого вида происходит со скоростью $v = v(t)$ единиц/год. На сколько возрастет численность

N насекомых этого вида за 5 лет, начиная с момента отсчета? Ответ: $N(5) - N(0) = \int\limits_0^5 v(t)dt.$

62. В СССР 6 июля 1976 г. был осуществлен запуск космического корабля «Союз – 21», пилотируемого экипажем в составе Б. В. Волынова и В. М. Жолобова, для проведения совместных экспериментов с орбитальной научной станцией «Салют – 5». По данным траекторных измерений, параметры орбиты корабля «Союз – 21» составляют: максимальное удаление от поверхности Земли (в апогее) – 253 км, минимальное (в перигее) – 193 км. Определите площадь поверхности Земли, наблюдаемую с корабля в момент его максимального и минимального удаления от нее.

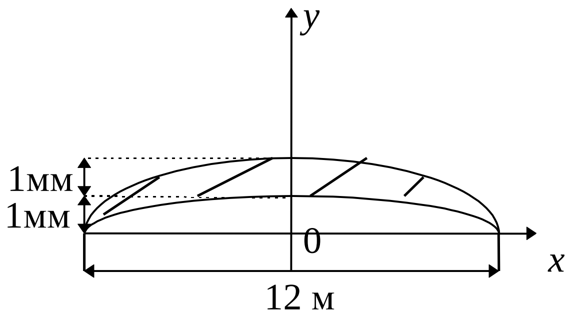


Рис. 72

63. Серповидная опора изготовлена из 10 – миллиметровой плоского стального листа. Какова масса этой опоры, если ее верхний и нижний контуры представляют собой параболы (см. рис. 72)? Указание: масса опоры вычисляется по формуле $m = \rho \cdot S \cdot d$, где ρ – плотность стали ($\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3), S – площадь сечения опоры, d – ее толщина ($d = 0{,}01$м). Введите прямоугольную систему координат и определите уравнения нижнего и верхнего контуров опоры: $y = -\frac{1}{36}x^2 + 1$ и $y = -\frac{1}{18}x^2 + 2$. Далее вычислите площадь фигуры, ограниченной найденными кривыми. Ответ: $m = 7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 624$ кг.

64. Вычислите объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 1$, $x = 3$. Ответ: $\frac{\pi}{7}\left(3^7 - 15\right)$.

65. Вычислите объем тела вращения, образованного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x = e^{-y}$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -1$, x и y измерены в метрах. Сколько потребуется рейсов пятитонного грузовика для перевозки груза, заполняющего этот объем, если масса 1 м^3 равна 400 кг? Ответ: 2 рейса.

66. Вычислите работу, совершаемую при растяжении пружины на 10 см, если для растяжения ее на 1 см необходима сила 60 Н. Указание: согласно закону Гука, сила растяжения упругой пружины прямо пропорциональна величине растяжения. Ответ: 30 Дж.

67. Сила в 98,1 Н растягивает пружину на 12 см. Какую работу она производит? Ответ: 5,886 Дж.

68. С балкона, находящегося на высоте 25 м над поверхностью земли, бросили вертикально вверх мячик с начальной скоростью 20 м/с. Используя зависимость высоты подъёма от времени, определите, на какую наибольшую высоту от поверхности земли взлетит мячик. (Считать $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.) Ответ: 45 м.

69. Тело брошено с земли вертикально вверх. Найдите наибольшую высоту подъёма тела, если его скорость $v = 19{,}6 - 9{,}8t$. Ответ: 19,6 м.

70. Шофёр автомобиля затормозил в тот момент, когда скорость была равна 36 км/ч. Найдите путь, пройденный автомобилем за время от $t_1 = 2c$ до $t_2 = 6c$, если при включенном тормозе автомо-

биль двигался с ускорением 0,5 м/с^2. Ответ: 32 м.

71. Чтобы растянуть пружину на 2 см, нужно совершить работу, равную 196,2 Дж. На сколько можно растянуть пружину, совершив работу в 784,8 Дж? Ответ: 4 см.

72. Аквариум, имеющий форму полушара радиуса r, заполнен водой. Определите силу давления воды на стенки аквариума. Ответ: $p = \pi \cdot r^3 \rho \cdot g$, где ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения.

73. Найдите силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму трапеции с основаниями 80 м (верхнее), 16 м (нижнее), высотой 8 м. Верхнее основание находится на уровне поверхности воды. Ответ: 768 т.

74. Определите кинетическую энергию однородного цилиндра, катящегося без проскальзывания по плоскости со скоростью 1 м/с. Радиус цилиндра равен R м, масса цилиндра m кг. Ответ: $\frac{m}{4}$ Дж. Решение. Пусть высота цилиндра равна $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 H}$. Рассмотрим часть цилиндра, ограниченную цилиндрическими поверхностями радиусов x и $x + \Delta x$. Объём этой части приближённо равен $2\pi x H \Delta x$, масса $\frac{2mx\Delta x}{R^2}$, скорость $\frac{x}{R}$, кинетическая энергия $W_x \approx \frac{m_x V_x^2}{2} \approx \frac{mx^3 \Delta x}{R^4}$. Поэтому $W = \int\limits_0^R \frac{mx^3 dx}{R^4} = \frac{m}{4}$.

75. Диаметр иллюминатора, расположенного на вертикальном борту судна, равен 30 см. Найдите силу давления воды на погружённую

половину иллюминатора. Ответ: 22,1 Н.

76. Сменная производительность труда бригады рабочих описывается функцией $y = -0{,}0033t^2 - 0{,}08t + 20{,}96,$ где t – время в часах. Определите объём выпуска продукции в течение года (за 240 рабочих дней), если смена длится 7 ч. Вычислите прибыль, если заводская оптовая цена единицы продукции равна 200 руб., её себестоимость – 100 руб., а количество бригад – 10. Ответ: 346518 ед.; прибыль – 34651848 руб.

77. Потребление электроэнергии городскими предприятиями и населением города с 8 до 18 ч. приближённо описывается функцией $y = 10000 - 8t + 15t^2,$ где t – время в часах. Вычислите стоимость электроэнергии, потребляемой городом, если стоимость 1 кВт/ч равна 40 коп. Ответ: 50224руб.

78. Поступление товара на склад описывается функцией $v = 0{,}006t^2 - 0{,}3t + 75,$ а реализация этих товаров торгующей организацией описывается функцией $v_2 = 0{,}003t^2 - 0{,}4t + 56,$ где t – количество дней. Определите запас товара в условных единицах по истечении 60 рабочих дней, если исходного товара на складе не было. Ответ: 1536 усл. ед.

79. Завод выпускает 40000 единиц в год определённого вида продукции, а каждый последующий год выпуск продукции непрерывно увеличивается на 1000 единиц. Определите сумму амортизационных отчислений за 10 лет при норме амортизации, равной 1,2% от себестоимости выпускаемой продукции, если себестоимость одной единицы продукции 120 руб. Ответ: 540000руб.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Апанасов П.Т., Апанасов Н.П. Сборник математических задач с практическим содержанием. – М.: Просвещение, 1987.
2. Баврин И.И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике. – М.: Просвещение, 2000.
3. Кипнис И.М. Сборник прикладных задач на неравенства. – М.: Просвещение, 1964.
4. Глинина И.И. Экологизация образовательного процесса в курсе математики. – Челябинск, 2001.
5. Зайцев И.А. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1991.
6. Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлова В.И., Яковлева Т.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1982.
7. Милованова Л.Н. Функции и их исследование. – М.: Академия педагогических наук РСФСР, 1958.
8. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г. Производная и интеграл .– М.: Просвещение, 1976.
9. Каченовский М.И., Колягин Ю.М. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа. – М.: Наука, 1987.
10. Саакян С.М., Гольдман А.М., Денисов Д.В. Задачи по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 2001.
11. Доброва О.Н. Задачи по алгебре и началам анализа. – М.: Просвещение, 1996.
12. Терешин Н.А., Терешин Т.Н. Сборник задач по алгебре и началам анализа. – М.: Аквариум АСТ, 1999.
13. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ. – М.: Просвещение, 1998.

14. Афанасьева Т.Л., Тапилина Л.А. Алгебра. – Волгоград: Учитель, 2000.
15. Супрун В. П. Избранные задачи повышенной сложности по математике. – Минск: Полымя, 1998.
16. Ивлев Б.М., Саакян С.М., Шварцбурд С.И. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 классов. – М.: Просвещение, 2001.
17. Ingo Weidig, Peter Zimmermann. Lambacher Schweizer Analysis Grundkurs Mathematisches Unterrichtswerk Ausgabe Baden. – Dusseldorf: Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1998.
18. Kurt Arzt, Tubingen August Schmid, Tubingen Jorg Stark, Tubingen. Lambacher Schweizer Analysis Zwei Grundkurs. – Stuttgart Dusseldorf Berlin Leipzig: Ernst Klett Schulbuchverlag, 1998.
19. Gerhard Brustle, Heidi Buck, Rolf Durr, Haus Freudigmann, Rolf Reimer. Lambacher Schweizer Analysis Grundkurs Mathematisches Unterrichtswerk fur das Gymnasium Ausgabe Baden-Wurttemberg. – Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH, 1999.

Учебное издание

Прикладные задачи математического анализа для школьников

Автор Елена Николаевна Эрентраут

Редактор Ю. В. Тихонова

Издательство ЧГПУ
454080 г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Объём 7 п.л.
Тираж 500 экз.
Формат 60×84/16

Подписано к печати 15.10.04
Бумага офсетная
Заказ . . .

Отпечатано на ризографе в типографии ЧГПУ
454080 г. Челябинск пр. Ленина, 69