ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

ПРИЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1974

А. С. МАКАРОВ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА УРЫСОНА

В данной статье формулируются некоторые условия непрерывности нормального интегрального оператора Урысона

$$Ax = \int_X K(s,\ t,\ x(t))\, d\mu(t),$$

действующего из одного банахова функционального пространства $E(X, \mu)$ в другое — $F(Y, \nu)$ [1]. Здесь (X, μ) и (Y, ν) — пространства с σ-конечными мерами, ядро $K(s, t, u)$ оператора A — вещественная функция, заданная на $Y \times X \times (-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори, то есть непрерывна по u при почти всех (s, t) и измерима по (s, t) при каждом u.

Обозначим через $L[L^\infty, E]$ множество измеримых по (s, t) функций $z(s, t)$, для которых

$$\operatorname*{vraimax}_{s \in Y} |z(s,\ t)| \in E,$$

а через $L[F, L^1]$ — множество таких измеримых по (s, t) функций $u(s, t)$, что

$$\int_X |u(s,\ t)|\, d\mu(t) \in F.$$

$L[L^\infty, E]$ и $L[F, L^1]$ становятся банаховыми функциональными пространствами, если нормы в них определить, соответственно, равенствами

$$\|z\|_{L[L^\infty,\, E]} = \|\operatorname*{vraimax}_{s \in Y} |z(s,\ t)|\|_E, \quad \|u\|_{L[F,\, L^1]} = \Big\| \int_X |u(s,\ t)|\, d\mu(t) \Big\|_F.$$

В дальнейшем будем отождествлять функции $x \in E$ с функциями $z(s, t) = \chi_Y(s) \cdot x(t)$, принадлежащими уже пространству $L[L^\infty, E]$.

Ниже используются некоторые обозначения, принятые в [7].

Назовем интегральный оператор A нормальным на шаре $S_E(x_0, r)$ пространства E, если оператор суперпозиции $Kz = K(s, t, z(s, t))$ определен на шаре $S_{L[L^\infty,\, E]}(x_0, r)$ пространства $L[L^\infty, E]$ и принимает значения из $L[F, L^1]$.

Понятие нормального интегрального оператора A, действующего в идеальных пространствах функций, введено в [4].

Лемма. *Нормальный оператор* $A : S_E(x_0, r) \to F$ *переводит сходящиеся по норме последовательности функций в последовательности, сходящиеся по мере на каждом измеримом множестве конечной меры.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_n \in S_E(x_0, r)$ сходится по норме к $x \in S_E(x_0, r)$. Так как $\|x_n - x\|_{L[L^\infty,\, E]} = \|x_n - x\|_E$, то последовательность x_n сходится к x и по норме пространства $L[L^\infty, E]$. Пусть теперь $Y_m \uparrow Y$, $\nu(Y_m) < \infty$ и $\chi_{Y_m} \in F$. Тогда $F(Y_m, \nu) \subset L^1(Y_m, \nu)$ [5]. Отсюда $L[F(Y_m, \nu), L^1(X, \mu)] \subset L^1(Y_m \times X, \nu \times \mu)$ [1]. Поскольку оператор A — нормальный, то оператор $P_{Y_m} K$ определен на $S_{L[L^\infty,\, E]}(x_0, r)$ и принимает значения из $L^1(Y_m \times X, \nu \times \mu)$. В силу следствия из теоремы в [7], оператор $P_{Y_m} K$ непрерывен. Поэтому

$$\lim_n \int_{Y_m} \int_X |K(s,\ t,\ x_n(t)) - K(s,\ t,\ x(t))|\, d\mu d\nu = 0.$$

Отсюда $P_{Y_m} Ax_n$ сходится к $P_{Y_m} Ax$ по мере и, следовательно, $Ax_n \xrightarrow{\nu} Ax$ [2]. Лемма доказана.

Если $K(s, t, u)$ — ядро нормального интегрального оператора, то на шаре $S_{L[L^\infty,\, E]}(x_0, r)$ можно определить оператор

$$A_1 z = \int_X K(s,\ t,\ z(s,\ t))\, d\mu(t),$$

значения которого принадлежат F.

Пусть $y_0 \in F$. Положим

$$T(y_0 + [F],\ \varepsilon) = \{ y \in F : d(y_0 + [F],\ y) < \varepsilon \},$$

где $d(M, y)$ — расстояние от точки y до множества M.

Теорема 1. *Нормальный оператор* $A : S_E(x_0, r) \to F$ *непрерывен в точке* x_0, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что*

$$A_1(S_{L[L^\infty,\, E]}(x_0,\ \delta)) \subset T(A_1 x_0 + [F],\ \varepsilon).$$

Доказательство. Предположим, что $A0 = 0$ и $x_0 = 0$. Допустим противное. Тогда найдется такая сходящаяся к нулю последовательность $y_m \in S_E(0, r)$, для которой, в силу

предыдущей леммы, не выполняется соотношение (1) в лемме 1 из [7]. Поэтому найдется $\varepsilon > 0$, последовательность измеримых множеств $B_n \downarrow \varnothing$, $B_n \subset Y$, и подпоследовательность $\{x_n = y_{m_n}\}$ такие, что

$$\|P_{B_n} Ax_n\|_F > \varepsilon. \tag{1}$$

В силу леммы 2 из [7] и условия теоремы существует такое $\delta > 0$, что

$$\lim_n \|P_{B_n} A_1 z\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

если $\|z\|_{L[L^\infty,\, E]} < \delta$. Поскольку $A_1 x = Ax$, если $x \in S_E(x_0, r)$ и $\|x\|_{L[L^\infty,\, E]} = \|x\|_E$, то

$$\lim_n \|P_{B_n} Ax\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

если $\|x\|_E < \delta$. Без ограничения общности можно считать, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E < \delta$. Тогда, в силу (1) и (3), можно выбрать возрастающую последовательность n_k так, чтобы

$$\|P_{B_{n_{k+1}}} Ax_{n_k}\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|P_{B_{n_k}} Ax_{n_k}\|_F > \varepsilon. \tag{4}$$

Положим $C_k = B_{n_k} \setminus B_{n_{k+1}}$ и $z = \sum_{k=1}^{\infty} P_{c_k} x_{n_k}$. Тогда множества C_k попарно не пересекаются, $\|z\|_{L[L^\infty,\, E]} < \delta$ и из неравенств (4) следует, что $\|P_{c_k} Ax_{n_k}\|_F > \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\lim_k \|P_{B_{n_k}} A_1 z\|_F \geqslant \lim_k \|P_{c_k} A_1 x_{n_k}\|_F = \lim_k \|P_{c_k} Ax_{n_k}\|_F > \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит (3) и, следовательно, условию теоремы.

Чтобы рассмотреть общий случай, определим оператор $\bar{A}x = A(x + x_0) - Ax_0$. $\bar{A}0 = 0$ и $\bar{A}$ определен на шаре $S_E(0, r)$ и принимает значения из F. Так как оператор A нормален, то и оператор $\bar{A}$ нормален. Аналогично оператору A_1 определим оператор $\bar{A}_1$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ выбрано так, что выполняется условие теоремы. Тогда для любого $z \in S_{L[L^\infty,\, F]}(0, \delta)$

$$d(\bar{A}_1 z,\ [F]) = \inf_{g \in [F]} \|\bar{A}_1 z - g\|_F = \inf_{g \in [F]} \|A_1(z + x_0) - (A_1 x_0 + g)\|_F < \varepsilon.$$

Отсюда и из доказанного выше вытекает, что $\bar{A}$ непрерывен в нуле. Следовательно, A непрерывен в точке x_0.

Следствие. Если $F = [F]$, то нормальный оператор $A : S_E(x_0, r) \to F$ непрерывен.

Это утверждение для случая, когда X и Y — компактные подмножества в n-мерном Евклидовом пространстве с мерой Лебега, было получено в [4] для оператора, действующего в идеальных пространствах функций.

Будем далее рассматривать пространство F с топологией $|\sigma|(F, F^*)$, порожденной системой полунорм

$$|u,\ v| = \int_Y |u \cdot v|\, d\nu, \quad v \in F^*,$$

где F^* — пространство дуальное к F.

Множество $M \subset F$ назовем слабо α-непрерывным, если

$$\lim_n \sup_{u \in M} |P_{B_n} u,\ v| = 0$$

при любой последовательности измеримых множеств $B_n \downarrow \varnothing$, $B_n \subset Y$, и любой функции $v \in F^*$.

Теорема 2. *Нормальный оператор* $A : S_E(x_0, r) \to F$ *переводит сходящиеся по норме к* x_0 *последовательности функций в последовательности, сходящиеся в топологии* $|\sigma|(F, F^*)$.

Доказательство. Пусть $x_0 = 0$, $A_0 = 0$ и последовательность $y_m \in S_E(0, r)$ сходится по норме к нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что $\sum_{m=1}^{\infty} \|y_m\|_E < r$. Покажем, что множество $\{Ay_m\}$ слабо α-непрерывно. Предполагая противное, можно найти $\varepsilon > 0$, последовательность измеримых множеств $B_n \downarrow \varnothing$, $B_n \subset Y$, подпоследовательность $\{x_n = y_{m_n}\}$, функцию $v \in F^*$, такие, что

$$|P_{B_n} Ax_n,\ v| > \varepsilon. \tag{5}$$

Используя интегрируемость произведения $(Ax_n)(s) \cdot v(s)$, выберем возрастающую последовательность n_k так, чтобы

$$|P_{B_{n_{k+1}}} Ax_{n_k},\ v| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Положим $C_k = B_{n_k} \setminus B_{n_{k+1}}$ и $z = \sum_{k=1}^{\infty} P_{C_k} x_{n_k}$. Тогда множества

C_k попарно не пересекаются, $\|z\|_{L[L^\infty, E]} < r$ и, в силу (5) и (6) $|P_{C_k} Ax_{n_k}, v| > \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда при любом k

$$|P_{B_{n_k}} A_1 z, v| \geqslant |P_{C_k} A_1 x_{n_k}, v| = |P_{C_k} Ax_{n_k}, v| > \frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит интегрируемости произведения $(A_1 z)(s) \cdot v(s)$.

В силу леммы, $Ay_m \xrightarrow{v} 0$. Аналогично доказательству леммы 1 из [6] можно показать, что множество $\{Ay_m\}$ ограничено. Используя теперь теорему 34 из [3], заключаем, что последовательность Ay_m сходится к нулю в топологии $|\sigma|(F, F^*)$.

Для доказательства общего случая достаточно рассмотреть оператор $\bar{A}x = A(x + x_0) - Ax_0$, который, очевидно, нормален на шаре $S_E(0, r)$ и $\bar{A}0 = 0$. Непрерывность оператора A в точке x_0 следует из непрерывности оператора $\bar{A}$ в нуле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грибанов Ю. И. Банаховы пространства функций и интегральные операторы, 1. Изв. вузов, Матем., № 4, 1966.
2. Грибанов Ю. И. Об одном виде сходимости последовательностей измеримых функций. Функциональный анализ и теория функций, сб. 3, Казань, Изд-во КГУ, 1966.
3. Грибанов Ю. И. Некоторые классы локально выпуклых топологических пространств, III. Изв. вузов, Матем. № 1, 1968.
4. Забрейко П. П. Нелинейные интегральные операторы: Тр. семинара по функц. анализу, вып. 8. Воронеж, Изд-во Воронежского университета, 1966.
5. Luxemburg W. A. Banach function spaces. Thesis, Delft, 1955.
6. Макаров А. С. О непрерывности оператора суперпозиции в банаховых пространствах измеримых функций.— Сб. асп. работ (математика), Казань, Изд-во КГУ, 1971.
7. Макаров А. С. Критерий непрерывности оператора суперпозиции (см. настоящий сборник).

Р. Х. МАТЕВОСЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ

Настоящая заметка является продолжением работы [1]. Здесь изучаются некоторые свойства КТ-пространств и линейных операторов, действующих в этих пространствах.

§ 1. КТ-пространства

Пусть $M(T)$ — векторное пространство всех конечных вещественных функций определенных на бесконечном счетном или несчетном множестве T. P_A — оператор проектирования в $M(T)$, определяемый равенством $(P_A x) = \{x(t)$, если $t \in A$, $= 0$, если $t \bar{\in} A\}$. Σ — множество всех конечных подмножеств множества T и $e(t)$ — функция определяемая равенством $[e(t)](s) = \{1$, если $t = s$, $= 0$, если $t \neq s\}$.

Рассмотрим на $M(T)$ любой функционал $\|x\| = \||x|\|$, $0 \leqslant \|x\| \leqslant \infty$, удовлетворяющий следующим условиям:

(P_1). $\|x\| = 0$ равносильно $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. (P_2). $\|e(t)\| < \infty$ при любом $t \in T$,

(P_3). Если $x \leqslant y$, то $\|x\| \leqslant \|y\|$.

(P_4). Каждому x отвечает хотя бы одно счетное множество $A \subset T$ такое, что $\|x\| = \|P_A x\|$.

$(P)_5$. Если $x_n \to x$ поточечно, то $\|x\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|x_n\|$.

В [1] показано, что $l(T) = \{x \in M(T) : \|x\| < \infty\}$ является полным нормированным пространством с нормой $\|x\| = \|x\|_{l(T)}$. Нормированное пространство $l(T)$ будем называть КТ пространством. Любое КТ-пространство **нормально,** в том смысле, что из $x \in l(T)$ и $|y| \leqslant |x|$ следует $y \in l(T)$ и $\|y\| \leqslant \|x\|$. Заметим, что оператор $P_A : l(T) \to l(T)$ имеет норму $\|P_A\| = 1$.

Теорема 1. *Пусть x, $x_n \in l(T)$. Для того, чтобы $x_n \to x$ по норме, необходимо и достаточно, чтобы $x_n \to x$ поточечно и $\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup_{m \geqslant k} \|P_{A_n}(x - x_m)\| = 0$ для любой последовательности счетных множеств $A_n \downarrow \varnothing$.*