



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет  
Кафедра математики и методики обучения математике

«ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ  
РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО  
ПОРЯДКА»

Выпускная квалификационная работа  
по направлению 44.04.01 Педагогическое образование

Направленность программы магистратуры  
«Математическое образование в системе профильной подготовки»

Проверка на объем заимствований:  
91 % авторского текста

Выполнил:  
Студент группы ОФ-213/131-2-1  
Ясницкая Марина Николаевна

Работа рекомендована к защите  
«26» марта 2019 г.  
И.о. зав. кафедрой МиМOM  
Шумакова Е.О.

Научный руководитель:  
канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры  
МиМOM  
Нигматулин Р.М.

Челябинск  
2019

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.....	6
1.1. Устойчивость решений линейных разностных уравнений.....	7
1.2. Особые типы асимптотического поведения решений линейных разностных уравнений .....	10
ГЛАВА 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА..	13
2.1. Теоремы об устойчивости для линейного разностного уравнения четвертого порядка.....	13
2.2. Область устойчивости и асимптотическое поведение решений на ее границе .....	17
2.3. Примеры и численные эксперименты.....	28
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	65
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	67

## ВВЕДЕНИЕ

Разностные уравнения уже более века применяются для разработки и исследования дискретных математических моделей (динамика популяций в биологии, системы автоматического управления в технике и др.). Решения разностных уравнений не только позволяют описать какой-либо процесс, но и обнаружить особые свойства модели. Поэтому изучение различных свойств решений таких уравнений в настоящее время является одним из актуальных направлений исследования.

Наиболее важным свойством, которым должны обладать все траектории, является ограниченность. Асимптотическое поведение ограниченных решений весьма разнообразно: от асимптотической устойчивости до хаоса. В настоящее время достаточно хорошо разработаны методы диагностики устойчивости линейных разностных уравнений [2, 9]. Исследование асимптотического поведения решений таких уравнений на границе области устойчивости является в общем случае сложной задачей.

В данной работе проводится исследование асимптотического поведения решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка, получаемых из уравнения

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0,$$

где  $a, b, c, d \in R$ , когда только один из коэффициентов  $a, b$  или  $c$  равен 0.

В изученной нами литературе [2, 5, 9, 12] были представлены различные формы описания условий устойчивости линейных разностных уравнений на основе известных алгебраических критериев, а также были указаны необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка. Но результаты, приведенные в данных работах, явно не определяют границы области устойчивости в пространстве параметров, не указывают на ее структуру и геометрию.

Область асимптотической устойчивости неполного уравнения четвертого порядка и ее граница в пространстве коэффициентов уравнения полностью описана в работе [21]. Для полного уравнения четвертого порядка область устойчивости не имеет наглядной геометрической интерпретации. Для неполных уравнений изображения этих областей в трехмерном пространстве – пространстве коэффициентов уравнения были получены в работе [21].

До настоящего времени не было проведено исследование асимптотических свойств решений линейного разностного уравнения четвертого порядка, поэтому проблема исследования асимптотического поведения решений разностного уравнения четвертого порядка является актуальной.

В связи с этим нами была поставлена **цель**: провести исследование асимптотического поведения решений разностного уравнения четвертого порядка.

Исходя из поставленной цели, нами были определены следующие **задачи**:

1. Изучить различные типы асимптотического поведения решений разностного уравнения.
2. Выделить типы поведения, присущие линейным разностным уравнениям.
3. Указать теоремы, позволяющие устанавливать определенные типы асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения.
4. Использовать найденные определения и факты для исследования асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения.
5. Провести численные эксперименты, иллюстрирующие соответствующие типы поведения решений линейного разностного уравнения четвертого порядка.

**Объект исследования**: свойства решений разностного уравнения четвертого порядка.

**Предмет исследования:** асимптотическое поведение решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка на границе области устойчивости в пространстве коэффициентов уравнений.

В структуру работы входят: введение, две главы, содержащие как теоретические сведения, так и примеры решения задач и результаты численных экспериментов, а также заключение, список литературы.

Во *введении* обоснована актуальность данной темы, поставлены цели и определены задачи работы.

*Первая глава* «Асимптотическое поведение решений линейных разностных уравнений» содержит наиболее важные понятия и факты общей теории линейных разностных уравнений.

*Вторая глава* «Асимптотическое поведение решений линейного разностного уравнения четвертого порядка» носит исследовательский характер. В ней исследуются различные типы асимптотического поведения решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка на границе области устойчивости, в случае, когда только один из коэффициентов  $a, b$  или  $c$  равен 0. Проводятся численные эксперименты, иллюстрирующие соответствующие типы асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения четвертого порядка.

В *заключении* делаются выводы об особенностях асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения четвертого порядка.

*Список литературы* содержит научные статьи из российских и зарубежных журналов, различные монографии, книги и публикации автора по теме работы.

## **ГЛАВА 1. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Многие научные и технические задачи приводят к необходимости решать разностные уравнения. Интерес к решению линейных однородных разностных уравнений второго и более высоких порядков связан с потребностью решения задач из прикладных областей науки. Примерами могут служить проектирование импульсных систем в теории автоматического управления, расчет цифровых фильтров в теории связи, анализ погрешностей решения дифференциальных уравнений на ЭВМ и другие.

Разностные уравнения по своим свойствам и области применения очень близки к дифференциальным уравнениям. Отличие состоит в том, что дифференциальные уравнения связывают значение функции и производных от нее в один и тот же момент времени, а разностные уравнения – значения функции в различные моменты времени.

Среди линейных уравнений, поддающихся аналитическому решению, в большей степени были исследованы разностные уравнения второго и третьего порядков, и в значительно меньшей – четвертого. В работе [11] и в работах [3, 4, 12,14] были получены геометрические описания области устойчивости, уравнения границ, исследовано асимптотическое поведение решений уравнения второго и третьего порядка соответственно.

В работах [21, 23, 24] были получены геометрические описания области устойчивости, уравнения границ, проведено описание области асимптотической устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка.

## 1.1. Устойчивость решений линейного разностного уравнения

Важное место в теории разностных уравнений занимает понятие устойчивости [1, 5, 13]. Для дальнейшего изложения приведем некоторые понятия и факты из [2, 9, 18].

В общем случае разностным уравнением порядка  $s$  будем называть уравнение вида

$$x_n = F(x_{n-1}, \dots, x_{n-s}), n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Решение разностного уравнения (1.1) называется последовательность  $(\tilde{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ , для которой при любом  $n \geq 0$  выполняется равенство  $(\tilde{x}_n)_{n=0}^{\infty} = F(\tilde{x}_{n-1}, \dots, \tilde{x}_{n-s})$ .

Пусть  $\alpha_{-s}, \dots, \alpha_{-1}$  заданные постоянные. Тогда каждое решение  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  уравнения (1.1) однозначно определяется начальными условиями

$$x_i = \alpha_i, -s \leq i \leq -1. \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы будем говорить об устойчивости нулевого решения  $\bar{x} = 0$ , исходя из следующих определений, сформулированных в [19].

**Определение 1.1.** Нулевое решение  $\bar{x} = 0$  уравнения (1.1) называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого решения  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) из системы  $|x_i| < \delta$  ( $-s \leq i \leq -1$ ) следует, что для  $n \geq 0$  выполняется неравенство  $|x_n| < \varepsilon$ .

**Определение 1.2.** Нулевое решение  $\bar{x} = 0$  уравнения (1.1) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и существует  $\gamma > 0$  такое, что для любого решения  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) из системы ограничений  $|x_i| < \gamma$  ( $-s \leq i \leq -1$ ) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$ .

В следующих теоремах устанавливается связь между понятием устойчивости линейного разностного уравнения и корнями его характеристического уравнения.

**Теорема 1.1.** Для устойчивости линейного разностного уравнения необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) все корни характеристического уравнения были по модулю не больше единицы:  $|\lambda_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, k$ ;
- 2) корни, по модулю равные единицы, являлись простыми.

**Теорема 1.2.** Линейное разностное уравнение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения по модулю строго меньше единицы  $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, k$ .

### **Алгебраические критерии устойчивости линейных разностных уравнений**

Существуют различные подходы к определению устойчивости линейного разностного уравнения. Рассмотрим алгебраические критерии устойчивости линейных разностных уравнений, которые позволяют проверить выполнение условия  $|\lambda_i| < 1$  (из теоремы 1.2.), не определяя самих корней  $\lambda_i$  характеристического уравнения. Рассмотрим некоторые факты из [9].

#### **Алгебраический критерий Шура-Кона**

Характеристический многочлен для линейного разностного уравнения  $k$ -го порядка имеет вид

$$D(\lambda) = a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для линейного разностного уравнения  $k$ -го порядка

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$$



и составим следующую последовательность определителей, составленных из его коэффициентов:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_{0m} & A_{km} \\ A_{km}^T & A_{0m}^T \end{vmatrix}, m = \overline{1, k},$$

где

$$A_{0m} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix},$$

$$A_{km} = \begin{bmatrix} a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \dots & a_{k-m+1} \\ 0 & a_k & a_{k-1} & \dots & a_{k-m+2} \\ 0 & 0 & a_k & \dots & a_{k-m+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

Если все определители  $\Delta_m$ ,  $m = \overline{1, k}$ , отличны от нуля, то многочлен  $D(\lambda)$  не имеет нулей на единичной окружности  $|\lambda| = 1$ , а число его нулей, расположенных вне этой окружности, равно числу перемен знака в последовательности  $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ . В частности, все нули характеристического многочлена лежат внутри единичной окружности, если число перемен знака в указанной последовательности равно нулю, то есть  $\Delta_m > 0$  ( $m = \overline{1, k}$ ).

Приведем теорему из работы [10], позволяющую определять устойчивость линейного разностного уравнения по его коэффициентам, без составления громоздких определителей.

Рассмотрим уравнение  $k$ -го порядка

$$\sum_{i=0}^k a_i x(n+k-i) = 0, \quad n \in N_0, \quad (1.3)$$

где  $a_i \in R, i = \overline{0, k}, a_0 \neq 0$ . Подставим в соответствие уравнению  $k$ -го порядка (1.3) уравнение  $(k - 1)$ -го порядка, которое называется редуцированным уравнением:

$$\sum_{i=0}^k b_i x(n + k - 1 - i) = 0, \quad n \in N_0 \quad (1.4)$$

Коэффициент  $b_i \neq 0$  будем считать заданным произвольно, а остальные коэффициенты будем определять через  $a_i, i = \overline{1, k}$ , и  $b_0$

**Теорема 1.3.** Уравнение (1.3) устойчиво, тогда и только тогда, когда выполняется условие  $\left| \frac{a_k}{a_0} \right| < 1$  и устойчиво уравнение (1.4), в котором

$$b_i = b_0 \frac{a_0 a_i - a_{k-i} a_k}{a_0^2 - a_k^2}, \quad i = \overline{1, k-1}.$$

## 1.2. Особые типы асимптотического поведения решений линейных разностных уравнений

Известно, что особые свойства решений возникают на границе области асимптотической устойчивости. Рассмотрим некоторые понятия из [2, 10, 12], связанные с такими свойствами.

Рассмотрим разностное уравнением (1.1).

**Определение 1.3.** Решение  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  линейного разностного уравнения (1.1) называется неограниченным, если для любого  $M > 0$  существует  $n_0$  такое, что для любого  $n > n_0$   $|x_n| > M$ .

В противном случае – ограниченным.

**Определение 1.4.** Решение  $(x_n)$  уравнения (1.1) называются  $k$ -периодическим решением или  $k$ -циклом (1.1), если существует такое число  $k \in N$ , что для всех  $n \in N$   $x_{n+k} = x_n$ . Число  $k$  называют периодом решения  $x_n$ .

В некоторых случаях равенство  $x_{n+k} = x_n$  рассматривают не для всех  $n \in N$ , а для  $n \geq n_0$ .

**Определение 1.5.** Решение  $(x_n)$  уравнения (1.1) называется предельным  $k$ -циклом, если существуют последовательности  $(u_n)$  и  $(v_n)$  такие, что  $(u_n)$  –  $k$ -периодическая и  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , и для всех  $n \geq n_0$   $x_n = u_n + v_n$ .

Решения линейных разностных уравнений обладающих свойством, схожим со свойством хаоса, называют псевдошумовыми. Рассмотрим определение псевдошумового решения, которое приводится в [12].

**Определение 1.6.** Решение  $(x_n)$  уравнения (1.1) называется псевдошумовым, если оно обладает следующими признаками:

- 1) ограниченность;
- 2) не существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = Const$ ;
- 3)  $(x_n)$  не является циклом.

Решения линейных разностных уравнений могут обладать свойством осциллируемости. Наиболее близкие теме работы результаты для уравнения третьего порядка, связанные с осциллируемостью решений, были получены в работе [2].

Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$x_{n+3} + ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (1.6)$$

где  $a, b, c, \in \mathbf{R}, c \neq 0$ . Характеристический многочлен для (1.6) имеет вид

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

**Определение 1.7.** Решение  $(x_n)$  уравнения (1.6) называется неосциллирующим, если существует такое  $N > 0$ , что  $(x_n) > 0$  либо  $x_n < 0$  для всех  $n \geq N$ , в противном случае, решение  $(x_n)$  уравнения (1.6) называют осциллирующим.

**Определение 1.8.** Уравнение (1.6) называют осциллирующим, если все его решения являются осциллирующими. Уравнение (1.6) называют неосциллирующим, если хотя бы одно решение является неосциллирующим.

**Определение 1.9.** Уравнение (1.6) называют строго неосциллирующим, если все его решения являются неосциллирующими.

В следующих теоремах из работы [2] устанавливается связь между понятием осциллируемость и коэффициентами линейного разностного уравнения третьего порядка (1.6).

**Теорема 1.4.** Пусть

$$a < 0, c < 0 \text{ и } 0 < \frac{ab}{3} - c - \frac{2a^3}{27} < \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{a^2}{3} - b \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Если

$$\frac{c}{a} \leq b < \frac{a^2}{3},$$

то уравнение (1.6) строго неосциллирующее.

Если

$$b < \frac{c}{a} < \frac{a^2}{3} \text{ или } b < \frac{a^2}{3} \leq \frac{c}{a},$$

то осциллирующие решения уравнения (1.6) вместе с его тривиальным решением образуют двумерное подпространство пространства решений уравнения (1.6).

**Теорема 1.5.** Пусть

$$a < 0, c < 0 \text{ и } \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{a^2}{3} - b \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{ab}{3} - c - \frac{2a^3}{27} > 0.$$

Если

$$\frac{c}{a} \leq b < \frac{a^2}{3},$$

то уравнение (1.6) строго неосциллирующее.

Если

$$b < \frac{c}{a} < \frac{a^2}{3} \text{ или } b < \frac{a^2}{3} \leq \frac{c}{a},$$

то осциллирующие решения уравнения (1.6) вместе с его тривиальным решением образуют двумерное подпространство пространства решений уравнения (1.6).



## ГЛАВА 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

### 2.1. Теоремы об устойчивости для линейного разностного уравнения четвертого порядка

В данном параграфе мы рассматриваем линейное разностное уравнение четвертого порядка и, опираясь на теоремы и определения данные в первой главе, приводим необходимые теоремы, для исследования асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения четвертого порядка.

Рассмотрим следующие теоремы из [10], позволяющие определять устойчивость линейного разностного уравнения четвертого порядка.

**Теорема 2.1.** Уравнение

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0, \quad (2.1)$$

где  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ,

устойчиво, тогда и только тогда, когда  $|d| < 1$  и точка

$$\left\{ \frac{c-a}{2(1-d)}, \frac{a+c}{1+d}, \frac{b}{1+d} \right\}$$

принадлежит области

$$D = \{(\xi, \eta, \rho) \in \mathbf{R}^3: 2\xi^2 + \rho - 1 < 0, 1 - \eta + \rho > 0, \quad 1 + \eta + \rho > 0\}.$$

**Теорема 2.2.** Уравнение (2.1) устойчиво, тогда и только тогда, когда выполняется условие  $|d| < 1$  и устойчиво уравнение

$$x_{n+3} + \frac{p_1}{p_0}x_{n+2} + \frac{p_2}{p_0}x_{n+1} + \frac{p_3}{p_0}x_n = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{a - cd}{1 - d^2}, \quad \frac{p_2}{p_0} = \frac{b}{1 + d}, \quad \frac{p_3}{p_0} = \frac{c - ad}{1 - d^2}.$$

Используя теорему 2.2 и критерий устойчивости уравнения первого порядка, опишем область устойчивости уравнения (2.1) в виде системы неравенств:

**Теорема 2.3.** Уравнение (2.1) устойчиво, тогда и только тогда, когда

$$|d| < 1,$$

$$\left| \frac{c + ad}{1 + d^2} \right| < 1,$$

$$\left| \frac{b + d(a^2 + c^2 - bd) + d^2(-ac + bd) - (ac + bd)}{(1 - c + (a - d)d)(1 + c - d(a + d))} \right| < 1,$$

$$\left| \frac{(1 - d)(a + d(ab - cd) - (-ad + c(b + d)))}{(1 - c + (a - d)d)(1 + c - d(a + d))} \right| < 1.$$

**Теорема 2.4.** Нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$|d| < 1, \quad |c + a| < 1 + b + d$$

и

$$|b(1 - d) + d(1 - d^2) + a(da - c)| < db(1 - d) + (1 - d^2) + c(da - c).$$

### Алгебраический критерий Шура-Кона

Воспользуемся алгебраическим критерием Шура-Кона, который был рассмотрен в первой главе, для того, чтобы сформулировать условия устойчивости для линейного разностного уравнения четвертого порядка.

Рассмотрим характеристическое уравнение для линейного разностного уравнения четвертого порядка

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

и составим следующую последовательность определителей, составленных из его коэффициентов:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_{0m} & A_{4m} \\ A_{4m}^T & A_{0m}^T \end{vmatrix}, \text{ где } m = \overline{1,4}.$$

Коэффициенты определителей являются следующие матрицы:  $A_{0m}$ ,  $A_{4m}$ ,  $A_{4m}^T$ ,  $A_{0m}^T$ . Где матрицы  $A_{4m}^T$ ,  $A_{0m}^T$  являются транспонированными матрицами  $A_{4m}$ ,  $A_{0m}$  соответственно.

$$\begin{aligned}
 A_{01} &= 1, & A_{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_{03} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}, & A_{04} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a & 1 & 0 \\ c & b & a & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_{41} &= d, & A_{42} &= \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, \\
 A_{43} &= \begin{pmatrix} d & c & b \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, & A_{44} &= \begin{pmatrix} d & c & b & a \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда последовательность определителей имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & d \\ d & 1 \end{vmatrix} = 1 - d^2 > 0, \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & d & c \\ a & 1 & 0 & d \\ d & 0 & 1 & a \\ c & d & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + c - ad - d^2)(-1 + c - ad + d^2), \\
 \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d & c & b \\ a & 1 & 0 & 0 & d & c \\ b & a & 1 & 0 & 0 & d \\ d & 0 & 0 & 1 & a & b \\ c & d & 0 & 0 & 1 & a \\ b & c & d & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= (-1 + b - ac + c^2 + d + a^2d - 2bd - acd + d^2 + bd^2 - \\
 &- d^3) \times (-1 - b + ac + c^2 - d - a^2d - acd + d^2 + bd^2 + d^3)
 \end{aligned}$$



$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d & c & b & a \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & d & c & b \\ b & a & 1 & 0 & 0 & 0 & d & c \\ c & b & a & 1 & 0 & 0 & 0 & d \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & c \\ c & d & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b \\ b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ a & b & c & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1 + a - b + c - d)(1 + a + b + c + d) \times \\ \times (-1 + b - ac + c^2 + d + a^2d - 2bd - acd + d^2 + bd^2 - d^3)^2$$

Исходя из алгебраического критерия Шура-Кона, для линейного разностного уравнения  $k$ -го порядка, рассмотренного в первой главе, условие устойчивости для линейного разностного уравнения четвертого порядка имеет следующий вид:

$$1 - d^2 > 0,$$

$$-(1 + c - ad - d^2)(-1 + c - ad + d^2) > 0,$$

$$(-1 + b - ac + c^2 + d + a^2d - 2bd - acd + d^2 + bd^2 - d^3) \times \\ \times (-1 - b + ac + c^2 - d - a^2d - acd + d^2 + bd^2 + d^3) > 0,$$

$$-(-1 + a - b + c - d)(1 + a + b + c + d) \times \\ \times (-1 + b - ac + c^2 + da^2d - 2bd - acd + d^2 + bd^2 - d^3)^2 > 0.$$

Используя условие устойчивости для линейного разностного уравнения четвертого порядка, выделим условие устойчивости для каждого неполного уравнения четвертого порядка, в случае, когда ровно один из коэффициентов  $a$ ,  $b$  или  $c$  равен нулю.

Для неполного уравнения (2.1) в случае, когда коэффициент  $a = 0$  условия устойчивости имеет вид:

$$\begin{cases} |d| < 1, \\ |c| < |-1 + d^2|, \\ ((d-1)(1-d^2+db-b) + c^2)((d^2-1)(1+d+b) + c^2) > 0, \\ |c| < |1+b+d|. \end{cases}$$

Для неполного уравнения (2.1) в случае, когда коэффициент  $b = 0$  условия устойчивости имеет вид:

$$\begin{cases} |d| < 1, \\ |-1 + d^2| > |c - ad|, \\ |-1 + c^2 + d^2 - acd| > |ac - d - a^2d - acd + d^3|, \\ ((1+d)^2 - (a+c)^2)(-1 - ac + c^2 + d + a^2d - acd + d^2 - d^3)^2 > 0. \end{cases}$$

Для неполного уравнения (2.1) в случае, когда коэффициент  $c = 0$  условия устойчивости имеет вид:

$$\begin{cases} |d| < 1, \\ |-1 + d^2| > |ad|, \\ ((d-1)(bd - b - d^2) - 1 + d + a^2d)((d^2-1)(1+d+b) - a^2d) > 0 \\ ((1+b+d)^2 - a^2)(-1 + b + d + a^2d - 2bd + d^2 + bd^2 - d^3)^2 > 0. \end{cases}$$

Полученные системы, очевидно, являются громоздкими, их использование для описания, исследования и графического представления области устойчивости неудобно.

## **2.2. Область устойчивости и асимптотическое поведение решений на ее границе**

Для каждого неполного уравнения особые свойства решений, указанные в первой главе, появляются на границе области устойчивости, поэтому в данном параграфе на границе области устойчивости мы исследовали поведение решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка.

Из теоремы 1.2, следует, что нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни его характеристического многочлена

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (2.3)$$

по модулю меньше 1.

Область асимптотической устойчивости, в пространстве коэффициентов, это тело ограниченное поверхностями (может быть плоскостями). Любое пересечение поверхностей будем называть ребром. Вершиной будем называть общую точку ребер.

Области асимптотической устойчивости, в пространстве коэффициентов, для неполных уравнений четвертого порядка, были получены в работе [21]

Исходя из сформулированных в первой главе определений и теорем по формуле общего решения, определим свойства решений на каждом участке границе области устойчивости неполного линейного разностного уравнения четвертого порядка.

По теореме 1.1, нулевое решение уравнения (2.1) будет устойчиво, если и только если корни по модулю равные 1 будут простыми, а остальные корни по модулю меньше 1.

Из теоремы 1.2 следует, что нулевое решение уравнения (2.1) будет асимптотически устойчиво, если и только если все корни характеристического уравнения по модулю строго меньше единицы.

### **Случай $a = 0$**

Для уравнения

$$x_{n+4} + bx_{n+2} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \quad (2.4)$$

характеристический многочлен имеет вид

$$P(x) = x^4 + bx^2 + cx + d. \quad (2.5)$$

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.4) в пространстве коэффициентов  $b, c, d \in \mathbf{R}$  изображена на рисунке 2.1.

Она представляет собой тело, ограниченное двумя поверхностями

$$\begin{cases} b = st - (s + t)^2 + 1 \\ c = (s + t)(st - 1) \\ d = st \\ |s| < 1, |t| < 1 \end{cases}, \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} b = -3p^2 + q^2 + 1 \\ c = 2p(p^2 + q^2 - 1) \\ d = p^2 + q^2 \\ p^2 + q^2 < 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

и двумя пересекающимися плоскостями

$$d = -b - c - 1, \quad d = -b + c - 1,$$

где  $|b| \leq 2, |c| \leq 1, |d| \leq 1$ .

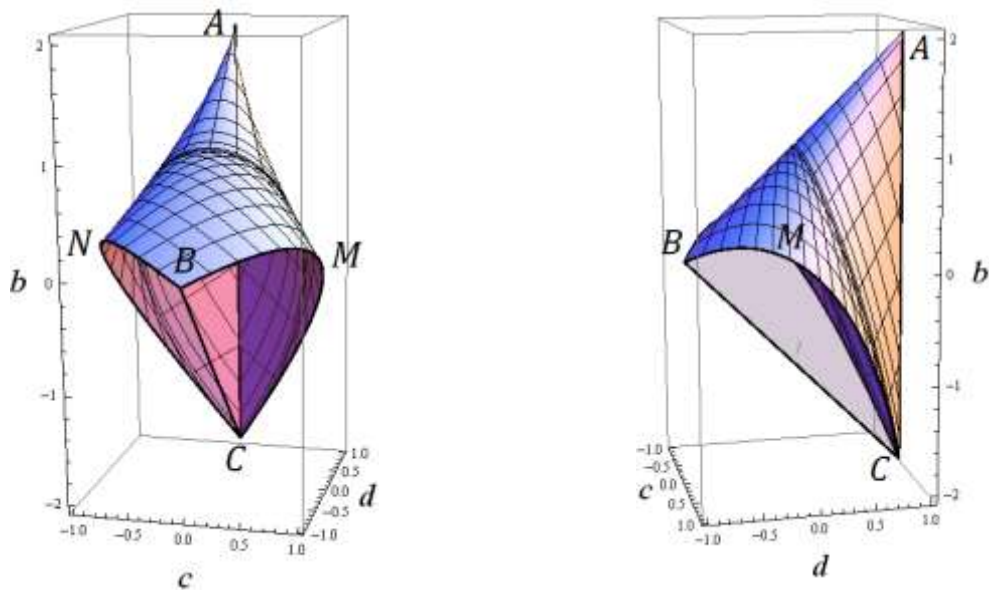


Рис.2.1. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.4) (в двух видах).

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.4) (см. рис. 2.1) образуют три вершины:  $C, B, A$ , четыре ребра: два отрезка  $AC, CB$ , и две дуги  $CNB, SMB$ , две плоскости  $(CNB)$  и  $(CMB)$ , две поверхности (2.6) и (2.7).

Область асимптотической устойчивости обладает единственной плоскостью симметрии  $c = 0$ .

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.4) (см. рис. 2.1) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в вершинах  $C(-2; 0; 1)$ ,  $A(2,0,1)$ , в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- в вершине  $B(0; 0; -1)$  устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- на ребрах  $AC, BC$ , дугах  $CNB, CMB$  устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- во внутренних точках граней  $(CNB)$ ,  $(CMB)$  система (2.4) устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхностях (2.6), (2.7) система (2.4) устойчива (не асимптотически);

В таблице 2.1. представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.4).

Таблица 2.1. Виды асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.4) (рис. 2.1)

Участок границы области устойчивости	Формула общего решения	Возможное асимптотическое поведение
Вершина $C(-2; 0; 1)$	$x_n = C_1 + nC_2 + (-1)^n(C_3 + nC_4)$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $A(2, 0, 1)$	$x_n = (C_1 + nC_2) \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + (C_3 + nC_4) \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $B(0; 0; -1)$	$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $AC$	$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Ребро $BC$	$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + (-t)^n C_3 + t^n C_4$ $x_n = C_1 + (-1)^n C_2 +  \beta ^n (C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi))$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $CNB$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Ребро $CMB$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Грань $(CNB)$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (-1 - s - t)^n C_4$	Ограниченность
Грань $(CMB)$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (1 - s - t)^n C_4$	Ограниченность, осциллируемость, периодичность
Поверхность (2.6)	$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Поверхность (2.7)	$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + (\sqrt{p^2 + q^2})^n (C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1))$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения

### Случай $b = 0$

Для уравнения

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + cx_{n+1} + dx_n = 0 \quad (2.8)$$

характеристический многочлен имеет вид

$$P(x) = x^4 + ax^3 + cx + d. \quad (2.9)$$

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.8) в пространстве коэффициентов  $a, c, d \in \mathbf{R}$  изображена на рисунке 2.2.

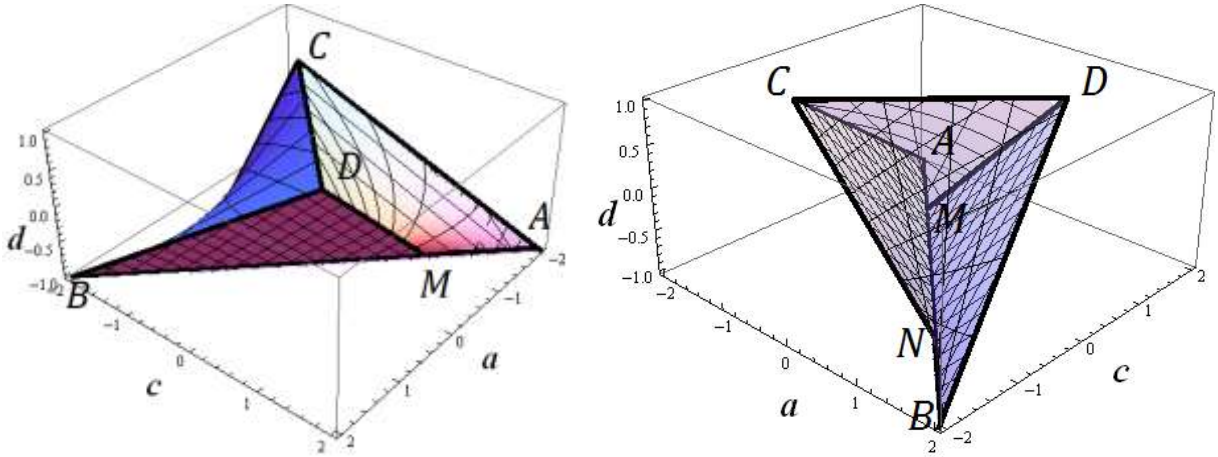


Рис.2.2. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.8) (в двух видах).

Она представляет собой тело, ограниченное двумя поверхностями

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2 + st + 1}{s+t} \\ c = \frac{(st)^2 - (s+t)^2 + st}{s+t}, \\ d = st \\ |s| < 1, |t| < 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3p^2 + q^2 + 1}{2p} \\ c = \frac{p^2 + q^2 + (p^2 + q^2)^2}{2p} - 2p \\ d = p^2 + q^2 \\ |p^2 + q^2| < 1, \quad 0 < |p| < 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

и двумя пересекающимися плоскостями

$$d = -a - c - 1, \quad d = a + c - 1,$$

где  $|a| \leq 2, |c| \leq 2, |d| \leq 1$ .

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.8) (см. рис. 2.2) образуют четыре вершины:  $A, B, C, D$ , шесть ребер: отрезки  $AC, DB, CN, DM, AB, CD$ , две плоскости  $(ACN)$  и  $(BDM)$ , две поверхности (2.10) и (2.11).

Область асимптотической устойчивости обладает единственной осью симметрии  $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ .

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.8) (рис. 2.2) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в каждой из четырех вершин  $A(-2; 2; -1), B(2; -2; 1), C(-1; -1; 1), D(1; 1; 1)$ , в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- на рёбрах  $DB, AC$  устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- на ребрах  $CD, DM, CN$  устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- во внутренних точках граней  $(ACN), (BDM)$  система (2.8) устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхностях (2.10), (2.11) система (2.8) устойчива (не асимптотически);

В таблице 2.2. представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.8)



Таблица 2.2. Виды асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.8) (рис. 2.2)

Участок границы области устойчивости	Формула общего решения	Возможное асимптотическое поведение
Вершина $A(-2; 2; -1)$	$x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3 + (-1)^n C_4$	Неограниченность
Вершина $B(2; -2; 1)$	$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2 + n^2C_3) + C_4$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $C(-1; -1; 1)$	$x_n = C_1 + nC_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $D(1; 1; 1)$	$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Неограниченность, осциллируемость
Ребро $AC$	$x_n = C_1 + nC_2 + \left(\frac{s+t-q}{2}\right)^n C_3 + \left(\frac{s+t+q}{2}\right)^n C_4,$ $q = \sqrt{(s+t)^2 + 8(s+t) + 4}$	Неограниченность
Ребро $DB$	$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + \left(\frac{s+t-r}{2}\right)^n C_3 + \left(\frac{s+t+r}{2}\right)^n C_4,$ $r = \sqrt{(s+t)^2 - 8(s+t) + 4}$	Неограниченность, осциллируемость
Ребро $CD$	$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Ребро $AB$	$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Ребро $DM$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $CN$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, псевдошумовые решения, периодичность
Грань $(ACN)$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + \left(\frac{-s-t-st}{1+s+t}\right)^n C_4$	Ограниченность
Грань $(BDM)$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + \left(\frac{s+t-st}{-1+s+t}\right)^n C_4$	Ограниченность, осциллируемость, периодичность
Поверхность (2.10)	$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Поверхность (2.11)	$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + (\sqrt{p^2 + q^2})^n (C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1))$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения

### Случай $c = 0$

Для уравнения

$$x_{n+4} + ax_{n+3} + bx_{n+2} + dx_n = 0 \quad (2.12)$$

характеристический многочлен имеет вид

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + d. \quad (2.13)$$

Область асимптотической устойчивости уравнения (2.12) в пространстве коэффициентов  $a, b, d \in \mathbf{R}$  изображена на рисунке 2.3.

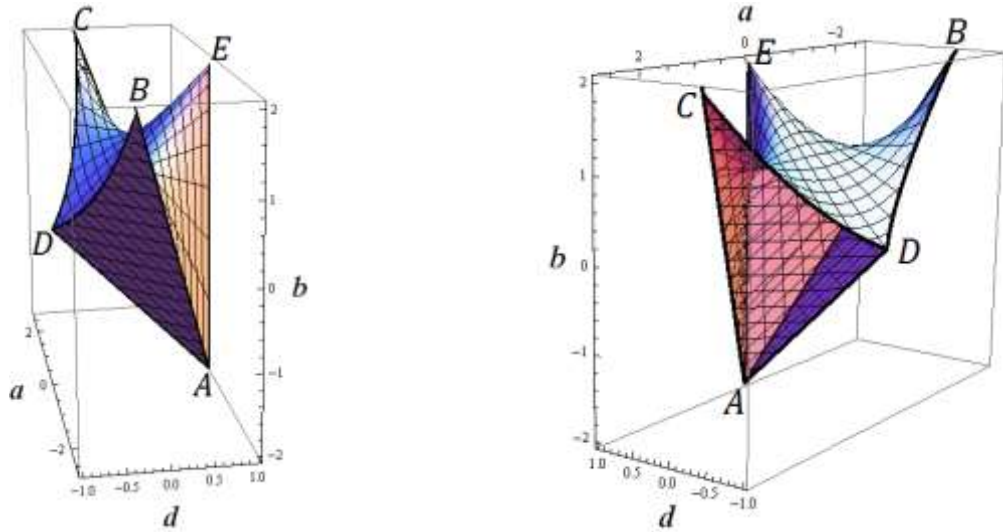


Рис.2.3. Область асимптотической устойчивости уравнения (2.12) (в двух видах).

Она представляет собой тело, ограниченное поверхностью

$$\begin{cases} a = -(s+t) + \frac{s+t}{st} \\ b = st + 1 - \frac{(s+t)^2}{st}, \\ d = st \\ |s| < 1, |t| < 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

и двумя пересекающимися плоскостями

$$d = -a - b - 1, \quad d = a - b - 1,$$

где  $|a| \leq 2$ ,  $|c| \leq 2$ ,  $|d| \leq 1$ .

Границу области асимптотической устойчивости уравнения (2.12) (см. рис. 2.3) образуют пять вершин:  $A, B, C, D, E$ , шесть ребер: отрезки

$AB, AC, AD, AE$ , дуги  $BD, CD$ , две плоскости  $(ABD)$  и  $(ACD)$ , одна поверхность.

Область асимптотической устойчивости обладает единственной плоскостью симметрии  $a = 0$ .

На каждом участке границы области устойчивости решения уравнения (2.12) (рис. 2.3) обладают следующими особенностями асимптотического поведения:

- в вершинах  $A(0; -2; 1)$ ,  $B(-2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$ ,  $C(2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$ ,  $E(0; 2; 1)$ , в общем случае устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- в вершине  $D(0; 0; -1)$  устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- на ребрах  $AE, AD, CD, BD$  устойчивость сохраняется, но не асимптотическая;
- на ребрах  $AC, AB$  устойчивость не сохраняется в виду наличия кратных корней по модулю равных 1;
- во внутренних точках граней  $(ACD)$ ,  $(ABD)$  система (2.12) устойчива (не асимптотически);
- в точках, лежащих на поверхности (2.14) система (2.12) устойчива (не асимптотически);

В таблице 2.3. представлены особенности асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.12).

Таблица 2.3. Виды асимптотического поведения на каждом участке границы области устойчивости решений уравнения (2.12) (рис. 2.3)

Участок границы области устойчивости	Формула общего решения	Возможное асимптотическое поведение
Вершина $A(0; -2; 1)$	$x_n = C_1 + nC_2 + (-1)^n(C_3 + nC_4)$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $B(-2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$	$x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3 + (-\frac{1}{3})^n C_4$	Неограниченность
Вершина $C(2\frac{2}{3}; 2; -\frac{1}{3})$	$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2 + n^2C_3) + (\frac{1}{3})^n C_4$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $E(0; 2; 1)$	$x_n = (C_1 + nC_2) \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) + (C_3 + nC_4) \sin(n \cdot \frac{\pi}{2})$	Неограниченность, осциллируемость
Вершина $D(0; 0; -1)$	$x_n = (-1)^n C_1 + C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $AC$	$x_n = (-1)^n(C_1 + nC_2) + (\frac{s+t-m}{2})^n C_3 + (\frac{s+t+m}{2})^n C_4,$ $m = \sqrt{(s+t)^2 - 2(s+t)}$	Неограниченность, осциллируемость
Ребро $AB$	$x_n = C_1 + nC_2 + (\frac{s+t-l}{2})^n C_3 + (\frac{s+t+l}{2})^n C_4,$ $l = \sqrt{(s+t)^2 + 2(s+t)}$	Неограниченность
Ребро $AD$	$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + (-t)^n C_3 + t^n C_4$ $x_n = C_1 + (-1)^n C_2 +  \beta ^n (C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi))$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $AE$	$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения
Ребро $BD$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Ребро $CD$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность
Грань $(ACD)$	$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (\frac{st}{-s-t+st})^n C_4$	Ограниченность, осциллируемость, периодичность
Грань $(ABD)$	$x_n = C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (-\frac{st}{s+t+st})^n C_4$	Ограниченность
Поверхность (2.14)	$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)$	Ограниченность, осциллируемость, псевдошумовые решения, периодичность

### 2.3. Примеры и численные эксперименты

Выявим некоторые свойства решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка, возникающие на границе области устойчивости, проведем численные эксперименты и приведем примеры, иллюстрирующие соответствующие типы поведения.

#### Предельные 2-циклы (асимптотически устойчивые 2-циклы)

Для всех случаев неполного уравнения (2.1) ( $a = 0, b = 0, c = 0$ ) рассмотрим участки границы области устойчивости, на которых характеристическое уравнение для неполного уравнения (2.1) имеет простой корень  $\lambda = -1$ , а остальные корни по модулю либо меньше 1, либо только один из них  $\lambda = 1$ . В этом случае каждая точка границы определяет такой набор коэффициентов уравнения (2.1), что все решения уравнения в общем случае являются предельными 2-циклами.

*Случай  $a = 0$*

1. Если коэффициенты  $b, c, d$  в (2.1) удовлетворяют системе при некотором  $|t| < 1$

$$\begin{cases} b = -1 - t^2 \\ c = 0 \\ d = t^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

(точка  $(b, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $CB$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = t, \lambda_4 = -t, \quad |\lambda_3| < 1, |\lambda_4| < 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + (-t)^n C_3 + t^n C_4$$

Тогда все решения (2.1) обладают свойством  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными 2-циклами.

**Пример 1.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{37}{36}x_{n+2} + \frac{1}{36}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.15) при  $t = \frac{1}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{37}{36}\lambda^2 + \frac{1}{36} = 0,$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_4 = -\frac{1}{6}$ . Тогда все решения

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^n C_3 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_4$$

являются предельными 2-циклами (см. пример на рис. 2.4).

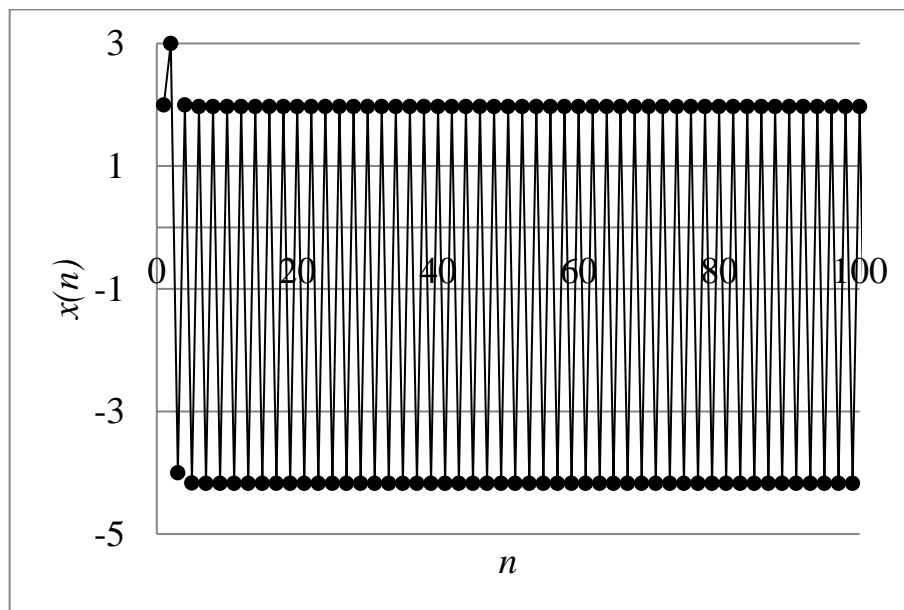


Рис. 2.4. Предельный 2-цикл для уравнения в примере 1.

2. Если коэффициенты  $b, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1, |s| < 1$  таких, что  $-1 < 1 - s - t < 1$ , удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -(s+t)^2 + s + t + st - 1 \\ c = -(s+t)^2 + (s+t)st + s + t \\ d = -st + (s+t)st \end{cases} \quad (2.16)$$

(точка  $(b, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1),

подробнее см. в [21]), которая задает плоскость  $СМВ$ , являющуюся гранью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = s, \quad \lambda_3 = t, \quad \lambda_4 = 1 - s - t,$$

$$|\lambda_1| = 1, \quad |\lambda_2| < 1, \quad |\lambda_3| < 1, \quad |\lambda_4| < 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + (1 - s - t)^n C_4$$

Тогда все решения (2.1) обладают свойством  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными 2-циклами.

**Пример 2.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{25}{36} x_{n+2} + \frac{5}{18} x_{n+1} - \frac{1}{36} x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.16) при  $s = \frac{1}{6}$ ,  $t = \frac{1}{3}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{25}{36} \lambda^2 + \frac{5}{18} \lambda - \frac{1}{36} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_4 = \frac{1}{2}$ . Тогда все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n C_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n C_4$$

являются предельные 2-циклы (см. пример на рис. 2.5).

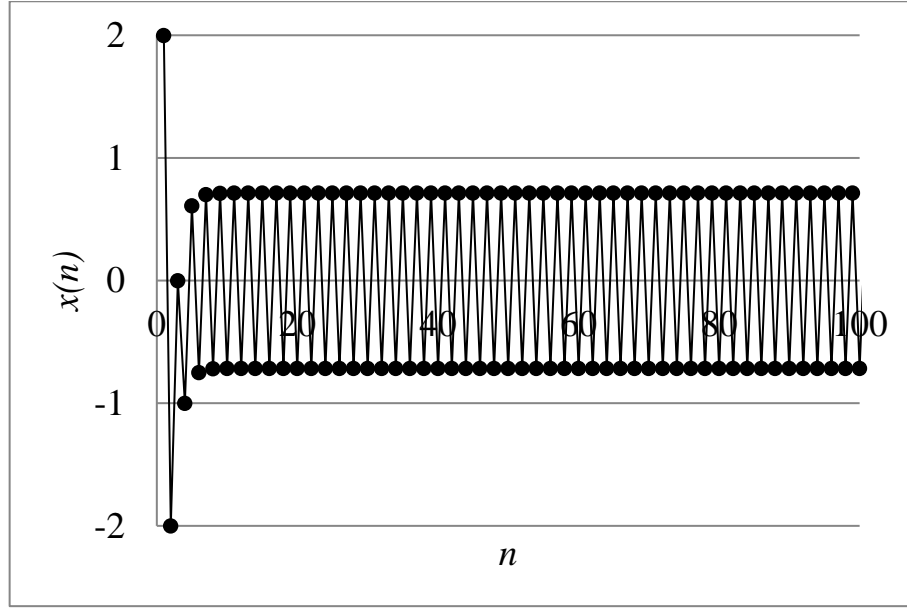


Рис. 2.5. Предельный 2-цикл для уравнения в примере 2.

Случай  $b = 0$

Если коэффициенты  $a, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1, |s| < 1$  таких, что  $-1 < t < \frac{-1+2s}{-2+s}$ , удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2 + s + t + st - 1}{s + t - 1} \\ c = \frac{(s+t-st)^2 + (s+t)st - st}{s + t - 1} \\ d = \frac{(st)^2 - (s+t)st}{s + t - 1} \end{cases} \quad (2.17)$$

(точка  $(a, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает плоскость  $BDM$ , являющуюся гранью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = s, \quad \lambda_3 = t, \quad \lambda_4 = \frac{s + t - st}{-1 + s + t},$$

$$|\lambda_1| = 1, \quad |\lambda_2| < 1, \quad |\lambda_3| < 1, \quad |\lambda_4| < 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + \left( \frac{s + t - st}{-1 + s + t} \right)^n C_4$$

Тогда все решения (2.1) обладают свойством  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными 2-циклами.



**Пример 3.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{15}{14}x_{n+3} - \frac{25}{378}x_{n+1} + \frac{1}{189}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.17) при  $s = \frac{1}{6}$ ,  $t = -\frac{1}{3}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{15}{14}\lambda^3 - \frac{25}{378}\lambda + \frac{1}{189} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_4 = \frac{2}{21}$ . Тогда все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n C_3 + \left(\frac{2}{21}\right)^n C_4$$

являются предельные 2-циклы (см. пример на рис. 2.6).

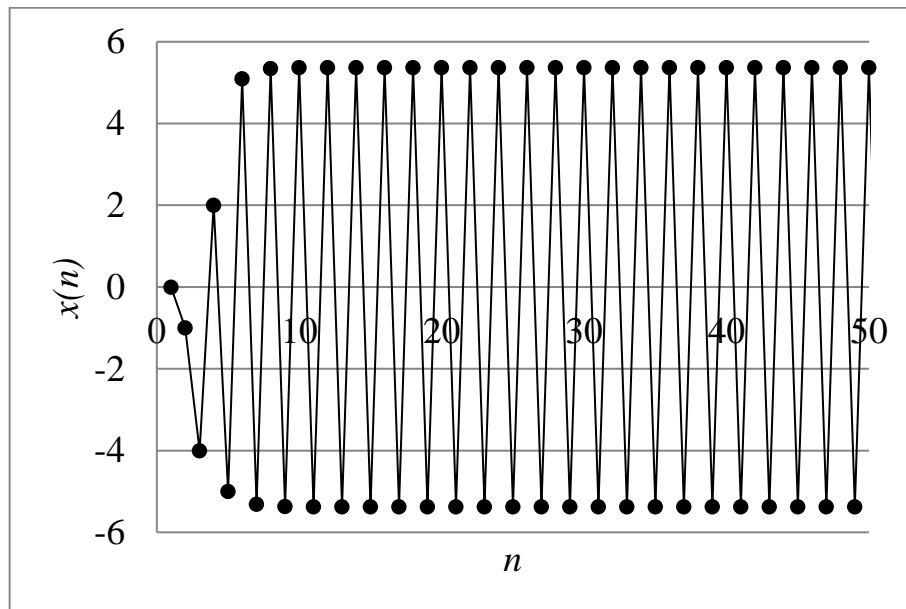


Рис. 2.6. Предельный 2-цикл уравнения в примере 3.

*Случай  $c = 0$*

1. Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых  $0 < \beta^2 < 1$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 + \beta^2 \\ d = -\beta^2 \end{cases} \quad (2.18)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $AD$ , являющийся ребром для

области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\beta,$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad |\lambda_3| < 1, \quad |\lambda_4| < 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + |\beta|^n (C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi)),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{2}$  все решения (2.1) обладают свойством

$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными 2-циклами.

**Пример 4.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{35}{36} x_{n+2} - \frac{1}{36} x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.18) при  $\beta = \frac{1}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{35}{36} \lambda^2 - \frac{1}{36} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \pm \frac{i}{6}$ . Тогда все решения

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + \left(\frac{1}{6}\right)^n (C_3 \cos(n \cdot \frac{\pi}{2}) + C_4 \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}))$$

являются предельными 2-циклами (см. пример на рис. 2.7).

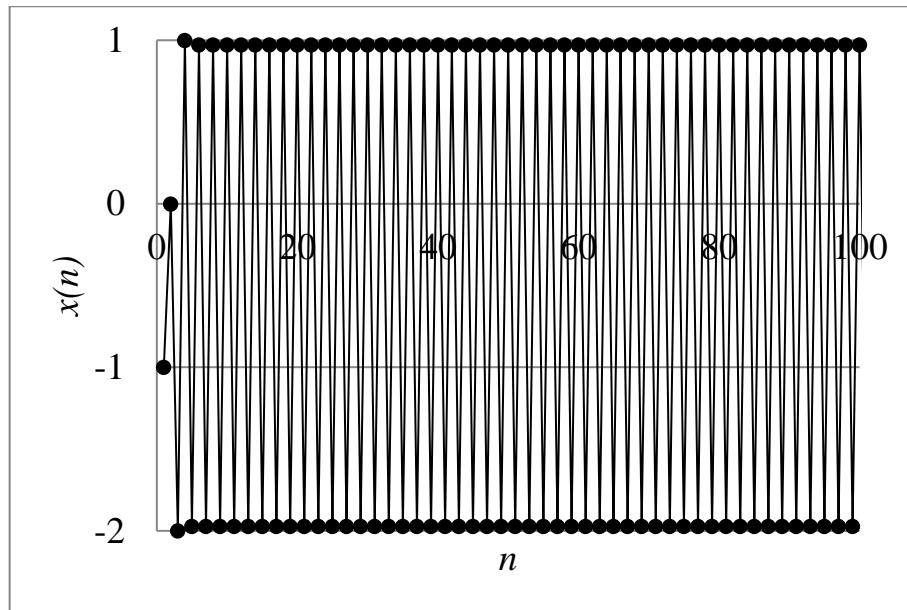


Рис. 2.7. Предельный 2-цикл для уравнения в примере 4.

2. Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1, |s| < 1$  таких, что

$$\begin{cases} -1 < s \leq \frac{1}{3} \\ -1 < t < \frac{s}{-1 + 2s} \end{cases},$$

удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 1 - (s + t) + \frac{st}{s + t - st} \\ b = -(s + t) + st + \frac{st(-s - t + 1)}{s + t - st} \\ d = \frac{(st)^2}{s + t - st} \end{cases} \quad (2.19)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает плоскость  $ACD$ , являющуюся гранью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = s, \quad \lambda_3 = t, \quad \lambda_4 = \frac{st}{-s - t + st},$$

$$|\lambda_1| = 1, \quad |\lambda_2| < 1, \quad |\lambda_3| < 1, \quad |\lambda_4| < 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + t^n C_3 + \left(\frac{st}{-s-t+st}\right)^n C_4$$

Тогда все решения (2.1) обладают свойством  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными 2-циклами.

**Пример 5.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{5}{3}x_{n+3} + \frac{25}{36}x_{n+2} - \frac{1}{36}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.19) при  $s = \frac{1}{6}$ ,  $t = -\frac{1}{3}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{5}{3}\lambda^3 + \frac{25}{36}\lambda^2 - \frac{1}{36} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$ . Тогда все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n C_3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n C_4$$

являются предельными 2-циклами (см. пример на рис. 2.8).

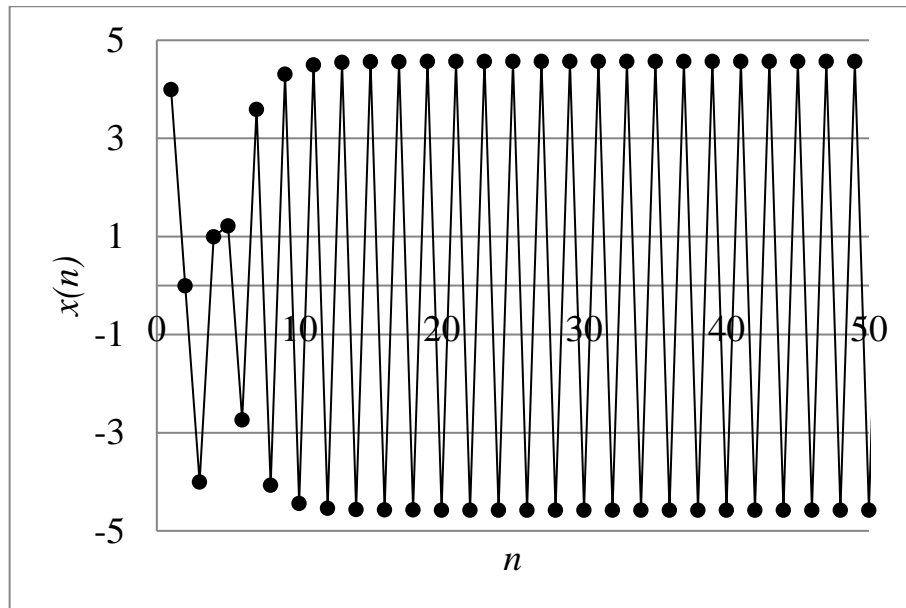


Рис. 2.8. Предельный 2-цикл для уравнения в примере 5.

### Предельные циклы с длиной периода больше двух

Для всех случаев неполного уравнения (2.1) ( $a = 0, b = 0, c = 0$ ) рассмотрим участки границы области устойчивости, на которых характеристическое уравнение для неполного уравнения (2.1) имеет два действительных корня по модулю меньших 1 и два комплексных сопряженных корня по модулю равных 1. В этом случае некоторые точки границы определяют такой набор коэффициентов уравнения (2.1), что все решения уравнения в общем случае являются предельными  $k$ -циклами ( $k > 2$ ).

*Случай  $a = 0$*

Если коэффициенты  $b, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1, |s| < 1$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = st - (s + t)^2 + 1 \\ c = (s + t)(st - 1) \\ d = st \end{cases} \quad (2.20)$$

(точка  $(b, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1),

подробнее см. в [21]), которая задает поверхность, являющуюся поверхностью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{s+t}{2} \pm \frac{\sqrt{4-(s+t)^2}}{2}i, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 t^n + C_2 s^n + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}, (k \in \mathbb{N}, k \geq 3)$  все решения (2.1) обладают свойством  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k} - x_n| = 0$ , т.е. являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 6.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{5}{36}x_{n+2} - \frac{31}{36}x_{n+1} + \frac{5}{36}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.20) при  $s = \frac{1}{6}, t = \frac{5}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{5}{36}\lambda^2 - \frac{31}{36}\lambda + \frac{5}{36} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{1}{6}, \lambda_2 = \frac{5}{6}, \lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{3}$  и все решения

$$x_n = C_1 \left(\frac{5}{6}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^n + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

являются предельными 3-циклами (см. пример на рис. 2.9).

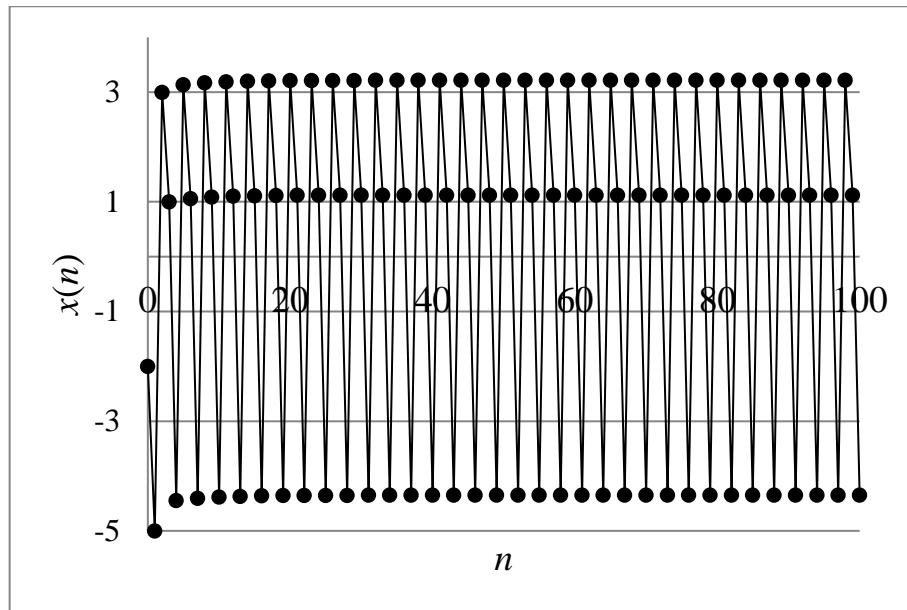


Рис. 2.9. Предельный 3-цикл для уравнения в примере 6.

Случай  $b = 0$

1. Если коэффициенты  $a, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1$ ,  $|s| < 1$  таких, что  $(1 + st)^2 - 4(s + t)^2 > 0$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-(s + t)^2 + st + 1}{s + t} \\ c = \frac{(st)^2 - (s + t)^2 + st}{s + t} \\ d = st \end{cases} \quad (2.21)$$

(точка  $(a, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает поверхность, являющуюся поверхностью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{1 + st}{2(s + t)} \pm \frac{\sqrt{(1 + st)^2 - 4(s + t)^2}}{2(s + t)} i,$$

$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , ( $k \in \mathbb{N}, k \geq 7$ ) все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 7.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{5}{3\sqrt{2}}x_{n+3} + \frac{5}{3\sqrt{2}}x_{n+1} - \frac{2}{3}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.21) при  $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$$t = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{5}{3\sqrt{2}}\lambda^3 + \frac{5}{3\sqrt{2}}\lambda - \frac{2}{3} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ . Тогда

$\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8}$  и все решения

$$x_n = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n C_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{8}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{8}\right)$$

являются предельными 8-циклами (см. пример на рис. 2.10).

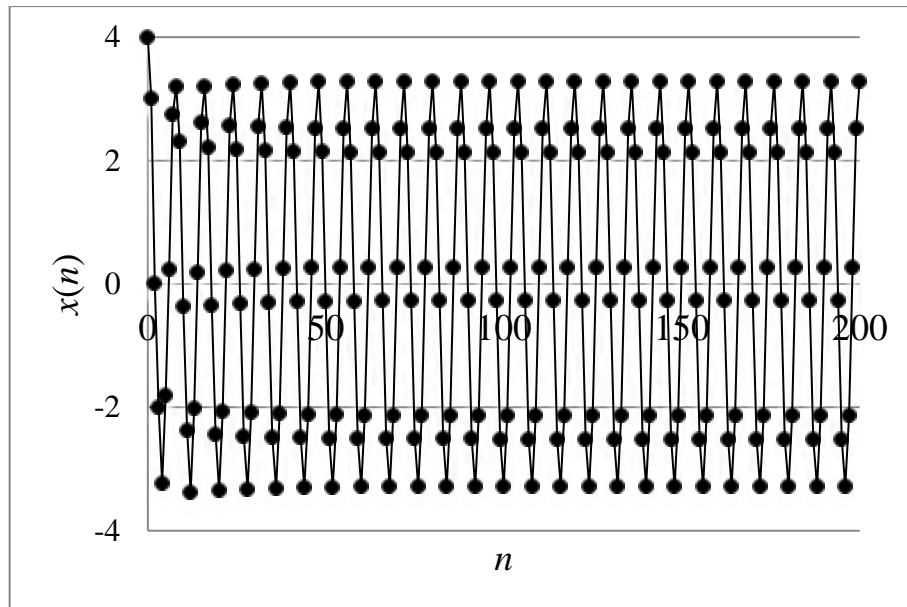


Рис. 2.10. Предельный 8-цикл для уравнения в примере 7.

2. Если коэффициенты  $a, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|s| < 1$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -s \\ c = -1 \\ d = s \end{cases} \quad (2.22)$$



(точка  $(a, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $CN$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , ( $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ ) все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 8.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{1}{6}x_{n+3} - x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.22) при  $s = \frac{1}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{1}{6}\lambda^3 - \lambda + \frac{1}{6} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{3}$  и все решения

$$x_n = C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

являются предельными 3-циклами (см. пример на рис. 2.11).

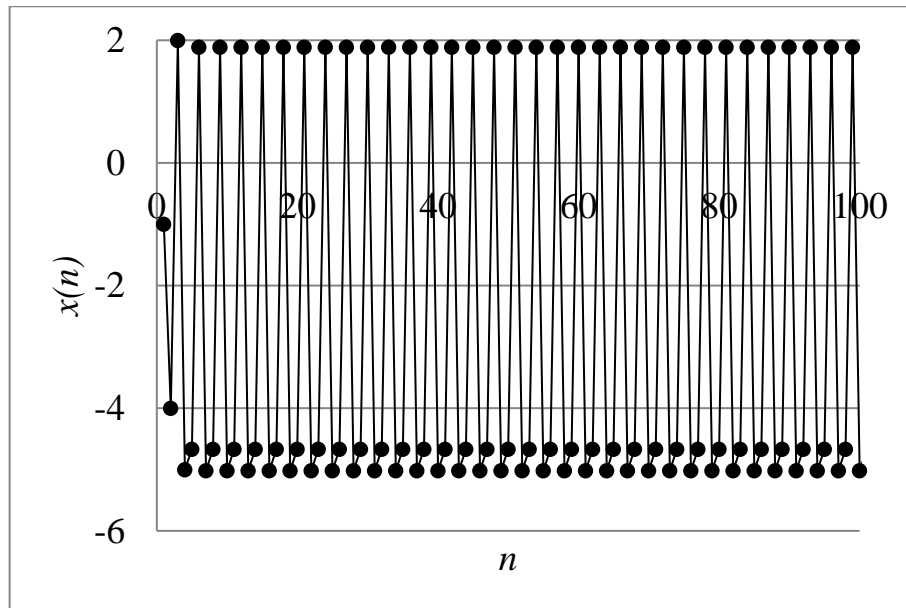


Рис. 2.11. Предельный 3-цикл для уравнения в примере 8.

3. Если коэффициенты  $a, c, d$  в (2.1) при некоторых  $|s| < 1$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -s \\ c = 1 \\ d = -s \end{cases} \quad (2.23)$$

(точка  $(a, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $DM$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}, (k \in \mathbb{N}, k \geq 6)$  все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 9.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{1}{6}x_{n+3} + x_{n+1} - \frac{1}{6}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.23) при  $s = \frac{1}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{1}{6}\lambda^3 + \lambda - \frac{1}{6} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$  и

все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{6}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{6}\right)$$

являются предельными 6-циклами (см. пример на рис. 2.12).

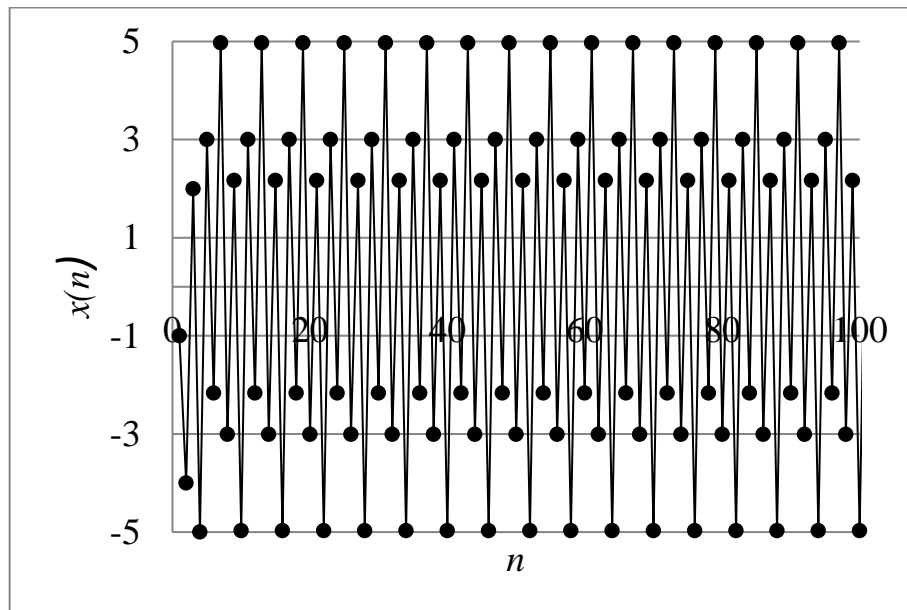


Рис. 2.12. Предельный 6-цикл для уравнения в примере 9.

*Случай  $c = 0$*

1. Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых  $|t| < 1, |s| < 1$  таких, что  $4s^2t^2 - (s+t)^2 > 0$ , удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = -(s+t) + \frac{s+t}{st} \\ b = st + 1 - \frac{(s+t)^2}{st} \\ d = st \end{cases} \quad (2.24)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает поверхность, являющуюся поверхностью для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{s+t}{2st} \pm \frac{\sqrt{4s^2t^2 - (s+t)^2}}{2st}i, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , ( $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ ) все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 10.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{31}{30}x_{n+3} + x_{n+2} - \frac{1}{30}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.24) при  $s = \frac{1}{6}$ ,  $t = -\frac{1}{5}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{31}{30}\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{30} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{3}$  и все решения

$$x_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

являются предельными 3-циклами (см. пример на рис. 2.13).

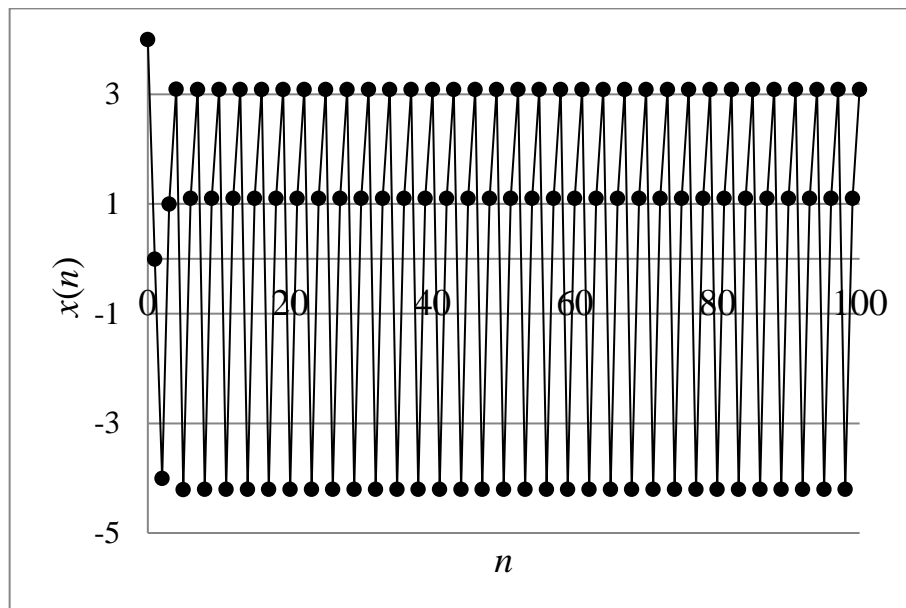


Рис. 2.13. Предельный 3-цикл для уравнения в примере 10.

2. Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых  $-1 < s < -\frac{1}{3}$  удовлетворяют системе.

$$\begin{cases} a = \frac{1-s^2}{s} \\ b = -\frac{s+1}{s} \\ d = s \end{cases} \quad (2.25)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $BD$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{-1-s \pm i\sqrt{3s^2-2s-1}}{2s}, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , ( $k \in N, k \geq 6$ ) все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 11.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - \frac{3}{2}x_{n+3} + x_{n+2} - \frac{1}{2}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.25) при  $s = -\frac{1}{2}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \frac{3}{2}\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$  и все решения

$$x_n = C_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{6}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{6}\right)$$

являются предельными 6-циклами (см. пример на рис. 2.14).

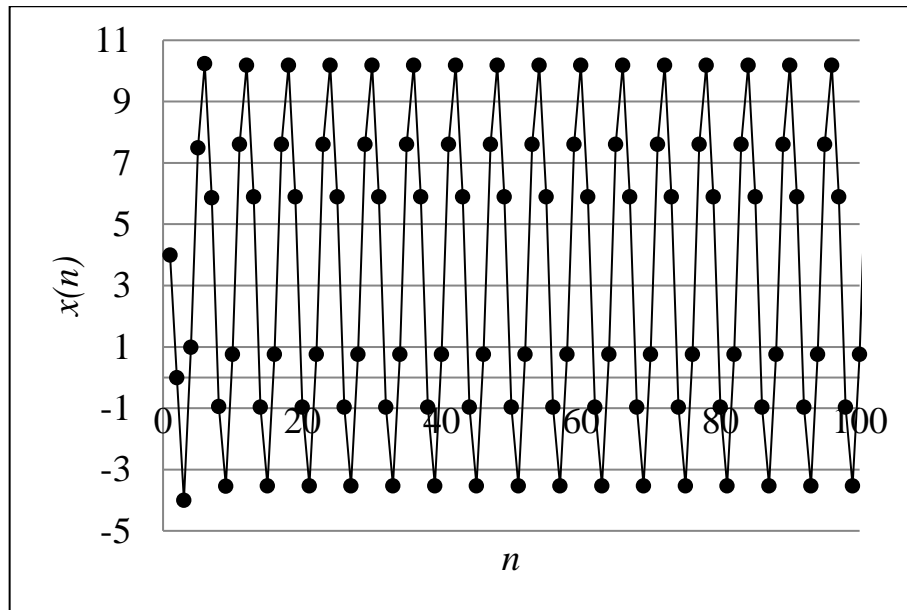


Рис. 2.14. Предельный 6-цикл для уравнения в примере 11.

3. Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых  $\frac{1}{3} < s < 1$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{1-s^2}{s} \\ b = \frac{1-s}{s} \\ d = -s \end{cases} \quad (2.26)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $CD$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{-1 + s \pm \sqrt{1 - 2s - 3s^2}}{2s}, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , ( $k \in N, k \geq 6$ ) все решения уравнения (2.1) являются предельными  $k$ -циклами.

**Пример 12.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{3}{2}x_{n+3} + x_{n+2} - \frac{1}{2}x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.26) при  $s = \frac{1}{2}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{3}{2}\lambda^3 + \lambda^2 - \frac{1}{2} = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$

и все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$

являются предельными 6-циклами (см. пример на рис. 2.15).

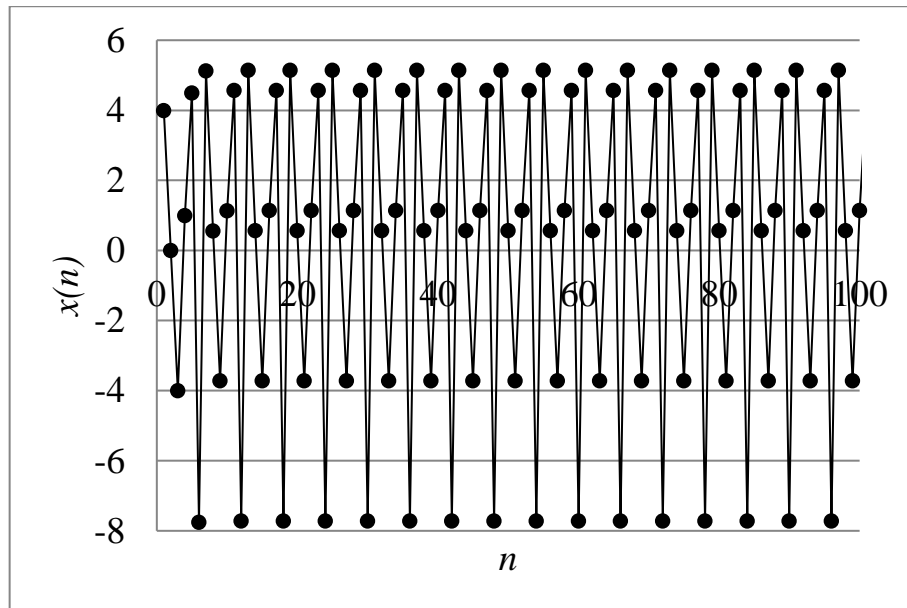


Рис. 2.15. Предельный 6-цикл для уравнения в примере 12.

### Чисто $k$ -периодические решения

Выявим участки границы, на которых все решения являются чисто  $k$ -периодическими.

*Случай  $a = 0$*

Если коэффициенты  $b, c, d$  в (2.1) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \quad (2.27)$$

(точка  $(b, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает точку  $B$ , являющаяся вершиной для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}, (k \in N, k = 4)$  все решения (2.1) обладают свойством  $x_{n+4} = x_n$ , т.е. являются периодическими с длиной периода 4.

**Пример 13.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.27), характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 1 = 0$$

имеет корни  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_{3,4} = \pm i$ . Тогда  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$  и все решения

$$x_n = C_1 + (-1)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

являются периодическими с длиной периода 4 (см. пример на рис. 2.16).



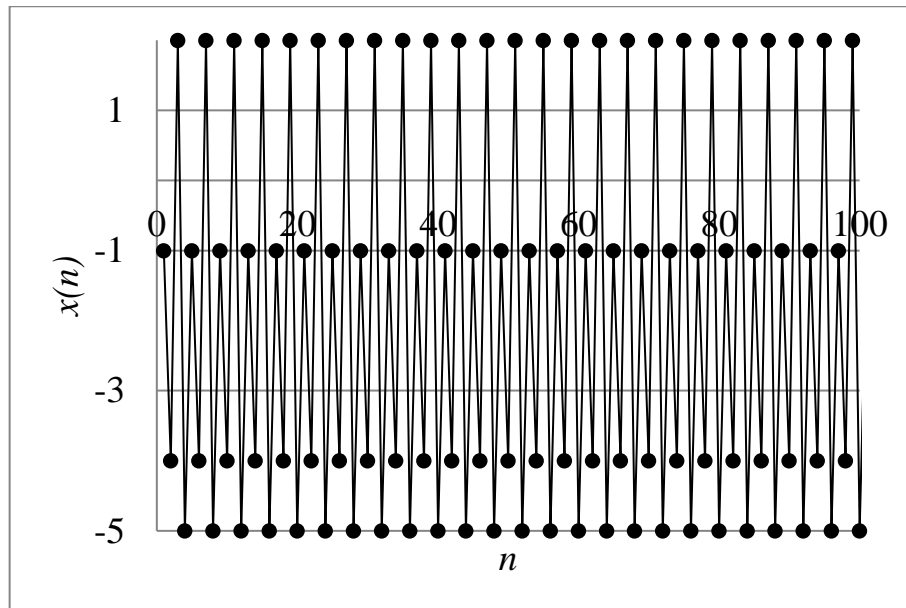


Рис. 2.16. 4-циклы для уравнения в примере 13.

Случай  $c = 0$

Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ d = -1 \end{cases} \quad (2.28)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает точку  $D$ , являющаяся вершиной для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = x_n = (-1)^n C_1 + C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ . Тогда для  $\varphi = \frac{2\pi}{k}, (k \in N, k = 4)$  все решения (2.1) обладают свойством  $x_{n+4} = x_n$ , т.е. являются периодическими с длиной периода 4.

**Пример 14.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} - x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.28), характеристическое уравнение



удовлетворяют системе

$$\begin{cases} b = -s^2 + s \\ c = 1 - s^2 \\ d = -s \end{cases} \quad (2.29)$$

(точка  $(b, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $СМВ$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = s, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{2} \left( 1 - s \pm \sqrt{-3 - 2s + s^2} \right),$$

$$|\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = (-1)^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi).$$

Тогда все решения (2.1)  $|\Delta x_{n+k}| < \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k} - x_n| \neq 0$ , т.е. являются псевдошумовыми.

**Пример 15.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{5}{36} x_{n+2} + \frac{35}{36} x_{n+1} - \frac{1}{6} x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.29) при  $s = \frac{1}{6}$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{5}{36} \lambda^2 + \frac{35}{36} \lambda - \frac{1}{6} = 0,$$

имеет корни  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{6}, \lambda_4 = \frac{1}{12} (5 \pm i\sqrt{119})$ .  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{119}}{5}$ ,

следовательно,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{119}}{5}$ .

Тогда все решения

$$x_n = (-1)^n C_1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n C_2 + C_3 \cos\left(n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{119}}{5}\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{119}}{5}\right)$$

являются псевдошумовыми (см. пример на рис. 2.18).

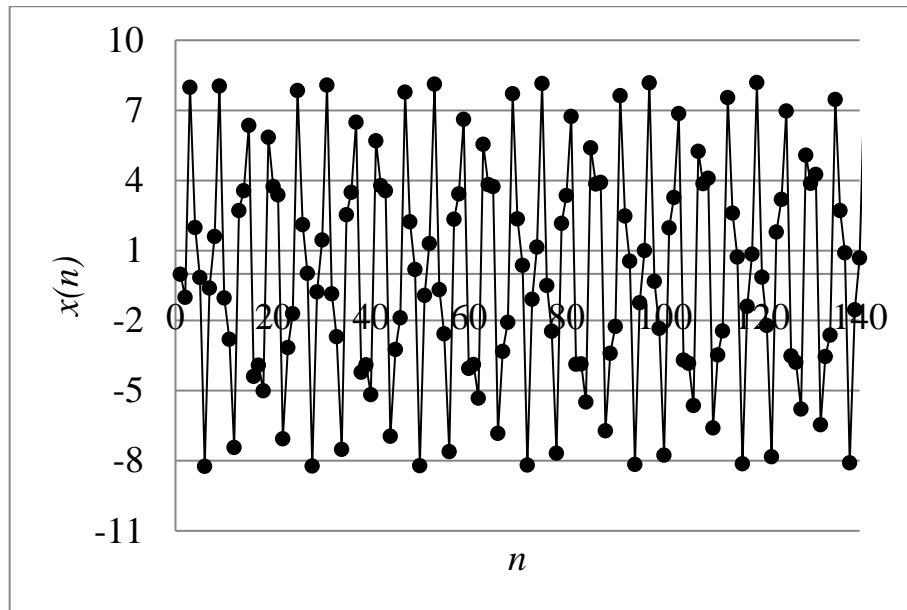


Рис. 2.18. Псевдошумовые решения для уравнения в примере 15

Случай  $b = 0$

Если коэффициенты  $a, c, d$  в (2.1) при некоторых  $(\frac{1}{2} < |p| < 1)$  удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = \frac{-2p^2 + 1}{p} \\ c = \frac{-2p^2 + 1}{p} \\ d = 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

(точка  $(a, c, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $CD$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{4p^2 - 1}}{2p}, \lambda_{3,4} = p \pm i\sqrt{1 - p^2},$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1).$$

Тогда все решения (2.1)  $|\Delta x_{n+k}| < \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k} - x_n| \neq 0$ , т.е. являются псевдошумовыми.

**Пример 16.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{1}{6}x_{n+3} + \frac{1}{6}x_{n+1} + x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.30) при  $p = \frac{2}{3}$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda + 1 = 0,$$

имеет корни  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}(2 \pm i\sqrt{5})$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{4}(-3 \pm i\sqrt{7})$ .

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sqrt{7}}{3}$ , следовательно,  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\varphi_1 = \operatorname{arctg} (-\frac{\sqrt{7}}{3})$

Тогда все решения

$$x_n = C_1 \cos\left(n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \sin\left(n \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \\ + C_3 \cos\left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right) + C_4 \sin\left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right)$$

являются псевдошумовыми (см. пример на рис.2.19).

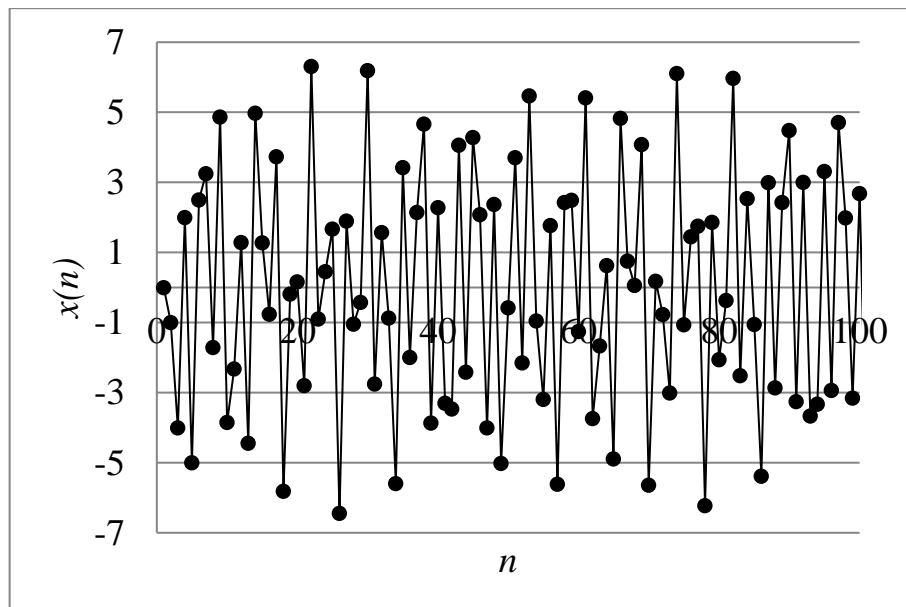


Рис. 2.19. Псевдошумовые решения для уравнения в примере 16

Случай  $c = 0$

Если коэффициенты  $a, b, d$  в (2.1) при некоторых ( $|p| < 1$ ) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 - 4p^2 \\ d = 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

(точка  $(a, b, d)$  лежит на границе области устойчивости уравнения (2.1), подробнее см. в [21]), которая задает отрезок  $AE$ , являющийся ребром для области устойчивости уравнения (2.1), то характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -p \pm i\sqrt{1-p^2}, & \lambda_{3,4} &= p \pm i\sqrt{1-p^2}, \\ |\lambda_1| &= |\lambda_2| = 1, & |\lambda_3| &= |\lambda_4| = 1. \end{aligned}$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi) + C_3 \cos(n\varphi_1) + C_4 \sin(n\varphi_1).$$

Тогда все решения (2.1)  $|\Delta x_{n+k}| < \infty$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+k} - x_n| \neq 0$ , т.е. являются псевдошумовыми.

**Пример 17.** Для разностного уравнения

$$x_{n+4} + \frac{17}{9}x_{n+2} + x_n = 0,$$

коэффициенты которого удовлетворяют системе (2.31) при  $p = \frac{1}{6}$ .

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + \frac{17}{9}\lambda^2 + 1 = 0,$$

имеет корни  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{6}(-1 \pm i\sqrt{35})$ ,  $\lambda_{3,4} = \frac{1}{6}(1 \pm i\sqrt{35})$ .

$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{35}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{35}$ , следовательно  $\varphi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{35})$ ,

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\sqrt{35}$$

Тогда все решения

$$\begin{aligned} x_n &= C_1 \cos(n \cdot \operatorname{arctg}(-\sqrt{35})) + C_2 \sin(n \cdot \operatorname{arctg}(-\sqrt{35})) + \\ &+ C_3 \cos(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{35}) + C_4 \sin(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{35}). \end{aligned}$$

являются псевдошумовыми (см. пример на рис.2.20).

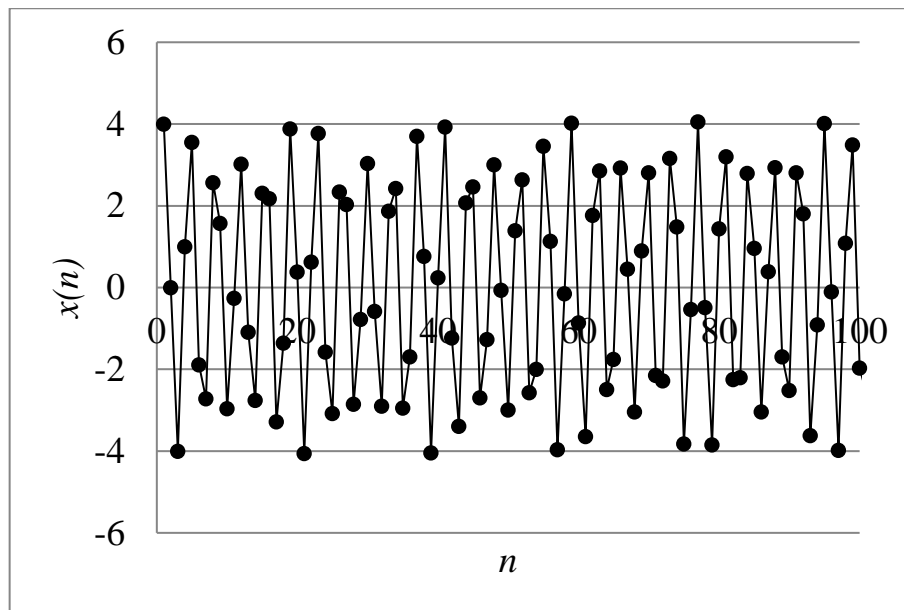


Рис. 2.20. Псевдошумовые решения для уравнения в примере 17

### **Линии циклов на граничных поверхностях области асимптотической устойчивости**

На основании теорем и определений, сформулированных во второй главе, а также проведенных численных экспериментах и рассмотренных примерах, мы заметили, что если все решения уравнения (2.1) являются предельными циклами определенной длины, то коэффициенты уравнения (2.1) лежат на некоторой прямой на поверхности границы области устойчивости уравнения (2.1).

Приведем примеры построения таких прямых (отрезков) – линий циклов на поверхности, что для любой точки соответствующий ей набор коэффициентов определяет уравнение, все решения которого в общем случае являются предельными  $k$ -циклами.

Случай  $a = 0$

Рассмотрим поверхность (2.6)

$$\begin{cases} b = st - (s + t)^2 + 1 \\ c = (s + t)(st - 1) \\ d = st \\ |t| < 1, |s| < 1 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = s, \quad \lambda_2 = t, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{s+t}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - (s+t)^2}}{2}i, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = C_1 t^n + C_2 s^n + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ .

Найдем точки этой поверхности, которые определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 3-циклами. Для того чтобы все решения являлись предельными 3-циклами  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{3}$ .

Тогда

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{s+t}{2} \Rightarrow s = 1 - t.$$

Подставляем в (2.6) и получаем систему

$$\begin{cases} b = (1-t)t \\ c = (1-t)t - 1 \\ d = (1-t)t \\ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

Она задает отрезок, все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 3-циклами.

Аналогично рассматривая поверхность (2.7) мы получаем, что система



$$\begin{cases} b = \frac{1}{4} + q^2 \\ c = -\frac{3}{4} + q^2 \\ d = \frac{1}{4} + q^2 \\ 0 < q^2 < \frac{3}{4} \end{cases}, \quad (2.33)$$

задает отрезок, все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 3-циклами.

Таким образом, мы получили два отрезка лежащих на одной прямой

$$\begin{cases} b = t \\ c = t - 1 \\ d = t \\ 0 < t < 1 \end{cases}, \quad (2.34)$$

Система (2.34) задает отрезок  $DF$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений (2.1), что все решения в общем случае являются предельными 3-циклами. На рисунке (2.21) изображен отрезок  $DF$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 3-циклами.

*Случай  $b = 0$*

Рассмотрим поверхность (2.10)

$$\begin{cases} a = \frac{-(s+t)^2 + st + 1}{s+t} \\ c = \frac{(st)^2 - (s+t)^2 + st}{s+t} \\ d = st \end{cases}$$

при некоторых  $|t| < 1$ ,  $|s| < 1$  таких, что  $(1 + st)^2 - 4(s + t)^2 > 0$ .

Характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = s, \lambda_2 = t, \lambda_{3,4} = -\frac{1 + st}{2(s + t)} \pm \frac{\sqrt{(1 + st)^2 - 4(s + t)^2}}{2(s + t)}i, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ .

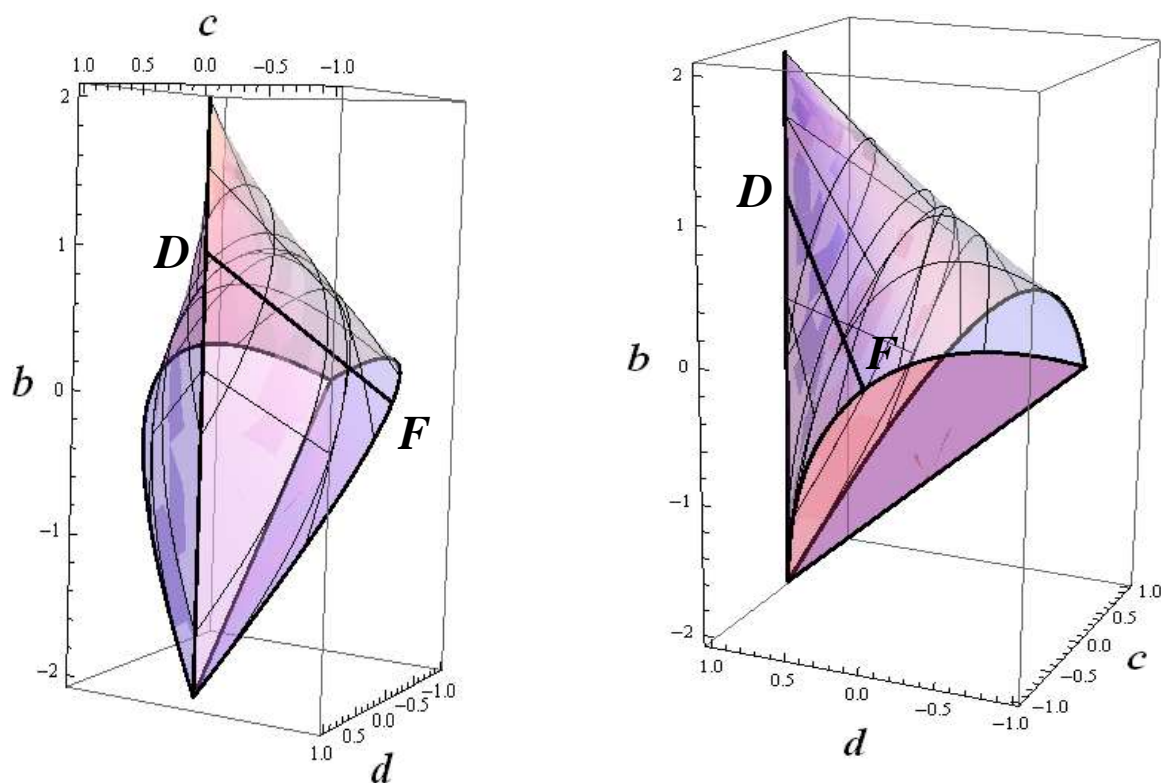


Рис. 2.21. Линия 3-циклов (отрезок  $DF$ ) на границе области асимптотической устойчивости для уравнения (2.4) (в двух видах).

Найдем точки этой поверхности, которые определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами. Для того чтобы все решения являлись предельными 8-циклами  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{8}$ .

Тогда

$$\cos \frac{2\pi}{8} = -\frac{1+st}{2(s+t)} \Rightarrow s+t = -\frac{(1+st)}{\sqrt{2}}.$$

Упростим, выполнив замену:

$$s+t = u \Rightarrow st = \sqrt{2}u - 1.$$

Подставляем в (2.6) и получаем, что система

$$\begin{cases} a = \frac{-u^2 + \sqrt{2}u}{u} \\ c = \frac{u^2 - \sqrt{2}u}{u} \\ d = \sqrt{2}u - 1 \\ 0 < u < \sqrt{2} \end{cases}, \quad (2.35)$$

задает отрезок  $KL$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами. На рисунке (2.22) изображен отрезок  $KL$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами.

*Случай  $c = 0$*

Рассмотрим поверхность (2.14)

$$\begin{cases} a = -(s+t) + \frac{s+t}{st} \\ b = st + 1 - \frac{(s+t)^2}{st} \\ d = st \end{cases}$$

при некоторых  $|t| < 1$ ,  $|s| < 1$  таких, что  $4s^2t^2 - (s+t)^2 > 0$ .

Характеристическое уравнение для (2.1) имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = s, \lambda_2 = t, \lambda_{3,4} = -\frac{s+t}{2st} \pm \frac{\sqrt{4s^2t^2 - (s+t)^2}}{2st}i, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 1.$$

В этом случае общее решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x_n = t^n C_1 + s^n C_2 + C_3 \cos(n\varphi) + C_4 \sin(n\varphi),$$

где  $\varphi = \arg \lambda_3$ .

Найдем точки этой поверхности, которые определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами. Для того чтобы все решения являлись предельными 8-циклами, необходимо чтобы  $\varphi = \arg \lambda_3 = \frac{2\pi}{8}$ .

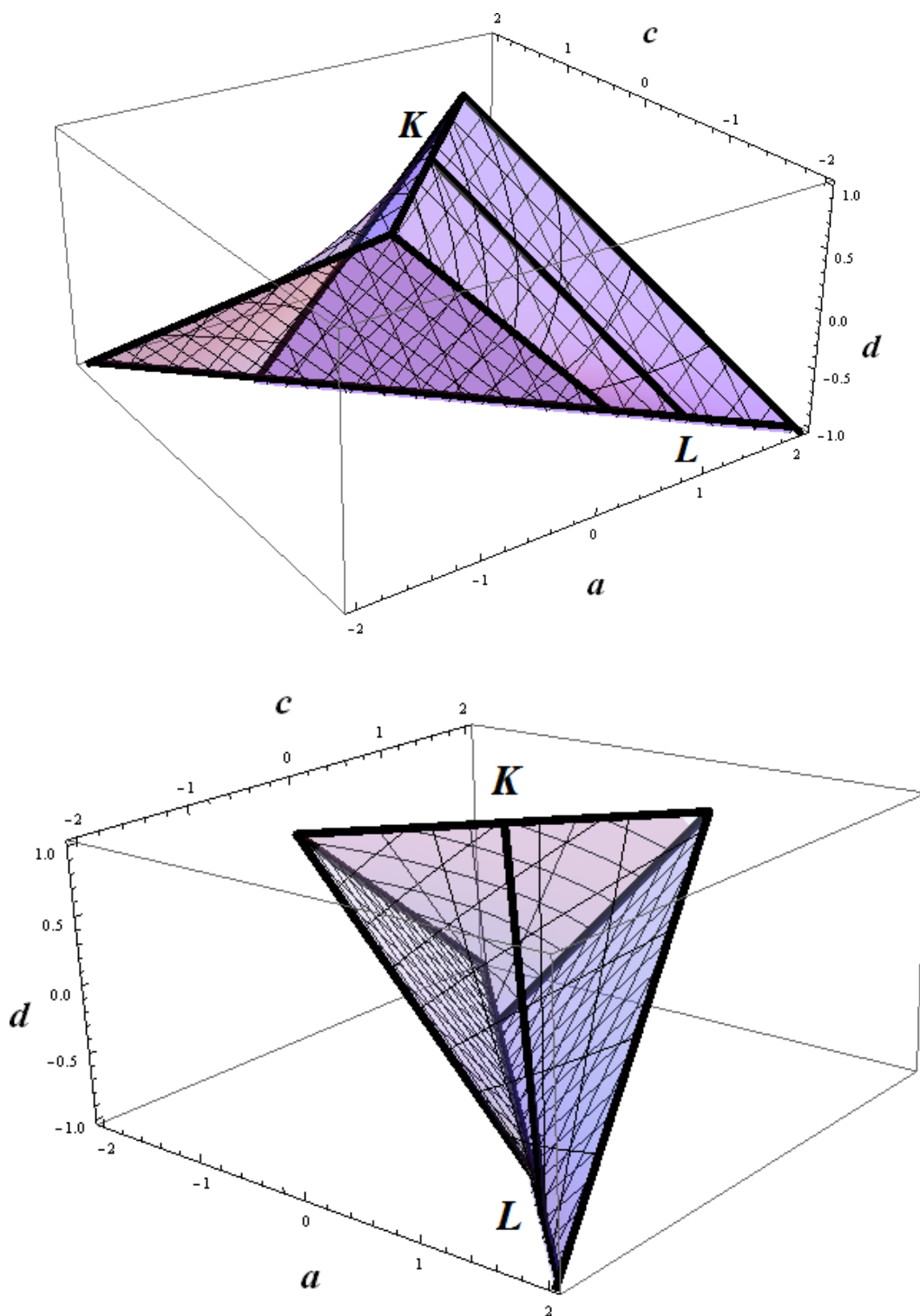


Рис. 2.22. Линия 8-циклов (отрезок  $KL$ ) на границе области асимптотической устойчивости для уравнения (2.8) (в двух видах).

Тогда

$$\cos \frac{2\pi}{8} = -\frac{s+t}{2st},$$
$$s+t = -\sqrt{2}st.$$

Упростим, выполнив замену:

$$s+t = u \Rightarrow st = -\frac{\sqrt{2}}{2}u.$$

Подставляем в (2.6) и получаем, что система

$$\begin{cases} a = -u - \sqrt{2} \\ b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}u \\ d = -\frac{\sqrt{2}}{2}u \\ -\sqrt{2} < u < 2 - \sqrt{2} \end{cases}, \quad (2.36)$$

задает отрезок  $ST$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами. На рисунке (2.23) изображен отрезок  $ST$ , все точки которого определяют такой набор коэффициентов уравнений, что все решения в общем случае являются предельными 8-циклами.

На основании теорем и определений, сформулированных во второй главе, а также проведенных численных экспериментах и рассмотренных примеров, сделаем выводы об асимптотическом поведении решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка. Сгруппируем участки границы области устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка по видам асимптотического поведения.

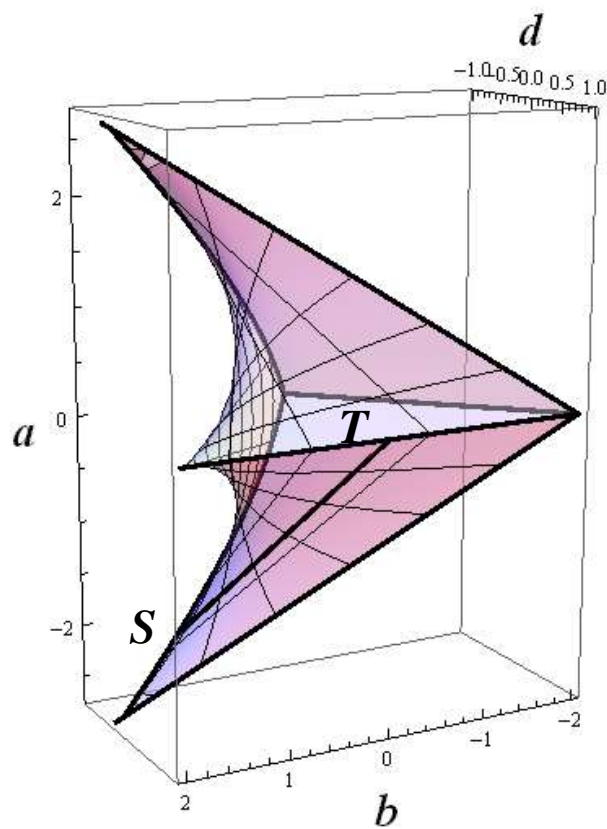
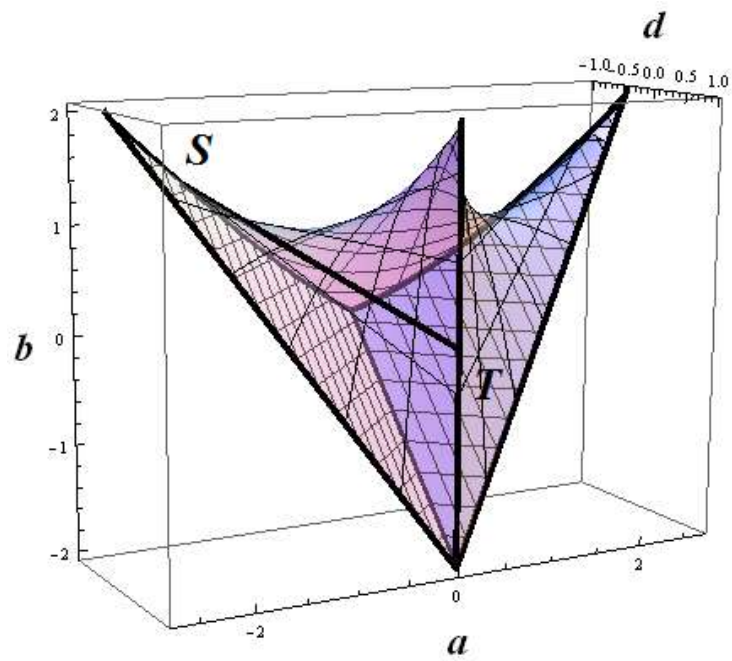


Рис. 2.23. Линия 8-циклов (отрезок  $ST$ ) на границе области асимптотической устойчивости для уравнения (2.12) (в двух видах).

В таблице 2.4. представлены участки границы области устойчивости неполного линейного разностного уравнений четвертого порядка для  $a = 0$ , сгруппированные по видам асимптотического поведения.

Таблица 2.4. Асимптотическое поведение решений уравнения (2.4)

(рис.2.1)

Асимптотическое поведение	Участок границы области устойчивости
Ограниченность	Ребро $AC$ , ребро $BC$ , ребро $CNB$ , ребро $CMB$ , грань $(CMB)$ , поверхность (2.6), поверхность (2.7)
Устойчивость	Ребро $AC$ , ребро $BC$ , ребро $CNB$ , ребро $CMB$ , грань $(CNB)$ , грань $(CMB)$ , поверхность (2.6), поверхность (2.7)
Осциллируемость	Ребро $AC$ , ребро $CMB$ , грань $(CNB)$ , грань $(CMB)$ , поверхность (2.6), поверхность (2.7)
Псевдошумовые решения	Ребро $AC$ , ребро $CNB$ , ребро $CMB$ , поверхность (2.6), поверхность (2.7)
Периодичность (предельные 2-циклы)	Ребро $BC$ , грань $(CMB)$

- на ребрах  $AC$ ,  $CNB$ ,  $CMB$ , на поверхности (2.6) и на поверхности (2.7) решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия комплексно сопряженных корней по модулю равных единицы;
- на ребре  $BC$  и на грани  $(CMB)$  все решения в общем случае являются предельными 2-циклами в виду наличия действительных корней, один из которых является простым корнем  $\lambda = -1$ ;

- на поверхности (2.6) все решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия двух действительных корней по модулю меньше 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1 или двух действительных корней, один из которых это либо  $\lambda = -1$ , либо  $\lambda = 1$ , а второй по модулю меньше 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1.

В таблице 2.5. представлены участки границы области устойчивости неполного линейного разностного уравнений четвертого порядка, для  $b = 0$ , сгруппированные по видам асимптотического поведения.

Таблица 2.5. Асимптотическое поведение решений уравнения (2.8)  
(рис.2.2)

Асимптотическое поведение	Участок границы области устойчивости
Ограниченность	Ребро $CD$ , ребро $AB$ , ребро $DM$ , ребро $CN$ , грань $(BDM)$ , поверхность (2.10), поверхность (2.11)
Устойчивость	Ребро $CD$ , ребро $AB$ , ребро $DM$ , ребро $CN$ , грань $(ACN)$ , грань $(BDM)$ , поверхность (2.10), поверхность (2.11)
Осциллируемость	Ребро $DB$ , ребро $CD$ , ребро $AB$ , ребро $DM$ , грань $(BDM)$ , поверхность (2.10), поверхность (2.11)
Псевдошумовые решения	Ребро $CD$ , ребро $AB$ , ребро $DM$ , ребро $CN$ , поверхность (2.10), поверхность (2.11)
Периодичность (предельные 2-циклы)	Грань $(BDM)$



- на ребрах  $CD$ ,  $AB$ ,  $DM$ ,  $CN$ , на поверхности (2.10) и на поверхности (2.11) решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия комплексно сопряженных корней по модулю равных единицы;
- на грани ( $BDM$ ) все решения в общем случае являются предельными 2-циклами в виду наличия действительных корней, один из которых является простым корнем  $\lambda = -1$ ;
- на ребрах  $DM$ ,  $CN$  и поверхности (2.10) решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия двух действительных корней по модулю меньших 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1 или двух действительных корней, один из которых это либо  $\lambda = -1$ , либо  $\lambda = 1$ , а второй по модулю меньше 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1.

В таблице 2.6 представлены участки границы области устойчивости неполного линейного разностного уравнений четвертого порядка для  $c = 0$ , сгруппированные по видам асимптотического поведения.

Таблица 2.6. Асимптотическое поведение решений уравнения (2.12)

(рис.2.3)

Асимптотическое поведение	Участок границы области устойчивости
Ограниченность	Ребро $AD$ , ребро $AE$ , ребро $BD$ , ребро $CD$ , грань ( $ACD$ ), грань ( $ABD$ ), поверхность (2.14)

Устойчивость	Ребро $AD$ , ребро $AE$ , ребро $BD$ , ребро $CD$ , грань $(ACD)$ , грань $(ABD)$ , поверхность (2.14)
Осциллируемость	Ребро $AC$ , ребро $AE$ , ребро $CD$ , грань $(ACD)$ , поверхность (2.14)
Псевдошумовые решения	Ребро $AE$ , ребро $BD$ , ребро $CD$ , поверхность (2.14)
Периодичность (предельные 2-циклы)	Ребро $AD$ , грань $(ACD)$

- на ребрах  $AE$ ,  $BD$ ,  $CD$  и поверхности (2.14) решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия комплексно сопряженных корней по модулю равных единицы;
- на ребре  $AD$  и на грани  $(ACD)$  все решения в общем случае являются предельными 2-циклами в виду наличия действительных корней, один из которых является простым корнем  $\lambda = -1$ ;
- на ребрах  $BD$ ,  $CD$  и поверхности (2.14) решения могут быть псевдошумовыми или предельными циклами (периода больше 2) в виду наличия двух действительных корней по модулю меньших 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1 или двух действительных корней, один из которых это либо  $\lambda = -1$ , либо  $\lambda = 1$ , а второй по модулю меньше 1 и двух комплексно сопряженных корней по модулю равных 1.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время значительно расширяются области применения разностных уравнений: при моделировании процессов и явлений в теории управления и автоматического регулирования, в экономике, биологии и экологии. Кроме того они используются для разработки вычислительных схем в численных методах, для построения формул в серии испытаний в задачах теории вероятностей. Поэтому изучение свойств решений разностных уравнений, является одной из интенсивно изучаемых тем.

В квалификационной работе проведено исследование асимптотического поведения решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка, полученных из полного уравнения в случаях, когда ровно один из коэффициентов  $a$ ,  $b$ , или  $c$  равен нулю.

Для каждого случая были изучены и найдены различные типы асимптотического поведения решений разностного уравнения на границе области устойчивости. Выделены типы поведения, присущие рассматриваемым разностным уравнениям. Указаны теоремы и определения, позволяющие устанавливать определенные типы асимптотического поведения решений линейного разностного уравнения. Применяя подходящие факты и анализируя формулы общего решения, было исследовано асимптотическое поведение решений неполных линейных разностных уравнений, когда коэффициенты уравнения принадлежат границе области устойчивости в пространстве коэффициентов. Проведены численные эксперименты, и для всех случаев найдены примеры, иллюстрирующие соответствующие типы поведения решений неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка.

Таким образом, цель работы достигнута, задачи решены в полном объеме.

Естественным продолжением данной работы, с использованием полученных результатов, может быть как исследование полного уравнения четвертого порядка, исследование асимптотического поведения его решений, так и исследование аналогичных свойств решений и области устойчивости неполных разностных уравнений более высокого порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elaydi, S. An introduction to difference equations. [Text] / S. Elaydi. New York: Springer, 2005. – 546 p.
2. Parhi, N. On the behavior of solutions of a class third order difference equations[Text] / N. Parhi, A.K. Tripathy // Journal of Difference Equations and Applications. – 2002. – V. 8, No. 5. – P. 415–426.
3. Баранова, А.Я. Периодические решения разностного уравнения третьего порядка [Текст] / А.Я. Баранова, И.В. Шенмаер, Р.М. Нигматулин // Молодой ученый. – 2016. – № 28(132).
4. Баранова, А.Я. Условная устойчивость разностного уравнения третьего порядка в критических случаях [Текст] / А.Я. Баранова, И.В. Шенмаер, Р.М. Нигматулин // Молодой ученый. – 2016. – № 25(129). – С. 113–122.
5. Баутин, Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости [Текст] / Н.Н. Баутин. - М.: Наука, 1984. – 176 с.
6. Бурд, В.Ш. Дискретное операторное исчисление и линейные разностные уравнения [Текст]: учеб. пособие / В.Ш. Бурд; науч. ред. С.Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2009 – 156 с.
7. Васильев, М.Д. Исследование одной математической модели трехвидовой конкуренции [Текст] / М.Д. Васильев // Математические заметки ЯГУ.– 2003. – Т. 10, № 2. – С. 33-39.
8. Джури, Э. Импульсные системы автоматического регулирования [Текст] / Э. Джури. – М.: Физматгиз, 1963. – 456 с.
9. Иванов, В.А. Теория дискретных систем автоматического управления [Текст] / В.А. Иванов, А.С. Ющенко. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
10. Кандаков, А.А. Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы [Текст] / А.А. Кандаков, А.Ф. Чудинов

// Прикладная математика и вопросы управления. – 2017. – № 4. – С. 88-106.

11. Кипнис, М.М. Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями [Текст] / М.М. Кипнис, Р.М. Нигматулин // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 11. – С. 25–39.

12. Козак, А.Д. Асимптотическое поведение решений линейного однородного разностного уравнения второго порядка [Текст] / А.Д. Козак, О.Н. Новоселов // Математические заметки. – 1999. – Т. 66, Вып. 2. – С. 211–215.

13. Кудинов, А.Ф. Общее решение разностного уравнения третьего порядка [Текст] / А.Ф. Кудинов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 69-70

14. Нигматулин, Р.М. Свойства дискретных систем третьего порядка на границе их областей устойчивости [Текст] / Р.М. Нигматулин, М.М. Кипнис // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 9-1. – С. 39-43.

15. Николаев, Ю.П. Анализ геометрии  $D$ -разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 12. – С. 49–61.

16. Николаев, Ю.П. Геометрия многомерной области устойчивости в пространстве четных (нечетных) коэффициентов характеристического полинома линейных систем [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 3–20.

17. Николаев, Ю.П. О симметрии и других свойствах многомерной области асимптотической устойчивости линейных дискретных систем [Текст] / Ю.П. Николаев // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 11. – С. 109–120.

18. Олейник, В.Л. Рекуррентны соотношения и разностные уравнения [Текст] / В.Л. Олейник // Соросовский образовательный журнал. - 2001. – № 3.– С. 114 – 120.
19. Романко, В.К. Разностные уравнения [Текст]: учеб. пособие / В.К. Романко. – БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 112 с.
20. Садовский, П.А. Критические случаи устойчивости математической модели трехвидовой популяции [Текст] / П.А. Садовский // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2006. – № 4. – С. 61-71.
21. Ясницкая, М.Н. Исследование области устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка [Электронный ресурс] / М. Н. Ясницкая. – Режим доступа: <http://elib.cspu.ru/xmlui/handle/123456789/1740>
22. Ясницкая, М.Н. Периодические режимы в линейной дискретной системе четвертого порядка [Текст] / М.Н. Ясницкая, Р.М. Нигматулин // Математические модели техники, технологий и экономики : материалы Всероссийской научно-практической студенческой конференции, С.-Петербург, 14–15 мая 2019 г. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. –С. 28 – 31.
23. Ясницкая, М.Н. Свойства областей устойчивости неполных линейных разностных уравнений четвертого порядка [Текст] / М.Н. Ясницкая, Р.М. Нигматулин // Наука и современность – 2016: сб. материалов XLIX Международной научно-практической конференции. – 2016. – С. 83–89.
24. Ясницкая, М.Н. Свойства решений линейного разностного уравнения четвертого порядка на границе области устойчивости [Текст] / М.Н. Ясницкая // Достижения современной науки и образования: материалы II международной междисциплинарной конференции, Пятигорск, 2017.

25. Ясницкая, М.Н. Свойство периодичности решений линейного разностного уравнения четвертого порядка на границе области устойчивости [Текст] / М.Н. Ясницкая, Р.М. Нигматулин // Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы II Всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука». КНАГУ, Комсомольск-на-Амуре, 2019 (в печати).

26. Ясницкая, М.Н. Средства Wolfram Mathematica для визуализации трехмерных областей устойчивости линейного разностного уравнения четвертого порядка [Текст] / М.Н. Ясницкая // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий в образовании: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием в рамках XVI международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука XXI века». КГПУ им. В.П. Астафьева. – 2017. – С. 139–143.