

$$\frac{y}{4x^2} + \frac{y^2}{6x^3} = \frac{y^{3x}}{4x^2} + \frac{y^{2^2}}{6x^3} = \frac{3xy}{12x^3} + \frac{2y^2}{12x^3} = \frac{3xy+2y^2}{12x^3}$$

$12x^3$ , где 12 – наименьшее общее кратное чисел 4 и 6,  
 $x^3$  – переменная с большим показателем степени.

$$(x+y)(x-y)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^{x-y}}{x+y} - \frac{x^{x+y}}{x-y} &= \frac{x(x-y)}{x+y} - \frac{x(x+y)}{x-y} = \\ &= \frac{x^2-xy-x^2-xy}{(x+y)(x-y)} = -\frac{2xy}{x^2-y^2} \end{aligned}$$

**Е.А. СУХОВИЕНКО**

## **СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Е.А. СУХОВИЕНКО**

# **СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Челябинск  
2024

УДК 51(07)(021)  
ББК 74.262.21я73  
С 91

**Суховиенко, Е.А.** Современные технологии обучения математике: учеб. пособие / Е.А. Суховиенко; Министерство просвещения Российской Федерации, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет. – Челябинск: Изд-во ЮУрГГПУ, 2024. – 220 с. – ISBN 978-5-907869-55-4. – Текст: непосредственный.

Учебное пособие раскрывает теоретические вопросы педагогических технологий и практическую реализацию таких технологий обучения математике, как модульная технология, технология поэтапного формирования умственных действий, технология обучения математике на основе деятельностного подхода, технология консультирования, технология мастерских, игровые технологии, технология проблемного обучения и кейс-технология.

Пособие предназначено для студентов второго курса магистратуры направления 44.04.01 Педагогическое образование профильной направленности «Математическое образование в системе профильной подготовки» и пятого курса бакалавриата направления 44.03.05 Педагогическое образование профильной направленности «Математика. Информатика».

Рецензенты:

С.А. Севостьянова, канд. пед. наук, доцент

Н.В. Муравьева, канд. пед. наук, доцент

ISBN 978-5-907869-55-4

© Суховиенко Е.А., 2024

© Издательство Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета, 2024

## ВВЕДЕНИЕ

Без высокого уровня математического образования невозможно развитие инновационной экономики нашей страны. Поиск средств повышения качества математического образования заставляет обратиться к такому ресурсу обеспечения эффективности обучения математике, как применение педагогических технологий, позволяющих за счет диагностического целеполагания и соответствующей ему технологической цепочки средств, методов и форм обучения, гарантированно обеспечить достижение высоких результатов математической подготовки обучающихся.

Реализация педагогических технологий в обучении математике требует от педагога знания концептуальных основ современных технологий обучения, их классификации и сущностных характеристик. Одновременно учителю важно освоить умения применять это теоретическое знание, поэтому необходимо показать студентам практические способы реализации педагогических технологий в обучении математике и критерии выбора технологии, наиболее адекватной содержанию обучения математике и уровню подготовки обучающихся.

Введение дисциплин «Современные технологии обучения математике в вузе» и «Образовательные технологии в обучении математике» обусловлено необходимостью интеграции знаний, полученных студентами в ходе изучения психолого-педагогических и специальных дисциплин, для реализации ими в будущей профессиональной деятельности эффективных технологий математической подготовки обучающихся.

Курсы «Современные технологии обучения математике в вузе» и «Образовательные технологии в обучении математике» направлены на ознакомление студентов с теоретическими основами технологий обучения математике и приобретение ими практических умений в разработке и применении современных технологий обучения математике.

Пособие предусматривает изучение причин возникновения и истории развития педагогических технологий, сущности, структуры и классификации технологий, критериев их эффективности и вопросов выбора и разработки технологий.

В пособие включены как задания для овладения студентами теоретическими понятиями и положениями, связанными с технологиями обучения, так и практико-ориентированные задания, направленные на приобретение профессиональных умений разработки целевых ориентиров и содержательного наполнения технологий обучения математике в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

## 1.1. ИСТОРИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОБРАЗОВАНИЮ

Технологический подход в образовании имеет давнюю историю. На первом этапе развития образования был накоплен опыт отдельных людей, отраженный в книгах, написанных по другим проблемам, и представляющий собой описание деятельности, имеющей косвенное отношение к педагогической практике. На этом этапе идет накопление опыта деятельности в данной сфере.

На втором этапе рост мастерства приводит к выработке теоретических основ учебного процесса. Начинает формироваться научный подход в педагогической деятельности, создаются теории и концепции обучения. На основе сформулированных закономерностей разрабатываются рекомендации по ведению процесса обучения. Каждая концепция предполагает свою систему принципов образования и, соответственно, свои методики. На этом этапе происходит становление системы школ, в которых работают преподаватели-профессионалы. Затем появляются средства обучения, которые намного эффективнее деятельности учителя. Их использование позволяет перейти к третьему этапу – технологическому, на котором средства обучения полностью или частично заменяют учителя. Наличие трех этапов развития характерно для всех видов деятельности человека. В любом из них широкое использование технологий ведет к качественным изменениям. Информатизация образования показала, что появились средства, способные и эту сферу перевести на третью – технологическую ступень.

Интерес к технологизации обучения получил свое развитие в XX столетии, на протяжении которого в мировой педагогике делалось немало попыток «технологизировать» учебный процесс. В России 20-х гг. прошлого столетия в рамках педологии возникли термины *педагогическая технология* и *педагогическая техника*. Понятие *педагогическая технология* основывалось на идеях рефлексологии. Впервые термин *педагогическая технология* был упомянут в 20-х гг. в работах В.М. Бехтерева, И.П. Павлова, А.А. Ухтомского, С.Т. Шацкого. Введение первых программ аудиовизуального обучения в 30-х гг. в США не только положило начало технологической революции в образовании, но и открыло не пре-

кращающуюся до настоящего времени дискуссию о сущности педагогической технологии. Особый интерес представляет эволюция понятия «педагогическая технология». Трансформации термина – от *технологии в образовании* (technology in education) к *технологии образования* (technology of education), а затем к *педагогической технологии* (educational technology) – соответствует изменение его содержания, охватывающее соответственно три периода.

Первый (40-е – середина 50-х гг.) характеризуется появлением в школе различных технических средств предоставления информации, объединенных понятием «аудиовизуальные средства». Магнитофоны, проигрыватели, проекторы и телевизоры, используемые в школе в то время, были предназначены в основном для бытовых целей. Поэтому термин *технология в образовании* означал применение достижений инженерной мысли в учебном процессе.

Появившийся в 1940–50-е гг. с внедрением в учебный процесс технических средств обучения термин *технология образования* в последующие годы под влиянием работ по методике применения различных технических средств обучения модифицировался в *педагогические технологии*.

Второй период (середина 50-х – 60-е гг.) отмечен возникновением ***технологического подхода***, теоретической базой которого стала идея программированного обучения. Были разработаны аудиовизуальные средства, специально предназначенные для учебных целей: средства обратной связи, электронные классы, обучающие машины, лингафонные кабинеты, тренажеры и др. В отличие от термина *технология в образовании*, который был тождественен понятию «технические средства обучения», под *технологией образования* стали подразумевать научное описание (совокупность средств и методов) педагогического процесса, неизбежно ведущего к запланированному результату. В середине 1960-х гг. содержание этого понятия подверглось широкому обсуждению в педагогической печати за рубежом и на международных конференциях, в результате чего были определены два направления его толкования. Сторонники первого доказывали необходимость применения технических средств и средств программированного обучения (technology in education), т.е. первоначально под педагогической технологией понималась попытка технизации учебного процесса. Первой ласточкой педагогической технологии в этом ее понимании явилось программированное обучение. Дальнейшее развитие исследований в области педагогической технологии несколько расширило ее понимание.

Представители второго направления главное видели в повышении эффективности организации учебного процесса (technology of education) и преодоле-

нии отставания педагогических идей от стремительного развития техники. Под *педагогической технологией* стали понимать не просто исследования в сфере использования технических средств обучения или компьютеров, но и выявление принципов и разработку приемов оптимизации образовательного процесса путем анализа факторов, повышающих образовательную эффективность, путем конструирования и применения приемов и материалов, а также посредством оценки применяемых методов. В 60-е гг. специалисты по программированному обучению и аудиовизуальному образованию постепенно находят общий язык в рамках новой дисциплины – педагогической технологии. Появляются первые, близкие к современным, определения понятия «педагогическая технология».

Появлению в педагогике термина *технология* способствовало бурное развитие научно-технического прогресса в различных областях теоретической и практической деятельности человека, а также желание педагогов гарантированно добиваться в своей профессиональной работе качественных результатов.

Понятие «технология обучения» впервые прозвучало на конференции ЮНЕСКО в 1970 году. В докладе «Учиться, чтобы быть», опубликованном этой организацией, названный термин определяется как движущая сила модернизации образовательного процесса, а в докладе «Как учиться» впервые приводится его определение. В нем технология обучения характеризуется как совокупность способов и средств связи (общения) между людьми, возникающих в результате информационной революции и используемых в дидактике [12].

Зародившееся в 50-е гг. в США новое направление – *технологический подход к обучению* – ставило целью гарантированное достижение запланированных результатов обучения путем детально разработанных схем, указаний, предписаний, которым должен следовать учитель. По описанию М.В. Кларина [25], технологический подход включает в себя:

- постановку и формулировку диагностируемых учебных целей, ориентированных на достижение запланированных результатов обучения, которые можно достаточно надежно опознать, т.е. целей-эталонов (этот этап имеет первоочередное значение);
- организацию всего хода обучения в соответствии с учебными целями;
- оценку текущих результатов, коррекцию обучения, направленную на достижение поставленных целей;
- заключительную оценку результатов.

В соответствии с этим подходом наибольшее распространение на Западе получила *модель полного усвоения*. Основное ее положение состоит в том, что

все ученики способны полностью усвоить материал, а задача учителя – организовать учебный процесс так, чтобы дать им такую возможность.

Хотя эта теория и получила широкую международную известность, тем не менее она вызвала к себе критическое отношение и поставила два основных вопроса: каких затрат времени требует полное усвоение программного содержания каждым учеником; какие цели обучения ставятся при таком обучении и каков в этом случае уровень активности познавательной деятельности школьников?

В традиционном обучении учебные цели ставятся неконкретно, неопределенно, неинструментально: «изучить теорему ...», «ознакомить с ...», «научить решать ...» и т.д. Язык, способ постановки таких целей не описывает желаемого результата обучения (учения), достижение их трудно проверить. Кроме того, цели, поставленные таким образом, связаны в основном с деятельностью учителя на уроке и практически не отражают личностный аспект ученика в обучении.

Для третьего периода (70-е гг.) характерны три особенности. Во-первых, происходит расширение базы педагогических технологий. Помимо аудиовизуального образования и программированного обучения их фундамент надстроили информатика, теория телекоммуникаций, системный анализ и педагогические науки (психология обучения, теория управления познавательной деятельностью, организация учебного процесса, научная организация педагогического труда). Во-вторых, изменяется методическая основа педагогических технологий, осуществляется переход от вербального к аудиовизуальному обучению. В-третьих, ведется активная подготовка профессиональных педагогов-технологов. В этот период технология учебного процесса разрабатывается на основе *системного подхода*, а исследователи понимают педагогические технологии как изучение, разработку и применение принципов оптимизации учебного процесса на основе новейших достижений науки и техники.

К началу 1970-х гг. модернизация различных видов учебного оборудования была осознана как необходимое условие, без которого не могут применяться прогрессивные методики и формы обучения, а следовательно, не могут быть достигнуты соответствующее качество и эффективность обучения. В этот период ученые расширили сферу составляющих процесса обучения, включив в понятие «технология обучения» планирование, анализ целей, научную организацию учебно-воспитательного процесса, выбор методов, средств и материалов, в наибольшей степени соответствующих целям и содержанию обучения в интересах повышения его эффективности. К концу 1970 – началу 1980-х гг. вследствие



развития техники и начавшейся затем за рубежом компьютеризации обучения технология обучения и педагогическая технология стали осознаваться как система средств, методов организации и управления учебно-воспитательным процессом. При этом были выделены две стороны педагогической технологии: применение системного знания для решения практических задач и использование в учебном процессе технических устройств.

В 1990-е гг. понятие «педагогическая технология» было связано с технологизацией деятельности в различных областях человеческой жизни, в том числе и в сфере образования. Очевидно, что педагогические технологии не могут быть принципиально иными по своей сущности, чем технологии в других сферах: любые технологии имеют свои отраслевые (профессиональные) особенности и в том, какими методами и средствами оперируют, и в том, с каким «материалом» имеют дело. Специфика педагогических технологий состоит в наличии воспитательного компонента [26].

Анализ определений, приведенных в различных научных и учебно-методических источниках, показывает, что, по мнению большинства исследователей, технология обучения связана с оптимальным построением и реализацией учебного процесса с учетом гарантированного достижения дидактических целей. Это положение является ключевым, так как именно в определении наиболее рациональных способов гарантированного достижения поставленных целей и заключается основной смысл технологизации учебного процесса. Таким образом, технологический подход к обучению предполагает проектирование учебного процесса с целью гарантированного достижения дидактических целей исходя из заданных исходных установок (социальный заказ, образовательные ориентиры, цели и содержание обучения).

Этот подход к обучению позволяет решать вопрос о постановке конкретных учебных целей и направлять весь процесс обучения на их достижение. Поэтому термин *технология обучения* к концу 70-х – началу 80-х годов всё чаще стал употребляться и в нашей стране. Так, И.Я. Лернер писал о том, что педагогическая технология обучения предполагает формулировку целей через результаты обучения, выраженные в действиях учащихся, надежно опознаваемых и определяемых. В основе педагогической технологии лежит идея полной управляемости учебного процесса, проектирование и воспроизводимость обучающего цикла. В связи с этим выделяются следующие характерные черты технологии обучения:

- разработка диагностично поставленных целей обучения; ориентация всех учебных процедур на гарантированное достижение учебных целей;
- оперативная обратная связь; оценка текущих и итоговых результатов;
- воспроизводимость обучающих процедур.

Технология обучения ориентируется на гарантированное достижение целей и идею полного усвоения путем обучающих процедур. Концепция полного усвоения дает высокие результаты, но имеет ограничения: так можно изучать материал, поддающийся членению на единицы, связанные последовательно; усвоение происходит в основном на репродуктивном уровне. При технологическом подходе, по мнению многих дидактов, обучение нацелено, в первую очередь, на усвоение лишь информационного компонента знаний.

Важно проектирование такой технологии обучения, при которой школьники усваивали бы содержание целостно, в единстве всех его компонентов. В работе Т.А. Ивановой, Е.Н. Перевощиковой, Л.И. Кузнецовой и Т.П. Григорьевой [24] представлены технологии, способствующие усвоению учащимися всех компонентов математического содержания – технологии обучения основным дидактическим единицам: математическим понятиям, теоремам, правилам, решению математических задач.

В.В. Гузеев [19] выделяет три педагогические парадигмы, которые могут быть выделены в развитии технологического подхода к образованию: эмпирическую, алгоритмическую и стохастическую.

*Эмпирическая парадигма.* Для традиционного частно-методического подхода характерно неопределенное описание целей обучения, выражаемое требованиями программ, при смутном представлении о состоянии обучаемых. Образовательный процесс выстраивается на основе обобщения опыта наиболее успешных учителей. Накопившийся стараниями методистов за долгие годы опыт позволяет выделить типичные для успешных учителей и имеющие всеобщее значение более или менее строго прописанные последовательности процедур. Они и являются в основном технологическими компонентами и даже целостными технологиями внутри частно-методического подхода. Эти технологии целесообразно называть технологиями обучения из-за ограниченности решаемых ими задач.

Пробы и ошибки – самая характерная черта этого подхода. Применение чужого личного опыта ничего не может гарантировать, поэтому очень важным оказывается прогноз развития системы, чтобы вовремя скоординировать процесс.

Этот длительный этап продолжается, но всё больше ученых и практиков в образовании, по мнению В.В. Гузеева, принимают точку зрения о том, что время частных методик прошло, и никакое обобщение опыта лучших педагогов не дает возможности системно и целенаправленно строить гарантированно эффективное обучение.

*Алгоритмическая парадигма.* Педагогическая технология появилась в 50-х годах как противовес нечеткости и неопределенности традиционного методического подхода. Краеугольные камни педагогической технологии – планирование результатов обучения как диагностично и операционально выраженных целей и непрерывная диагностика результативности образовательного процесса. Точно и конкретно поставленные достижимые цели позволяют в каждый момент для данных условий из имеющегося педагогического арсенала подобрать подходящие методы, формы, приемы и средства их достижения. Для применения этих инструментов требуются определенные начальные условия. Эти условия формулируются тоже как операциональные и диагностичные цели. Для их достижения находятся другие инструменты и выявляются их начальные условия. Таким образом, процесс построения процесса обучения продолжается сверху вниз, от целей к стартовым условиям. Очевидно, что, применяя эту же последовательность процедур в другом случае к таким же начальным условиям, можно получить те же результаты [5].

Идея настолько привлекательна и проста, что работы в этом направлении не прекращаются уже более сорока лет. Первые тридцать лет из них связаны с двумя эпохами в дидактике: это идеология программированного обучения 60-х годов и теория проблемного обучения 70-х годов. Педагогическая технология имеет более общий характер, чем частно-методические технологии обучения. Технология обучения отражает путь освоения конкретного учебного материала (понятия) в рамках определенного предмета, темы, вопроса и в пределах избранной технологии.

*Стохастическая парадигма.* В педагогической технологии 90-х годов становится общепринятым термин *образовательная технология*.

Узость и однозначность целей, достигаемых за счет педагогической технологии 50–80-х годов, приходит в противоречие с принимаемым в последнее время приоритетом лично ориентированной педагогики. Каждый ученик заслуживает собственной траектории движения по учебному материалу, отвечающей его целям, потребностям и интересам в пределах социально значимых целей. Субъектом образования в этом случае выступает личность, способная

ориентироваться во всем многообразии противоречий современного мира. В силу принципов неопределенности наши представления об учениках не будут ни полными, ни точными, поэтому технологии этой парадигмы должны опираться на вероятностные модели развития учеников.

Цели образования становятся не только многопрофильными, но и многоуровневыми, внутренняя дифференциация оказывается неизбежным элементом образовательного процесса. Вместо одной общей траектории приходится выстраивать множество частных траекторий. Результатом оказывается вероятностное проектирование очень сложного процесса, ход которого зависит от информации обратной связи.

Если в педагогической технологии 60–80-х гг. целью постоянной диагностики было своевременное обнаружение отклонений от траектории для принятия коррекционных мер, то в современной образовательной технологии диагностика нацелена на раннее обнаружение и прогнозирование тенденций развития каждого ученика. По результатам диагностики проектируется процесс на каждом шаге. Таким образом, получение информации обратной связи становится непрерывным синтетическим процессом, соединяющим диагностику с прогнозированием. Этот процесс получил название *мониторинга*, что в переводе с английского означает «непрерывное отслеживание».

Понимание и интерпретация технологического подхода в образовании связаны с наличием в настоящее время в отечественном образовании одновременно трех различных технологических парадигм.

Итак, к побудительным причинам, порождающим возникновение и практическое использование педагогических технологий в современных условиях, можно отнести:

- назревшую необходимость внедрения в педагогику системно-деятельностного подхода, систематизацию способов обучения;
- потребность в осуществлении лично ориентированного обучения во всех звеньях образовательной системы, замены малоэффективного вербального способа передачи знаний;
- возможность экспертного проектирования технологической цепочки процедур, методов, организационных форм взаимодействия учеников и учителя, обеспечивающих гарантированные результаты обучения и снижающих негативные последствия работы малоквалифицированного учителя.

В условиях, когда образование стало всеобщим, а профессия учителя – массовой, уповать на индивидуальное мастерство педагога уже нельзя. Техно-

логизация позволяет гарантировать достижение некоторого нижнего порога качества образования при очень неоднородном и в среднем невысоком уровне профессиональной подготовки учителей.

Как пишет Г.К. Селевко [45], любая современная педагогическая технология представляет собой синтез достижений педагогической науки и практики, сочетание традиционных элементов прошлого опыта и того, что рождено общественным прогрессом, гуманизацией и демократизацией общества. Ее источниками и составными элементами являются социальные преобразования и новое педагогическое мышление, достижения педагогической, психологической и общественных наук и передовой педагогический опыт.

## **1.2. Сущность педагогической технологии**

Поскольку выявление сущности понятия сводится к определению совокупности его существенных признаков, обратимся к признакам понятия педагогической технологии.

Анализ работ отечественных и зарубежных авторов (В.П. Беспалько, Б.С. Блум, М.В. Кларии, И. Марев и др.) по проблемам педагогической технологии позволил М.А. Чошанову [61] выделить наряду с общими наиболее существенные признаки, присущие именно педагогической технологии. К ним относятся диагностичное целеобразование, результативность, экономичность, алгоритмируемость, проектируемость, целостность, управляемость, корректируемость, визуализация.

Диагностичное целеобразование и результативность как признаки педагогической технологии предполагают гарантированное достижение целей и эффективность педагогического процесса.

Экономичность выражает качество педагогической технологии, обеспечивающее резерв учебного времени, оптимизацию труда преподавателя и достижение запланированных результатов обучения в сжатые промежутки времени. Следующая группа признаков (алгоритмируемость, проектируемость, целостность и управляемость) отражает различные стороны идеи воспроизводимости педагогических технологий.

Признак корректируемости предполагает возможность постоянной оперативной обратной связи, последовательно ориентированной на четко опре-

деленные цели. В этом смысле признаки корректируемости, диагностичного целеобразования и результативности тесно взаимосвязаны и дополняют друг друга.

Признак визуализации затрагивает вопросы применения различной аудиовизуальной и электронно-вычислительной техники, а также конструирования и применения разнообразных дидактических материалов и оригинальных наглядных пособий.

Уточняя употребление нами терминов *педагогическая технология*, *дидактическая технология* и *технология обучения*, отметим, что дидактическая технология (технология обучения) как частный вид педагогической технологии обладает всеми ее признаками и при этом отражает специфические черты процесса обучения.

Коллективом исследователей под руководством М.Я. Виленского [12] было выявлено, в чем заключается сущность технологии обучения. Во-первых, в предварительном проектировании учебного процесса с последующей возможностью воспроизведения этого проекта в педагогической практике; во-вторых, в специально организованном целеобразовании, предусматривающем возможность объективного контроля достижения поставленных дидактических целей; в-третьих, в структурной и содержательной целостности технологии обучения, т.е. в недопустимости внесения изменений в один из ее компонентов, не затрагивая другие; в-четвертых, в выборе оптимальных методов, форм и средств, диктуемых вполне определенными и закономерными связями всех элементов технологии обучения; в-пятых, в наличии оперативной обратной связи, позволяющей своевременно и оперативно корректировать процесс обучения. Отсюда можно сделать вывод: ***технология обучения*** представляет собой *целостную дидактическую систему, позволяющую наиболее эффективно, с гарантированным качеством решать педагогические задачи. К **структурным составляющим** технологии как дидактической системы целесообразно отнести дидактические цели и задачи, содержание обучения, средства педагогического взаимодействия (методы обучения), организацию учебного процесса (формы обучения), средства обучения, обучающегося, преподавателя, а также результат их совместной деятельности.*

М.В. Кларин [25] выделил следующие ключевые признаки строгого представления о педагогической технологии: диагностичность описания цели, воспроизводимость педагогического процесса (в том числе предписание этапов,

соответствующих им целей обучения и характера деятельности обучаемых) и воспроизводимость педагогических результатов.

По мнению Г.Ю. Ксензовой [27], существенными чертами современных трактовок понятия «педагогическая технология» являются следующие:

- технология разрабатывается под конкретный педагогический замысел, в основе ее лежат ценностные ориентации, целевые установки автора или коллектива, имеющие формулу конкретного ожидаемого результата;
- технологическая цепочка педагогических действий выстраивается строго в соответствии с поставленной целью и должна гарантировать всем школьникам достижение и прочное усвоение уровня государственного стандарта образования;
- функционирование технологии предусматривает взаимосвязанную деятельность учителя и учащихся с учетом принципов индивидуализации;
- поэтапное и последовательное воплощение элементов педагогической технологии должно быть воспроизводимо любым учителем с учетом авторского почерка педагога;
- органической частью педагогической технологии являются соответствующие данной стратегии обучения диагностичные процедуры, содержащие критерии, показатели и инструментарий измерения результатов деятельности.

Г.К. Селевко к признакам технологии относит следующие:

- наличие четко и диагностично заданной цели, т.е. корректно измеримого представления понятий, операций, деятельности обучающихся как ожидаемого результата обучения, способов диагностики достижения этой цели;
- представление изучаемого содержания в виде системы познавательных и практических задач, ориентировочной основы и способов их решения;
- наличие достаточно жесткой последовательности, логики, определенных этапов усвоения темы;
- указание способов взаимодействия участников учебного процесса на каждом этапе (преподавателя и студентов, студентов друг с другом), а также их взаимодействия с информационной техникой;
- мотивационное обеспечение деятельности преподавателя и студентов, основанное на реализации их личностных функций в этом процессе (свободный выбор, креативность, состязательность, жизненный и профессиональный смысл);
- указание границ правилосообразной (алгоритмической) и творческой деятельности преподавателя, допустимого отступления от единообразных правил;

- применение в учебном процессе новейших средств и способов переработки информации.

Признаки технологии естественным образом преобразуются в требования к ним.

С.Е. Коришева и Ю.В. Жильцова [26] говорят о том, что любая педагогическая технология должна удовлетворять основным методологическим требованиям:

- каждой педагогической технологии должна быть присуща опора на определенную научную концепцию усвоения опыта, научное обоснование процесса достижения образовательных целей (научная база);

- педагогическая технология должна обладать всеми признаками системы: логикой процесса, взаимосвязью всех его частей, целостностью (системность);

- педагогическая технология предполагает возможность целеполагания, планирования, проектирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средств и методов с целью коррекции результатов (управляемость);

- современные педагогические технологии существуют в конкурентных условиях и должны гарантировать достижение определенного стандарта обучения, являться эффективными по результатам и оптимальными по затратам (эффективность);

- педагогическая технология подразумевает возможность ее применения в других образовательных учреждениях, другими субъектами обучения (воспроизводимость).

По мнению Е.А. Юниной [63], современные педагогические технологии должны характеризоваться:

- *гуманностью*, т.е. улучшать качество жизни людей, например, способствовать здоровьесбережению, развитию личности;

- *эффективностью* (быть результативными, т.е. давать гарантированные результаты примерно через пять лет их применения);

- *наукоемкостью* (иметь серьезное научное обоснование с позиций философии, педагогики, психологии, информатики, системного анализа. Наукоемкость требует также научного сопровождения в процессе применения технологий, чтобы исключить возможность их искажения);

- *универсальностью* (иметь широкое применение, например, одна и та же технология должна быть применима для преподавания разных учебных



предметов, должна быть пригодна для разных ступеней обучения, а также для обучения детей с разным уровнем развития);

- *интегрированностью* (быть взаимосвязанными, взаимообусловленными и тем самым должны дополнять и усиливать друг друга);

- *технологичностью* (иметь четкий алгоритм (последовательность действий), не допускающий вольного их применения);

- *креативностью* (несмотря на то, что технологии имеют четкий алгоритм применения, их содержательное наполнение должно носить творческий характер).

Г.К. Селевко отождествляет методологические требования с **критериями технологичности**. К последним он относит *концептуальность* (каждой педагогической технологии должна быть присуща опора на определенную научную концепцию, включающую философское, психологическое, дидактическое и социально-педагогическое обоснование достижения образовательных целей); *системность* (педагогическая технология должна обладать всеми признаками системы: логикой процесса, взаимосвязью всех его частей, целостностью); *управляемость* (предполагает возможность диагностического целеполагания, планирования, проектирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средствами и методами с целью коррекции результатов); *эффективность* (современные педагогические технологии существуют в конкурентных условиях и должны быть эффективными по результатам и оптимальными по затратам, гарантировать достижение определенного стандарта обучения); *воспроизводимость* (подразумевает возможность применения, повторения, воспроизведения педагогической технологии в других однотипных образовательных учреждениях, другими субъектами).

Рассмотрев существенные признаки педагогических технологий, перейдем к их *определению* через род и видовое отличие, отражающее минимальную необходимую совокупность существенных признаков. Как отмечает Г.К. Селевко [47], в настоящее время в педагогический лексикон прочно вошел термин *педагогическая технология*, однако в его понимании и употреблении существуют большие разночтения. Например, одни специалисты рассматривают технологии обучения (разновидность педагогической технологии) как область реализации содержания обучения, предусмотренного учебными программами; другие – как средство гарантированного достижения целей учения; третьи – как целостную совокупность разнокачественных процедур (дидактических, общепедагогических, психологических и др.). Но все считают: с помощью технологий можно эф-

фактивно осуществлять требуемые изменения в деятельности обучаемых. Среди специалистов и учителей сложились два доминирующих типа представлений о технологиях обучения. Первый принимает любой сложившийся способ обучения за технологию, другой связывает технологию непременно с инновационной практикой, с экспериментальным режимом работы. Приведем примеры толкований понятия педагогической (образовательной, дидактической) технологии.

Часть исследователей определяет понятие технологии через понятие деятельности. Например, М.Я. Виленский с соавторами [12] рассматривают технологию обучения как законосообразную педагогическую *деятельность*, реализующую научно обоснованный проект дидактического процесса и обладающую более высокой степенью эффективности, надежности и гарантированности результата, чем это имеет место при традиционных моделях обучения.

Аналогично определение Б.П. Бархаева: педагогическая технология – это «педагогическая *деятельность*, основывающаяся на целесообразном использовании “материализованных” и технических средств обучения и воспитания в интересах повышения устойчивости и эффективности педагогического процесса» [2, с. 48].

В.М. Монахов считает, что педагогическая технология – это «продуманная во всех деталях модель совместной педагогической *деятельности* по проектированию, организации и проведению учебного процесса с безусловным обеспечением комфортных условий для учащихся и учителя» [36, с. 27]; «это набор технологических процедур, обеспечивающих профессиональную *деятельность* педагога и гарантированность конечного планируемого результата» [там же, с. 28].

Дидактическая технология – это «алгоритм выполнения определенной преподавательской *деятельности* через ее расчленение на систему последовательных взаимосвязанных элементарных дидактических действий, которые определены более или менее однозначно и имеют целью обеспечение достижения высокой эффективности в этой деятельности» [29, с. 3].

В.В. Сериков считает технологию в любой сфере *деятельностью*, в максимальной мере отражающей объективные законы данной предметной сферы и поэтому обеспечивающей наибольшее для данных условий соответствие результата деятельности предварительно поставленным целям [49].

Педагогическая технология – внешний, предметный компонент педагогической *деятельности*, представляющий способ получения воспроизводимого положительного педагогического результата, диагностично заданного нормами

обучающих или управляющих программ в условиях, адекватных целям образования [52].

Г.Ю. Ксензова [27] под педагогической технологией понимает такое построение *деятельности* педагога, в котором все входящие в него действия представлены в определенной целостности и последовательности, а выполнение предполагает достижение необходимого результата и имеет вероятностный прогнозируемый характер. В такой прогностичности всегда заинтересован учитель.

В наиболее привычном представлении понятие «технология» имеет отношение к производственному *процессу*. В этом смысле технология определяется как *совокупность* методов обработки, изготовления, изменения состояния свойств, формы сырья, материала в процессе производства продукции. Задача технологии как *науки* заключается в выявлении физических, химических, механических и других закономерностей с целью определения и использования на практике наиболее эффективных и экономичных производственных процессов. Согласно Гегелю, деятельность – это цель, средство и результат, связанные процессом. Именно в этой логике некоторые авторы сводят понятие технологии к *процессу* деятельности, а другие – к *совокупности средств* (приемов) ее осуществления.

В.Ф. Башарин определяет педагогическую технологию как «педагогически и экономически обоснованный *процесс* достижения гарантированных, потенциально воспроизводимых, запланированных педагогических результатов, включающих формирование знаний и умений путем раскрытия специально переработанного содержания, строго реализуемого на основе научной организации труда и поэтапного тестирования» [3, с. 26]. Педагогическая технология – это «последовательное и непрерывное осуществление взаимосвязанных между собой компонентов, этапов, состояний педагогического *процесса* и действий его участников – педагогов и учащихся» [4, с. 62]. В.П. Беспалько педагогической технологией называет содержательную технику реализации учебного *процесса* [6], а В.П. Волков – описание *процесса* достижения планируемых результатов обучения [13].

Философский словарь определяет технологию как набор и последовательность операций, выполненных с помощью данной техники в каждом данном определенном производственном *процессе* [56].

В то же время В.М. Шепель трактует технологию как искусство, мастерство, умение, *совокупность методов* обработки, изменения состояния [62]. В трак-

товке В.А. Сластенина педагогическая технология – это «упорядоченная совокупность действий, операций и процедур, инструментально обеспечивающих достижение прогнозируемого результата в изменяющихся условиях образовательного процесса» [50, с. 41].

В Толковом словаре русского языка приведено определение технологии как *совокупности* производственных методов и процессов в определенной отрасли производства, а также научное описание способов производства [38].

Педагогическая технология – *совокупность* психолого-педагогических установок, определяющих специальный набор и компоновку форм, методов, способов, приемов обучения, воспитательных средств; она есть организационно-методический *инструментарий* педагогического процесса [31].

Часть авторов идет далее и наделяет технологию свойством системности. Педагогическая технология означает *системную совокупность* и порядок функционирования всех личностных, инструментальных и методологических средств, используемых для достижения педагогических целей [25].

Коллектив исследователей под руководством М.Я. Виленского [12] трактует технологию обучения как последовательность (не обязательно строго упорядоченную) педагогических процедур, операций и приемов, составляющих в совокупности целостную дидактическую *систему*, реализация которой в педагогической практике приводит к достижению гарантированных целей обучения и способствует целостному развитию личности обучающегося; как результат, как научный проект (описание, модель) дидактического процесса, воспроизведение которого гарантирует успех педагогических действий.

С.И. Змеев [23] определяет технологию обучения как *систему* научно обоснованных действий всех, но прежде всего активных элементов (участников) процесса обучения, осуществление которых с высокой степенью гарантированности приводит к достижению поставленных целей обучения. Педагогическая технология – это проект определенной педагогической *системы*, реализуемый на практике [6].

М.Е. Бершадский и В.В. Гусев [5] образовательной технологией называют *систему*, состоящую:

- из модели исходного состояния учащегося, заданной множеством свойств, наличие которых необходимо для осуществления технологического процесса;
- некоторого диагностического и операционального представления планируемых результатов обучения (модель конечного состояния учащегося);

- средств диагностики текущего состояния и прогнозирования тенденций ближайшего развития (мониторинга) системы;
- набора моделей обучения;
- критериев выбора или построения оптимальной модели обучения для данных конкретных условий, механизма обратной связи, обеспечивающего взаимодействие между данными диагностики и выбором модели обучения, соответствующей полученным данным.

Л.Г. Семушина и Н.Г. Ярошенко [48] технологией обучения называют способ реализации предусмотренного учебными программами содержания обучения, включающий в себя *систему* форм, методов и средств обучения, благодаря которым обеспечивается наиболее эффективное достижение тех или иных поставленных целей.

Дидактическая технология – *система* процессуально-методических действий преподавателя, которая с помощью дидактического инструментария обеспечивает эффективное протекание учебной деятельности и достижение проектируемого результата [22].

Д.В. Чернилевский [60], рассматривая педагогическую технологию как систематическое и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного процесса обучения, как систему способов и средств достижения целей управления этим процессом, дает следующее определение: педагогическая технология – это комплексная интегративная *система*, включающая упорядоченное множество операций и действий, обеспечивающих педагогическое целеопределение, содержательные, информационно-предметные и процессуальные аспекты, направленные на усвоение систематизированных знаний, приобретение профессиональных умений и формирование личностных качеств обучаемых, заданных целями обучения.

В литературе и практике работы школ термин *педагогическая технология* часто применяется как синоним понятия *педагогическая система*.

В.П. Беспалько [6] под *педагогической системой* понимает определенную совокупность взаимосвязанных средств, методов и процессов, необходимых для создания организованного, целенаправленного и преднамеренного педагогического влияния на формирование личности с заданными качествами. Следовательно, ценностными ориентациями конкретного общества задаются цели формирования личности, а значит, и та или иная педагогическая система: меняются цели – должна меняться и система.

Результат выполненной В.П. Беспалько аналитико-синтетической исследовательской работы [7] показал, что структура любой педагогической системы может быть представлена взаимосвязанной *совокупностью инвариантных элементов*: учащиеся; цели воспитания (общие и частные); содержание воспитания; процессы воспитания и обучения; учителя (или технические средства обучения); организационные формы воспитательной работы. В рамках этой структуры осуществляются все взаимодействия учащихся и педагогов, которыми определяется ход педагогического (иными словами, воспитательного) процесса, ведущего к формированию личности с заданными качествами. Все педагогические явления, возникающие в эволюционном процессе становления, развития и жизни воспитательной деятельности, находят себе объяснение в структурных сдвигах элементов педагогической системы, изменениях свойств ее элементов или характера связей между ними.

Очень важно, что в структуре педагогической системы четко просматриваются два исходных компонента всякой научной теории: ее задачи и технология их решения. Элементы педагогической системы структурируют дидактические задачи и собственно технологию обучения и воспитания. В структуре дидактической задачи, как и задачи в любой сфере человеческой деятельности, отображается цель, достижение которой обусловлено ситуацией (условиями) и располагаемой информацией (содержанием) для деятельности. Для дидактической задачи цель – необходимость формирования определенных качеств личности, ситуация (условия) – это исходные личностные качества учащихся, а информация – содержание учебного предмета или воспитательного влияния.

Каждая дидактическая задача разрешима с помощью адекватной технологии обучения, целостность которой обеспечивается взаимосвязанной разработкой и использованием трех ее компонентов: организационной формы, модели дидактического процесса и требований к квалификации учителя.

Как отмечает Г.К. Селевко [46], понятие системы шире, чем понятие технологии, и включает, в отличие от последней, и самих субъектов и объектов деятельности.

В.П. Беспалько [7] следующим образом разъясняет соотношение между понятиями педагогической системы и педагогической технологии: искусственные воспитательные системы по имени творящей их науки называют «педагогическими системами», а процессы в этих системах – «педагогической технологией». Аналогично М.А. Чошанов [61] рассматривает технологию обучения как составную *процессуальную часть* дидактической системы, выполняющую три ос-

новые *функции*: описательную, объяснительную и проектировочную. Описательная функция раскрывает существенные аспекты практической реализации учебного процесса. Пользуясь соответствующим инструментарием, различные специалисты должны дать одинаковое описание этого процесса. Объяснительная функция позволяет выяснить эффективность различных компонентов обучения (например, эффективность различных методов) и определить оптимальные их комбинации. Проектировочная функция осуществляется при описании учебного процесса на всех уровнях, включая уровень педагогической реализации. Таким образом, можно утверждать, что оптимальность педагогической системы – в ее технологичности, т.е. воспроизводимости на практике.

В определении ЮНЕСКО просматривается попытка объединить процесс и систему: педагогическая технология – это *системный* метод создания, применения и определения всего *процесса* преподавания и усвоения знаний с учетом технических и человеческих ресурсов и их взаимодействия, ставящий своей задачей оптимизацию форм образования.

Анализируя различные определения педагогической технологии, приходим к выводу, что технология в понимании разных исследователей выступает и как деятельность, и как система, и как процесс, и как совокупность методов и средств. В рассмотренных подходах к пониманию технологии превалирует определение педагогической технологии через ее отдельные признаки и структурные компоненты. В нашем понимании педагогическая технология является содержательным обобщением, вбирающим в себя смыслы всех определений, даваемых разными источниками.

По мнению Ю.Г. Фокина [57], технология обучения в высшей школе – прикладная педагогическая *наука*, изучающая закономерности и способы преобразования положений теории обучения и требований программы учебной дисциплины в процессуальные рекомендации преподавателю, реализация которых обеспечивает решение заранее поставленной конкретной дидактической задачи занятия при объективном диагностировании результатов ее решения. Заметим, что слово *технология* происходит от греческих слов *techne* (искусство, мастерство) и *logos* (наука, закон), т.е. дословно переводится как наука о мастерстве.

Предмет исследований технологии обучения – закономерности и процедуры постановки дидактических задач, предусматривающих достижение объективно диагностируемых результатов обучения, в сочетании со способами разработки технологических предписаний для преподавателей, способствующих реализации дидактической задачи занятия. Объект исследований технологии обу-

чения – процессы постановки и реализации решения дидактических задач преподавателями высшей школы с учетом известных дидактических, психологических и эргономических закономерностей. Технологическая модель обучения – перечень и указание последовательности технологически и дидактически обоснованных процедур, объективно необходимых для достижения заданной цели обучения на конкретном занятии в типовых условиях.

Технологическое предписание обучения – это явно зафиксированная дидактически обоснованная система и последовательность действий (частных целей), учитывающая содержание учебной дисциплины, следуя которой преподаватель, наполняя эти действия собственным методическим содержанием (операционным составом), потенциально обеспечивает решение ранее явно поставленной дидактической задачи занятия.

Таким образом, *педагогическая технология* функционирует и в качестве науки, исследующей наиболее рациональные пути обучения, и в качестве системы способов, принципов и регулятивов, применяемых в обучении, и в качестве реального процесса обучения.

Итак, понятие «педагогическая технология» может быть представлено в трех аспектах:

- *научном*: педагогические технологии – часть педагогической науки, изучающая и разрабатывающая цели, содержание и методы обучения и проектирующая педагогические процессы;

- *процессуально-описательном*: описание (алгоритм) процесса деятельности, совокупность целей, содержания, методов и средств для достижения планируемых результатов обучения;

- *процессуально-действенном*: осуществление технологического (педагогического) процесса, функционирование всех личностных, инструментальных и методологических педагогических средств.

Понятие «педагогическая технология» в образовательной практике употребляется на трех иерархически соподчиненных уровнях:

- *общепедагогический (общедидактический) уровень*: *общепедагогическая (общедидактическая, общевоспитательная) технология* характеризует целостный образовательный процесс в данном регионе, учебном заведении, на определенной ступени обучения. Здесь термин *педагогическая технология* синонимичен термину *педагогическая система*: включает совокупность целей, содержания, средств и методов обучения, алгоритм деятельности субъектов и объектов процесса;



– частнометодический (предметный) уровень: *частнопредметная педагогическая технология* употребляется в значении «частная методика», т.е. совокупность методов и средств для реализации определенного содержания обучения и воспитания в рамках одного предмета, класса, одним учителем (методика преподавания предметов, методика компенсирующего обучения, методика работы учителя, воспитателя);

– локальный (модульный) уровень: локальная технология представляет собой *технология отдельных частей учебно-воспитательного процесса*, решение частных дидактических и воспитательных задач (технология отдельных видов деятельности, формирование понятий, воспитание отдельных личностных качеств, технология урока, усвоения новых знаний, технология повторения и контроля материала, технология самостоятельной работы и др.).

Понятие педагогической технологии частно-предметного и локального уровней почти полностью совпадает с понятием «методика обучения»; различие в их значении заключается в расстановке акцентов. В технологиях более представлен процессуальный, количественный и расчетный компонент, в методиках – целевая, содержательная, качественная и вариативно-ориентировочная стороны. Технология отличается от методики своей воспроизводимостью, устойчивостью результатов, отсутствием многих «если» (если талантливый учитель, если способные дети, хорошие родители...). Смешение технологий и методик приводит к тому, что иногда, наоборот, те или иные технологии включаются в состав методик обучения.

Делая упор на слабую представленность или отсутствие в методике признаков технологии, Д.В. Чернилевский указывает следующие отличия технологии от методики [60]:

- культурное понятие, связанное с мышлением и деятельностью;
- организованное, целенаправленное, преднамеренное педагогическое влияние на учебный процесс;
- содержательная техника реализации учебного процесса;
- инструментарий достижения целей обучения, систематическое и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного процесса обучения;
- при реализации технологии осуществление процесса обучения происходит в системе, объединяющей личностный и коллективный поиск с учетом всех взаимосвязанных элементов педагогической системы;

- технология – методологическая основа методики, поскольку методика находит в технологии свое обоснование и процесс построения;
- процесс создания системы методов, форм и средств с учетом целей обучения;
- процессуальный, динамичный, а не рекомендательный характер;
- ориентация не на один предмет и достижение одной цели, а на универсализацию подходов к изучению учебного материала;
- ориентация на обучающихся, а не на преподавателя.

Аналогично С.И. Змеев [23] полагает, что технология обучения в отличие от дидактики и методики обучения предполагает системную организацию взаимодействия всех элементов процесса обучения на всех его этапах, определяет основные операции при организации и реализации процесса обучения; определяет основные характеристики и параметры участвующих в процессе обучения элементов, детерминирует действия и функции прежде всего активных элементов (участников) процесса обучения: обучающегося и обучающего и гарантирует с высокой степенью достоверности достижение поставленных целей обучения.

Таким образом, указанные авторы полагают, что понятие технологии шире понятия методики (которое занимает скромное место в рамках методологического понятия технологии) на том основании, что в понятии методики отсутствуют или мало представлены такие признаки технологии, как диагностичность описания цели, воспроизводимость педагогического процесса (в том числе предписание этапов, соответствующих им целей обучения и характера деятельности обучаемых) и воспроизводимость педагогических результатов.

Однако, как считают М.Е. Бершадский и В.В. Гузеев [5], формально между методическим и технологическим подходами к учебному процессу нет противоречия, так как понятие методики преподавания шире понятия образовательной технологии. Традиционно считается, что предметом методики является методическая система, включающая цели образования, его содержание, методы, формы, средства и приемы организации учебного процесса, т.е. методика пытается ответить сразу на три основных вопроса: зачем, чему и как учить. Технолог же начинает действовать тогда, когда цели уже определены, и нужно разработать конкретные процедуры их достижения, поэтому технология отвечает, в основном, на третий вопрос триады.

М.А. Чошанов [51] наиболее полно разъясняет разницу между методической системой и педагогической технологией. Основное отличие, по его мнению, состоит именно в мере выраженности каждого признака технологии. Если

в педагогической технологии эти признаки выражены наиболее сильно, то в методической системе они могут быть выражены слабо или же отсутствовать вообще. Еще одно отличие заключается в том, что в педагогической технологии слабо представлен содержательный компонент, который присутствует в методической системе. В таком понимании педагогическая технология, или более узко – технология обучения, является составной (процессуальной) частью методической системы. Так, например, если методическая система направлена на решение следующих трех задач: чему учить, зачем учить и как учить, то технология обучения, прежде всего, отвечает на третий вопрос с одним существенным дополнением: как учить результативно.

Регулятивное воздействие понятия технологии состоит в том, что оно побуждает исследователей и практиков в области образования:

- находить основание результативности деятельности;
- мобилизовать лучшие достижения науки и опыта, чтобы гарантировать требуемый результат;
- строить деятельность на интенсивной, т.е. максимально научной, а не на экстенсивной основе, ведущей к неоправданным затратам сил, времени и ресурсов;
- уделять большое внимание прогнозированию и проектированию деятельности с целью предотвращения необходимости ее коррекции по ходу исполнения;
- использовать все возрастающие степени новейших информационных средств, максимально автоматизировать рутинные операции и т.п.

Иными словами, технологичность становится доминирующей характеристикой деятельности человека, означает переход на качественно новую ступень эффективности, оптимальности, наукоемкости по сравнению с традиционным уровнем, выражавшимся понятием «методика».

### **1.3. Классификация технологий. Структура педагогической технологии**

Г.К. Селевко пишет [45], что технология в максимальной степени связана с деятельностью учителя и ученика, ее структурой, средствами, методами и формами. Поэтому в структуру педагогической технологии он включает а) концептуальную основу; б) содержательную часть обучения; цели обучения – общие и

конкретные; содержание учебного материала; в) процессуальную часть – технологический процесс, в который входит организация учебного процесса, методы и формы учебной деятельности школьников, методы и формы работы учителя, деятельность учителя по управлению процессом усвоения материала и диагностика учебного процесса.

Образовательной технологией В.В. Гузеев [19] называет систему, состоящую из следующих компонентов:

- 1) некоторого диагностического и операционного представления планируемых результатов обучения;
- 2) средств диагностики текущего состояния и тенденций ближайшего развития обучаемых;
- 3) набора моделей обучения;
- 4) критериев выбора или построения оптимальной модели для заданных конкретных условий [19].

Описание технологии предполагает раскрытие всех основных ее характеристик, что делает возможным ее воспроизведение. Описание и анализ образовательной технологии Г.К. Селевко представляет в следующей структуре [45]:

1. Название технологии, отражающее главную решаемую ею проблему, основные качества, принципиальную идею, существо применяемой системы обучения, наконец, основное направление модернизации учебно-воспитательного процесса или характерную региональную (местную) ситуацию. Название технологии часто дается по одному, самому яркому ее признаку.

2. Идентификация данной технологии в соответствии со следующей классификационной схемой:

- вид педагогической технологии по уровню применения (метатехнология, отраслевая, модульно-локальная, мезотехнология, микротехнология);
- основные используемые философские позиции;
- основные используемые методологические подходы;
- отношение к факторам развития;
- изложение особенностей применяемой научной концепции освоения опыта в данной технологии;
- ориентация технологии на определенную сферу развития индивида;
- принадлежность технологии к определенной содержательной области;
- указание преобладающих видов социально-педагогической деятельности;
- характеристика типа управления педагогическим процессом;

- методы и средства, применяемые в технологии, выделение преобладающих;
- применяемые организационные формы педагогического процесса;
- преобладающие средства обучения;
- описание воспитательной ориентации и подхода к человеку;
- отнесение педагогической технологии к какой-либо группе модернизации традиционных технологий.

3. Целевые ориентации технологии.

4. Концептуальная основа. Краткое описание руководящих идей, гипотез, принципов. Научная концепция освоения опыта, ориентация на определенную сферу развития человека, методы воспитания.

5. Содержание и структура деятельности учителей и учащихся. В рамках технологии эти элементы рассматриваются с позиций современных идей и теорий воспитания, принципов системности, соответствия целям и социальному заказу. Указывается объем и характер содержания обучающих и воспитывающих воздействий, структура учебно-воспитательных планов, материалов, программ.

6. Процессуальная характеристика (методические особенности). В процессуальной характеристике технологии прежде всего определяются структура и алгоритмы деятельности субъектов и объектов, целесообразность и оптимальность отдельных элементов, комплексное применение и взаимодействие всех методических средств, управление, адекватное целям и задачам, контингенту обучаемых. Описываются мотивационная характеристика, особенности методики, применения методов и средств обучения, управление и организационные формы педагогического процесса (диагностика, планирование, регламент, коррекция).

7. Программно-методическое обеспечение. Программно-методическое обеспечение должно удовлетворять требованиям научности, технологичности, достаточной полноты и реальности осуществления: учебные планы и программы, учебные и методические пособия, дидактические материалы, наглядные и технические средства обучения, диагностичный инструментарий.

8. Соответствие критериям технологичности. Основными критериями технологичности являются: системность (комплексность, целостность), научность (концептуальность, развивающий характер), структурированность (иерархичность, логичность, алгоритмичность, процессуальность, преемственность, вариативность), управляемость (диагностичность, прогнозируемость, эффективность, оптимальность, воспроизводимость).

9. Экспертиза педагогической технологии. Эта процедура является многоаспектной. Концептуальная часть рассматривается с позиции новизны (инновационности), альтернативности, гуманизма и демократизма, современности. Содержание образования в рамках технологии рассматривается с позиций современных теорий общего среднего образования, принципов системности, идей развивающего обучения и социального заказа. В процессуальной характеристике прежде всего определяется целесообразность и оптимальность отдельных элементов, комплексность всех методических средств, управляемость, адекватность содержанию образования и контингенту обучаемых. Программно-методическое обеспечение должно удовлетворять требованиям научности, технологичности, достаточной полноты и реальности осуществления. Главным критерием оценки педагогической технологии является ее эффективность и результативность.

Различают технологические микроструктуры: приемы, звенья, элементы и др. Выстраиваясь в логическую технологическую цепочку, они образуют целостную педагогическую технологию (технологический процесс). *Технологическая схема* – условное изображение технологии процесса, разделение его на отдельные функциональные элементы и обозначение логических связей между ними. *Технологическая карта* – описание процесса в виде пошаговой, поэтапной последовательности действий (часто в графической форме) с указанием применяемых средств.

В теории и практике работы школ сегодня существует множество вариантов учебно-воспитательного процесса. Каждый автор и исполнитель привносит в педагогический процесс что-то свое, индивидуальное, в связи с чем говорят, что каждая конкретная технология является авторской. Однако многие технологии по своим целям, содержанию, применяемым методам и средствам имеют достаточно много сходства и по этим общим признакам Г.К. Селевко классифицирует их в несколько обобщенных групп [45]. По сущностным и инструментально значимым свойствам (например, целевой ориентации, характеру взаимодействия учителя и ученика, организации обучения) выделяются следующие классы педагогических технологий.

По уровню применения выделяются общепедагогические, частнометодические (предметные) и локальные (модульные) технологии.

По философской основе технологии делятся на материалистические и идеалистические, диалектические и метафизические, научные (сциентистские) и религиозные, гуманистические и антигуманные, антропософские и теософские,

прагматические и экзистенциалистские, свободного воспитания и принуждения и другие разновидности.

По *ведущему фактору психического развития* рассматривают биогенные, социогенные, психогенные и идеалистские технологии. Сегодня общепринято, что личность есть результат совокупного влияния биогенных, социогенных и психогенных факторов, но конкретная технология может учитывать или делать ставку на какой-либо из них, считать его основным.

По *научной концепции* усвоения опыта выделяются ассоциативно-рефлекторные, бихевиористские, гештальттехнологии, интериоризаторские, развивающие.

По *ориентации на личностные структуры* технологии делятся на информационные технологии (формирование школьных знаний, умений, навыков по предметам); операционные (формирование способов умственных действий); эмоционально-художественные и эмоционально-нравственные (формирование сферы эстетических и нравственных отношений), технологии саморазвития (формирование самоуправляющихся механизмов личности); эвристические (развитие творческих способностей) и прикладные (формирование действенно-практической сферы).

По *характеру содержания и структуры* называются технологии обучающие и воспитывающие, светские и религиозные, общеобразовательные и профессионально ориентированные, гуманитарные и технократические, различные отраслевые, частнопредметные, а также монотехнологии, комплексные (политехнологии) и проникающие технологии. В монотехнологиях весь учебно-воспитательный процесс строится на какой-либо одной приоритетной, доминирующей идее, принципе, концепции; в комплексных – комбинируется из элементов различных монотехнологий. Технологии, элементы которых наиболее часто включаются в другие технологии и играют для них роль катализаторов, активизаторов, называют *проникающими*.

По *типу организации управления познавательной деятельностью* В.П. Беспалько предложена следующая классификация педагогических систем (технологий). Взаимодействие учителя с учеником (управление) может быть разомкнутым (неконтролируемая и некорректируемая деятельность учащихся), цикличным (с контролем, самоконтролем и взаимоконтролем), рассеянным (фронтальным) или направленным (индивидуальным) и, наконец, «ручным» (словесным) или автоматизированным (с помощью учебных средств). Сочетание

этих признаков определяет следующие виды технологий (по В.П. Беспалько – дидактических систем):

- 1) классическое лекционное обучение (управление – разомкнутое, рассеянное, ручное);
- 2) обучение с помощью аудиовизуальных технических средств (разомкнутое, рассеянное, автоматизированное);
- 3) система «консультант» (разомкнутое, направленное, ручное);
- 4) обучение с помощью учебной книги (разомкнутое, направленное, автоматизированное) – самостоятельная работа;
- 5) система «малых групп» (цикличное, рассеянное, ручное) – групповые, дифференцированные способы обучения;
- 6) компьютерное обучение (цикличное, рассеянное, автоматизированное);
- 7) система «репетитор» (цикличное, направленное, ручное) – индивидуальное обучение;
- 8) «программированное обучение» (цикличное, направленное, автоматизированное), для которого имеется заранее составленная программа.

В практике обычно выступают различные комбинации этих «монодидактических» систем, самыми распространенными из которых являются:

- традиционная классическая классно-урочная система Я. А. Коменского, представляющая комбинацию лекционного способа изложения и самостоятельной работы с книгой (дидахография);
- современное традиционное обучение, использующее дидахографию в сочетании с техническими средствами;
- групповые и дифференцированные способы обучения, когда педагог имеет возможность обмениваться информацией со всей группой, а также уделять внимание отдельным учащимся в качестве репетитора;
- программированное обучение, основывающееся на адаптивном программном управлении с частичным использованием всех остальных видов.

По *организационным формам* выделяют классно-урочные и альтернативные, академические и клубные, индивидуальные и групповые технологии, технологию коллективного способа обучения и технологию дифференцированного обучения.

Принципиально важной стороной в педагогической технологии является позиция ребенка в образовательном процессе, *отношение к ребенку* со стороны взрослых. Здесь выделяется несколько типов технологий. *Авторитарные* технологии, в которых педагог является единоличным субъектом учебно-



воспитательного процесса, а ученик есть лишь «объект», «винтик». Они отличаются жесткой организацией школьной жизни, подавлением инициативы и самостоятельности учащихся, применением требований и принуждения. Высокой степенью невнимания к личности ребенка отличаются *дидактоцентрические* технологии, в которых также господствуют субъект-объектные отношения педагога и ученика, приоритет обучения над воспитанием, и самыми главными факторами формирования личности считаются дидактические средства. Дидактоцентрические технологии в ряде источников называют *технократическими*; однако последний термин, в отличие от первого, больше относится к характеру содержания, а не к стилю педагогических отношений. *Личностно ориентированные* технологии ставят в центр всей школьной образовательной системы личность ребенка, обеспечение комфортных, бесконфликтных и безопасных условий ее развития, реализации ее природных потенциалов. Личность ребенка в этой технологии не просто субъект, а субъект приоритетный; она является целью образовательной системы, а не средством достижения какой-либо отвлеченной цели (что имеет место в авторитарных и дидактоцентрических технологиях). Такие технологии называют *антропоцентрическими*. Таким образом, личностно ориентированные технологии характеризуются антропоцентричностью, гуманистической и психотерапевтической направленностью и имеют целью разностороннее, свободное и творческое развитие ребенка.

В рамках личностно ориентированных технологий самостоятельными направлениями выделяются гуманно-личностные технологии, технологии сотрудничества и технологии свободного воспитания. *Гуманно-личностные* технологии отличаются прежде всего своей гуманистической сущностью, психотерапевтической направленностью на поддержку личности, помощь ей. Они «исповедуют» идеи всестороннего уважения и любви к ребенку, оптимистическую веру в его творческие силы, отвергая принуждение. Технологии *сотрудничества* реализуют демократизм, равенство, партнерство в субъект-субъектных отношениях педагога и ребенка. Учитель и учащиеся совместно вырабатывают цели, содержание, дают оценки, находясь в состоянии сотрудничества, сотворчества. Технологии *свободного воспитания* делают акцент на предоставление ребенку свободы выбора и самостоятельности в большей или меньшей сфере его жизнедеятельности. Осуществляя выбор, ребенок наилучшим способом реализует позицию субъекта, идя к результату от внутреннего побуждения, а не от внешнего воздействия.

*Способы, методы и средства обучения* определяют названия многих существующих технологий: догматические, репродуктивные, объяснительно-иллюстративные, программированного обучения, проблемного обучения, развивающего обучения, саморазвивающего обучения, диалогические, коммуникативные, игровые, творческие и др.

*По категории обучающихся* наиболее важными и оригинальными являются:

- массовая (традиционная) школьная технология, рассчитанная на усредненного ученика;
- технологии продвинутого уровня (углубленного изучения предметов, гимназического, лицейского, специального образования и др.);
- технологии компенсирующего обучения (педагогической коррекции, поддержки, выравнивания и т.п.);
- различные викариологические технологии (сурдо-, орто-, тифло-, олигофренопедагогика);
- технологии работы с отклоняющимися (трудными и одаренными) детьми в рамках массовой школы.

И, наконец, названия большого класса современных технологий определяются содержанием модернизации и модификаций, которым в них подвергается существующая традиционная система. По *направлению модернизации* традиционной системы можно выделить следующие группы технологий.

Педагогические технологии на основе *гуманизации и демократизации педагогических отношений* – это технологии с процессуальной ориентацией, приоритетом личностных отношений, индивидуального подхода, нежестким демократическим управлением и яркой гуманистической направленностью содержания. Примерами педагогических технологий на основе *активизации и интенсификации деятельности учащихся* являются игровые технологии, проблемное обучение, технология обучения на основе конспектов – опорных сигналов и др.

К педагогическим технологиям на основе *повышения эффективности организации и управления процессом обучения* относятся программированное обучение, технологии дифференцированного обучения, технологии индивидуализации обучения, групповые и коллективные способы обучения, компьютерные (информационные) технологии и др. Педагогические технологии на основе *методического усовершенствования и дидактического реконструирования учебного материала* включают технологию укрупнения дидактических единиц, технологию диалога культур, технологию реализации теории поэтапного формирования умственных действий и др.

В принципе не существует таких технологий, которые использовали бы только один какой-либо единственный фактор, метод, принцип, – *педагогическая технология всегда комплексна*. Однако по доминирующей особенности процесса обучения технология приобретает специфику и получает соответствующее название.

По классификации, предложенной Г.Ю. Ксензовой [27], различаются три основные группы педагогических технологий:

- *технологии объяснительно-иллюстративного обучения* (в основе информирование, просвещение учащихся и организация их репродуктивных действий с целью выработки у них общеучебных умений и навыков);
- *лично ориентированные технологии обучения* (создают условия для обеспечения собственной учебной деятельности обучающихся, обеспечивают учет и развитие индивидуальных особенностей школьников);
- *технологии развивающего обучения* (в центре внимания – способ обучения, вызывающий, способствующий включению внутренних механизмов личностного развития обучающихся, их интеллектуальных способностей).

В.В. Гузеев [19] выделяет следующие четыре класса образовательных технологий, связанных с парадигмами развития технологического подхода к обучению:

- *Традиционные методика*. Возникли в рамках эмпирической парадигмы: основной учебный период – урок; используемые методы обучения – объяснительно-иллюстративный и эвристический; преобладающие организационные формы обучения – беседа и рассказ; основные средства диагностики – текущие устные опросы без фиксации и обработки результатов и письменные контрольные работы после изучения темы. Речь идет не о методиках как таковых, а о технологиях, созданных внутри частнометодического подхода, аккумулирующих и обобщающих опыт наиболее успешных педагогов за длительные промежутки времени и на больших выборках. По основному учебному периоду эти технологии можно было бы назвать урочно-блочными. Технологий этого класса довольно много, но почти все они предназначены для решения ограниченных задач или существуют внутри частных методик и узкопредметны. Типичная технология этого класса – технология классического семинара.

- *Модульно-блочные технологии*. Являются наиболее типичными для разработок в рамках алгоритмической парадигмы: основной учебный период – модуль или цикл (уроков); используемые методы обучения – объяснительно-иллюстративный, эвристический и программированный; преобладающие орга-

низационные формы обучения – беседа и практикум; основные средства диагностики – текущие письменные программированные опросы (тесты) без фиксации и обработки результатов, письменные программированные контрольные работы или зачеты после изучения темы. Яркий пример – технология комплекса средств учебного оборудования, разработанная Г.Г. Левитасом, М.В. Воловичем и др. [14; 30].

– *Цельноблочные технологии* представляют вторую волну разработок в алгоритмической парадигме: основной учебный период – блок уроков; используемые методы обучения – объяснительно-иллюстративный, эвристический, программированный и проблемный; преобладающие организационные формы обучения – лекция, беседа и практикум; основные средства диагностики – текущие устные опросы или письменные контрольные работы без фиксации и обработки результатов и устные или письменные зачеты после изучения темы. Типичные образцы цельноблочных технологий – лекционно-семинарские системы разных видов.

– *Интегральные технологии* – первое поколение в стохастической парадигме: основной учебный период – блок (уроков), состоящий из двух субпериодов – постоянной и переменной частей блока уроков; используемые методы обучения – объяснительно-иллюстративный, эвристический, программированный, проблемный, и модельный с тенденцией к преобладанию последнего; преобладающие организационные формы обучения – семинар, практикум, самостоятельная работа и семинар-практикум; основные средства диагностики – текущие устные опросы или письменные контрольные работы с фиксацией и обработкой результатов и устные или письменные зачеты (тесты) после изучения темы.

#### **1.4. ВЫБОР И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ, КРИТЕРИИ ЕЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ**

М.И. Бершадский [5] выделяет три вида педагогической деятельности, определяемых уровнем развития и способом применения педагогической технологии.

Первый – положение, при котором учитель, преподаватель является ремесленником в исходном значении этого слова: мастером, искусником в своем деле, хранителем традиций и носителем уникальных знаний, умений, личного

опыта. Все его педагогические инструменты – методические приемы, наглядные пособия и технические средства обучения – созданы им самим или достались по наследству от его предшественников вместе с опытом преподавания. Его педагогическая технология сугубо конкретна, и ее эффективность непосредственно и существенным образом определяется местом и условиями преподавания, учебным материалом, особенностями учащихся и личностными особенностями самого учителя. Данный вид педагогической деятельности можно обозначить как ситуативное обучение, то есть форма и средства обучения неразрывно связаны с конкретной образовательной ситуацией, неотделимы и немыслимы вне ее.

Второй – положение, при котором опыт преподавания обобщается, систематизируется и обретает черты научного знания, относительно независимого от личных качеств преподавателя. Педагогическая технология обретает черты рационально организованного процесса, существующего объективно, относительно независимо от преподавателя. Преподаватель выполняет в ней определенную функцию, обеспечивая тем самым работу образовательной системы, то есть становится работником индустриального типа, элементом образовательной системы, определяющей предмет, цели, способы и средства его деятельности и требующей от него усердия в выполнении своей функции (*industria* означает трудолюбие, усердие, старательность). Данный вид педагогической деятельности можно назвать объективно-логическим обучением, то есть обучением по правилам, независимым от условий обучения, личностных особенностей учащегося и учащего и сферы применения знаний. Такое обучение предполагает либо единую технологию, либо жесткую субординацию всех технологий, их построение по единым принципам.

Третий – положение преподавателя по отношению к педагогической технологии можно определить как положение пользователя современного компьютера, работающего в той или иной программной среде в зависимости от педагогических целей и решаемых задач. «Программная среда» обеспечивается той или иной педагогической технологией, в образовательной среде возникает множество технологий, построенных на различных педагогических принципах, и выбор этой технологии остается за пользователем, определяется ее возможностями, адекватностью условиям применения и соответствием решаемым задачам. Логика обучения (и его технология) определяется профессиональным и социальным контекстом, в котором будут использоваться знания. В этом случае педагогической технологии возвращается ее древнее значение мастерства педа-

гога, ремесленного искусства, но это искусство основывается на современных орудиях и технологиях интеллектуального труда.

Все три вида присутствуют в сфере современного российского образования. К первому виду (педагог-ремесленник) можно отнести не только учителей сельских и иных малокомплектных школ, вынужденных в нынешних условиях отсутствия материального обеспечения учебного процесса мастерить своими руками средства для своей педагогической деятельности, но и создателей авторских курсов и школ, педагогов-новаторов, обладающих незаурядными педагогическими способностями и выступающими носителями или пропагандистами личного педагогического опыта.

Ко второму виду (педагог-функционер) относится основная масса преподавателей как общеобразовательной, так и высшей школы, работающих по заданным учебным планам и программам, в том числе с использованием современных компьютерных программ. Возрастающая дифференциация профессий требует дифференциации преподавания. Разделение функций в сфере образования, как и в сфере производства, способствует повышению производительности педагогического труда, но оно же формирует специалиста с ограниченным чувством социальной ответственности, неспособного к системному мышлению, творчеству. Тем не менее именно эта часть педагогов и преподавателей обеспечивает массовое образование, то есть несет основную социальную нагрузку, их мастерство исполнителей социальной функции обеспечивает решение важнейшей социальной задачи.

К третьему виду (педагог-пользователь) относятся учителя и преподаватели, не просто имеющие в своем распоряжении и не только применяющие современные педагогические технологии в учебном процессе, но использующие их для решения собственных педагогических задач. Их отличает большее сходство с независимыми ремесленниками, чем с взаимозаменяемыми рабочими педагогического конвейера. Они предпочитают выполнять свою работу так, как считают нужным. Они привыкли к изменениям, неясности ситуации, гибкой организации, они независимы, изобретательны и не желают быть элементом педагогической технологии. Хотелось бы подчеркнуть, что педагог-пользователь совсем не обязательно должен создавать свою технологию или улучшать существующую, но необходимо, чтобы он умело применял имеющиеся.

*Выбор образовательной технологии должен осуществляться с учетом соответствия:*

- закономерностям и принципам обучения;

- целям и задачам обучения;
- содержанию и методам данной науки вообще и данного предмета в частности;
- учебным возможностям обучающихся (возрастным, уровню подготовленности, особенностям коллектива, в котором проводится обучение);
- особенностям внешних условий (географических, производственного окружения и др.);
- возможностям самих преподавателей: их предшествующему опыту, подготовленности, личностным качествам и т.д.

По Ю.К. Бабанскому [1], *выбор педагогической технологии* должен осуществляться с учетом:

- задач занятия;
- содержания занятия;
- степени сложности материала;
- уровня подготовленности учебной группы;
- сравнительных характеристик сильных и слабых сторон различных методов обучения;
- особенностей сильных сторон личности самого преподавателя;
- возможностей учебной материальной базы по данному предмету;
- регламента учебного времени.

Э.К. Брейтигам и ее соавторами [8] выделены для каждого возрастного учебного блока методические положения, на основе которых может быть разработана технология обучения математике, обеспечивающая достижение целей обучения математике в школе, целостное формирование личности учащегося.

Педагогическое мастерство и соответственно творчество (ремесленное, исполнительское, пользовательское) свойственно каждому из видов педагогической деятельности, но реализуется оно в различных социально-педагогических условиях, которые не всегда возможно изменить и в которых мастерство и творчество порой оказываются вынужденными. Творчество вовсе не высшая форма деятельности, доступная избранным, немногим, – это необходимый элемент выживания, присущий всем в разной степени и в разном качестве. Существуют качественно различные виды педагогического мастерства, и важно, что не только педагогическая технология может быть элементом мастерства педагога, но и педагог – элементом педагогической технологии.

Однако основная масса преподавателей в силу прежней, функциональной, ориентации в технологии видит не средство педагогической деятельности, но

самую деятельность и стремится быть не пользователями, а функционерами, квалифицированными исполнителями.

В.П. Беспалько [6] задавался вопросом: кому же сегодня заняться созданием гарантирующих заданный результат педагогических систем и предложением (внедрением) их для использования в школе? Его ответ: конечно же, не самой школе и не учителю. Этим делом должна заниматься вся совокупность научных и методических учреждений. Их основной продукцией должны быть детально разработанные педагогические технологии для самых различных потребностей школьной практики (дидактических задач) с учетом вариативных способов их решения (технологии обучения и воспитания). Л.Г. Семушина и Н.Г. Ярошенко [48] полагают, что выбор или разработка технологии преподавания конкретного курса осуществляются преподавателем на основе его личных убеждений в соответствии с его индивидуальным стилем педагогической деятельности. Однако технологии обучения как некие дидактические системы, включающие преимущественно те или иные формы, методы и средства, могут выступать и как самостоятельные педагогические категории, связанные с реализацией тех или иных приоритетных целей образования. Разработка технологии обучения преподавателем – это творческий процесс, состоящий в анализе целей, возможностей и выборе форм, методов и средств обучения, обеспечивающих реализацию целей и возможностей. Это и выбор личных предпочтений преподавателя.

Г.К. Селевко [47] к критериям выбора и одновременно принципам проектирования новых технологий относит:

- *инновационную направленность* (развитие школы есть инновационный процесс);
- *принцип современности новой технологии* (*адекватность* поставленным в проекте целям и задачам; соответствие государственным документам о развитии школы – государственный заказ; соответствие потребностям страны, региона, города – социальный заказ школе; соответствие интересам детей и родителей образовательного учреждения; использование успехов и достижений современной науки о человеке; опора на передовой педагогический опыт);
- *принцип оптимальности* (целесообразности) – соответствие методов особенностям содержания обучения; учет психологических возможностей детей; учет уровня образовательной и воспитательной подготовленности детей; учет особенностей групп и коллективов детей и педагогов; адекватность конкретным внешним условиям (социальным, производственным, географическим и др.);



– *принцип системности и комплексности* – практически каждая инновационная система является политехнологией, поэтому должны быть предусмотрены системная *совместимость* новой технологии с имеющимся педагогическим процессом; достаточная *управляемость* технологии, наличие диагностического инструментария для ее обеспечения; применение *разнообразия технологий*, которыми располагает современная педагогика; *целостность* методической системы.

*Результативность (эффективность)* предполагает оценку эффективности новой технологии в сравнении с имеющимися результатами; данные о *воспроизводимости* (опыте применения) новой технологии в других однотипных условиях.

*Разработанность, подготовленность механизма освоения (включения, использования) новой технологии* требует наличия системы *диагностики*, позволяющей учителю содержательно интерпретировать результаты; разработанности системы *профилактики* затруднений и рациональной коррекционной работы с учащимися; наличия технологически выверенной *динамики развития* общепедагогических умений; наличия *кадров*, способных реализовать спроектированную технологию.

*Принцип реализма проекта* Г.К. Селевко трактует как *ориентацию на реальные* потребности, интересы и возможности коллектива педагогов и воспитанников: *мотивационное обеспечение* реализации проекта предполагает ориентацию на положительное, заинтересованное отношение участников педагогического процесса к осуществляемому проекту и требует *соответствия* научной концепции новой технологии реалиям и возможностям школы. *Принцип человеческих приоритетов* ориентирует технологию на возможности человека – участника инновационных подсистем, процессов или ситуаций. *Принцип творческого саморазвития* при проектировании технологий означает создание их гибких (вариативных) и динамичных моделей, способных в ходе реализации к изменению, усовершенствованию и развитию.

Путь становления новой педагогической технологии обычно такой: потребности общества → фундаментальные исследования в области психологии → прикладные психолого-педагогические исследования → разработка новых технологий → отражение их в учебно-программной и учебно-методической документации.

Процесс *конструирования педагогической технологии* описывается дидактикой следующим образом:

- выбор и обоснование основной идеи (философии) педагогической технологии: разработка целевой концепции технологии и иерархическая систематизация учебных целей;
- проектирование собственно содержания обучения, методов и форм обучения;
- конструирование системы средств реализации технологии в учебном процессе;
- разработка системы контроля и оценки учебных достижений учащихся.

Разрабатывая технологический подход к усвоению школьниками основных дидактических единиц, Т.А. Иванова и ее соавторы [24] придерживались именно этих этапов конструирования педагогической технологии.

Педагогическая практика показывает, что при проектировании и конструировании технологии обучения наиболее целесообразным является следующий *алгоритм действий преподавателя* [12]:

- определение диагностических целей обучения, описание в измеримых параметрах ожидаемого результата;
- обоснование содержания обучения;
- выявление структуры учебного материала (системы смысловых связей между его элементами);
- определение требуемых уровней усвоения изучаемого материала и исходных уровней обученности учащихся;
- разработка процессуальной стороны обучения: представление содержания, подлежащего усвоению обучающимися в виде системы познавательных и практических задач;
- поиск специальных дидактических процедур усвоения содержания, выбор организационных форм, методов, средств индивидуальной и коллективной учебной деятельности;
- выявление логики организации педагогического взаимодействия с обучающимися на уровне субъект-субъектных отношений с целью переноса осваиваемого содержания обучения на новые сферы деятельности;
- выбор процедур контроля и оценки качества усвоения программы, а также способов индивидуальной коррекции учебной деятельности.

М.Я. Виленский и его соавторы [12] оговаривают, что объем указанной выше работы не всегда под силу одному педагогу, даже обладающему хорошей теоретической подготовкой и имеющему большую педагогическую прак-

тику. Как правило, это коллективный труд группы преподавателей, ведущих учебную дисциплину.

Первым и наиболее ответственным этапом проектирования и конструирования технологии обучения, от которого зависит результативность всего дидактического процесса, является *этап целеполагания*. Он заключается в определении педагогом целей обучения. Под результативностью в данном случае понимается степень достижения обучающимися этих целей, трансформированных в систему умений и навыков, которые должны быть сформированы у обучающихся.

Целеполагание всегда рассматривалось как важнейшая категориальная характеристика дидактического процесса. Исследованию этой проблемы уделяли особое внимание такие ученые-педагоги, как Ю.К. Бабанский, В.П. Беспалько, Т.А. Ильина, В.В. Краевский, В.А. Сластенин и другие. Однако, как показывает анализ, степень научной разработки данной проблемы и ее современное состояние могут быть в общем и целом квалифицированы как сложные и противоречивые. Это объясняется прежде всего значительным разнообразием существующих сейчас подходов. В наибольшей степени предпочтительным является деятельностный подход к определению целей обучения.

Постановка цели включает в себя элемент планирования, предвидения способов выполнения действий. Цель – это проект действия, определяющий характер и системную упорядоченность различных актов и операций. Цель выступает как способ интеграции различных действий человека в некоторую последовательность или систему.

Сформулируем основные требования, предъявляемые к целям обучения. Цели обучения должны быть жизненно необходимыми, реально достижимыми, точными, проверяемыми, систематизированными и полными без избыточности.

*Диагностируемость постановки* означает, что дано настолько точное описание формулируемого качества, что его можно безошибочно выделить среди любых других качеств; имеется способ, «инструмент», критерий для однозначного выделения диагностируемого качества, существует шкала его оценки, опирающаяся на результаты измерения.

*Жизненная необходимость* означает, что цели не придумываются и не задаются, а требуются, заказываются. Выпускник должен быть готов действовать, решать задачи, а не только пересказывать содержание учебных текстов.

*Реальная достижимость* целей связана с условиями обучения, материальной базой учебного заведения. Если по какой-либо причине условия неудовлетворительные, то цели придется снижать до реальных.

*Точность определения целей* необходима для разработки содержания, методов, средств и форм обучения, а также для контроля результатов. Поэтому цели не только называются, но и характеризуются различными параметрами (правильностью, временем решения задач, возможностью пользоваться справочником и др.).

*Проверяемость* означает, что формулировки целей должны быть конкретными: что уметь, на каком уровне и т.п.

*Систематизированность и полнота без избыточности* связаны с целостностью учебного предмета (не набор разрозненных целей, а система), его определенным местом в учебном плане.

Опираясь на указанные требования, обоснуем существующие подходы к формированию педагогом соответствующего *дерева целей*. Под деревом целей следует понимать таблицу, в шапке которой указаны общие дидактические цели, иерархически детализируемые на более низких уровнях для решения частных задач обучения.

Согласно данному подходу М.Я. Виленский с соавторами [12] классифицируют дидактические цели как системные, предметные, модульные и цели конкретного занятия.

*Системный уровень* является по существу вершиной «дерева целей» и отражает основные требования к выпускнику в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами, так как цели подготовки имеют явно выраженный общий социальный характер. Целевая установка в данном случае носит весьма обобщенный и неконкретный вид, что требует от педагога серьезной работы по ее детализации в соответствии с целями и задачами обучения.

Следующим уровнем целеполагания является *предметный*. Он предполагает формулирование дидактических целей для изучения конкретного предмета. Цели, задаваемые педагогом на этом уровне, имеют существенный недостаток, который заключается в том, что они не могут быть использованы для проведения конкретных учебных занятий, так как их формулировки также носят слишком общий характер. Разрешение этого противоречия возможно на более низком уровне детализации целей обучения – *модульном*.

Модулем предметного обучения принято считать тему (раздел) учебной дисциплины, вписывающуюся в общую структуру учебного плана конкретного образовательного учреждения. Близким к понятию модуля является выбор не столько темы (разбиение программы на темы носит чисто условный характер), сколько содержательной линии обучения. В этом случае учебный модуль – не только раздел учебной программы, но и выбранная дидактическая система, основное место в которой занимает взаимодействие различных приемов и способов учебной деятельности, обеспечивающих вхождение этого модуля в целостную систему предметного и общего обучения.

При таком подходе создание модуля становится одной из важнейших задач педагога, особенно если он выступает в роли автора учебной программы. Основная роль преподавателя, работающего в условиях, когда выбор дидактической системы (учебного плана, программы и т.п.) уже сделан, состоит, с одной стороны, в развитии и применении технологии обучения, необходимой для реализации учебного модуля, а с другой – в переводе целеполагания на уровень конкретного занятия.

Объединение тем в модуль определяется общностью целей и задач, реализуемых педагогом в учебном процессе.

Не менее важное значение для педагога имеет *задание цели обучения применительно к смысловой части учебной дисциплины, охватывающей содержание темы*. Дело в том, что именно тема является наиболее важной смысловой частью практически любого предмета, овладение которой позволяет получить требуемые знания, приобрести необходимые навыки и умения, выработать значимые качества личности обучающегося.

В соответствии с деятельностной концепцией обучения цель (или цели) изучения темы, как правило, формулируется в умениях выполнять действия на требуемом уровне их усвоения. Это нацеливает педагога и обучающегося на конкретное овладение изучаемым материалом с требуемым качеством, а также позволяет диагностировать степень достижения целей учащимися.

Следующим не менее важным требованием к описанию целей темы выступает диагностируемость. Повышение эффективности учебной деятельности требует знания ее исходного уровня. Определение уровня – это измерение. Проведение любых измерений в педагогике должно основываться на выработке системы объективных педагогических критериев и применении к ним специального аппарата оценки. Если при его разработке цели не заданы диагностично, невозможно определить и точно оценить качество подготовки обуча-

ющихся, так как изменения качества могут быть выявлены и измерены только в сопоставлении с целью. До тех пор, пока все дидактические задачи не будут в явной форме и полностью сформулированы, не удастся организовать осознанного и осмысленного процесса их решения.

В.П. Беспалько [6] считает, что цель задана диагностично, если:

- определение и его признаки настолько точно описаны, что понятие всегда адекватно соотносится с его объективным проявлением (с тем, что оно обозначает);
- проявления и факторы, обозначаемые понятием, обладают категорией меры, т.е. их величина поддается прямому или косвенному измерению;
- результаты измерений могут быть соотнесены с определенной шкалой оценки. Следовательно, для диагностичной (Д) постановки любой цели требуется, чтобы она была точно описана (О), поддавалась измерению (Из) и чтобы существовала шкала ее оценки (Оц). Отсюда получается формула диагностичности:  $Д = О + Из + Оц$ . Невозможность выполнить хотя бы одну операцию из формулы диагностичности делает цель недиагностичной.

В качестве рекомендаций учителю для формулирования диагностичных целей обучения можно предложить использование глаголов в неопределенной форме: *воспроизвести, выбрать, выделить, выразить, высказать, вычислить, записать, интерпретировать, использовать, назвать, объяснить, обобщить, обозначить, опознать, оценить, перевести, пересказать, перечислить, преобразовать, подсчитать, применить, проанализировать, рассчитать, систематизировать, составить, сформулировать, упростить, уточнить, установить* и т.п. Они помогут характеризовать внешне наблюдаемые действия обучающихся, ведущие к определению легко опознаваемого результата.

Важно, чтобы формулировки таких целей не были неточными, образными, неконкретными. Например, цели занятия могут быть сформулированы следующим образом: *в ходе занятия научить школьников формулировать собственное мнение по данной проблеме, решать определенный класс математических или физических задач, использовать математический аппарат, систематизировать представленные сведения, объяснять суть происходящего, обобщать, анализировать, оценивать* и т.д.

Максимальная конкретизация (детализация) педагогом целей работы обучающихся позволяет описать результат их познавательной деятельности настолько подробно, что это позволит выбрать способ контроля (оценки) как текущего, так и итогового.

Постановка цели изучения темы завершается определением требуемого уровня ее усвоения, т.е. умения выполнять сложное действие (деятельность) с определенной степенью самостоятельности.

Процесс обучения как любой вид человеческой деятельности характеризуется определенным соотношением категорий: цель – средство – результат. Цель может стать силой, изменяющей действительность только во взаимодействии с соответствующими средствами, необходимыми для ее практической реализации.

Вопрос о выборе или создании технологии тесно связан с вопросом оценки эффективности технологии. Критерии эффективности педагогических технологий Г.К. Селевко [45] отождествляет с требованиями (признаками) педагогической технологии:

- системность технологии (наличие структуры, взаимосвязи и взаимозависимости ее элементов);
- целенаправленность (задачность) технологии – ее нацеленность при всех имеющихся условиях на конечный результат;
- процессуальность (подвижность форм и методов обучения, вариативность приемов и способов деятельности педагога и обучающихся);
- детерминированность (обусловленность той или иной модели обучения окружающей средой, содержанием образования, педагогической культурой и профессиональным мастерством учителя, развитием методического обеспечения);
- дидактичность технологии (ее образовательная направленность);
- научность (опора на научно обоснованные принципы и закономерности дидактики и психологии);
- критериальность (возможность определить продуктивность избранного алгоритма педагогического процесса);
- повторяемость и воспроизводимость результатов.

Вместе с тем критерии эффективности мы связываем с достижением ее целей и считаем наиболее значимыми следующие критерии оценки эффективности технологии:

- «приращение» у обучающихся знаний, умений, навыков или улучшение ранее приобретенных, причем это приращение или улучшение заметно чувствуют и учитель и ученики;

- овладение учениками умственными операциями, формами и правилами мышления, приобретение навыков культуры труда, обогащение эмоциональной сферы, формирование идей, интересов, стремлений;
- единство образовательных и воспитательных задач, обучение ведет за собой развитие познавательных способностей обучающихся и их нравственных качеств;
- максимально продуктивное использование учебного времени, что ведет к экономии времени;
- перенос центра тяжести с домашней работы на работу в школе, сокращение тем самым времени на выполнение домашних заданий.

По М.А. Чошанову [61], критерий *трудоемкости реализации* технологий включает учет энергозатрат педагогического труда преподавателя, его методических вкусов и возможностей. Это обусловлено в какой-то мере разнообразием технологий. Одни технологии требуют большой подготовительной работы (разработка дидактических материалов, составления текстов контрольных и самостоятельных работ), что облегчает непосредственное проведение учебного занятия и ограничивает деятельность преподавателя осуществлением консультативно-корректирующих функций. К таким технологиям относятся информационные технологии, при реализации которых подавляющую часть учебного времени учащиеся заняты диалогом с компьютером. Функция преподавателя в этом случае заключается в подготовке соответствующих программных средств, консультировании и коррекции познавательной деятельности учащихся. При реализации других технологий (например, диалогового характера) преподаватель все время находится во взаимодействии с учащимися, организуя беседы, дискуссии и т.д., что требует выполнения более сложных по трудоемкости педагогических функций непосредственно в учебном процессе, нежели коррекция и консультация. Кроме того, у преподавателей разные особенности, определяющие специфику методической деятельности. У кого-то хорошо развиты коммуникативные способности, богатая и образная речь – в этом случае предпочтительнее выбор диалоговых технологий, а также технологий, в которых велик удельный вес игровых методов. Если преобладает склонность к наглядному обучению, наиболее развиты изобразительные способности – лучше остановить выбор на технологиях визуализации обучения. Естественно, что могут быть сочетания способностей и соответствующая интеграция технологий.

Следующий критерий – критерий *индивидуализации* – связан с оптимальным сочетанием индивидуальных, парных, групповых, коллективных форм ор-



ганизации обучения. Известно, что некоторые технологии (назовем их образно «репетиторскими») наиболее результативны при обучении в малых группах или индивидуально. Другие же технологии, направленные, например, на развитие коммуникативных способностей, эффективны только в условиях коллективных форм организации обучения.

Критерий *времени* предполагает учет временных затрат для достижения планируемых результатов обучения. Соответственно технологии могут быть интенсивными, обычными и экстенсивными. Если необходимо обеспечить «форсированную» краткосрочную подготовку обучаемых, то естественно выбрать интенсивную технологию, но учитывая при этом ее трудоемкость. В условиях, когда временные рамки не столь жестки, можно использовать обычные технологии. Вместе с тем имеются экстенсивные технологии, сторонники которых считают наличие достаточно большого количества времени важным фактором успешного, результативного обучения. Это свидетельствует о том, что учет временного критерия является необходимым условием выбора технологии обучения.

Критерий *технической оснащенности* непосредственным образом связан с материально-технической базой педагогической технологии. Естественно, что реализация компьютерной технологии возможна лишь при наличии соответствующим образом оснащенных аудиторий; аналогично обстоит дело и с любой другой технологией. Образно говоря, нельзя выбирать телекоммуникационную технологию обучения, имея в распоряжении только «доску и мел».

### ***Задание для самоконтроля***

#### ***Тест «Проверь себя»***

1. Законосообразная педагогическая деятельность, реализующая научно обоснованный проект дидактического процесса и обладающая высокой степенью эффективности, надежности, гарантированности результата, – это...

- 1) подход,
- 2) методика,
- 3) технология,
- 4) метод.

2. При проектировании технологии обучения задают определенную «технологическую жесткость»...

- 1) критерии эффективности педагогической технологии,
- 2) принципы построения и реализации педагогической технологии,

- 3) этапы построения педагогической технологии,
- 4) контроль качества усвоения.

3. Укажите несколько вариантов ответа. Реализация педагогической технологии сопровождается соблюдением таких принципов, как:

- 1) доверие профессионализму преподавателя,
- 2) системность,
- 3) связь обучения с жизнью,
- 4) гарантированная подготовка учащегося на любом этапе учебного процесса,
- 5) оптимально сбалансированное использование резервов традиционной школы,
- 6) последовательность.

4. Укажите, на каком из уровней описания педагогической технологии определяется ее содержание:

- 1) концептуальном,
- 2) процедурном,
- 3) предметном,
- 4) материализации технологии.

5. На этом этапе разработки технологии обучения преподаватель, должен ответить на вопросы: «Чему учить? Как учить? Какие средства использовать для обучения?»:

- 1) этап теоретического обоснования,
- 2) этап технологических процедур,
- 3) этап разработки методического инструментария,
- 4) этап замера результатов реализации технологического замысла.

6. Согласно классификации Г.К. Селевко, по типу организации и управления познавательной деятельности студентов выделяют (возможно несколько вариантов ответа):

- 1) технологию проблемного обучения,
- 2) технологию программированного обучения,
- 3) технологию модульного обучения,
- 4) технологию диалога культур.

7. Какой из перечисленных ниже критериев выполняет функцию оценки процедур технологии, обеспечивающих надежность достижения результата:

- 1) расчленение,
- 2) алгоритмичность,
- 3) технологическая последовательность,
- 4) интегральный.

8. Укажите недостающий элемент предметной логики проектирования технологии: разработка теоретического основания технологии; выработка технологических процедур; разработка методик измерения реализации замысла технологии:

- 1) культура освоения технологии,
- 2) разработка методического инструментария,
- 3) экспериментальная проверка технологии,
- 4) оценка эффективности технологии.

9. Укажите пропущенный уровень описания будущей технологии обучения: концептуальный, процедурный, материализации технологии:

- 1) методический,
- 2) проектировочный,
- 3) предметный,
- 4) прогностический.

10. Отметьте, что является начальной фазой построения технологии:

- 1) выработка концептуальных основ,
- 2) постановка целей,
- 3) описание педагогического процесса,
- 4) контроль.

11. Какой уровень употребления понятия «технология» имеют в виду, когда отождествляют понятия «технология» и «методика»? Выберите правильный ответ:

- 1) общепедагогический,
- 2) частнометодический,
- 3) дидактический,
- 4) локальный.

12. Отметьте, какой из перечисленных ниже критериев оценки эффективности технологии называют «критерий идентификации»:

- 1) диагностичности описания целей,
- 2) детерминированности системы средств,
- 3) системности педагогических средств,
- 4) исчерпывающей оптимальности,
- 5) однозначности интерпретации результатов.

13. Выберите соответствующее термину определение. Образовательная технология – это:

1) совокупность форм и методов обучения учебному предмету, создающая подходящие операционные формы для технологической ориентации учебного процесса;

2) законосообразная педагогическая деятельность, реализующая научно обоснованный проект дидактического процесса и обладающая более высокой степенью эффективности, надежности и гарантированности результата, чем это имеет место при традиционных методиках обучения;

3) поэтапная реализация того или иного метода или принципа с помощью определенных форм работы;

4) совокупность технологических процедур для реализации образовательного процесса.

14. Из приведенного ниже перечня выберите критерии технологичности:

- 1) концептуальность,
- 2) доступность,
- 3) управляемость,
- 4) воспроизводимость.

15. Выберите соответствующее термину определение. Педагогическая технология – это:

1) систематический метод планирования, применения, оценивания всего процесса обучения и усвоения знаний путем учета человеческих и технологических ресурсов и взаимодействия между ними для достижения наиболее эффективной формы образования;

2) процесс проектирования и реализации на практике целостной дидактической системы;

3) вариант описания модели образовательного процесса, в котором акцент может быть сделан на дисциплинарном образе определенной отрасли знаний, организационной структуре учебного процесса, характеристике деятельности субъектов образовательного процесса или характере их взаимодействия;

4) систематическое и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного учебно-воспитательного процесса.

16. Установите правильную последовательность действий педагога в описании своей технологии:

1) выявление структуры учебного материала, его информационной емкости, а также системы смысловых связей между его элементами;

2) разработка процессуальной стороны обучения: представление профессионального опыта, подлежащего усвоению обучающимися в виде системы познавательных и практических задач;

3) определение требуемых уровней усвоения изучаемого материала и исходных уровней обученности студентов;

4) обоснование содержания обучения в контексте будущей профессиональной деятельности специалиста;

5) поиск специальных дидактических процедур усвоения этого опыта, выбор организационных форм, методов, средств индивидуальной и коллективной учебной деятельности;

6) определение диагностических целей обучения, описание в измеримых параметрах ожидаемого результата;

7) выбор процедур контроля и оценки качества усвоения программы, а также способов индивидуальной коррекции учебной деятельности;

8) выявление логики организации педагогического взаимодействия с обучающимися на уровне субъект-субъектных отношений с целью переноса осваиваемого опыта на новые сферы деятельности.

17. Совокупность общей культуры и профессиональных знаний и умений по всем направлениям педагогической деятельности составляет педагогическую...

- 1) технологию,
- 2) задачу,
- 3) культуру,
- 4) деятельность.

18. Технологическая карта – это:

- 1) условное изображение технологии процесса;
- 2) описание процесса в виде пошаговой, поэтапной последовательности действий;
- 3) таблица, представляющая содержание учебного занятия;
- 4) педагогическая система действий.

19. Основными качествами педагогической технологии являются (возможно несколько ответов):

- 1) системность,
- 2) концептуальность,
- 3) управляемость,
- 4) стабильность.

20. Процесс совершенствования педагогических технологий предполагает частое изменение (возможно несколько ответов):

- 1) содержания образования,
- 2) процессуальных аспектов обучения,
- 3) методов и форм образовательного процесса,
- 4) целей образования.

21. В структуру педагогической технологии входят:

- 1) содержательная часть,
- 2) концептуальная часть,
- 3) процессуальная часть,
- 4) материальная часть.

22. Возможность диагностического целеполагания, планирования, проектирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средств и методов с целью коррекции результатов – это...:

- 1) эффективность педагогической технологии,
- 2) воспроизводимость педагогической технологии,
- 3) управляемость педагогической технологии,
- 4) концептуальность педагогической технологии.

23. Одной из центральных составляющих в проектировании технологии обучения выступает формулирование целей обучения. Поэтому разработчику важно знать требования, предъявляемые к целям обучения. Допишите недостающие:

- 1) жизненная необходимость,
- 2) \_\_\_\_\_,
- 3) точность определения целей,
- 4) \_\_\_\_\_,
- 5) систематизированность и полнота без избыточности.

Ответы к тесту

№ вопроса	16	17	18	19	20	21	22	23
Ответ	6, 4, 1, 3, 2, 5, 8, 7	3	2	1, 2, 3	2, 3	1, 2, 3	3	2, 3

№ вопроса	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	3	1	1, 4, 5	3	3	1, 2	2	2	3	2	2	2	1	2	1, 3, 4

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Опишите этапы эволюции понятия «педагогическая технология».
2. Какие признаки характеризуют технологический подход к обучению?
3. Раскройте структурные компоненты технологии обучения.
4. Перечислите критерии оценки эффективности педагогической технологии.
5. Перечислите отличия технологии и методики обучения.
6. Опишите особенности интерактивных технологий.
7. Опишите структуру анализа педагогической технологии.
8. Перечислите как можно больше оснований классификации педагогических технологий по Г.К. Селевко.
9. Как можно представить процесс проектирования педагогической технологии в общем виде?

## ГЛАВА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

### 2.1. ТЕХНОЛОГИЯ МОДУЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Г.Ю. Ксензова [27] пишет, что модульное обучение возникло как альтернатива традиционному обучению, интегрируя в себе все то прогрессивное, что накоплено в педагогической теории и практике нашего времени. Наиболее полно основы модульного обучения разработаны и изложены в монографии П.Ю. Цявичене [58].

Сущность модульного обучения состоит в том, что ученик полностью самостоятельно (или с определенной помощью) достигает конкретных целей обучения в процессе работы с модулем.

*Модуль* – это целевая функциональная часть предмета, в которой объединены учебное содержание и технология овладения им. Содержание обучения представляется в законченных самостоятельных комплексах (информационных блоках), усвоение которых осуществляется в соответствии с целью. Дидактическая цель формулируется для обучаемого и содержит в себе не только указание на объем знания, но и на уровень его усвоения. Модули позволяют перевести обучение на субъект-субъектную основу, индивидуализировать работу с отдельными учащимися, дозировать индивидуальную помощь, изменить формы общения учителя и ученика.

Педагог разрабатывает программу, которая состоит из комплекса модулей и последовательно усложняющихся дидактических задач, обеспечивая при этом входной и промежуточный контроль, позволяющий ученику вместе с учителем осуществлять управление обучением.

В основе построения модульных программ лежат *принципы*:

- целевого назначения (каждый модуль направлен на достижение определенной цели);
- сочетания комплексных интегрирующих и частных дидактических целей (совокупность достижения частных дидактических целей обеспечивает достижение комплексной дидактической цели);



– реализации обратной связи (предполагает управление процессом обучения на основе контроля, анализа и коррекции);

– гибкости (как стержневая характеристика технологии модульного обучения означает способность оперативно реагировать и мобильно адаптироваться к изменяющимся условиям, изменяя структурный, содержательный и технологический аспекты учебного процесса).

Проектирование технологии модульного обучения позволяет воплотить в реальной образовательной практике идеи личностно-деятельностного, индивидуально-ориентированного, рефлексивного подходов к профессиональному образованию, которые в свою очередь способствуют воспитанию компетентного специалиста.

Концепция модульного обучения разработана американским исследователем Дж. Расселом, который определяет модуль как учебный пакет, охватывающий концептуальную единицу учебного материала и предписывающий обучающемуся действия. Обучаемый, выполняя их в индивидуальном темпе, полностью овладевает учебным материалом.

Отличительными чертами модульного обучения являются:

– четкая структуризация содержания обучения, которое представлено в законченных самостоятельных комплексах (информационных блоках);

– вариативность обучения, адаптация процесса обучения к индивидуальным возможностям и запросам обучающихся;

– самостоятельная работа обучающегося;

– изменение формы общения преподавателя и студента, которое становится паритетным.

В сжатом виде структура модуля может быть представлена следующими блоками:

– теоретический блок – лекция, на которой обучающиеся знакомятся с целью и планом всего учебного блока дисциплины;

– практический блок – самостоятельная работа над учебным материалом, ответы на вопросы;

– методический блок – использование изученного материала в учебной и внеучебной работе;

– контрольный блок – этап проверки, контроля освоенных студентом знаний, умений, навыков.

М.А. Чошанов [61] представляет модуль как учебный элемент в форме «стандартизированного буклета», состоящего из следующих компонентов:

- точно сформулированная цель;
- список необходимого оборудования, материалов, инструментов;
- список смежных учебных дисциплин;
- собственно учебный материал в виде краткого конкретного текста, сопровождаемого подробными иллюстрациями;
- практические занятия для отработки необходимых навыков, относящихся к данному учебному элементу;
- контрольная проверочная работа, которая строго соответствует целям, поставленным в данном учебном элементе.

Учебный материал делится на модули в соответствии со следующими критериями.

По *степени обязательности* обучения выделяют:

- блок обязательных для всех студентов всех вузов дисциплин;
- блок обязательных для всех специальностей данного направления дисциплин;
- блок обязательных для данной специальности дисциплин;
- блок дисциплин по выбору факультета, кафедры;
- блок дисциплин по выбору студента в зависимости от специализации.

По *глубине изучения материала* в соответствии с практикой зарубежных учебных заведений материал делится на вводные курсы, продвинутые курсы и углубленные курсы.

По *методу* можно выделить теоретические дисциплины, исторические дисциплины и методологические дисциплины, которые, в свою очередь, делятся на дисциплины с аналитическим методом обучения, дисциплины с опытно-исследовательским методом обучения и дисциплины с методикой работы в лабораториях и в полевых условиях.

Разработка модульной программы начинается с разработки комплексной дидактической цели и совокупности модулей, обеспечивающих достижение этой цели.

Для этого необходимо:

- выделить основные методологические, теоретические идеи курса;
- структурировать учебное содержание вокруг этих идей в определенные блоки;
- сформировать комплексную дидактическую цель;

– из комплексной дидактической цели выделить интегрирующие дидактические цели и соответственно сформировать модули (каждый модуль имеет свою интегрирующую дидактическую цель);

– интегрирующую дидактическую цель разделить на частные дидактические цели и на их основе выделить учебные элементы. Каждой частной дидактической цели соответствует один учебный элемент.

М.А. Чошанов [61] включает в технологию проблемно-модульного проектирования содержания обучения математике следующие основные этапы.

1. Компонировку курса математики вокруг фундаментальных математических методов познавательной деятельности. К ним относятся: метод приближенных вычислений, метод координат, векторный метод, дифференцирование, интегрирование, методы оптимизации, статистические и вероятностные методы. На базе этих основных методов могут быть введены более сложные методы: методы комплексного анализа, методы тензорного анализа и т.д., в зависимости от потребности решения профессионально-прикладных проблем.

2. Определение ядра базового содержания проблемных модулей. Существенным условием отбора этого инварианта является акцент на принципиальном содержании математического метода познавательной деятельности, обладающем широким общекультурным и прикладным потенциалом.

3. Выделение профессионально-прикладных укрупненных проблем с учетом специфики различных групп профессий, разрешение которых требует применения математического аппарата, адекватного поставленной проблеме.

4. Отбор содержания и определение объема вариативных модулей, выраженных конкретными математическими методами познавательной деятельности и направленными на решение укрупненных проблем. Выбор методов основан на следующих позициях. М.А. Чошанов придерживается идеи единого курса математики в средней профессиональной школе, в котором возможно органическое сочетание геометрии, алгебры и начал анализа. Так, координатный метод может включать изучение действительных чисел и их свойств на числовой оси (координатной прямой), функций и их графиков на координатной плоскости, взаимного расположения прямой и плоскости в координатном пространстве. Таким образом, математический метод познавательной деятельности выполняет функцию интеграции различных разделов школьной математики. Каждый метод имеет свою структуру: основание, ядро и приложения. Основание метода составляют опорные понятия и способы.

В качестве примера реализации модульной технологии рассмотрим разработанную М.А. Чошановым [61] проблемно-модульную программу.

К планируемым результатам изучения модуля «Производная» М.А. Чошанов относит:

– компоненты мобильности знания: умение составлять фреймы генерализации, проблемные фреймы, фреймы решения по методам дифференцирования; владение приложениями методов дифференцирования: к приближенным вычислениям; к решению физических задач (определение работы, массы тонкого стержня, электрического заряда, количества теплоты, давления и т.д.);

– компоненты гибкости методов: владение общим методом нахождения производной; владение методом применения дифференциала в приближенных вычислениях; владение методом исследования функций на экстремум; владение методом отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке; владение общим методом исследования функции и построения ее графика;

– компоненты критического мышления: знание истории решения аэродинамической проблемы Ньютона; знание типичных ошибок при использовании методов дифференцирования; владение способами их исправления.

### **Блок актуализации**

Перед началом изучения модуля «Производная» учащимся предлагается проверить свои знания и умения по следующим вопросам:

1. Имеете ли вы представление о понятии предела функции?
2. Можете ли вы отличить непрерывную функцию от разрывной?
3. Понимаете ли вы смысл монотонной функции?
4. Различаете ли вы промежутки возрастания и убывания функции?
5. Способны ли вы объяснить смысл композиции функций?
6. Знаете ли вы определение тангенса угла?
7. Можете ли вы составить уравнение прямой на плоскости?
8. Способны ли вы провести касательную к графику данной функции и показать на графике угловой коэффициент касательной?
9. Можете ли вы объяснить разницу между средней и мгновенной скоростью?
10. Знаете ли вы основные свойства степени и логарифма?
11. Владете ли вы основными тригонометрическими формулами?

В случае необходимости учащиеся могут повторить материал блока актуализации данного проблемного модуля (рис. 1).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Значение  $f(x_0) = y_0$  называется **пределом функции  $f(x)$**  при  $x$  стремящемся к  $x_0$

В точке  $x_0$  функция  $f(x)$  **непрерывна**  
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

В точке  $x_1$  функция  $f(x)$  **разрывна**  
 $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) \neq f(x_1)$

$c$  – касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$   
 $c \cap f(x) = \{A\}$   
 $c: y = kx + b$   
 $k = \operatorname{tg} \alpha$

Некоторые пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

Степени	Логарифмы
<p>Определение степени: <math>a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a</math>  <math>n \in \mathbb{N}</math></p> <p>Свойства степени:  <math>a^1 = a; a^0 = 1, a \neq 0;</math>  <math>a^m \cdot a^n = a^{m+n}</math>  <math>\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}</math>  <math>a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a &gt; 0</math>  <math>(a^m)^n = a^{mn}</math>  <math>(ab)^n = a^n \cdot b^n</math>  <math>\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}</math></p>	<p>Определение логарифма  <math>\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b</math></p> <p>Основное тождество  <math>a^{\log_a b} = b</math></p> <p>Виды логарифмов:                      десятичный <math>\log_{10} b = \operatorname{lg} b,</math>                      натуральный <math>\log_e b = \operatorname{ln} b.</math></p> <p>Свойства логарифма  <math>\log_a a = 1; \log_a 1 = 0</math>  <math>\log_a uv = \log_a u + \log_a v</math>  <math>\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v</math>  <math>\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u</math></p>

Рис. 1. Блок актуализации

## Исторический блок

### Аэродинамическая проблема Ньютона

Дидактическая цель – после изучения этого блока учащиеся должны быть способны понимать и объяснять смысл аэродинамической проблемы Ньютона; уметь воспроизводить общую схему решения проблемы.

Учащимся предлагается проблемный вопрос: какую форму должны иметь тела, испытывающие наименьшее сопротивление при движении? Может быть, каплеобразную...

Почему тогда космические тела на орбите имеют затупленную форму?

Хотя в конце XVII в. не было космических станций, уже тогда Ньютон интересовался проблемой поиска формы тела, испытывающего наименьшее сопротивление в разреженной среде. Это – аэродинамическая проблема, математическая модель которой сводится к решению задачи на максимум и минимум.

На рис. 2 приведен чертеж задачи, исходные данные и искомый угол, который определяет форму тела, а также начало решения проблемы, предложенное Ньютоном.

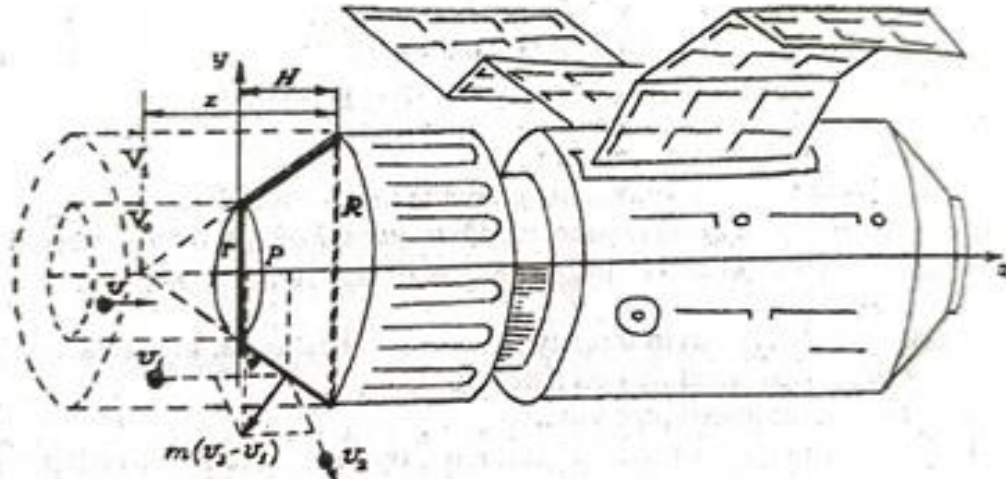
Для окончательного решения этой проблемы необходимо владеть общим методом решения задач на максимум и минимум. Овладеть им можно, изучив данный модуль. В историческом блоке, предназначенном для мотивации изучения производной, решение ограничивается определением функции  $F(z)$ , выражающей силу сопротивления потока частиц.

Забегая вперед, скажем, что, решив проблему с использованием аппарата производной, Ньютон определил искомую форму тела – затупленный конус. Современников Ньютона это решение привело в замешательство и недоумение, его выводы считали нелепыми и абсурдными. Однако спустя триста лет аэродинамическая проблема и ее решение, предложенное Ньютоном, не потеряли актуальности и используются в современной космической науке.

Учащиеся должны:

- понимать смысл аэродинамической проблемы,
- знать общую схему решения проблемы,
- осознать научную смелость Ньютона

Задача: найти форму тела, испытывающего наименьшее сопротивление при движении в разреженной среде



Дано:	Решение:	
$\rho$ – плотность среды $m$ – масса частицы $v$ – скорость частицы	$N_0 = \frac{\rho}{m} V_0 = \frac{\rho}{m} \pi r^2 v$ $N_1 = \frac{\rho}{m} V_1 = \frac{\rho}{m} \pi (R^2 - r^2) v$	[1] – количество частиц, ударившихся «в лоб» [2] – количество частиц, ударившихся в боковую поверхность тела
Найти: $\varphi$		
$p = 2mv \cos^2 \varphi$ – проекция вектора импульса частицы на ось $x$ $F = p(N_0 + N_1)$ – сила сопротивления		
$p = 2mv \cos^2 \varphi \Rightarrow F = 2\rho v^2 (r^2 + (R^2 - r^2) \cos^2 \varphi)$ $\cos \varphi = \frac{R-r}{\sqrt{(R-r)^2 + H^2}} \quad [3]$ $\Rightarrow F = (r^2 + (R^2 - r^2)) \frac{(R-r)^4}{(R-r)^2 + H^2} \quad (k = 2\rho v^2 - const)$ $[4] \quad r = \frac{R(z-H)}{z} \Rightarrow F(z) = \frac{(z-H)^2 + R^2}{z^2 + R^2} \Rightarrow F'(z) = 0 ?$		

Для решения аэродинамической проблемы необходимо определить условие минимизации функции  $F(z)$  (силы сопротивления). В блоке применения решить уравнение  $F'(z) = 0$  и определить конкретное значение  $\varphi$ .

Рис. 2. Аэродинамическая проблема Ньютона

## Проблемный блок

### Уравнение динамики манипулятора

*Дидактическая цель – иметь представление о взаимосвязи методов дифференцирования с уравнениями динамики манипулятора; осознать общую схему решения проблемы определения скорости звеньев робота-манипулятора.*

Методы дифференциального исчисления имеют широкий спектр приложения к решению производственных и практических задач. В частности, с помощью производной решаются многие проблемы робототехники, связанные с определением скорости звеньев робота-манипулятора.

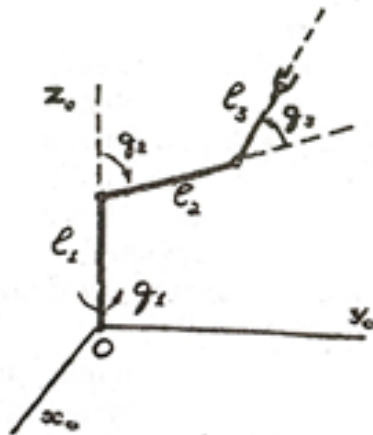
На рис. 3 приведена одна из таких проблем, а именно: найти уравнение динамики манипулятора, характеризующее связь положения, скорости и ускорения его звеньев с управляющей силой и возмущающими силами и моментами.

Общая схема решения этой проблемы опирается на знание основ дифференциального исчисления, а также на углубленные специальные знания по робототехнике (метод дуальных матриц, функция Лагранжа, выражающая разность между кинетической (К) и потенциальной (П) энергией системы). Именно поэтому мы ограничиваемся здесь только постановкой проблемы и общей принципиальной схемой ее решения; более подробное решение вы сможете выполнить на занятиях по специальной технологии или интегративном занятии с участием преподавателей математики и специальной технологии.



Учащиеся должны осознать общую схему решения проблемы определения скорости звеньев манипулятора

Задание: найти уравнение динамика манипулятора, характеризующее связь положения, скорости и ускорения его звеньев с управляющей силой и возмущающими силами и моментами



**Схема решения:**

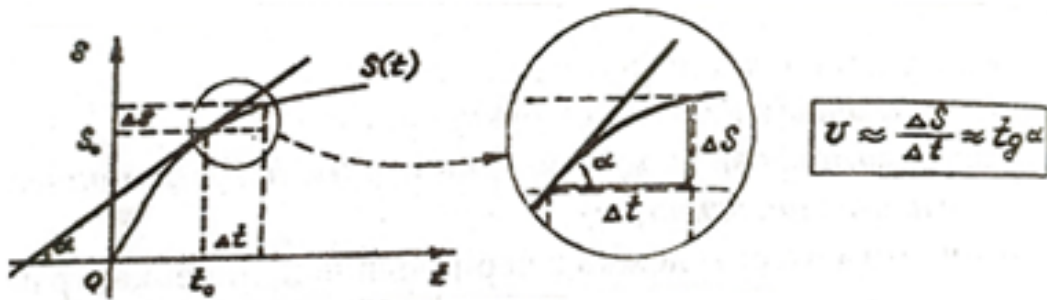
- 1) определение положения и ориентации звеньев с помощью метода матриц;
  - 2) определение скорости звеньев манипулятора;
- $v_i = \frac{d\vec{\eta}}{dt}$   $\vec{\eta}$  – радиус-вектор произвольной точки звена;
- 3)  $L = K - \Pi$  – функция Лагранжа;
  - 4) уравнение динамики.

В блоке стыковки (на интегративном занятии) уравнение динамики выразить через конкретные данные  $(q_i, l_i)$  трехзвенного робота-манипулятора

**Механизм изменения функции**

Учащиеся должны на эмпирическом уровне осознать механизм изменения функции

Какова связь между механическим и геометрическим компонентами изменения функции?



№	$\Delta S$	$\Delta t$	$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$	$\alpha$	$tg \alpha$	$y = tg \alpha$
1						
2						
3						

Рис. 3. Уравнение динамики манипулятора

## **Экспериментальный блок**

### **Механизм изменения функции**

Дидактическая цель – *осознать механизм изменения функции; понять взаимосвязь между механическим и геометрическим компонентами изменения функции.*

Оборудование: тележка с чернильницей, линейка, транспортир. Особенность «тележки с чернильницей» заключается в том, что при движении чернильница оставляет следы-капли через равные промежутки времени.

Проделав несколько (3–5), экспериментов с тележкой, в каждом случае измеряют отрезки пути ( $S$ ) и заносят эти расстояния в таблицу.

По найденным точкам строят график движения тележки. В одной из точек проводят касательную к графику функции и определяют угол наклона и значение тангенса этого угла. Сопоставляя значения скорости тележки в данный момент времени (мгновенная скорость) и значение тангенса угла наклона касательной к графику движения тележки в соответствующей данной точке, можно сделать вывод о соотношении механического и геометрического компонентов изменения функции (см. рис. 3).

Эту работу можно проводить в малых группах (5–7 человек), а затем сравнить полученные результаты и сформулировать общий вывод.

## **Блок обобщения**

### **Древо методов дифференцирования**

Дидактические цели: *получить обобщенное представление о предстоящем объеме и структуре изучения проблемного модуля «Производная»; осознать объем «урожая», который предстоит собрать с древа проблемного модуля «Производная».*

Древо методов дифференцирования уходит корнями в такие фундаментальные понятия математического анализа, как предел и непрерывность функций. Определение производной олицетворяет собой «ствол» дерева. Основные методы дифференцирования, опирающиеся на «ствол», – «плоды дерева». Самые крупные из них – это: общий метод нахождения производной; физический смысл производной; геометрический смысл производной; правила нахождения производной; методы приближенных вычислений; методы исследования функций; методы оптимизации (рис. 4).

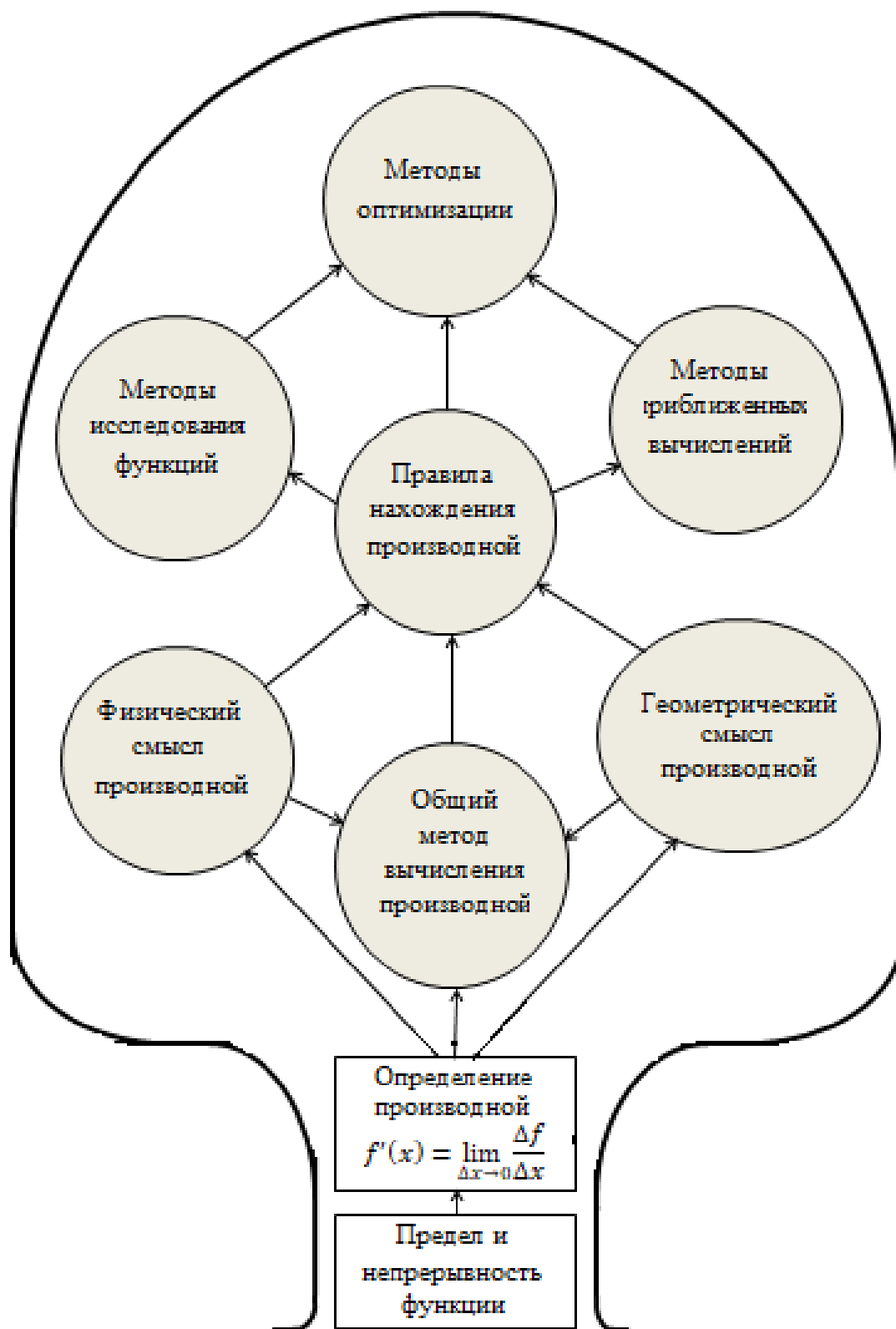


Рис. 4. Древо методов дифференцирования

## Теоретический блок

### Геометрический смысл производной

Дидактические цели: *осознать геометрический смысл производной; усвоить основные этапы решения обобщенной задачи о скорости функции.*

Для понимания геометрического смысла производной очень важно иметь графическое представление о скорости изменения функции в данной точке. С этой целью на учебном элементе приведены график произвольной непрерывной на отрезке  $(x; x + \Delta x)$  функции  $y = f(x)$ , касательная  $c: y = kx + b$  к графику этой функции в точке  $x$  и секущая, проходящая через эту же точку (рис. 5).

Для того чтобы определить мгновенную скорость изменения функции в точке  $x$ , необходимо приращение аргумента устремить к нулю:  $v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$ .

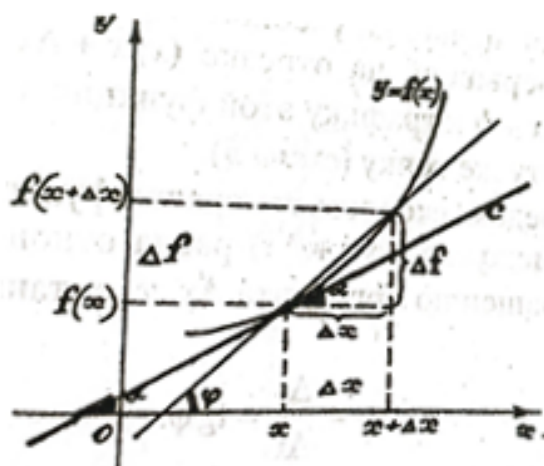
Геометрически это означает вычисление тангенса угла наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x$ :  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$ . Это и есть производная функции  $f(x)$  в данной точке  $x$ . Производная обозначается:  $f'(x)$  и читается [эф] *штрих от икс*.

В нижней части рис. 5 расположена схема решения обобщенной задачи о скорости изменения функции путем сопоставления этапов решения трех прикладных задач: о мгновенной величине тока; о теплоемкости тела; о скорости химической реакции.

### Физический смысл производной

Дидактическая цель – *осознать физический смысл производной.*

Рассмотрим падение твердого тела, например шарика, с некоторой высоты. Пусть в момент времени  $t$  он пройдет расстояние  $S(t)$  от начальной точки падения (рис. 6).



$c: y = kx + b$ , где  $k = tg \alpha$

$k$  – угловой коэффициент

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = tg \alpha \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg \varphi = tg \alpha$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = tg \alpha = k \quad \boxed{f'(x) = k}$$

**Производная – это угловой коэффициент касательной**

Задача о мгновенной величине тока	Задача о теплоемкости тела	Задача о скорости химической реакции	Общая задача о скорости изменения функции
$q(t)$ – количество электричества, $t$ – момент времени	$Q$ – количество тепла, $r$ – температура тела	$M$ – количество вещества, $t$ – момент времени	$f$ – функция, $x$ – аргумент
$\Delta t$ – промежуток времени	$\Delta r$ – изменение температуры	$\Delta t$ – промежуток времени	$\Delta x$ – приращение аргумента
$\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$	$\Delta Q = Q(r + \Delta r) - Q(r)$	$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t)$	$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$
Средняя сила тока $I_{\text{ср}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$	Средняя теплоемкость $C_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta r}$	Средняя скорость химической реакции $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta t}$	Средняя скорость изменения функции $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$
Мгновенная сила тока в момент времени $t$ $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$	Теплоемкость тела при данной температуре $\tau$ $c = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta r}$	Скорость химической реакции в момент времени $t$ $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta t}$	Скорость изменения функции $v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

Рис. 5. Геометрический смысл производной

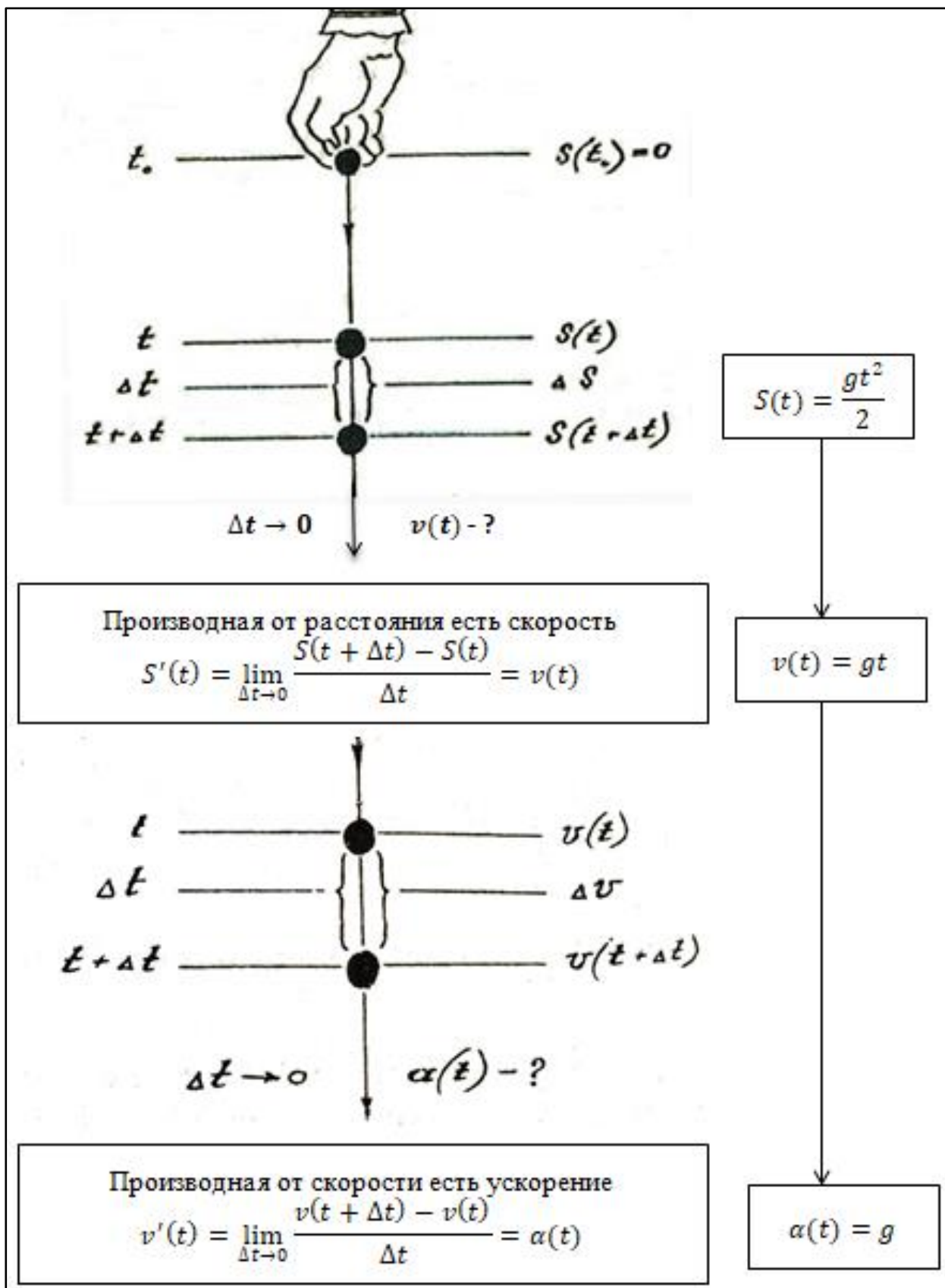


Рис. 6. Физический смысл производной

Очевидно, что средняя скорость изменения функции на любом сколь угодно малом промежутке  $(x; x + \Delta x)$  равна отношению приращения функции  $\Delta f$  к приращению аргумента  $\Delta x$ , т.е. тангенсу угла наклона секущей в точке  $x$ :  $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \text{tg}\varphi$ .

Для того чтобы определить среднюю скорость падения шарика на временном интервале  $\Delta t$ , очевидно, необходимо вычислить путь  $\Delta S$ , который пройдет шарик за этот промежуток времени, и найти отношение  $v_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ .

Как же быть в том случае, если необходимо определить не среднюю скорость на каком-то промежутке времени, а мгновенную скорость в данной точке пути? Именно для решения подобной задачи в математике существует аппарат дифференциального исчисления.

Иными словами, мгновенная скорость в данный момент времени есть предел средней скорости при бесконечном уменьшении промежутка времени, на котором определяется средняя скорость. Это и есть физический смысл производной, который символически записывается так:

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}} = v.$$

Аналогично можно обосновать, что производная от скорости есть ускорение  $v'(t) = a$ . Здесь мы сталкиваемся с понятием второй производной или производной второго порядка (обозначение:  $f''(x)$ ; читается [эф] два штриха от икс), о которой более подробно рассказано в блоке углубления. Физический смысл производной легко проиллюстрировать на конкретной формуле  $(S = \frac{gt^2}{2}) \rightarrow (S' = gt = v) \rightarrow (S'' = v' = g)$ .

### Общий метод нахождения производной

*Дидактические цели: уметь интерпретировать смысл каждого шага в процессе нахождения производной как символически, так и графически; овладеть общим методом нахождения производной для решения конкретных задач.*

Общий метод нахождения производной включает пять основных этапов (шагов). На рис. 7 представлено содержание каждого шага и его графическая интерпретация.

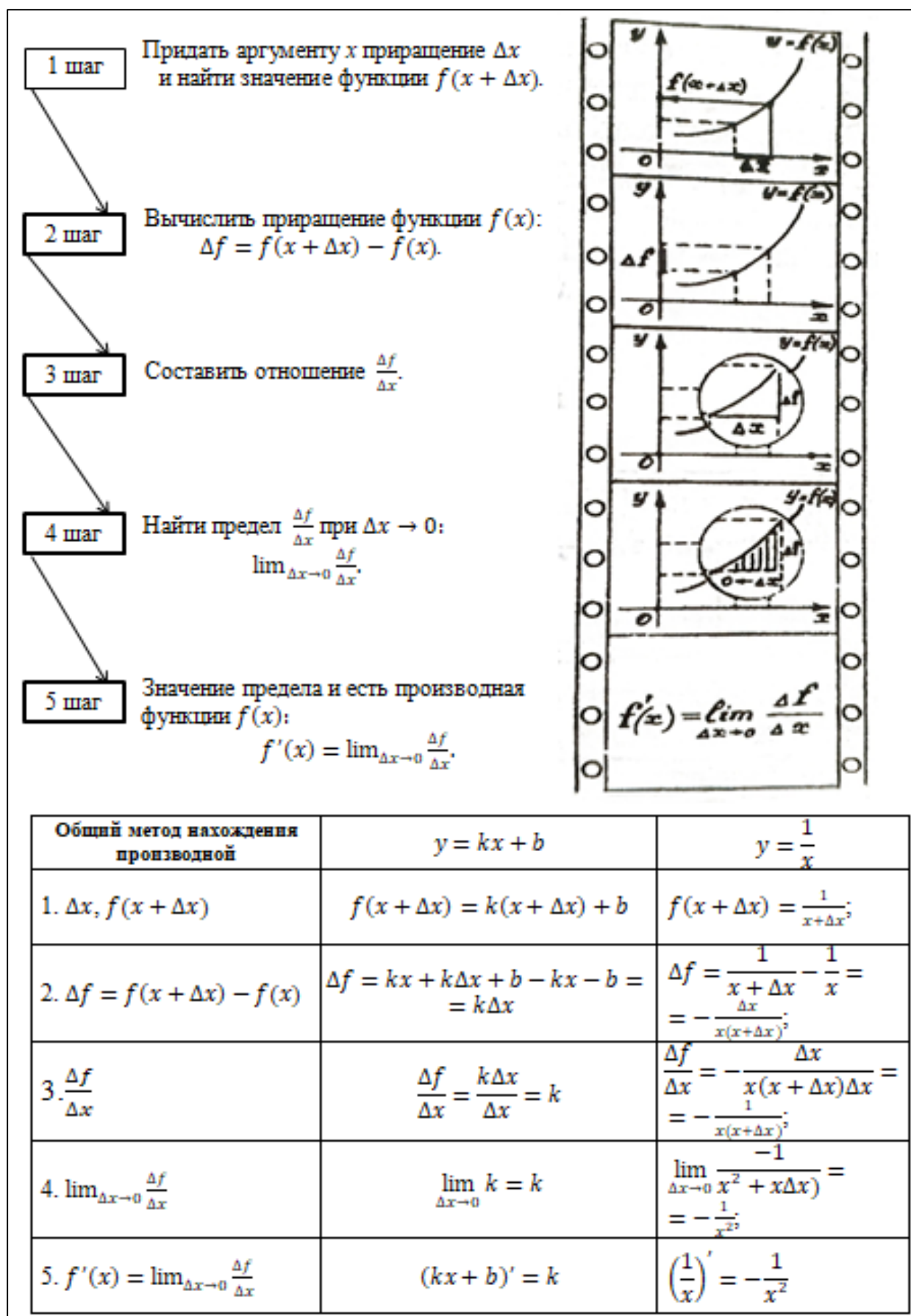


Рис. 7. Общий метод нахождения производной



В нижней части этого учебного элемента показано применение общего метода к нахождению производной конкретных элементарных функций:  $y = kx + b$ ,  $y = 1/x$ . Используя общий метод, учащиеся самостоятельно тренируются в нахождении производной от других элементарных функций, например: а)  $y = c$ ; б)  $y = ax^2$ ; в)  $y = ax^2 + bx + c$ .

От того, насколько прочно учащиеся усвоят общий метод нахождения производной, будут зависеть их успехи при изучении правил дифференцирования. Следует иметь в виду, что практически производную функции, заданной графически, можно вычислить, используя ее геометрический смысл, т.е. провести касательную к графику функции в заданной точке, вычислить угол наклона касательной, найти значение тангенса угла наклона; величина тангенса и есть значение производной функции в данной точке.

### **Дифференциал**

*Дидактические цели: осознать геометрический смысл дифференциала, в частности, научиться графически различать дифференциал, производную и приращение функции; научиться применять дифференциал для приближенных вычислений.*

Каждый без труда вычислит в уме значение степени  $2^3$ . Но вряд ли кто-нибудь (не имея под рукой калькулятора) сможет вычислить значение степени  $2,008^3$ .

Конечно, можно трижды умножить это число само на себя. А что делать, если показатель степени не 3, а, скажем, 10?

Более рациональный вариант для подобных вычислений дает использование дифференциала.

На рис. 8 показан геометрический смысл дифференциала и его формула:  $df = f'(x) dx$ . Там же приведен вывод формулы для приближенного вычисления:  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

Общий метод приближенного вычисления состоит из пяти основных этапов (шагов). Содержание шагов и применение общего метода для вычисления значения степени  $2,008^3$  приведено в нижней части рис. 8.

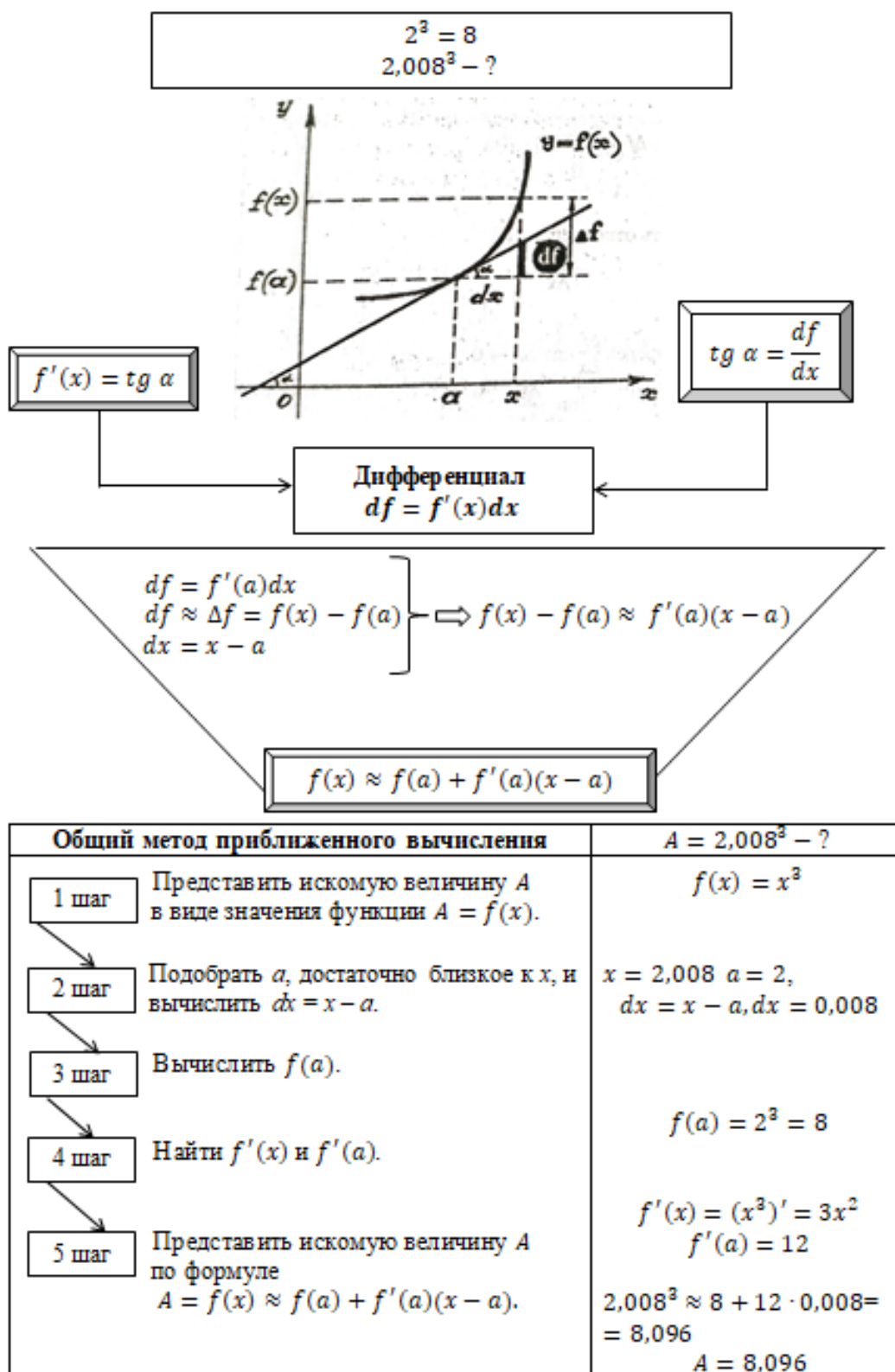


Рис. 8. Дифференциал

## Правила дифференцирования

Дидактические цели: *выучить основные правила дифференцирования; научиться применять их при решении текстовых задач.*

Основные правила дифференцирования включают в себя формулы производных от «арифметических» действий над функциями: производная суммы и разности функций; производная произведения функций; производная частного двух функций; производная сложной функции.

Вывод этих формул опирается на общий метод нахождения производной. На рис. 9 приведена таблица, в крайнем левом столбце которой даны основные этапы общего метода, а в других – соответствующие этапы для трех конкретных случаев: суммы, произведения и частного функций.

Проработав и уяснив механизм вывода этих формул, можно, опираясь на общий метод, вывести формулу производной сложной функции.

Дидактические цели: *научиться применять общий метод нахождения производной к выводу формул дифференцирования от элементарных функций: степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических; составить таблицу производных и научиться пользоваться ею.*

Если учащиеся прочно и осознанно овладеют общим методом нахождения производной, им не составит труда вывести формулы производных от основных элементарных функций  $y = x$ ;  $y = a^n$ ;  $y = \log_a x$ ;  $y = \sin x$ . Для этого необходимо вспомнить основные шаги общего метода, который приведен в левом столбце таблицы (рис. 10).

Для вывода искомых формул учащимся придется актуализировать свои прежние знания основных свойств степени, логарифма, тригонометрических формул, а также замечательных пределов, при необходимости воспользовавшись справочными материалами (рис. 1).

Для закрепления знаний и умений по данному учебному элементу, а также составления таблицы производных учащимся необходимо поупражняться в вычислении производных следующих функций:

а)  $y = e^x$ ; б)  $y = \ln x$ ; в)  $y = \cos x$ ; г)  $y = \operatorname{tg} x$ .

Общий метод нахождения производной	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
1. $\Delta x, f(x + \Delta x)$	$\begin{aligned} \Delta x, f(x + \Delta x) &= \\ &= u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) = \\ &= u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Delta x, f(x + \Delta x) &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) = \\ &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = \\ &= uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Delta x, f(x + \Delta x) &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \end{aligned}$
2. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\Delta f = \Delta u + \Delta v$	$\Delta f = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v$	$\Delta f = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$
3. $\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u v - u \Delta v}{v^2 + v\Delta v}$
4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$	$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) + \right. \\ &\left. + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta u = u'v + uv' + v'o \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} v \right) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v^2 + v\Delta v)}{v^2} = \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$
5. $f'(x)$	$(u + v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Рис. 9. Правила дифференцирования. Формулы дифференцирования

Общий метод нахождения производной	Степенная функция $f(x) = x^\alpha$	Показательная функция $f(x) = a^x$	Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$	Тригонометрическая функция $f(x) = \sin x$
1. $\Delta x, f(x + \Delta x)$	$\Delta x, f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^\alpha$	$\Delta x, f(x + \Delta x) = a^{x+\Delta x}$	$\Delta x, f(x + \Delta x) = \log_a(x + \Delta x)$	$f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$
2. $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$	$\Delta f = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left( \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right)$	$\Delta f = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$	$\Delta f = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$	$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$
3. $\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x^\alpha \left( \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$
4. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}}_\alpha$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{\ln a}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}}_{\frac{1}{\ln a}}$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_1 \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$
5. $f'(x)$	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$

Найти производные функций: а)  $e^x$ ; б)  $\ln x$ ; в)  $\cos x$ ; г)  $tg x$ .

Рис. 10. Формулы дифференцирования

## Общий метод исследования функции

Дидактические цели: *научиться соотносить динамику графика функции с изменением знака производной; овладеть общим методом исследования функции.*

Одним из важных математических умений является способность воспроизвести график функции по изменению знака ее производной.

Функция возрастает, если на данном промежутке первая производная от этой функции положительна, и убывает, если производная отрицательна. В точках, где производная равна нулю, функция имеет экстремум. Существуют еще точки перегиба, в которых обращается в ноль вторая производная исходной функции.

Зная эти правила, нетрудно представить график функции, заданной аналитически, т.е. формулой. При изучении общего метода исследования функции (рис. 11) целесообразно поупражняться в выполнении взаимно-обратных задач: по интервалам знакопостоянства функции определять вид ее графика и по графику функции определять динамику изменения значения ее производной.

В свернутом виде связь между динамикой графика функции и изменением знака производной показана в верхней половине рис. 11. В нижней его части приведен общий метод исследования функции и пример его использования при исследовании конкретных функций  $f(x) = x^3 - 3x$  и  $f(x) = (x - 1) / (x^2 + 3)$ .

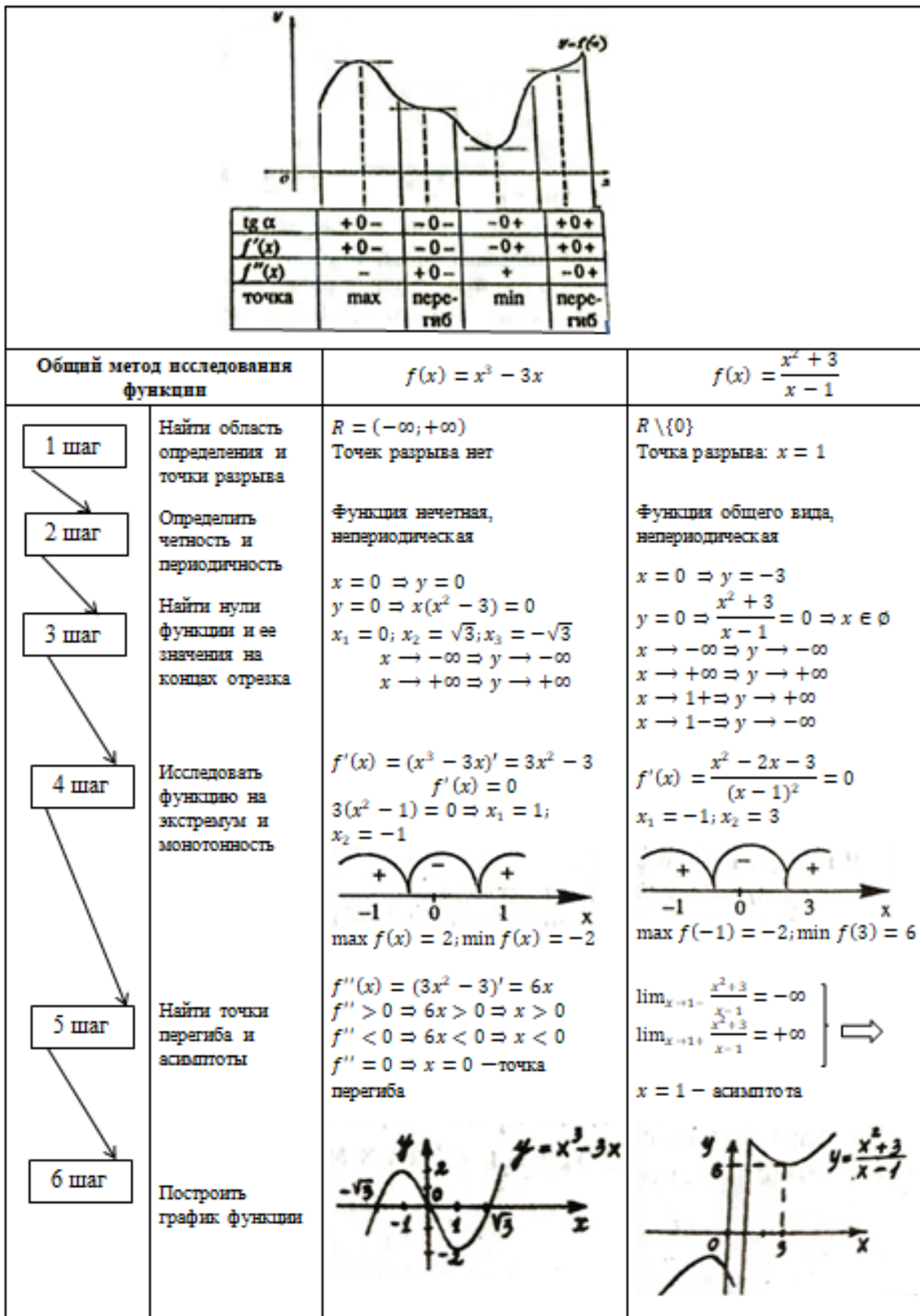


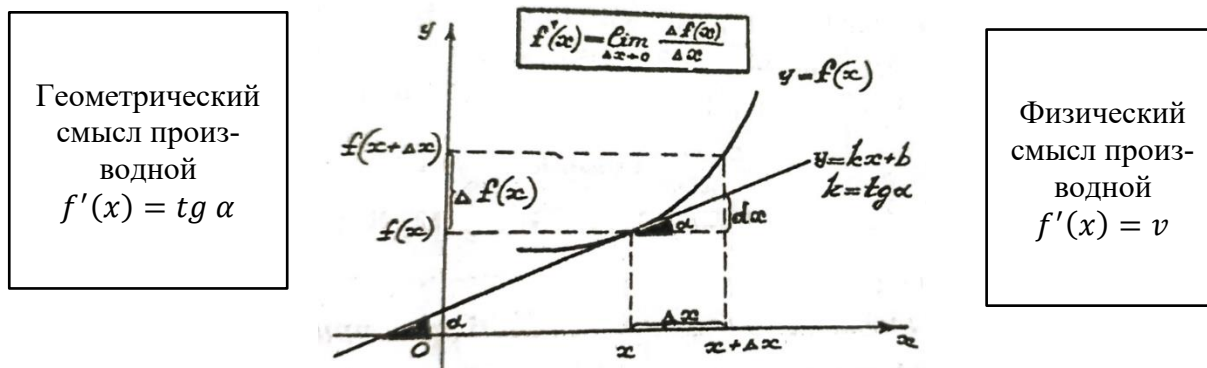
Рис. 11. Общий метод исследования функции

## Блок генерализации

### «Аккумулятор» методов дифференцирования

Дидактические цели: научиться применять правила дифференцирования, таблицу производной для решения задач; овладеть следующими общими методами: нахождения производной, приближенного вычисления, исследования функции.

На рис. 12 приведены все основные понятия и методы дифференцирования.



Общий метод нахождения производной	Общий метод приближенного вычисления	Общий метод исследования функции
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Придать аргументу <math>x</math> приращение <math>\Delta x</math> и найти значение функции <math>f(x + \Delta x)</math>.</li> <li>2. Вычислить приращение <math>\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)</math>.</li> <li>3. Составить отношение <math>\frac{\Delta f}{\Delta x}</math>.</li> <li>4. Найти <math>\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}</math>.</li> <li>5. <math>f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Представить искомую величину <math>A</math> в виде значения функции <math>A</math>.</li> <li>2. Подобрать <math>a</math>, достаточно близкое к <math>x</math>, и вычислить <math>dx = x - a</math>.</li> <li>3. Вычислить <math>f(a)</math>.</li> <li>4. Найти <math>f'(x)</math> и <math>f'(a)</math>.</li> <li>5. Представить искомую величину <math>A</math> по формуле <math>A = f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)</math></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Найти область определения и точки разрыва.</li> <li>2. Определить четность и периодичность.</li> <li>3. Найти нули функции и ее значения на концах отрезка.</li> <li>4. Исследовать функцию на экстремум и монотонность.</li> <li>5. Найти точки перегиба и асимптоты.</li> <li>6. Построить график функции</li> </ol>
Правила дифференцирования		Таблица производных
$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $(Cv)' = Cv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(f(g(x)))' = f'_g \cdot g'_x$ $y'_x = \frac{1}{x'_y}$		$c' = 0; x' = 1$ $(kx + b)' = k$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\sin x)' = \cos x$

Рис. 12. «Аккумулятор» методов дифференцирования



В верхней части рис. 12 приведены формула определения производной, ее геометрический и физический смысл, основные этапы общих методов нахождения производной, приближенного вычисления и исследования функций, а также правила дифференцирования и таблица производной.

Этот рисунок можно использовать как справочный опорный конспект по теме «Производная» при систематизации и обобщении курса математики.

Таблицу учащиеся могут дополнить своими примерами, примерами ошибок других учащихся.

## **Блок ошибок**

### **Ошибки в применении методов дифференцирования**

*Дидактические цели: получить представление о типичных ошибках в применении методов дифференцирования; изучить причины и способы их исправления; овладеть приемами самоконтроля при использовании методов дифференцирования.*

В народе говорят: «На ошибках учатся», поэтому изучение возможных ошибок, анализ причин и способов их исправления – один из надежных и проверенных способов обучения. Знание и детальный анализ ошибок помогает избежать их в дальнейшем. Именно поэтому модуль снабжен блоком ошибок. В этом блоке приведены типичные ошибки, которые часто допускают учащиеся при изучении методов дифференцирования. Указаны признаки ошибки, приведены ошибочные примеры, раскрыты причины и способы исправления ошибок, а также дан правильный вариант решения приведенного ошибочного примера.

На рис. 13 показаны четыре типичные группы ошибок, наиболее часто встречающиеся в письменных работах и устных ответах учащихся. Внимательно изучите эти ошибки: это несомненно поможет вам при выполнении предстоящих самостоятельных и контрольных работ.

№	Признаки ошибки	Ошибочный пример	Причины ошибки	Способы исправления ошибки	Правильный пример
1	Ошибки в нахождении производной от сложной функции $y = f(g(x))$ $y' = f'_g$	$y = \sin 2x$ $y' = \cos 2x$	Механическое использование правил нахождения производной от простой функции	Владение умениями: отличать сложную функцию от простой; применять производную от сложной функции $y' = f'_g \cdot g'_x$	$y = \sin 2x$ $y' = (\sin 2x)'(2x)'$ $y' = 2\cos 2x$
2	Смещение понятий дифференциала и производной $y' = dy$	$y = \ln x$ $dy = \frac{1}{x}$	Ошибка терминологии: процесс нахождения производной называется дифференцированием	Знание соотношения между производной и дифференциалом: $dy = \frac{1}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$	$y = \ln x$ $y' = \frac{d(\ln x)}{dx}$ $dy = \frac{1}{x} dx$
3	Ошибки при использовании дифференциала в приближенных вычислениях	$3,986^3 - ?$ $a = 3$ $dx = 0,986$	Неправильный выбор значения для приращения аргумента	Выбор наименьшего по абсолютному значению приращения аргумента	$3,986^3 - ?$ $a = 4$ $dx = -0,014$
4	Ошибки в исследовании функции	Формальное определение четности; не привлекается для исследования вторая производная; не принимается во внимание область определения функции	Нерациональное исследование функции, формальное вычисление области определения функции	Четная функция имеет одинаковые свойства на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ ; вторая производная облегчает поиск экстремумов и точек перегиба; учитывать область определения на протяжении всего решения	Достаточно исследовать функцию на $(0; +\infty)$ ; если выражение для $f'(x)$ громоздко, то лучше применить $f''(x)$ ; учет области определения позволяет избежать ложных и лишних решений

Рис. 13. Ошибки в применении методов дифференцирования

## **Блок применения**

### **Метод графического дифференцирования**

Дидактическая цель – *научиться по графику функции строить график ее производной, применять метод графического дифференцирования при решении практических задач, сравнивать свойства графика функции и графика ее производной.*

Пусть дан график пути  $S(t)$ . Можно ли по этому графику описать изменение скорости на отдельных промежутках времени? Иными словами, сможете ли вы по графику пути  $S(t)$  построить график скорости  $v(t)$ ?

Научиться решать задачи подобного типа поможет метод графического дифференцирования, суть которого отражена на рис. 14. Отправной точкой метода является взаимосвязь между механическим и геометрическим смыслом производной  $v = S'(t) = \operatorname{tg}\alpha$ , т.е. значение скорости в каждой точке  $t$  (из указанного интервала) равно тангенсу угла наклона касательной к графику пути  $S$  в данной точке.

Учащимся предлагается попробовать на одном и том же графике построить графики пути, скорости и ускорения и сравнить поведение и свойства этих графиков между собой.

## **Блок стыковки**

### **Решение аэродинамической проблемы**

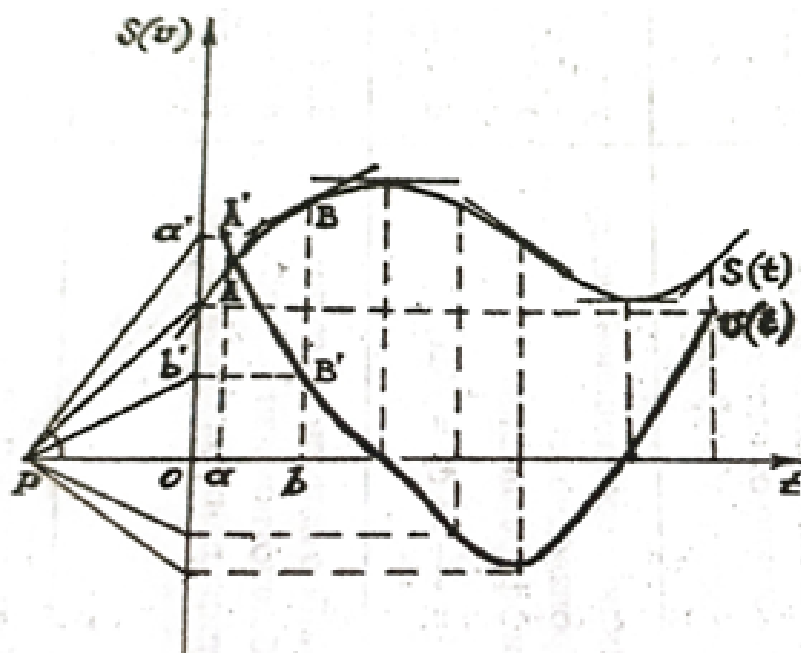
Дидактические цели: *овладение методом решения задач на максимум и минимум; осознание схемы решения аэродинамической проблемы.*

Суть решения аэродинамической проблемы заключается в выделении общего метода решения задач на максимум и минимум и пошагового представления его этапов.

Иллюстрация применения общего метода решения «минимаксных» задач дана на примере решения проблемы Ньютона. Поэтому этот блок непосредственно связан с историческим блоком, в котором поставлена аэродинамическая проблема и приведено начало ее решения.

В историческом блоке мы остановились на выводе формулы силы сопротивления. Именно этот параметр по условию задачи и является оптимизируемым.

Дан график пути  $S(t)$ .  
 Как по нему построить график скорости  $v(t)$ ?



$$v = \frac{dS}{dt} = S'(t) = \operatorname{tg} \alpha$$

Схема построения графика скорости  $v(t)$ :

1.  $S(a) = aA; v(a) = \operatorname{tg} \alpha_1 = oa' = aA'$ .
2.  $S(b) = bB; v(b) = \operatorname{tg} \alpha_2 = ob' = bB'$ .
3. ...

График  $v(t)$ :  $A'B' \dots$

Свойства графика скорости  $v(t)$

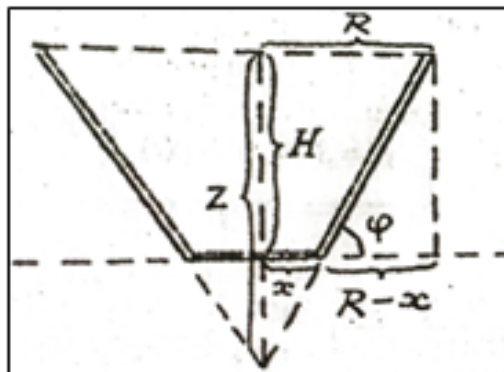
1. Экстремум графика пути соответствует нулю графика скорости.
2. Перегиб графика пути соответствует экстремуму графика скорости.
3. График  $v(t)$  – дифференциальная кривая для  $S(t)$ , график  $S(t)$  – интегральная кривая для  $v(t)$ .

По данному графику скорости  $v(t)$   
 построить график ускорения  $a(t)$ .

Рис. 14. Метод графического дифференцирования

Общий метод решения задач на минимум и максимум

- 1 шаг Найти функциональную зависимость оптимизируемого параметра от исходного независимого аргумента  $y = f(x)$ .
- 2 шаг Найти производную от оптимизируемого параметра  $y = f'(x)$ .
- 3 шаг Определить критические точки, решив уравнение  $f'(x) = 0$ .
- 4 шаг Выбрать из полученных значений оптимальное.
- 5 шаг Интерпретация результатов.



$$h(z) = \frac{R(z-H)}{z},$$

$$\cos \varphi = \frac{R-x}{\sqrt{(R-x)^2 + H^2}}.$$

- 1 шаг Оптимизируемый параметр – сила сопротивления:  

$$h(z) = \frac{(z-H)^2 + R^2}{z^2 + R^2}.$$
- 2 шаг 
$$h'(z) = \left( \frac{(z-H)^2 + R^2}{z^2 + R^2} \right)' = \frac{H(z^2 - zH - R^2)}{(z^2 + R^2)^2}.$$
- 3 шаг 
$$h'(z) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{H}{2} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4} + R^2}.$$
- 4 шаг 
$$H \rightarrow 0 \Rightarrow z \rightarrow R \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ.$$
- 5 шаг Тело, испытывающее наименьшее сопротивление в разреженной среде, имеет форму затупленного конуса с углом  $\varphi = 45^\circ$ .

Рис. 15. Решение аэродинамической проблемы

Определение функциональной зависимости между оптимизируемым параметром и независимым аргументом – это первый шаг общего метода. Второй шаг – нахождение производной от функции силы сопротивления. Третий шаг – определение критических точек путем решения уравнения  $h'(z) = 0$ . Четвертый шаг – определение оптимального значения аргумента. В данном случае это возможно при условии  $H \rightarrow 0$ . Отсюда  $\phi = 45^\circ$ . И последний, пятый, шаг – интерпретация полученного результата с учетом конкретных условий задачи: «Как это ни парадоксально, тело, испытывающее наименьшее сопротивление в разреженной среде, имеет не каплеобразную форму, а форму затупленного конуса с углом откоса  $\phi = 45^\circ$ » (см. рис. 15).

## **Блок углубления 1**

### **«Колючие линии»**

*Дидактические цели: углубить представление о производной для особого класса непрерывных функций – «колючих линий»; осознать, что не все непрерывные функции имеют производные.*

Наблюдения показывают, что многие учащиеся и студенты вузов ошибочно считают, что необходимым и достаточным условием существования производной функции является ее непрерывность. Чтобы избежать этого предубеждения, необходимы веские контрпримеры. Именно такими контрпримерами являются так называемые «колючие линии».

Рассмотрим два ярких примера подобных линий, приведенных на учебных элементах: примеры Больцано и Ван-дер-Вардена. Норберт Винер приводит еще один пример «колючей линии» – траекторию движения броуновской частицы.

Учащиеся должны, учитывая приведенные примеры и физический смысл производной (производная есть скорость), обсудить (используя метод мозговой атаки) следующую проблему: если траектория движения частицы такова, что она нигде не имеет касательной, а следовательно – производной, то откуда вытекает, что она не имеет скорости?! Так ли это?

## Блок углубления 2

### Производные высших порядков

Дидактические цели: *научиться находить вторую производную от данной функции; овладеть приемом вывода формулы n-й производной от элементарных функций.*

При изучении некоторых предыдущих учебных элементов вы уже сталкивались с понятием второй производной. Вторая производная – та же самая производная, но от функции, которая сама уже является производной, т.е. если производную от некоторой начальной функции  $f(x)$  обозначить через  $g(x)$ ,  $f'(x) = g(x)$ , то первая производная [обозначим ее  $q(x)$ ] функции  $g(x)$  является одновременно второй производной функции  $f(x)$ :

$$q(x) = g'(x) = f''(x).$$

Аналогично определяется третья производная и т.д. На рис. 16 показана последовательность перехода от функции к ее первой, а затем второй производной на примере графиков пути, скорости и ускорения. Также приведены формулы: n-й производной; производных от функции, заданных неявно и параметрически; производной от функции нескольких переменных.

В качестве приложений к общей формуле n-й производной даны формулы n-й производной для следующих элементарных функций:  $y = x^n$ ;  $y = \ln x$ ;  $y = a^x$ ;  $y = \sin x$ .

Завершает блок вычисление обычным последовательным способом производных третьего порядка от данных функции и сравнением полученных результатов с общей формулой при  $n = 3$ .

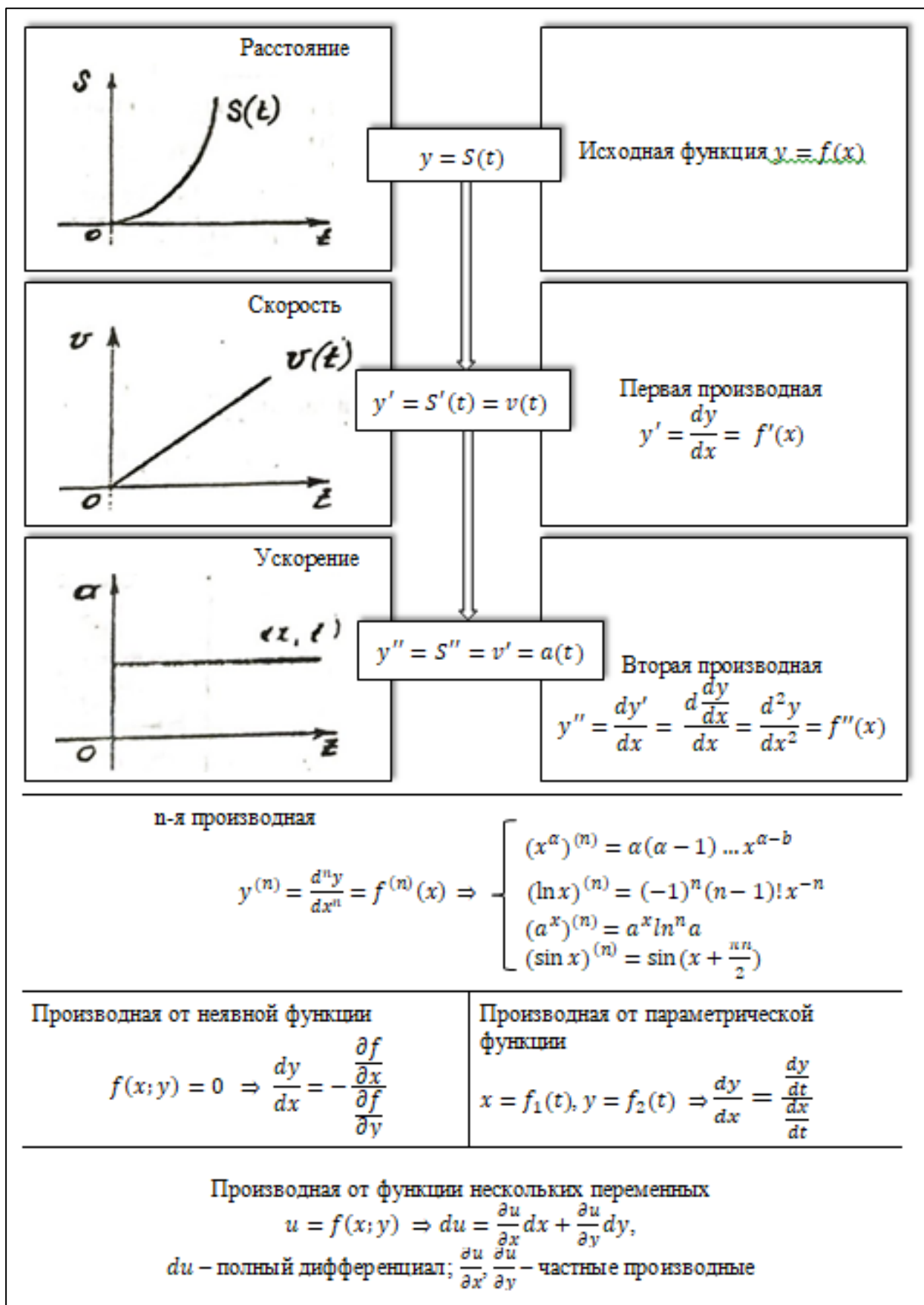


Рис. 16. Производные высших порядков



## 2.2. ТЕХНОЛОГИЯ ПОЭТАПНОГО ФОРМИРОВАНИЯ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ

Концептуальными положениями теории поэтапного формирования умственных действий являются идея И.П. Павлова о том, что ориентировочный инстинкт всегда предшествует появлению рефлекса (знания), и понимание Л.С. Выготским мышления как результата интериоризации практических действий и свойственной им логики [15]. Основу теории поэтапного формирования умственных действий составляет учение Л.С. Выготского об *интериоризации* – процессе преобразования внешней предметной деятельности во внутреннюю психическую деятельность, формирование внутренних интеллектуальных структур психики посредством усвоения внешней социальной действительности. Обучение и воспитание можно рассматривать как процесс интериоризации. Перед педагогами стоит проблема, как оптимально управлять этим процессом.

П.Я. Гальперин полагал, что понятие ориентировки переносится во внутренние психические процессы, мышление рассматривал как свернутый в языке процесс внешней предметной деятельности [16]. Он исследовал процесс интериоризации (переход извне внутрь) и разработал теорию поэтапного формирования умственных и практических действий. Представление о существовании генетической зависимости между психическими операциями и внешними практическими действиями предполагает, что мышление ребенка развивается через связь с предметной деятельностью (непосредственными манипуляциями с предметами). П.Я. Гальперин считал, что внешнее действие постепенно превращается во внутреннее действие, проходя при этом ряд последовательных этапов, каждый из которых составляет основу для последующего этапа.

Теория поэтапного формирования умственных действий и понятий П.Я. Гальперина дает один из путей решения этой задачи: указывает условия, обеспечивающие формирование умственных действий с заранее намеченными свойствами. П.Я. Гальперин разграничил две части осваиваемого предметного действия: его понимание и умение его выполнить. Первая часть играет роль ориентировки и названа «ориентировочной», вторая – исполнительная. П.Я. Гальперин придавал особое значение ориентировочной части, считая ее «управляющей инстанцией», позднее он назовет ее «штурманской картой». Условием формирования действий является ориентировочная основа действия (ООД) – это система ориентиров и указаний, сведений обо всех компонентах действия (предмет, продукт, средства, состав и порядок выполнения операций).

Интерииоризация (присвоение) деятельности в онтогенезе происходит в четыре этапа:

- 1) материальное действие с реальными предметами;
- 2) действие в громкой речи с образами (без предметов);
- 3) действие «во внешней речи про себя» (четко осознаваемое);
- 4) действие «во внутренней речи без слов» (неосознаваемое).

Обучение основано на деятельности с использованием ориентировочной основы действий (ООД). П.Я. Гальпериным и Н.Ф. Талызиной проведена типология ориентировочной основы действия по трем критериям:

- степень полноты – наличие в ней сведений обо всех компонентах действия: предмете, продукте, средствах, составе, порядке выполнения операций;
- мера обобщенности – широта класса объектов, к которым применимо данное действие;
- способ получения – каким образом субъект стал обладателем данной ориентировочной основы действия.

Соответственно можно выделить три типа обучения.

1-й тип обучения характеризуется неполным составом ориентировочной основы, ориентиры представлены в частном виде и выделяются самим субъектом путем слепых проб. Процесс формирования действия на такой ориентировочной основе идет медленно, с большим количеством ошибок. Например, и учебник, и учитель по русскому языку дают образцы слов и предложений, демонстрируют какое-либо грамматическое явление, анализируют его и формулируют правило написания. Аналогично делается в геометрии, физике и пр. При этом сам путь достижения результата не указывается. Обучаемые самостоятельно методом проб и ошибок ищут верное решение.

2-й тип обучения характеризуется наличием всех условий, необходимых для правильного выполнения действия. Но эти условия даются субъекту в готовом виде или в частном виде, пригодном для ориентировки лишь в данном случае. Формирование действия при такой ориентировочной основе идет быстро и безошибочно. Однако сфера переноса действия ограничена сходством конкретных условий его выполнения. Например, на уроке русского языка дается алгоритм применения правила на безударную гласную в корне. Усвоение действия протекает без ошибок (исключение – ошибки по невнимательности), ясно осознаются действия и существенные (несущественные) признаки объекта изучения. Перенос действия на новые задачи ограничен конкретностью ориентировочной основы действия.

3-й тип обучения – ориентировочная основа имеет полный состав, ориентиры представлены в обобщенном виде, характерном для целого класса явлений. В каждом конкретном случае ориентировочная основа действия составляется учеником самостоятельно с помощью общего метода, который ему дается. Действию, сформированному на ориентировочной основе данного типа, присущи не только безошибочность и быстрота процесса формирования, но и большая устойчивость, широта переноса. Например, даются общие схемы и алгоритмы, находящие применение во многих случаях: анализ слова по составу и как части речи, анализ предложения по наличию основы и другим характеристикам. Учение протекает сравнительно быстро, без ошибок, с уяснением существенных (несущественных) признаков объекта и условий действия с ними, обеспечивается перенос знаний и действий на все конкретные случаи в данной области.

Экспериментальные исследования ученицы П.Я. Гальперина Н.С. Пантиной становления графических навыков письма показали достоинства и недостатки разных типов ориентировочной основы действия. В группе детей, где обучение проводилось на основе ориентировки первого типа, экспериментатор показывал ребенку изучаемую букву – образец и давал примерно такое объяснение (применительно к букве И): «Мы начинаем писать вот здесь (указывает), ведем по линейке вниз до сих пор (указывает), теперь закругляем на нижнюю линейку, вот сюда (указывает), а теперь поворачиваем вверх и ведем в этот уголок (указывает)».

После этого ребенок приступает к самостоятельному написанию буквы, получая при необходимости помощь педагога. Для написания буквы правильно детям требовалось 174 повторения. Для написания следующей буквы обучаемый должен искать необходимые ориентиры заново. При использовании второго типа ориентировочной основы действия ребенку предъявляется буква – образец и нанесенная на бумагу система точек – опор, облегчающая исполнительную часть действия. Ребенок учится копировать точки и по ним писать букву. Для правильного написания буквы детям потребовалось 22 повторения. Обучение происходит быстро и безошибочно. Однако для написания следующей буквы учитель вновь демонстрирует необходимые ориентиры: выделяет систему точек, адекватных контуру буквы, переносит их на бумагу. Обучение, базирующееся на ориентировочной основе третьего типа, начинается с объяснения принципа выделения системы ориентиров: опорные точки нужно ставить в тех местах буквы, где составляющая ее линия меняет направление. Ребенку показывается это на одной букве, а затем его учат это делать на типовых буквах алфавита. Ин-

интересно, что, начиная с восьмой буквы, ребенок безошибочно копирует любую букву любого алфавита.

Усвоенное действие легко переносилось в новые ситуации: при письме в тетради в широкую линейку, на нелинованной бумаге.

Поэтапное формирование умственных действий по этой классификации типов обучения соответствует третьему типу. Но успешность обучения такого типа обусловлена не только полной, обобщенной и самостоятельно создаваемой ориентировочной основой действия, но и отработкой действия на разных уровнях его формирования (в разных формах).

Итак, возможны три типа соотношения ООД и учения: при недостающей информации получают методы проб и ошибок, догматические; ООД дается в готовом виде – это ситуация объяснительно-иллюстративных методик; ООД формируется (добывается) в самостоятельной работе – это развивающие, проблемные методы.

Успешность усвоения обеспечивается правильной организацией ориентировочной основы действий. Вычленив некоторую порцию материала, математическое содержание которого дети должны усвоить, учитель обдумывает, какая именно организация работы учеников соответствует этому материалу. Основная цель этапа первоначального знакомства – подготовить школьников к самостоятельному выполнению нужной работы и сразу ее организовать.

С точки зрения традиционной педагогики ситуация весьма странная: дети еще ничего не знают, а уже должны начинать работать с новыми знаниями. С точки зрения теории Гальперина ситуация ординарная: надо предоставить в распоряжение детей такие краткие схематические записи-конспекты материала и способов работы с ним, которые позволяют, ничего предварительно не заучивая, непосредственно после разъяснений учителя приступить к самостоятельной работе с новыми заданиями.

При традиционном обучении учитель, закончив объяснение, обычно просит задавать вопросы. Но их, как правило, не бывает: ученику трудно разобраться, всё ли ему понятно. Рассматриваемая схема организации обучения предусматривает, что каждый ученик выполняет своеобразные тесты – работу с конспектами. В результате он имеет возможность убедиться, что материал ему понятен, либо у него возникают вопросы, на которые учитель отвечает непосредственно в ходе объяснения. Школьнику может показаться, что тест выполнен правильно, в действительности же он допустил ошибку. Чтобы этого не произошло, предусмотрена проверка правильности выполнения тестов. Каждый ученик

получает шанс устранить недочеты в понимании объяснения. Носителями тестов являются тетради с печатной основой.

П.Я. Гальперин назвал первый этап усвоения этапом ориентировки в материале и способах работы с ним. Конспекты подлежащего усвоению материала он называет ориентирами, а конспекты, которые выдаются ученикам в ходе объяснения, – ориентировочными картами.

«В проблеме интеллектуальных возможностей ребенка существенное, если не решающее, значение получает четкость и уверенность ориентировки ребенка в задаче и материале действия. Когда ориентиры четко и устойчиво представлены на ориентировочной карте, ребенок уверенно ищет их (и только их!) и его не сбивают даже самые яркие, можно сказать, навязчивые свойства и отношения вещей. Поскольку они не отвечают признакам, указанным на ориентировочной карте, ребенок обходит их и обращается к тем признакам, которые не так заметны, но отвечают заданию. Более того, прочие свойства вещей, даже самые броские, дети начинают считать несущественными не только в данных заданиях, но и “вообще несущественными”» [16, с. 5].

В традиционном обучении учитель имеет возможность судить о правильности работы каждого из учеников в классе главным образом по конечному результату (после того, как работы учеников собраны и проверены). При данной технологии требуется, чтобы учитель проконтролировал каждый шаг работы каждого ученика. Контроль на всех этапах усвоения – один из важнейших компонентов технологии. Он необходим для того, чтобы помочь ученику избежать возможных ошибок.

Используя принцип интериоризации, П.Я. Гальперин поставил задачу «приоткрытия тайны возникновения психического процесса» [16]. Идеальные действия (действия, производимые в поле восприятия, речевом плане и уме) рассматриваются как производные от внешних, предметных, материальных действий.

Поэтому для того, чтобы действие было сформировано в его высшей, умственной форме, необходимо проследить весь путь его становления. П.Я. Гальперин разработал целостную схему этого преобразования, которая указывает учителю, как надо строить обучение, чтобы эффективно формировать знания и действия с помощью главного дидактического средства – ориентировочной основы.

П.Я. Гальперин выделял шесть этапов формирования умственных действий:

- 1) формирование мотивационной основы действия,
- 2) составление схемы ориентировочной основы действия,
- 3) формирование действий в материализованной форме,
- 4) содержание ориентировочной основы действия отражается в речи,
- 5) формирование действия во внешней речи «про себя»,
- 6) формирование действия во внутренней речи.

Рассмотрим подробно каждый этап.

На *мотивационном этапе* происходит предварительное ознакомление учащихся с целью обучения, формирование внутренней или познавательной мотивации через постановку соответствующих учебных задач; создание проблемной ситуации; использование различных познавательных задач, задач практического характера и т.п.

На этапе *составления схемы ориентировочной основы действия* происходит предварительное ознакомление с действием, т.е. построение в сознании обучаемого ориентировочной основы. Ученик разбирается в содержании усваиваемого действия: в свойствах предмета, в результате-образце, в составе и порядке исполнительных операций. Важно, чтобы была достигнута полнота и точность ориентировки, четко показаны и усвоены конечные результаты обучения, которых предстоит достичь. Педагогу следует подобрать такие задания, ориентируясь на которые, можно было бы изучить новую тему.

Основное требование на этом этапе – повторить только тот материал, на котором базируется содержание нового. Например, в изучении математики ориентировочной основой действия могут служить:

- ранее изученная тема, на которую опирается изучаемая тема и при которой обязательно сохраняются принципы математических действий;
- опорная схема, таблица, карта, используя которые учащиеся будут работать на следующем этапе;
- межпредметные связи, когда ситуация в одной области объяснима, а в нашей ситуации требует дополнительного теоретического обоснования.

Ориентировочная основа может быть предложена в готовом виде, составлена или разработана совместно с самими учащимися. Выбор нужного варианта определяется содержанием изучаемой темы.

Третий этап – *формирование действия в материальной или материализованной форме*. Любому человеку, и взрослому, и ребенку, хорошо запоминает и объясняет то, что он сам сделал своими руками. При этом все операции дей-

ствия осознаются, а замедленное их выполнение позволяет увидеть и осознать содержание как операций, так и всего действия в целом.

Обязательным условием этого этапа является сочетание материальной формы действия с речевой, что позволяет отделить усваиваемое действие от тех предметов или их заместителей, с помощью которых оно выполняется. Данный этап позволяет ученику усвоить содержание действия (все операции) и правила их выполнения. Учитель осуществляет контроль правильности выполнения каждой входящей в действие операции. Очень важно своевременно заметить ошибку обучаемого и исправить ее, чтобы в последующем не допустить закрепления неверного действия. Главным на данном этапе является то, что ученик сам работает с индивидуальными наглядными пособиями (дублирует учителя, работает по его указаниям и т.п.). Если это требование не соблюдается, то данный этап выпадает из общего звена и, следовательно, поэтапного формирования умственных действий не происходит. Когда действие начинает протекать плавно, безошибочно и более быстро, убираются ориентировочная карточка и материальные опоры.

На этом этапе возможны следующие варианты работы:

1) учащиеся работают с наглядными пособиями под управлением учителя; дублирование действий учителя допускается только в тех случаях, когда они не могут работать самостоятельно;

2) учащиеся самостоятельно изучают тему, используя предложенные ориентиры;

3) учащиеся слушают объяснение учителя и работают при этом с предложенным ориентиром;

4) учитель проводит эвристическую беседу, организуя при этом работу учащихся по ориентирам:

5) совместное составление с учащимися различных схем, моделирование ситуации, опираясь на ориентиры;

6) самостоятельная работа учащихся по дополнительным источникам информации и создание своих моделей (схем, рисунков, чертежей, планов).

Четвертый этап – *формирование действия в громкой речи*. Процесс получения и усвоения знаний происходит быстрее, если оно сопровождается внешнеречевой деятельностью. Ученик, лишенный материальных опор действия, анализирует материал в громкой социализированной речи – речи, обращенной к другому человеку. Речевое действие должно быть развернутым, сообщение – понятным другому человеку, контролирующему процесс обучения.

На этом этапе происходит «скачок» – переход от внешнего действия к мысли об этом действии. Ученики проговаривают вслух то действие, ту операцию, которую в данный момент осваивают. В их сознании происходит обобщение, сокращение учебной информации, а выполняемое действие начинает автоматизироваться. На этапе внешней речи могут быть использованы следующие приемы:

1) хоровое проговаривание вслух определений, правил, фрагментов текста, практических действий и т.п. (если речь развита слабо) с переходом к индивидуальному проговариванию вслух (прием нужен особенно в младших классах);

2) использование комментированного управления с переходом к комментированному доказательству, когда ученик сначала воспроизводит ход своих действий и после обосновывает каждый свой шаг с использованием теоретических знаний;

3) воспроизведение вслух целого текста;

4) работа в парах, когда один ученик воспроизводит материал, а другой – контролирует по определенным образцам (записи в тетради, по конспекту, по книге и т.д.)

Пятый этап – *формирование действия во внешней речи про себя.*

Ученик использует ту же речевую форму действия, что и на предыдущем этапе, но без произношения (даже без шепота). Здесь возможен пооперационный контроль: педагог может уточнять последовательность производимых операций или результат отдельной операции. Этап завершается, когда достигается быстрое и правильное выполнение каждой операции и всего действия.

Шестой этап – *формирование действия во внутренней речи.* Ученик, решая задачу, сообщает только конечный ответ. Действие становится сокращенным и легко автоматизируется. Но это автоматизированное действие, выполняемое с максимально возможной для ученика скоростью, остается безошибочным (при появлении ошибок необходимо вернуться на один из предыдущих этапов). На данном этапе дети автоматически выполняют отработываемое действие, даже мысленно не контролируя себя, правильно ли оно выполняется. Это свидетельствует о том, что действие сократилось, перешло во внутренний план, и необходимость во внешней опоре отпала.

Сравнивая поэтапное формирование умственных действий со стихийным научением ребенка (первый тип обучения), следует отметить, прежде всего, преимущества в устойчивости достигаемых позитивных результатов. Стихийное научение – нерегулируемый процесс, на который влияет множество факторов, как внешних, так и внутренних, поэтому конечный продукт оказывается неустой-



чивым (иногда – успешным, иногда – нет), а сам ученик не всегда уверен в правильности полученного результата. Второй тип обучения, наиболее характерный для школы (то, что обычно называется традиционным обучением), приводит к разной успешности учения разных детей, т.е. к разным уровням успеваемости.

Использование технологии поэтапного формирования умственных действий позволяет «выравнивать» успеваемость, добиться устойчиво успешного решения разными детьми определенного класса задач.

Эффективность обучения на основе теории поэтапного формирования умственных действий и понятий зависит от соблюдения ряда условий:

- конкретного описания конечного результата действия и его характеристик;
- выбора задач и упражнений, обеспечивающих формирование нужного действия;
- точного определения порядка выполнения всех исполнительных и ориентировочных операций, входящих в действие;
- правильности и полноты ориентировочной основы. Четкая ориентировка в выполнении того или иного действия способствует формированию у обучаемых уверенности в своих силах, что особенно важно для тех учеников, которые теряются в обычных условиях и не могут справиться с решением учебных задач.

Поиски путей эффективного применения теории поэтапного формирования умственных действий естественным образом привели ряд ученых к разработке *циклов уроков*.

В 70–80-е гг. прошлого столетия в НИИ школьного оборудования и технических средств обучения Академии педагогических наук СССР была разработана и опробована в массовом эксперименте технология учебных циклов. Ее авторами являются Е.Б. Арутюнян, М.Б. Волович, Ю.А. Глазков и Г.Г. Левитас. Эта технология используется в преподавании тех предметов, в которых ведущим элементом являются точные знания.

Единицей учебного времени в школе обычно считают урок. М.Б. Волович [14], изучая подходы к усвоению вычислительных правил, определений и теорем в соответствии с рекомендациями теории поэтапного формирования умственных действий, пришел к выводу, что урок в качестве единицы учебного процесса препятствует организации усвоения в соответствии с теорией П.Я. Гальперина.

В течение урока не всегда удается преподавать с начала до конца какую-либо порцию знаний. Урок может быть и началом, и продолжением, и окончанием

этого процесса, а весь период такого изучения, состоящий из одного или из нескольких уроков, естественно назвать учебным циклом. По Н.Ф. Талызиной [54], под циклом обучения понимается вся совокупность действий обучающего и учащегося, которые приводят последнего к усвоению определенного фрагмента содержания образования с заданными показателями, т.е. к достижению поставленной цели.

Учебный цикл – это фрагмент процесса обучения, в течение которого учащиеся усваивают некоторую отдельную порцию учебной информации. Построение учебного цикла зависит от многих причин: от целей изучения материала, от его содержания, от выбранных методов, форм и средств обучения, от личностных свойств учителя и учеников. Строение учебного цикла включает актуализацию знаний, необходимых для усвоения новой информации, введение новой информации, репродуктивное (первоначальное) закрепление, тренировочное закрепление, контроль знаний и итоговое закрепление.

Если все эти этапы удастся уложить в один урок, то в этих редких случаях получаем одноурочные циклы. Одноурочные циклы очень кратки. Они не дают времени на осознание, продумывание материала. Каждый этап проводится в быстром темпе. И если кто-либо из учеников отвлекся даже на короткое время, это может сказаться на процессе обучения.

Двухурочные циклы гораздо эффективнее одноурочных. Двухурочные циклы состоят из урока изложения нового материала, домашней работы и урока самостоятельной работы. Урок изложения нового материала состоит из трех этапов: контроль знаний – диктант, этап объяснения и этап первоначального закрепления. Урок самостоятельной работы также состоит из трех этапов: этапа проверки теоретического материала, этапа тренировочного закрепления и, наконец, проводится сама эта работа.

Видно, что и во время двухурочного цикла учитель все время руководит работой, а ученики постоянно заняты делом и письменно отчитываются в своей работе на каждом этапе. Двухурочный цикл достаточен для организации обучения, если не требуется длительного закрепления материала и опрос по теории можно осуществить с помощью воспроизведения конспекта.

Если же нарушается какое-нибудь из этих условий, то в учебный цикл нужно вводить дополнительные уроки.

Так в некоторых учебных дисциплинах большое внимание уделяется письменному решению задач и упражнений. Двухурочный цикл не дает места для такой работы. Для нее нужны специальные уроки. На этих уроках задачи

должны решаться всеми учащимися (а не списываться с доски, как это часто бывает). Кроме того, необходимо, чтобы каждый ученик на таком уроке получил оценку за работу. Это достигается путем специальной организации уроков решения задач.

Второе затруднение, возникающее на двухурочных циклах, – невозможность опросить учащихся по всему объему теории, содержащейся в конспектах. Эта проблема решается путем введения в учебный цикл урока общения. На нем учащиеся прочитывают по учебнику теоретический материал (рассказанный им на предыдущем уроке), а затем «сдают» его учителю либо другим ученикам.

Включение в учебный цикл одного или нескольких уроков решения задач и (или) одного или нескольких уроков общения приводит к многоурочным циклам. Трехурочные циклы могут быть двух видов: урок изложения нового материала – урок решения задач – урок самостоятельной работы и урок изложения нового материала – урок общения – урок самостоятельной работы. Четырехурочные циклы могут быть более разнообразными: урок изложения нового материала – урок решения задач – урок общения – урок самостоятельной работы или урок изложения нового материала – два урока решения задач – урок самостоятельной работы или урок изложения нового материала – два урока общения – урок самостоятельной работы [30].

Итак, учебные циклы в технологии учебных циклов (кроме малотипичных одноурочных) состоят из уроков изложения нового материала, решения задач, общения и самостоятельной работы. Рассмотрим эти уроки более подробно.

Первым этапом усвоения, в соответствии с технологией поэтапного формирования умственных действий, должно быть такое знакомство с новым материалом и способами работы с ним, в результате которого должен остаться конспект основного содержания, достаточный для того чтобы приступить к решению задач без предварительного заучивания. Предварительно необходимо проверить, нет ли таких пробелов, которые могут помешать восприятию нового материала, а если пробелы обнаружатся, ликвидировать их здесь же в классе, до начала изложения нового материала.

Передовой педагогический опыт подсказал М.Б. Воловичу [14] эффективную форму опроса, позволяющую быстро выявить пробелы, которые могут мешать усвоению нового материала каждым из учеников в классе, это – математические диктанты, помогающие обеспечить систематический контроль готовности к восприятию нового материала каждым учеником. При этом важна не кон-

статация пробела, а устранение его здесь же на уроке, до начала изложения нового материала.

Сразу же после завершения проверки математического диктанта, а нередко и на материале обсуждения включенных в него вопросов, начинается обсуждение нового материала. В ходе объяснения должно быть осуществлено краткое схематическое фиксирование того, что надо усвоить. Опираясь на такой конспект, ученики приступают к самостоятельной работе без предварительного заучивания. Важно таким образом организовать знакомство с основным содержанием материала (его конспектом), чтобы и ученик и учитель были убеждены: материал понят правильно, каждому ученику в классе ясно, каким образом пользоваться этим материалом при решении задач.

В конце первого урока цикла ученики обычно, опираясь на конспект, работают с новым материалом. Вначале важно организовать подробные записи, потом – краткие. Наиболее эффективно такая работа организуется с помощью тетради с печатной основой.

Первый этап урока изложения нового материала – предметный диктант, ученики отвечают на вопросы в контрольных листах, наложенных через копирку на рабочие тетради. Контрольные листы с ответами сдаются учителю, а сейчас учитель демонстрирует правильные ответы к заданиям диктанта, ученики проверяют свою работу. Учитель при обсуждении ответов использует прием «ДА-НЕТ». Хорошим приемом является вызов к доске одного или двух учеников перед началом диктанта. Эти ученики пишут ответы на скрытых частях доски, а после окончания диктанта их записи используются для проверки ответов. Очень эффективна взаимопроверка: ученики, писавшие один и тот же вариант, обмениваются своими листами.

Второй этап урока – объяснение материала. Рассказывая материал, учитель выписывает на доске конспект, а дети переносят конспект в свои тетради. Третий этап первого урока – первоначальное (репродуктивное) закрепление изложенного материала. Учащиеся под руководством учителя решают задачи, аналогичные тем, которые были рассмотрены при объяснении. Учитель добивается проверки каждого этапа решения самими учащимися или их соседями.

Первоначальное закрепление должно быть выполнено с большой четкостью. Нужны точные вопросы, точные письменные или устные ответы, должны быть достигнуты правильные формулировки ответов, всеобщее одобрение их классом (прием «ДА-НЕТ»). Это – очень важный этап обучения. П.Я. Гальперин указывал, что успех ориентировки на 40 % определяет успех всего обучения.

Эффективно проходит первоначальное закрепление при использовании тетрадей с печатной основой.

В соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий, поняв на первом уроке цикла, каким образом надо работать с новым материалом, получив конспект основного содержания, образцы подробных и кратких записей и выполнив несколько таких записей в процессе самостоятельной (с опорой на конспект) работы, учащиеся переходят к обычным записям. При этом важно еще некоторое время проговаривать весь ход работы, что позволяет учителю активно реагировать на ошибки или затруднения ученика.

Самостоятельная работа детей, при которой сохраняется рассказ о ходе работы и ее результатах, – основное содержание второго урока четырехурочного цикла.

Урок *решения задач* в рамках рассматриваемой технологии Г.Г. Левитас рекомендует организовывать следующим образом [30]. В начале урока решения задач учитель знакомит учащихся с заданиями, записанными на доске: классным заданием и домашним. Ученики приступают к выполнению классного задания, разбившись на пары так, чтобы было приятно и полезно работать с соседом. Учитель просит ответы к задачам обводить рамкой или выписывать на полях для удобства проверки. Он предупреждает, что работа будет приниматься от двоих, поэтому, решив задачу, ученик должен побеспокоиться о своем соседе. Решение каждой задачи должно быть зафиксировано в каждой тетради.

Ученики начинают работать. Учитель наблюдает за работой, оказывает помощь тем, кто в этом нуждается, и следит за тем, чтобы каждая пара работала не отвлекаясь.

Полезно вывесить плакат с инструкцией о порядке работы [14]:

1. Задачу надо стараться решить самостоятельно. Если не получается — можно обратиться за помощью к соседу.

2. Объясняя решение, надо ссылаться на соответствующее место в краткой схематической записи.

3. Если задачу не получается решить обоим ученикам, попробуйте вместе разобраться в кратких схематических записях и вспомнить соответствующее правило. В случае неудачи обратитесь к учителю или начните решать следующую задачу.

4. Ученик, справившийся с задачей, должен проверить, правильно ли ее решил сосед.

5. По очереди рассказывайте друг другу правила, которыми пришлось пользоваться при решении задач, и показывайте друг другу, как вы им пользовались.

Может ли такой урок не удался? Разумеется. Может оказаться, что класс не в состоянии работать самостоятельно. Это значит, что в данном классе такие уроки проводить рано, и надо на первых порах отказаться от уроков решения задач внутри учебного цикла. Иногда урок решения задач не удается по другой причине: неточно определен объем задания, и учащиеся не успевают решить все задачи. Здесь можно поступить по-разному: не проверять работы в течение урока, а собрать их для домашней проверки или даже продолжить работу на следующем уроке. По той же схеме удобно проводить и уроки повторения, отличающиеся от урока решения задач только содержанием самих заданий. Если урок решения задач – составная часть учебного цикла, то урок повторения – урок вне цикла, посвящаемый повторению пройденного.

Заметим, что если класс еще не готов к урокам решения задач и поэтому проводить уроки решения задач нельзя, то уроки повторения проводить все же можно. Именно на этих уроках можно приучать детей к урокам решения задач.

Уроки решения задач имеют большое воспитательное значение. На них осуществляется трудовое воспитание (дети приучаются организовывать свой самостоятельный труд), нравственное воспитание (дети несут ответственность за работу своего соседа), коммуникативное воспитание (дети сотрудничают как во время работы, так и во время проверки ее результатов). На этих уроках используется коллективная форма работы в классе.

Опрос по теоретическому материалу не всегда удается провести в форме опроса по конспекту на уроке самостоятельной работы. Дело не только в возрасте учащихся, но и в том, что знание не всякого материала можно проверить в такой форме. Даже в старших классах знание доказательства многих формул тригонометрии можно проверить именно в письменной форме, т.е. в форме опроса по конспекту. Но если ответ по теории должен включать в себя рассуждения, а не только записи, то нужно заменять письменный ответ устным. Способ устного опроса всех учеников по теоретическому материалу, получил в технологии учебных циклов название *урока общения*.

На первых уроках цикла сознание было направлено на то, чтобы понять, и на то, чтобы правильно пользоваться. На уроке общения оно направлено на запоминание. Здесь каждый ученик должен отчитаться по всем основным теоретическим вопросам: рассказать правило и показать, как пользоваться этим правилом, выполняя подробные и краткие записи; записать формулу и продемонстрировать умение ею пользоваться и т.п. Уже сам факт необходимости сдавать теорию направляет сознание учеников на запоминание теоретического материала.

Результатом урока должно стать умение формулировать соответствующие теоретические положения и сознательно ими пользоваться, решая задачи. Важно, чтобы все в классе точно знали, что именно нужно ответить на уроке общения, какие именно задачи надо уметь решить и как прокомментировать решение, опираясь на теорию. На уроке общения, как и на уроке решения задач, важно дать детям интересные задачи разной трудности, над которыми они могут подумать, если осталось время.

Учитель входит в класс и предлагает учащимся сесть парами для работы над теоретическим материалом. Он сообщает, какой материал необходимо прочесть по учебнику и какие задания по этому материалу надо выполнить, на какие вопросы по теории нужно приготовить ответ. Ученики рассаживаются парами и начинают работать. Они читают материал в учебнике и отвечают на вопросы друг другу, выполняют указанные задания.

Уроки общения позволяют спросить каждого по всему необходимому материалу курса, хотя опрос ученика учеником теряет в качестве по сравнению с опросом ученика учителем. Не любой класс готов сразу к урокам общения. К этим урокам детей готовят двухурочные циклы и уроки решения задач.

В соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий пошаговый контроль должен постепенно заменяться полностью самостоятельной работой. Для организации такой работы предназначен последний урок четырехурочного цикла. Важно рассматривать урок *самостоятельной работы* как этап обучения, на котором продолжается усвоение некоторой порции знаний. Тогда понятна целесообразность подготовки детей к самостоятельной работе, правомочность помощи отдельным ученикам в ходе самостоятельной работы.

Урок самостоятельной работы состоит из трех этапов. Его цель – проконтролировать усвоение введенного теоретического материала.

На первом этапе проводится опрос по конспектам и у доски. В течение 5 минут учащиеся на чистых листах воспроизводят по памяти тот самый конспект, который они переписали с доски на первом уроке и выучили наизусть дома. После этого класс слушает учеников, вызванных к доске (предупрежденных об этом накануне), которые рассказывают материал учебника.

На втором этапе учитель готовит класс к самостоятельной работе. Часть рассматриваемого урока рекомендуется посвятить решению задач, аналогичных первым четырем задачам самостоятельной работы. Это тот обязательный минимум новых знаний, который свидетельствует: основное содержание усвоено

на базовом уровне. Текст решения этих заданий остается на доске на протяжении всей самостоятельной работы.

На третьем этапе выполняется самостоятельная работа в нескольких вариантах одинаковой сложности и трудности: первые четыре задания легкие, пятое задание – сложное, шестое задание – трудное. Каждый ученик, в зависимости от его сегодняшних возможностей, достигнет того или иного уровня, получит ту или иную оценку, этим и будет обеспечена дифференциация.

Важная особенность циклов в седьмом и следующих классах – изменение последовательности уроков: здесь, как правило, вначале организуется урок общения, а после этого – урок решения задач. Целесообразность такой перестановки определяется особенностями организации работы с вычислительными правилами, с одной стороны, и определениями и теоремами – с другой.

Основная особенность работы с вычислительными правилами – выполнение тех вычислений, которые фиксированы в подробной записи соответствующего правила. Нет необходимости знать это правило при первоначальном закреплении: надо уметь им пользоваться (выполнять, опираясь на схематические записи, вначале максимально подробные, а затем все более краткие). Умение воспроизводить правило готовится в ходе этой работы. Поэтому вначале – урок решения задач, потом – урок общения.

При организации усвоения определений и теорем необходимо учитывать, что огромному числу совершенно непохожих внешне формулировок соответствуют одни и те же действия учеников, и усвоение этих способов работы обеспечивается при знакомстве с первыми встретившимися в курсе определениями и теоремами. Впоследствии, после того как способ работы усвоен, целью становится усвоение того специфического, что отличает данную формулировку от других: вводимого определением термина, видовых его отличий, условия теоремы и т.п. Такую работу удобно организовать на уроке общения, а после этого организовать использование новых знаний на уроке решения задач и в самостоятельной работе.

По мере того, как школьники овладевают способами работы с определениями и теоремами, всё больше материала переходит в зону актуального развития всех учеников в классе. Это, во-первых, означает, что в единицу учебного времени может быть переработан больший объем материала, во-вторых, можно существенно увеличить удельный вес самостоятельной работы детей. Обе эти особенности отражают одно и то же явление, о котором уже рассказывалось: материал, который находится в зоне актуального развития ребенка, может усво-



ить сам ученик при минимальной помощи учителя. Это, в свою очередь, означает, что от класса к классу следует все чаще организовывать *многоурочные циклы*, в ходе которых ученики самостоятельно изучают весь материал темы или какую-либо его часть; сдают учителю теорию; выполняют задания и отчитываются об их выполнении; пишут самостоятельную работу, позволяющую проверить умение самостоятельно оперировать материалом темы; сдают зачет.

Время на изучение материала в ходе многоурочного цикла может быть распределено, например, так. На уроке объяснения преподаватель должен познакомить с наиболее важным и наиболее трудным в изучаемом материале; точно указать, какой минимум материала должен быть усвоен к середине следующего урока – времени, с которого преподаватель может приступить к проверке этой части теории; какой материал должен быть самостоятельно изучен и сдан в течение каждого из следующих уроков, отведенных на его изучение. Уроки общения могут начинаться непосредственно после завершения объяснения, т.е. на первом уроке цикла. Школьники самостоятельно изучают материал, а учитель постепенно опрашивает учеников. На уроках решения задач школьники самостоятельно решают и, работая парами, проверяют правильность решения задач. Завершает цикл самостоятельная работа или зачет.

Отметим, что педагогическая технология на основе системы эффективных уроков А.А. Окунева [40], несмотря на отличие ее концептуальных положений от технологии М.Б. Воловича, Г.Г. Левитаса и др., включает сходную классификацию уроков:

- уроки, где ученики учатся вспоминать материал (учиться держать материал в памяти);
- урок поиска рациональных решений;
- урок проверки результатов путем сопоставления с данными;
- урок одной задачи;
- урок самостоятельной работы, требующий творческого подхода;
- урок самостоятельной работы по материалу, который не объясняли;
- урок, на котором возвращаются к ранее изученному материалу, рассматривают знания под новым углом зрения;
- урок-«бенефис»;
- лабораторные работы по геометрическому материалу младших;
- урок – устная контрольная работа;
- урок-зачет (тематический и итоговый).

Как пишут Т.А. Иванова и ее соавторы [24], в теории формирования умственных действий П.Я. Гальперина алгоритм, правило есть не что иное, как ориентировочная основа умственного действия, соответствующая общему методу решения однотипных задач. Сначала ученик выполняет новое действие как внешнее, с какими-то материализованными объектами, и лишь постепенно это действие становится внутренним, психическим, умственным. Вот этот процесс перехода внешнего, предметного действия во внутренний умственный план, психологи называют интериоризацией.

Представленная Т.А. Ивановой, Е.Н. Перевощиковой, Л.И. Кузнецовой и Т.П. Григорьевой технология обучения правилам соответствует общим положениям, развиваемым в психологической теории учебной деятельности, где ученик «... выступает как ее подлинный субъект, проявляя инициативу и самостоятельность в принятии и решении учебных задач» [20, с. 185], и основным положениям теории формирования умственных действий [16; 48].

*Мотивационно-ориентировочная часть* методики состоит из этапов актуализации, мотивации, постановки учебной задачи и планирования.

Целью первого этапа является актуализация прежнего опыта (опорных знаний, методов, способов, приемов), необходимого для введения и обоснования правила, выявление того, освоен ли учащимися пооперационный состав действия, входящий в состав нового правила; создание ситуации успеха для последующей деятельности.

Основным средством актуализации являются специальные упражнения, которые учителю нетрудно составить самому, исходя из логического анализа правила. Итогом данного этапа является ответ ученика на вопрос: «Готов ли я к изучению нового?». Поэтому обычно практикуется индивидуальное выполнение упражнений с последующей фронтальной проверкой.

Целью этапа мотивации является формирование у каждого учащегося личной потребности в последующей деятельности, связанной с «открытием» нового правила.

Создав ситуацию успеха на первом этапе, учитель предлагает ребятам конкретную учебно-практическую задачу, которая по внешним признакам знакома им. Однако ее решение вызывает серьезные затруднения или приводит к нерациональным операциям. Так в сознании учащихся создается «ситуация интеллектуального конфликта» (хочу, но не могу!), которая и формирует потребность в дальнейшей деятельности.

Сначала каждый ученик пытается решить задачу самостоятельно. После неудачных попыток он ищет помощь у других. Таким образом на уроке возникает сотрудничество учащихся.

Целью этапа постановки учебной задачи является непосредственное подведение учащегося к необходимости «открытия» нового правила. Ученики анализируют в группах затруднения, возникшие в связи с конкретной учебно-практической задачей. Тем самым они пытаются отделить свои знания от незнаний. Этот этап обычно заканчивается ответами школьников на вопрос «Что же мы должны узнать, чтобы решить последнюю задачу?». Итак, учащиеся сами формулируют цели урока, которые фиксируются на доске и в их тетрадях, например, в такой форме: «Открыть правило ...»

На этапе планирования учащиеся составляют программу дальнейшей деятельности, направленной на открытие нового правила, выясняют коллективно характеристические свойства данных и искомых объектов, затем выделяют последовательность вопросов, поиск ответов на которые приведет к «открытию» правила.

*Операционно-познавательная часть* обучения правилам состоит из этапов преобразования условия задачи, моделирования и формулирования правила и осознания правила (алгоритма).

Целью первого этапа является преобразование условия задачи таким образом, чтобы можно было установить связи между характеристическими свойствами данных и искомых объектов.

На этапе моделирования правила создается модель правила, проводится ее анализ и уточнение. Учащиеся пытаются зафиксировать выявленные на предыдущем этапе характеристические свойства данных и искомых объектов в виде некоторой модели (графической или символической). На этом этапе урока желательно прибегнуть к групповой форме. Каждая группа обычно создает свою модель. Результаты фиксируются на отдельных листах, которые по окончании работы прикрепляются к доске. Затем учитель организует межгрупповую дискуссию, в ходе которой выделяется лучшая модель правила (если она имеется среди предложенных) или корректируются предложенные. Таким образом рождается коллективная модель правила. Заметим, что учитель тоже может предлагать свои модели: в одних случаях верные (особенно на первых порах), в других – неверные (для того чтобы оживить дискуссию). В процессе обучения ребята постепенно становятся более самостоятельными при создании моделей новых

правил и поэтому начинают предлагать различные виды моделей, которые все менее нуждаются в уточнении.

Целью этапа формулирования правила является получение словесной формулировки правила. После того как выявлена и уточнена модель правила, учащиеся пытаются в группах сформулировать словами само правило. Теперь модель выступает в роли внешней опоры для формулирования правила. Полезно сравнить отредактированный вариант формулировки правила с тем, который предложен в школьном учебнике. Организация данного этапа способствует развитию речевых умений учащихся.

Этап построения алгоритма посвящен выделению последовательности элементарных операций, из которых состоит действие на основе правила. Анализируя правило, ученики выделяют элементарные операции, входящие в состав правила и их последовательность. Фиксируют выделенную последовательность операций в виде схемы или разбивают текст правила на части, соответствующие той или иной операции. Части отделяются одна от другой вертикальной чертой, например: *квадрат суммы двух чисел | равен квадрату первого числа | плюс удвоенное произведение первого числа на второе | плюс квадрат второго числа*. Каждое правило желательно фиксировать по возможности в нескольких формах. Записи могут быть вынесены на плакат, слайд, в отдельную тетрадь-справочник учащегося.

Цель работы учащихся на этапе осознания правила (алгоритма) – осознать, осмыслить правило при решении различных дидактических задач, а также его запомнить. Очевидно, основным средством обучения на этом этапе служит система упражнений. Наибольшую трудность, особенно для начинающего учителя, представляет разработка системы упражнений. Действительно, на уроках нередко наблюдаем такую картину (особенно характерна для уроков алгебры): после введения правила учитель дает список упражнений из учебника – для классной работы, например, под четными номерами, для домашней – под нечетными. Заметим, что такой подход к выбору упражнений рекомендуют авторы многих методических пособий. Как правило, учитель использует при этом фронтальную форму организации учебной деятельности.

При первом взгляде обстановка на уроке вполне нормальная, как будто каждый ученик занят выполнением упражнений. Однако более пристальные наблюдения позволяют выделить разные группы ребят. Одни переписывают, едва успевая за теми, кто работает у доски. Другие, у кого быстрая реакция и кто неплохо владеет техникой вычисления, после фронтального выполнения перво-

го задания на доске механически переносят идеи его решения на серию однотипных упражнений. Дойдя до нового вида задания, они начинают испытывать затруднения, но даже не пытаются напрячь свои умственные силы, так как знают, что скоро появится его решение на доске. Затем они опять быстро выполняют серию однотипных упражнений и т.д. Третьи, у кого обычно завышена самооценка, выполняют задания, опережая работающих у доски и совершая порой грубые ошибки. Все призывы учителя сверить свое решение с записями на доске они оставляют без внимания. И лишь небольшая группа ребят самостоятельно выполняет упражнения в своем темпе; сверяя свои ответы с результатами, которые постепенно появляются на доске.

Порой возникает и такая ситуация. Учитель запланировал определенное число упражнений, но оно оказалось явно завышенным. Тогда учитель, чтобы успеть выполнить намеченное, начинает торопить ребят или переносит часть упражнений (в конце урока они обычно сложнее) в домашнее задание.

Такая картина, думаем, знакома многим. В связи с этим необходимо рассмотреть следующие вопросы:

1. Каково должно быть содержание упражнений?
2. Какова при этом последовательность их выполнения?
3. Какие спланировать организационные формы выполнения упражнений?

Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова и Т.П. Григорьева [24] отвечают на эти вопросы, опираясь на исследования Я.И. Груденова [18] и Г.И. Саранцева [44] по проблеме построения и реализации системы упражнений в обучении математике.

1. При отборе содержания упражнений учителю следует руководствоваться определенными принципами, а именно: полноты, однотипности, контрпримеров, сравнения, непрерывного повторения, вариативности, единственного различия.

Дадим краткую их характеристику и проиллюстрируем на примере правила умножения десятичных дробей.

Система упражнений удовлетворяет *принципу полноты*, если она содержит все виды заданий на данное правило, включая и особенные случаи.

Так, в соответствии с этим принципом упражнения на правило умножения десятичных дробей должны содержать по крайней мере четыре вида заданий: 1) цифр в произведении достаточно для отделения десятичных знаков; 2) не хватает цифр для целой части; 3) не хватает цифр для целой и дробной частей; 4) умножение десятичной дроби на натуральное число.

Вполне очевидны последствия несоблюдения принципа полноты. К сожалению, в учебниках не всегда реализован этот принцип.

*Принцип однотипности* требует, чтобы на каждый вид задания было не одно упражнение. Отметим, что однотипные упражнения особенно необходимы для слабых учеников и в меньшей мере для сильных. Значит, на каждый из четырех видов (см. предыдущий пример) учитель должен подобрать достаточное число однотипных упражнений, ориентируясь на уровни развития учащихся класса. Однако, последовательное выполнение однотипных упражнений приводит к снижению активности мыслительной деятельности учащихся, так как при решении лишь первого примера они опираются на соответствующее правило. Поэтому нужно применять и другие принципы, в частности *принципы контр-примеров и сравнения*.

Контрпример – это любая задача, которая провоцирует учащихся на ошибку. Соблюдение этого принципа ведет к воспитанию положительной мотивации и вместе с тем способствует углубленному пониманию правила. Я.И. Груденов по этому поводу пишет: «В тех классах, где контрпримеры начинают использовать систематически, они воспринимаются учащимися как своеобразная игра, в которой побеждают более внимательные и сообразительные» [18, с. 157].

Заметим, что многие учебники практически не содержат заданий, провоцирующих учащихся на ошибку. Значит, учителю нужно самому подбирать или создавать такие упражнения. Приведем пример упражнения, которое соответствует обсуждаемому принципу.

Пример. Определите, в каких примерах допущены ошибки, если известно, что

$$72 \cdot 37 = 2664:$$

- 1)  $7,2 \cdot 0,37 = 266,4$ ;
- 2)  $7,20 \cdot 0,37 = 0,2664$ ;
- 3)  $0,072 \cdot 370 = 2,664$ ;
- 4)  $0,720 \cdot 370 = 26,64$ .

Применение *принципа сравнения* предполагает включение некоторого ряда взаимосвязанных упражнений, когда хотя бы подчеркнуть их сходство или различие, в частности упражнения на прямые и обратные операции, действия.

Классическим примером может служить совместное решение задач следующих трех видов: 1) нахождение процентов от числа, 2) нахождение числа по его проценту, 3) нахождение процентного отношения.

Рассмотрим применение принципа сравнения к правилу умножения десятичных дробей.

Пример. Поставьте запятую во втором множителе так, чтобы равенство было верным:  $0,52 \cdot 167 = 8,684$ .

Здесь ученикам придется выполнять обратную операцию: из числа десятичных знаков произведения вычитать число десятичных знаков первого множителя.

*Принцип непрерывного повторения* означает следующее. Система упражнений содержит задачи из предшествующих разделов. Цель их включения: во-первых, осуществлять систематическое повторение изученных действий, особенно тех, при выполнении которых учащимися допускаются ошибки, во-вторых, устранять отрицательное влияние однотипности упражнений (ослабление внимания, снижение интереса и т.д.).

Обратимся к показательному примеру – правилу умножения одночленов. Полезно, например, в такие упражнения, как  $-a^2 \cdot (-a^2)$ ;  $-5x^3 \cdot (-3x^3)$ ;  $b \cdot b$  и т.д., включать упражнения на сложение одночленов:  $-a^2 - (-a^2)$ ;  $-5x^3 + (-3x^3)$ ;  $b + b$  и т.д. Заметим, что последние примеры соответствуют одновременно и принципам контрпримеров, и сравнения.

*Принцип вариативности* реализуется двояко: с одной стороны, должно быть видоизменение формы выдачи заданий, с другой – разнообразие числовых и буквенных компонентов алгебраических выражений, а в упражнениях по геометрии – варьирование рисунков и обозначений.

Так, в одном из школьных учебников даны 34 упражнения на правило умножения десятичных дробей с одной формулировкой задания: вычисли. Полезно учащихся включать в игру «Кто больше придумает формулировок к примеру  $0,720 \cdot 370 = 266,4?$ ». Вот некоторые из них:

- 1) вычислить;
- 2) найти значение числового выражения;
- 3) найти произведение;
- 4) найти число, которое в 370 раз больше данного;
- 5) выполнить умножение и т.д.

Сущность *принципа единственного различия* заключается в сохранении всех элементов формы упражнений при переходе от одного упражнения к другому, кроме одного. Если проанализировать все операции, входящие в правило умножения десятичных дробей, то новой является подсчет числа десятичных знаков в произведении. Следовательно, надо отобрать группу упражнений на осмысление этой операции. После заданий на вычисление произведения чисел

4,302 и 5,6 сразу же предлагаем серию упражнений с «плавающими» запятыми:  
а)  $4,302 \cdot 56$ ; б)  $4,302 \cdot 0,0056$ ; в)  $4,302 \cdot 0,0056$ .

Заметим, что не надо формально подходить к отбору содержания упражнений. В зависимости от новой темы, цели урока и других соображений учитель может реализовать не все принципы, в особенности принципы непрерывного повторения и сравнения, а иногда одно упражнение, как было замечено выше, удовлетворяет нескольким принципам.

2. Опираясь на вышеуказанные принципы, учитель отбирает упражнения на осознание, осмысление того или иного правила. Теперь встает проблема их упорядочивания. Очевидно, надо исходить из *принципа от простого к сложному*.

Еще одним важным принципом для определения последовательности упражнений служит *принцип цикличности*. Чтобы понять его важность, обратимся опять к теории поэтапного формирования умственных действий. Каждому этапу формирования умственного действия соответствует определенный цикл упражнений, который, в первую очередь, удовлетворяет принципу полноты. Там, где разумно, при подборе упражнений первого цикла учитывают принцип единственного различия, при подборе упражнений других циклов – либо принцип контрпримеров, либо принцип непрерывного повторения, либо принцип сравнения. Следовательно, однотипные упражнения находятся в разных циклах, тем самым снимается отрицательный фактор одновременного выполнения однотипных упражнений. При переходе от цикла к циклу сложность упражнений возрастает, порядок упражнений внутри каждого цикла меняется.

В соответствии с вышеперечисленными принципами построим систему упражнений для этапа осознания правила умножения десятичных дробей.

#### *I цикл*

Выполните умножение, сопоставляя каждое свое действие с записанным правилом:

1)  $4,302 \cdot 5,6$ ; 2)  $4,302 \cdot 56$ ; 3)  $4,302 \cdot 0,056$ ; 4)  $4,302 \cdot 0,0056$ .

#### *II цикл*

Вычислите, вслух обоснуйте каждый свой шаг, опираясь на правило: 1)  $6,17 \cdot 0,034$ ; 2)  $0,056 \cdot 1,05$ ; 3)  $0,72 \cdot 37$ ; 4)  $6,09 + 3,1$ .

#### *III цикл*

Работа организуется в парах, где каждый по очереди объясняет другому решение, при этом правило закрывается.

1. Поставьте запятую в произведении:  $0,67 \cdot 120 = 804$ .



2. Поставьте запятую во втором множителе:  $0,52 \cdot 167 = 8,684$ .

3. Поставьте запятые в обоих множителях:  $3 \cdot 6 = 0,0018$ . (Это упражнение интересно тем, что оно имеет бесконечное множество вариантов.)

#### *IV цикл*

Этот цикл упражнений ребята выполняют уже индивидуально, затем организуется проверка их решений.

Определите, в каких примерах допущены ошибки, если известно, что  $72 \cdot 37 = 2664$ :

1)  $7,2 \cdot 0,37 = 266,4$ ; 2)  $7,20 \cdot 0,37 = 0,2664$ ; 3)  $0,072 \cdot 370 = 2,664$ ; 4)  $0,720 \cdot 370 = 26,64$ .

Заметим, что структурирование упражнений по циклам позволяет учителю чувствовать себя на уроке более комфортно, на него не оказывает сильное влияние временной аспект, так как уже в первом цикле исследуются все особые случаи применения нового правила (алгоритма).

К числу циклов не надо подходить формально, на отработку некоторых правил в отдельных классах достаточно бывает и трех циклов, иногда их число больше. Кроме того, не всегда все циклы удастся реализовать на одном уроке.

3. При выполнении упражнений первого цикла, очевидно, целесообразно использовать фронтальную форму работы, так как каждое упражнение цикла имеет свои особенности. Получив первое упражнение цикла (например,  $4,302 \cdot 5,6$ ), ученик прочитывает вслух первую операцию, входящую в состав действия (записать данные множители, не обращая внимания на запятые), выполняет ее ( $4302 \cdot 56$ ), затем переходит ко второй операции и так до тех пор, пока не выполнит все записанные операции.

Решение упражнений второго цикла полезно вести с комментированием, что дает возможность учителю осуществлять пооперационный контроль за действиями учащихся. Упражнения третьего и четвертого циклов учащиеся могут выполнять в парах или самостоятельно. Конечно, здесь требуется оперативная проверка результатов их работы. На этих этапах правило закрывается, работа идет по памяти, происходит постепенно интериоризация действия во внутренний план.

Общеизвестно, что решение и составление задач учащимися – это два связанных между собой процесса, которые направлены на качественное усвоение знаний. В связи с этим можно предложить ученикам два варианта домашнего задания: составить и выполнить примеры на правило умножения десятичных

дробей на каждый случай, т.е. четыре примера, или составить краткий справочник возможных ошибок при умножении десятичных дробей.

В отличие от обычного домашнего задания здесь мало рутинной работы для учащихся, есть возможность проявить оригинальность, самостоятельность, выдумку. Кроме того, оно индивидуально. В классе появляется атмосфера состязательности, что еще полнее мобилизует волевые, умственные и эмоциональные силы учащихся.

Организация *рефлексивно-оценочной части* в технологии усвоения правила очень важна для субъектов деятельности: они «прокручивают» весь ход рассуждений, отмечая всё лишнее и выделяя самое главное, что нужно осознать и запомнить. Знания учеников начинают приобретать системный характер. Опишем кратко этапы рефлексивно-оценочной части усвоения правила.

Цель этапа соотнесения полученных результатов с учебной деятельностью – вызвать чувство удовлетворения у ребят от проведенного исследования. Ученики воспроизводят по требованию учителя поставленную цель в начале урока, формулируют полученное правило (алгоритм), сравнивают результаты с целью урока. Этот этап важен в плане формирования положительных интеллектуальных эмоций: «Поставили в начале урока цель и ее достигли!». У ребят появляется уверенность в себе, формируются познавательные мотивы к математической деятельности.

Цель этапа осмысления прежнего опыта, с помощью которого получено новое правило, – осознать теоретический базис и познавательные средства, которые помогли «открыть» новое правило. Анализируя способ получения правила, ученики перечисляют те теоретические положения, которые входят в обоснование нового правила: определения, теоремы, изученные ранее правила. Кроме того, они выделяют познавательные средства (методы, приемы, способы), которые позволили сформулировать новое правило, а затем и обосновать его.

На этапе прогнозирования применения правила проектируется система задач на применение нового правила. Ученики получают ответы на такие вопросы: зачем я изучил это правило, в каких случаях, ситуациях я могу его применить? Ученики вовлекаются в составление различных упражнений, заданий на применение правила. Со временем составление задач обращается в своеобразную игру между ними. В эту игру вовлекается и учитель: он демонстрирует свои варианты заданий, составленных им самостоятельно или подобранных из различных сборников задач. Особый интерес представляют задачи «с ловушками»

или «с нахождением ошибок». Ребята ждут с нетерпением: чьи задачи учитель включит в урок сегодня или завтра, в самостоятельную или контрольную работу в дальнейшем? Это для них является лучшей похвалой со стороны учителя. В ходе такой работы ученики усваивают смысл изучаемого правила, следовательно, у них повышается мотивация к занятиям по математике.

Цели этапа контроля (самоконтроля) усвоения правила – помочь учащимся овладеть способами и критериями самоконтроля, определить уровни усвоения правила и выявить «точечные» затруднения в усвоении правила.

Учитель подбирает или составляет сам систему заданий, с помощью которой можно диагностировать усвоение правила. Каждый ученик выполняет самостоятельно предложенные задания, а затем подвергает пооперационному контролю выполнение каждого из них, фиксируя свои выводы рядом с решением в виде последовательности знаков: + (если уверен в правильности выполненной операции), – (если не знает, как выполнить операцию),  $\pm$  (если не уверен в правильности выполненной операции).

Проверяя данную работу, учитель не исправляет допущенные учеником ошибки, но фиксирует их в своей тетради. Кроме того, сопоставляет последовательность знаков пооперационного контроля ученика с выполненными им заданиями. На основе проведенного содержательного анализа он составляет вторую работу в виде тестов, где к каждому заданию предлагаются несколько вариантов решений (правильных, неправильных, нерациональных), которые взяты непосредственно из первой работы самих учащихся.

Ученик индивидуально отвечает на вопросы теста. Потом учащиеся уточняют свои ответы в группах, а учитель организует совместное обсуждение результатов (если в этом есть необходимость). В заключение учитель раздает тетради с первой работой, ученик выполняет заново те задания, в которых, как он считает, допустил ошибки. Только теперь учитель ставит оценку, сравнивая результаты двух выполненных работ, чтобы убедиться в возможности ребят корректировать свою деятельность.

На этапе оценки (самооценки) учебной деятельности каждому ученику предлагается оценить свою учебную деятельность на уроке.

На этом этапе урока ученик кратко получает ответы на следующие вопросы: Чем был полезен для меня сегодняшний урок? Что особенно было интересно? Какие были «точечные» затруднения? С чем они были связаны? Какое мое участие в получении нового правила? Какие позитивные изменения произошли в моем мышлении? и т.д. В заключение учитель оценивает работу

учащихся, особо выделяет тех учеников, у которых произошел «прорыв» или в создании модели правила, или в ее «озвучивании», или в составлении системы упражнений, заданий на непосредственное усвоение правила и дальнейшего его применения.

Естественно, что реализовать на одном уроке все перечисленные этапы учебной деятельности практически невозможно. Обычно на первом уроке происходит «открытие правила». Этап осознания правила достаточно длительный по времени, он реализуется на нескольких уроках. Заключительным этапам также посвящаются отдельные уроки.

Проиллюстрируем предложенную технологию на примере урока, на котором учащиеся «открывают» правило умножения десятичных дробей [24].

Учебная задача урока состоит в том, чтобы совместно с учениками «открыть» правило умножения десятичных дробей, анализируя результат умножения десятичных дробей в виде обыкновенных.

Можно выделить следующие диагностируемые цели урока. По окончании урока каждый ученик:

- воспроизводит одну из моделей правила;
- выделяет последовательность элементарных операций, входящих в правило;
- понимает, что правило умножения десятичных дробей включает в себя правило умножения натуральных чисел;
- раскрывает смысл правила своими словами;
- понимает происхождение правила;
- понимает, что при установке запятой в произведении десятичных дробей возможны четыре различных ситуации.

В начале мотивационно-ориентировочной части урока учитель задает классу следующие вопросы (ответы учащихся приведены в скобках).

- Какому числовому множеству принадлежат следующие числа: 5 461;  $5 \frac{461}{1000}$ ; 1,21; 4,3? (Множеству обыкновенных дробей; множеству десятичных дробей.)

– Поясните свой ответ. (Все записанные числа можно представить в виде обыкновенных дробей, например:  $5,461 = 5 \frac{461}{1000} = 5 \frac{4610}{10000}$  и т.д. Кроме того, их можно представить и в виде десятичных дробей, например:  $5 461 = 5461,0$ .)

– Сколько десятичных знаков содержат данные числа? Отделите запятой, считая справа налево, три десятичных знака в числе 5 461. (5,461) А теперь отделите запятой три знака, считая слева направо (546,1).

– Сравните 5,461 и 546,1. Сделайте вывод. (Положение запятой зависит не от того, из каких цифр состоит исходное натуральное число. Это положение определяется только тем, сколько цифр надо отделить и в каком порядке считать отделяемые цифры: слева направо или справа налево.)

– Отделите запятой, считая справа налево, в числе 5 461 четыре десятичных знака, а потом пять десятичных знаков. (0,5461 и 0,05461)

– Сколько десятичных знаков после запятой вместе в полученных числах? (9)

– Найдите сумму чисел 1,27 и 4,3. Сформулируйте соответствующее правило. На какое правило оно похоже? (Правило сложения десятичных дробей полностью аналогично правилу сложения натуральных чисел.)

– Вычислите произведение натуральных чисел 127 и 43. (5 461).

На этапе мотивации класс выполняет задание: найдите, какой десятичной дроби равняется произведение чисел 1,27 и 4,3.

Ребята выполняют указанное действие в группах (парах) на отдельных листах. Некоторые группы (пары) учеников могут получить неверные ответы, связанные с формальным переносом правила сложения дробей. Следует обсудить с ребятами все возникшие неверные результаты с целью развития у них критичности мышления. Кроме того, у школьников повышается интерес к выполнению задания. Далее вместе с учителем ученики выясняют, сколько операций пришлось выполнить, чтобы найти произведение двух десятичных дробей: перевести десятичные дроби в обыкновенные, получить неправильные дроби, выполнить умножение числителей, затем знаменателей, перевести неправильную дробь в смешанное число, записать обыкновенную дробь в виде десятичной – всего шесть операций. Так ученики убеждаются в нерациональности полученного ими способа нахождения произведения двух десятичных дробей. Теперь учитель предлагает вспомнить ребятам, когда они имели аналогичную ситуацию. (Когда впервые находили сумму десятичных дробей, не зная соответствующего правила.)

Учитель ставит вопросы:

– Какая же сейчас перед нами возникает задача? (Найти правило умножения десятичных дробей, не прибегая к обыкновенным дробям.)

– Как сформулировать тему урока? (Ученики записывают в тетрадях тему урока «Правило умножения десятичных дробей».)

Планирование дальнейшего проходит в виде фронтальной беседы:

– Мы убедились, что при умножении двух десятичных дробей получается также десятичная дробь:  $1,27 \cdot 4,3 = 5,461$ . Следовательно, правило умножения

десятичных дробей должно отвечать на вопрос: как получить десятичную дробь в произведении, если известны множители, являющиеся десятичными дробями?

– Вспомним: как из натурального числа можно получить десятичную дробь? (Надо отделить несколько цифр числа запятой.)

– Следовательно, правило умножения десятичных дробей должно состоять из двух частей. На какие же два вопроса должно отвечать правило умножения десятичных дробей? (Первый вопрос: как получить натуральное число в произведении? Второй вопрос: как в нем поставить запятую?)

– Какая часть правила у вас не вызывает затруднений? (Мы знаем, как ответить на первый вопрос, т.е. как получить натуральное число путем умножения двух натуральных чисел без учета запятых.)

Итак, мы подходим к операционно-познавательной части урока.

Нам надо изучить вопрос о связи положений запятой в данных множителях с положением запятой в произведении. Так как мы убедились, что цифровая информация не оказывает влияния на положение запятой, то, по-видимому, чтобы получить ответ на второй вопрос, нужно использовать некоторую схематическую запись трех чисел. В группах ученики пытаются перейти к схематической записи, используя самые произвольные знаки: кружочки, квадратики, звездочки, но не цифры. Их записи подвергаются совместному анализу. В группах идет обсуждение и «рождение» модели правила. По требованию учителя результаты групп, зафиксированные на отдельных листах, выносятся на доску для межгрупповой дискуссии. Итогом дискуссии является уточненная модель правила.

Теперь учитель предлагает ребятам сформулировать правило умножения десятичных дробей словами.

– Сформулируйте правило умножения десятичных дробей, опираясь на полученную его модель.

– Сравните сформулированное правило с соответствующим текстом учебника.

– Какие элементарные операции входят в правило?

– Постройте это правило в виде алгоритма.

– Какая операция алгоритма является для вас новой? (Постановка запятой в произведении.)

На этапе осознания правила учащиеся выполняют умножение, сопоставляя каждое свое действие с записанным правилом. Далее учащиеся выполняют первый цикл вышеприведенных упражнений «с плавающей запятой».

В рефлексивно-оценочной части урока дети соотносят полученные результаты с учебной задачей.

- Какую задачу мы поставили перед собой в начале урока?
- Можно ли считать, что мы ее решили?

Идет осмысление прежнего опыта, с помощью которого получено новое правило.

– Какие знания нам помогли «открыть» новое правило? (Правило умножения обыкновенных дробей, правило умножения натуральных чисел, правила представления десятичных дробей в виде обыкновенных и обыкновенных дробей в виде десятичных.)

– Применяя эти правила, мы смогли перемножить две конкретные десятичные дроби и получить конкретный результат. Какой же познавательный опыт помог вам перейти от конкретного примера к правилу? (Изучение этого примера.)

– Действительно, вы изучали, анализировали конкретную ситуацию, всё свое внимание сосредоточили при этом на изучении запятых в множителях и произведении. Результаты анализа постепенно отражали на модели правила.

В ходе рефлексии учащиеся отвечают на вопросы:

- Можно ли утверждать, что правило умножения десятичных дробей мы выучили? Умеем его применять для любых десятичных дробей?
- Какие случаи оказались для вас более сложными?
- Каковы цели следующих уроков?

В результате обсуждения ответов на поставленные вопросы класс приходит к выводу, что надо выучить правило дома, на следующем уроке учиться его применять, в особенности, для случаев с «дополнительными» нулями, после чего провести самостоятельную работу, с помощью которой можно проверить усвоение правила умножения десятичных дробей. И только потом можно перейти к применению правила при решении более сложных заданий (например, уравнений и текстовых задач). Очевидно, что описанная технология обучения потребует, особенно вначале, несколько больших затрат времени. Однако эти затраты окупаются, как показывает опыт, формированием положительных характеристик действия: правильностью, большей самостоятельностью, устойчивостью, обобщенностью, а также способностью к переносу умения на новые ситуации.

Как показывает практика, у школьников, которые обучались по данной технологии, формировалась корректная математическая речь, они произ-

вольно запоминали правила, им не нужно было большого числа упражнений на их усвоение.

Рассмотрим *пример урока математики* в 8 классе на тему «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями» с использованием технологии обучения на основе поэтапного формирования умственных действий.

На уроке планируется достижение следующих образовательных результатов.

Предметные: формировать умения и навыки сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями.

Метапредметные:

– регулятивные – уметь определять и формулировать цель на уроке с помощью учителя; проговаривать последовательность действий на уроке; работать по коллективно составленному плану (алгоритму); оценивать правильность выполнения действия; планировать свое действие в соответствии с поставленной задачей; вносить необходимые коррективы в действие после его завершения на основе его оценки и учета сделанных ошибок; высказывать свое предположение;

– коммуникативные – уметь выражать свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других; совместно договариваться о правилах поведения и общения в школе и следовать им;

– познавательные – уметь ориентироваться в своей системе знаний, отличать новое знание от уже известного с помощью учителя, добывать новые знания, находить ответы на вопросы, используя учебник, свой жизненный опыт и информацию, полученную на уроке.

Личностные: развитие внимания, памяти, логического и творческого мышления; развитие умений осуществлять самооценку на основе критерия успешности учебной деятельности, ориентироваться на успех в учебной деятельности.

Первый этап урока – мотивационный. Учитель организует повторение сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

Задание 1. Выполнить действия:

$$1) \quad \frac{2a+5}{4a^2} + \frac{3a-2}{4a^2},$$

$$2) \quad \frac{8x+5}{x-1} - \frac{5x-2}{x-1}.$$

Учащиеся выполняют действия:

$$1) \quad \frac{2a+5}{4a^2} + \frac{3a-2}{4a^2} = \frac{2a+5+3a-2}{4a^2} = \frac{5a+3}{4a^2},$$

$$2) \quad \frac{8x+5}{x-1} - \frac{5x-2}{x-1} = \frac{8x+5-(5x-2)}{x-1} = \frac{8x+5-5x+2}{x-1} = \frac{3x+7}{x-1}.$$

Учитель предлагает решить следующее задание.



Задание 2. Выполнить действия:

1)  $\frac{y}{4x^2} + \frac{y^2}{6x^2}$ ,

2)  $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y}$ .

Дети испытывают затруднения, так как они умеют складывать только дроби с одинаковыми знаменателями. С помощью наводящих вопросов учителя учащиеся формулируют цели и тему урока.

Второй этап – составление схемы ориентировочной основы действия.

При изучении темы «Сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями» ориентировочная основа действий создается так:

Учитель объявляет тему и сначала организует повторение сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями.

Пример: 1)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$ ; 2)  $\frac{1}{2} - \frac{3}{7} = \frac{7}{14} - \frac{6}{14} = \frac{7-6}{14} = \frac{1}{14}$ .

Затем учитель предлагает детям самим сформулировать алгоритм сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями (рис. 17).

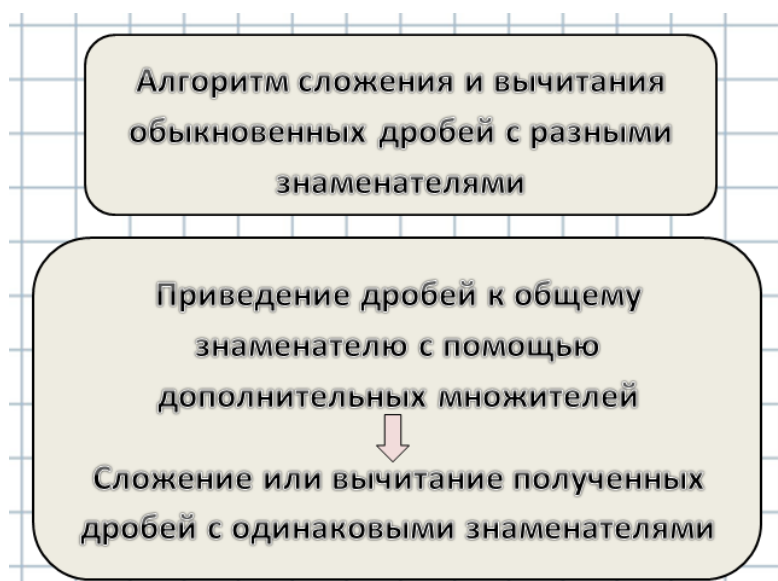


Рис. 17. Алгоритм сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями

На основе сформулированного алгоритма предлагает детям определить алгоритм сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями (рис. 18).

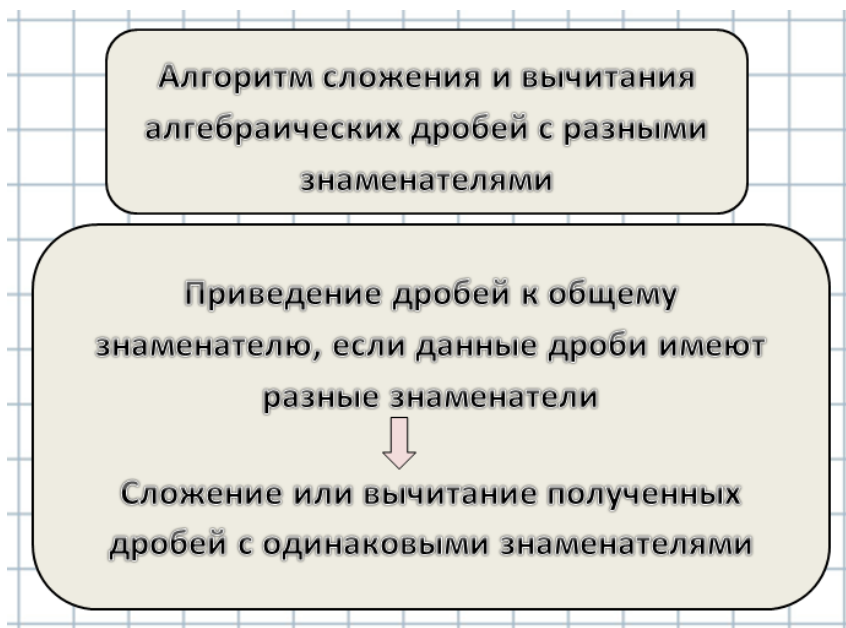


Рис. 18. Алгоритм сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями

Третий этап – формирование действия в материальной или материализованной форме. Действие выполняется как внешнее, практическое, с реальными предметами (материальная форма действия). Действие выполняется с преобразованным материалом: моделями, схемами, диаграммами, чертежами и т.п. (материализованная форма).

При изучении темы этот этап реализуется следующим образом: учитель предлагает выполнить задание, которое не смогли сделать на первом этапе (рис. 19).

$$\frac{y}{4x^2} + \frac{y^2}{6x^3} = \frac{y^{3x}}{4x^2} + \frac{y^{2^2}}{6x^3} = \frac{3xy}{12x^3} + \frac{2y^2}{12x^3} = \frac{3xy+2y^2}{12x^3}$$

$12x^3$ , где 12 – наименьшее общее кратное чисел 4 и 6,  $x^3$  – переменная с большим показателем степени.

$$\frac{x^{x-y}}{x+y} - \frac{x^{x+y}}{x-y} = \frac{x(x-y)}{x+y} - \frac{x(x+y)}{x-y} =$$

$$= \frac{x^2-xy-x^2-xy}{(x+y)(x-y)} = -\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Рис. 19. Выполнение упражнений

Учитель обращает внимание на важность разложения знаменателей дробей на множители при приведении алгебраических дробей к общему знаменателю и предлагает детям составить алгоритм (рис. 20).

### Алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю

1. Разложить все знаменатели дробей на множители.
2. Найти наименьшее общее кратное для числовых коэффициентов.
3. Выбрать повторяющиеся буквенные множители с большим показателем степени.
4. Составить произведение из числового коэффициента и буквенного множителя.
5. Найти для каждой дроби новый числитель: произведение старого числителя и дополнительного множителя.
6. Записать каждую дробь с новым числителем и общим знаменателем.

Рис. 20. Уточненный алгоритм сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями

Учитель предлагает детям набор упражнений на закрепление сформулированных алгоритмов. При этом каждая операция проговаривается учеником. Пример представлен на рис. 21.

Четвертый этап – формирование действия в громкой речи. Ученик, лишенный материальных опор действия, анализирует материал в громкой социализированной речи, обращенной к другому человеку.

Один из способов реализации данного этапа: учащиеся работают в группах, проговаривая решение друг другу. После окончания работы организатор или член группы показывает решение (проговаривая все операции согласно алгоритму; рис. 22), которое обсуждается всеми учениками.

Упростить выражение:  $\frac{b}{2a+2b} + \frac{b}{b-a} + \frac{a^2}{(a-b)^2}$

Решение: общий знаменатель  $2(a+b)(a-b)^2$

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2a+2b} + \frac{\overbrace{b}^{x(-1)}}{b-a} + \frac{a^2}{(a-b)^2} = \frac{b}{2(a+b)} - \frac{b}{a-b} + \frac{a^2}{(a-b)^2} = \\ & = \frac{b(a-b)^2}{2(a+b)} - \frac{b \cdot 2(a+b)(a-b)}{a-b} + \frac{a^2 \cdot 2(a+b)}{(a-b)^2} = \\ & = \frac{b(a^2 - 2ab + b^2)}{2(a+b)(a-b)^2} - \frac{2b(a^2 - b^2)}{2(a+b)(a-b)^2} + \frac{2a^2(a+b)}{2(a+b)(a-b)^2} = \\ & = \frac{a^2b - 2ab^2 + b^3 - 2a^2b + 2b^3 + 2a^3 + 2a^2b}{2(a+b)(a-b)^2} = \\ & = \frac{a^2b - 2ab^2 + b^3 - 2a^2b + 2b^3 + 2a^3 + 2a^2b}{2(a+b)(a-b)^2} = \\ & = \frac{2a^3 - 2ab^2 + a^2b + 3b^3}{2(a+b)(a-b)^2} \end{aligned}$$

Рис. 21. Тренировочное упражнение

## Работа в группах

Решение:

$$1) \frac{b^2}{6x^2} - \frac{b}{3x^6} = \frac{xb^2 - 2b}{6x^6}$$

$$2) \frac{1-b}{3ab} + \frac{2b^2-1}{6ab^2} = \frac{2b-1}{6ab^2}$$

$$3) \frac{b-a}{ab} + \frac{c-b}{bc} - \frac{c-a}{ac} = \frac{0}{abc} = 0$$

Рис. 22. Выполнение упражнений в группах

Пятый этап – формирование действия во внешней речи «про себя». После выполнения серии упражнений предлагаем выполнять умножение «молча», сохраняя, однако, все попутные действия. Такая работа предполагает перевод внешней речи во внутреннюю и закрепление развернутой ассоциации. В случае ошибки учитель просит вернуться к внешней речи и проговорить правило, чтобы обнаружить ошибку.

Шестой этап – формирование действия во внутренней речи. На этом этапе предлагаем подборку упражнений, которые разрешаем выполнять «молча» и без дополнительных письменных отметок в тетради. Происходит свертывание ассоциации, умение автоматизируется. В случае ошибки просим ученика вернуться на предыдущий уровень, чтобы обнаружить и исправить допущенное нарушение правила.

При изучении сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями данный этап можно реализовать следующим образом. Учитель предлагает проверить, поняли ли ученики, как складывать и вычитать дроби с разными знаменателями (рис. 23).

Решите самостоятельно

1 вариант

Проверьте себя

1 вариант

$$\frac{3a+1}{7a} - \frac{7a+b}{14ab} + \frac{1-b}{2b} =$$

$$\frac{3a+1}{7a} - \frac{7a+b}{14ab} + \frac{1-b}{2b} = \frac{2b(3a+1) - 7a - b + 7a(1-b)}{14ab} =$$

$$= \frac{6ab + 2b - 7a - b + 7a - 7ab}{14ab} = \frac{b - ab}{14ab} = \frac{\cancel{b}(1-a)}{14a\cancel{b}} = \frac{1-a}{14a}$$

2 вариант

2 вариант

$$\frac{3x+2}{5x} - \frac{5x+3y}{10xy} - \frac{y-1}{2y} =$$

$$\frac{3x+2}{5x} - \frac{5x+3y}{10xy} - \frac{y-1}{2y} = \frac{2y(3x+2) - 5x - 5y - 5x(y-1)}{10xy} =$$

$$= \frac{6xy + 4y - 5x - 3y - 5xy + 5x}{10xy} = \frac{xy + y}{10xy} = \frac{\cancel{y}(x+1)}{10x\cancel{y}} = \frac{x+1}{10x}$$

Рис. 23. Выполнение упражнений на этапе внутренней речи

### **2.3. ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА**

Как пишет Ю.Г. Фокин [57], для осуществления деятельностного подхода необходимо рассматривать все элементы обучения с деятельностных позиций. Деятельностный подход прежде всего требует четкого указания деятельностной цели обучения: либо освоение определенной деятельности в целом, либо освоение определенных входящих в нее структур (выбор способа, планирование, выполнение подструктур действий для достижения целей, подчиненных потенциальному мотиву), либо усвоение определенной ориентировочной основы, либо освоение выбора подходящих операций для выполнения требуемых действий, либо, наконец, формирование навыков, необходимых для выполнения операций, входящих в изучаемые структуры действий.

В пособии «Теория и технология обучения математике в средней школе» [24] деятельностный подход используется как основа проектирования технологии обучения основным единицам содержания. Авторы указывают три аспекта деятельностного подхода: построение процесса обучения в соответствии со структурой учебной деятельности, построение процесса обучения математике, адекватного творческой деятельности и усвоение методов, приемов, действий и операций, лежащих в основе этой деятельности.

Прежде всего, деятельностный подход предполагает технологию обучения, адекватную психологической структуре учебной деятельности [21].

С точки зрения деятельностного подхода к обучению учащихся надо вооружать системой общих и специфических приемов деятельности – как умственной, так и практической. В исследованиях проблемы «учить школьников учиться» выделяется проблема формирования общеучебных умений и навыков, носящих универсальный характер.

А.А. Столяр выделяет в математической деятельности три основные стадии [51]:

1) математическая организация (математическое описание) эмпирического материала (математизация конкретных ситуаций) с помощью эмпирических и

индуктивных методов – наблюдения, опыта, индукции, аналогии, обобщения и абстрагирования;

2) логическая организация математического материала (накопленного в результате первой стадии деятельности) с помощью методов логики;

3) применение математической теории (построенной в результате второй стадии деятельности) с помощью решения задач математического и межпредметного характера.

Деятельностный подход к обучению предполагает, что цели обучения формулируются через его результаты, выраженные в действиях учащихся, которые можно надежно опознать.

Приемы учебной деятельности должны быть предметом специального изучения и усвоения, включаться в содержание обучения, планироваться программой, тематическим планом и конспектом урока.

О.Б. Епишева приводит классификацию приемов учебной деятельности по характеру деятельности, в которую входят *общеучебные, общематематические, специальные* и *частные приемы* [21].

К *общеучебным приемам* относятся внешние – наблюдение, пересказ, измерения и т.д. (приемы управления учебной деятельностью) и внутренние – приемы познавательной деятельности (приемы запоминания, оперирования образами и понятиями, формулировки вопросов и т.д.), приемы рефлексии.

*Общематематические приемы* включают работу с книгой, с таблицами, заучивание математического текста и т.д., приемы работы с аксиомами и теоремами, умозаключениями (индукция и дедукция), анализ, абстрагирование и т.д.

К *специальным приемам* учебной деятельности относятся приемы тождественных преобразований, рационализации вычислений, решения уравнений, построения и т.д. *Частные приемы* учебной деятельности представляют собой алгоритмы и методы решения математических задач.

Классификация приемов учебной деятельности по этапам полного цикла учебно-познавательной деятельности включает приемы восприятия, приемы переработки и осмысления новых знаний и способов деятельности, приемы запоминания и закрепления, приемы применения знаний, приемы обобщения и систематизации и приемы самоконтроля и самооценки.

Формирование приемов учебной деятельности следует начинать с общеучебных и частных *одновременно*. Постепенно общеучебные приемы должны специализироваться, а частные обобщаться.

Основная идея технологии обучения математике на основе деятельностного подхода заключается в том, что *специальное целенаправленное систематическое личностно ориентированное формирование приемов учебной деятельности учащихся в процессе обучения математике является необходимым и достаточным условием достижения целей математического образования*.

Теоретические положения технологии обучения математике на основе деятельностного подхода:

- формирование приемов учебной деятельности в процессе обучения реализует одну из ключевых идей теории деятельности;
- владение приемами учебной деятельности реализует идею гуманизации образования, т.к. составляет ноу-хау ученика, вырабатывает и совершенствует его умение самостоятельно учиться, повышает уровень решения задач, изменяет общий стиль умственной деятельности;
- усвоение учащимися приемов учебной деятельности дает возможность для решения задач гуманизации математического образования, для активизации, оптимизации, интенсификации и уровневой дифференциации учебной деятельности, перехода к личностно ориентированному обучению;
- формирование приемов учебной деятельности учащихся представляет ее в виде системы технологических процедур, повышая уровень самостоятельной учебной деятельности, и тем самым способствует становлению фундамента любой технологии обучения.

О.Б. Епишева [21] разработала для основных элементов содержания школьного курса математики технологические цепочки:

- формирования математических понятий;
- изучения теорем;
- изучения числовых множеств;
- формирования обобщенных приемов тождественных преобразований выражений;
- обучения решению уравнений;
- изучения свойств функций;
- формирования алгоритмов и приемов вычислений;



- формирования алгоритмов и приемов тождественных преобразований выражений;
- формирования алгоритмов и приемов решения уравнений и неравенств;
- формирования алгоритмов и приемов исследования функций.

Перечислим этапы работы над приемом учебной деятельности на уроках математики.

1. Диагностика сформированности необходимых приемов учебной деятельности. Постановка целей.
2. Введение нового приема. Отработка и применение.
3. Применение нового приема в стандартных ситуациях. Контроль и коррекция.
4. Обобщение приема и обучение учащихся его переносу в новые ситуации применения. Контроль и коррекция.
5. Закрепление обобщенного приема.
6. Рефлексия.

Рассмотрим пример урока алгебры в 9 (10) классе по теме «*Графический способ решения уравнений с параметром*», посвященного освоению учащимися специального приема учебной деятельности – приема графического решения уравнений, с применением технологии обучения математике на основе деятельностного подхода.

Прием графического решения уравнений сводится к выполнению следующего алгоритма:

1. Определить, можно ли преобразовать каким-нибудь способом уравнение к виду  $f(x) = g(x)$ .
2. Если да, то выполнить преобразования, выбрав  $f(x)$  и  $g(x)$  наиболее простого вида.
3. Построить графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  в одной системе координат.
4. Найти абсциссы точек пересечения графиков, каждая из которых является корнем данного уравнения.
5. Записать ответ.

На уроке планируется достижение учащимися следующих *метапредметных результатов*:

- научиться самостоятельно планировать и осуществлять текущий контроль своей деятельности;
- научиться оценивать продукт своей деятельности по заданным и (или) самостоятельно определенным в соответствии с целью деятельности критериям;
- научиться вносить коррективы в текущую деятельность на основе анализа изменений ситуации для получения запланированных характеристик продукта (результата);
- научиться называть трудности, с которыми столкнулся при решении задачи и предлагать пути их преодоления или избегания в дальнейшей деятельности;
- научиться выбирать способ решения задачи из известных или выделять часть известного алгоритма для решения конкретной учебной задачи;
- научиться преобразовывать известные модели и схемы в соответствии с поставленной задачей;
- научиться делать выводы с использованием дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;
- научиться строить схему, алгоритм действия, исправлять или восстанавливать неизвестный ранее алгоритм на основе имеющегося знания об объекте, к которому применяется алгоритм.

К предметным результатам урока относятся знание алгоритма графического способа решения уравнений и умение применения приема графического решения уравнений в новой ситуации.

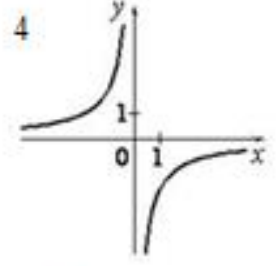
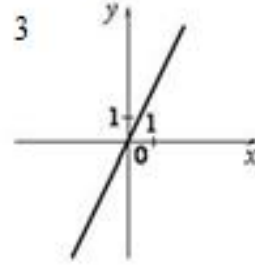
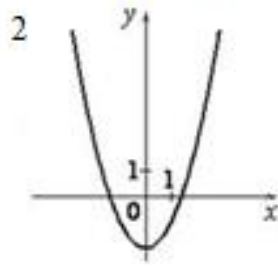
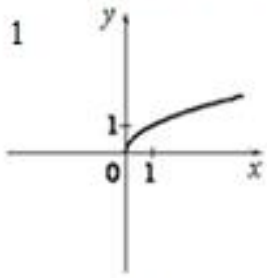
Первым этапом урока является *мотивация*.

Учащимся предлагается решить задачу: при каком значении  $a$  уравнение  $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$  имеет ровно три корня?

При попытке решить это задание учащиеся сталкиваются с непреодолимыми пока трудностями.

*Диагностика готовности к освоению нового* включает проверку знания видов графиков различных функций и уравнений (рис 24).

1. Установите соответствие графиков функций и задающих их формул:



A.  $y = -\frac{2}{x}$ .

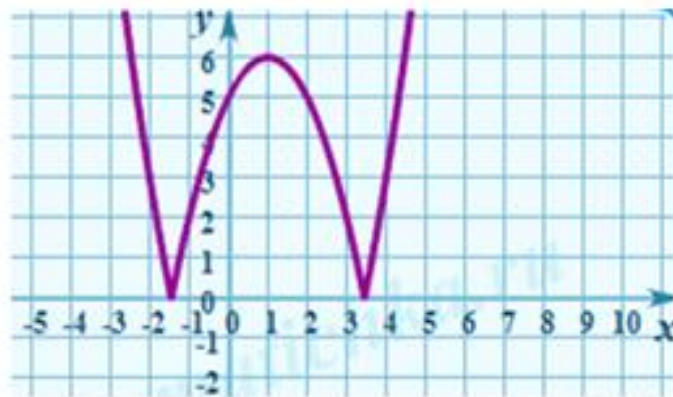
B.  $y = 2x$ .

C.  $y = \sqrt{x}$ .

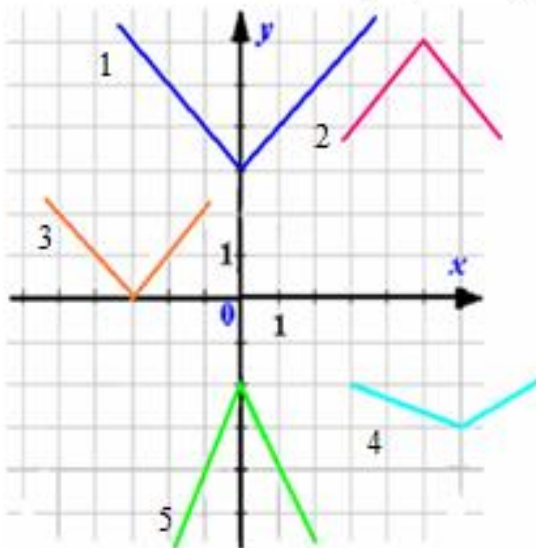
D.  $y = x^2 - 2$ .

Ответ: 1. D. 2. C. 3. B. 4. A.

2. Постройте график функции  $y = |x^2 - 2x - 5|$ .



3. Установите соответствие графиков функций с модулем и задающих их формул:



A.  $y = |x + 3|$ .

B.  $y = |x| + 3$ .

C.  $y = -2|x| - 2$ .

D.  $y = 6 - |x - 5|$ .

E.  $y = \frac{1}{3}|x - 6| - 3$ .

Ответ: 1. B. 2. D. 3. A. 4. E.

Рис. 24. Задания для диагностики готовности к освоению нового приема<sup>1</sup>

<sup>1</sup>График задания пункта 2: Математичка: [сайт]. –

URL: [https://mathematchka.ru/schoo1/finctions/Function\\_Graph\\_Vodu\\_1.htm](https://mathematchka.ru/schoo1/finctions/Function_Graph_Vodu_1.htm) 1 (дата обращения: 22.10.2024).

Диагностика готовности к освоению нового включает также проверку владения приемами графического решения уравнений с помощью устного опроса и организации работы в парах.

Учащиеся в парах выполняют задание решить графически уравнения:

а)  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ;                      б)  $x^2 - 4x + 2 = 0$ .

Учащиеся обсуждают друг с другом, в каком виде удобно представить уравнение, и приходят к выводу, что нужно перенести второе и третье слагаемое в правую часть, чтобы было удобно строить графики. Далее они распределяют, кто какое уравнение решает, строят графики и находят приближенно корни уравнения. Потом каждый находит с помощью формулы корней квадратного уравнения корни уравнения, решенного ранее его товарищем, и сверяют ответы.

На рис. 25 представлено графическое решение уравнения из пункта а). Аналитическое решение уравнения из пункта а) приведено слева.

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}.$$

$$x_1 \approx -0,43, \quad x_2 \approx 2,43.$$

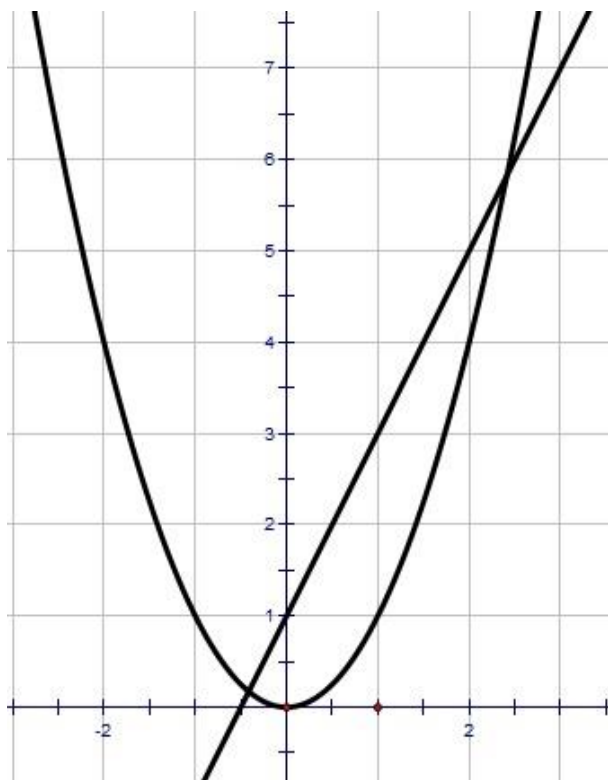


Рис. 25. Графическое решение уравнения  $x^2 - 2x - 1 = 0$

Изучение нового представляет собой разбор системы уравнений с параметром: при каких значениях параметра  $a$  система уравнений  $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 5, \\ y = 3a - 2x \end{cases}$  имеет ровно одно решение на отрезке  $x \in [-3; 2]$ ?

Решение этой системы графическим методом предполагает построение неподвижного графика функции  $y = x^2 + 2x - 5$  и семейства прямых  $y = 3a - 2x$ , получаемых из прямой  $y = -2x$  параллельным переносом вдоль оси  $Oy$  (рис. 26). Прямая впервые касается параболы в точке, входящей в указанный в задании промежуток. Чтобы найти, при каком значении  $a$  прямая и парабола касаются, считаем, что уравнение  $x^2 + 2x - 5 = 3a - 2x$  имеет единственное решение.

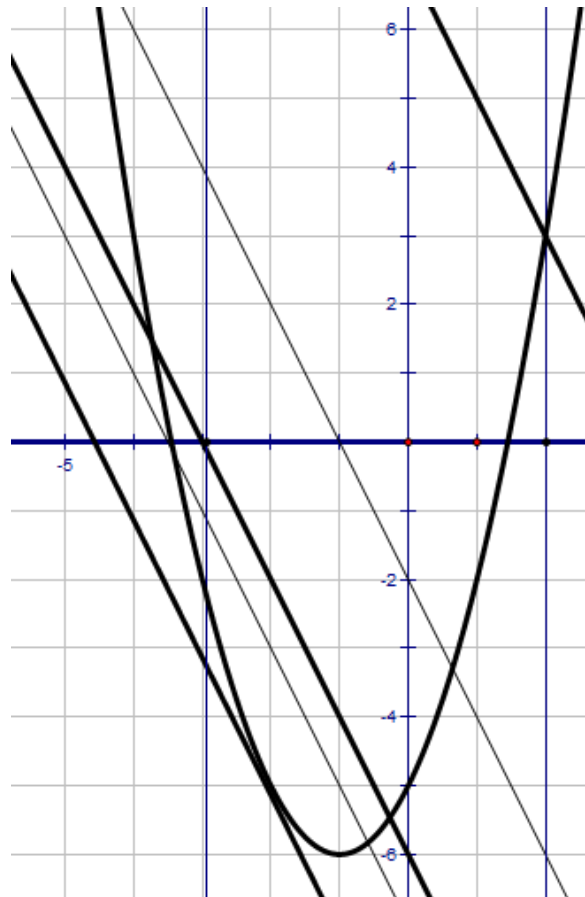


Рис. 26. Графическое решение системы уравнений с параметром

Таким образом, дискриминант квадратного уравнения  $x^2 + 4x - (3a + 5) = 0$  должен быть равен нулю:

$$D = 4^2 + 4 \cdot 1 \cdot (3a + 5) = 12a + 36 = 0. \text{ Значит, } a = -3.$$

При дальнейшем движении прямой вверх система уравнений имеет на указанном промежутке два корня, что не соответствует требованию задачи. Это

продолжается до пересечения параболы с прямой  $x = -3$  в точке  $(-3; -2)$ . Прямая  $y = 3a - 2x$  проходит через эту точку при  $a = -2$ . Далее снова один корень до момента, в котором прямая проходит через точку пересечения параболы и прямой  $x = 2$  в точке  $(2; 3)$ . Это происходит при  $a = \frac{7}{3}$ .

Ответ:  $a \in \{-3\} \cup \left(-2; \frac{7}{3}\right]$ .

Для закрепления у доски решается уравнение из этапа 1: при каком значении  $a$  уравнение  $|x^2 - 4x - 5| - 3a = |x - a| - 1$  имеет ровно три корня?

Перенесем  $-3a$  в правую часть и в левой части окажется функция, график которой неподвижен, а в правой части – функция с параметром, задающая семейство графиков, каждый из которых получается из графика функции  $y = |x|$  параллельным переносом на вектор  $\{a; -3a\}$ . Таким образом, «уголок» («галочка») движется по траектории  $y = 3x - 1$  (на чертеже обозначена пунктиром, рис. 27).

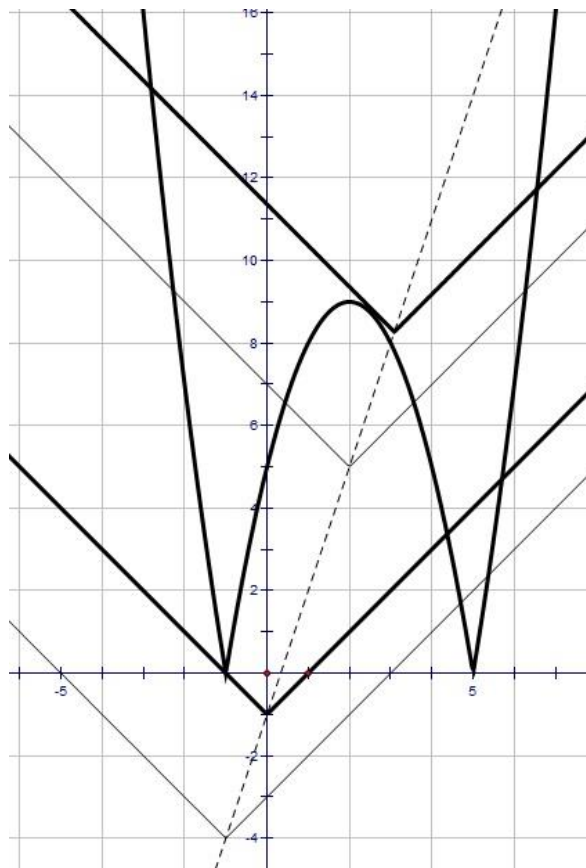


Рис. 27. Графическое решение уравнения из этапа 1

Двигая график по траектории снизу вверх, обнаруживаем два положения графика, при котором графики левой и правой частей уравнения пересекаются в трех точках. В первом случае левая часть графика с модулем  $y = -(x - a) + 3a - 1$  проходит через точку  $(-1; 0)$ . Подставляя ее координаты в уравнение,

получаем  $0 = -(-1 - a) + 3a - 1$ , откуда  $a = 0$ . Во втором случае прямая  $y = -(x - a) + 3a - 1$  касается параболы  $y = x^2 - 4x - 5$ , т.е. уравнение  $y = x^2 - 4x - 5 = -(x - a) + 3a - 1$  должно иметь единственное решение. Для уравнения  $x^2 - 5x + 4a - 4 = 0$  найдем дискриминант и приравняем его к нулю.

$$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a - 4) = 41 - 16a = 0. \text{ Значит, } a = \frac{16}{41}.$$

Ответ: 0 и  $\frac{16}{41}$ .

Далее ученикам предлагается для самостоятельного решения уравнение с параметром: найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{x^2(x^2 - 8)} + 16 = ax + 3a - 1$  имеет ровно четыре корня.

Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = a(x + 3) - 1,$$

$$|x^2 - 4| = a(x + 3) - 1.$$

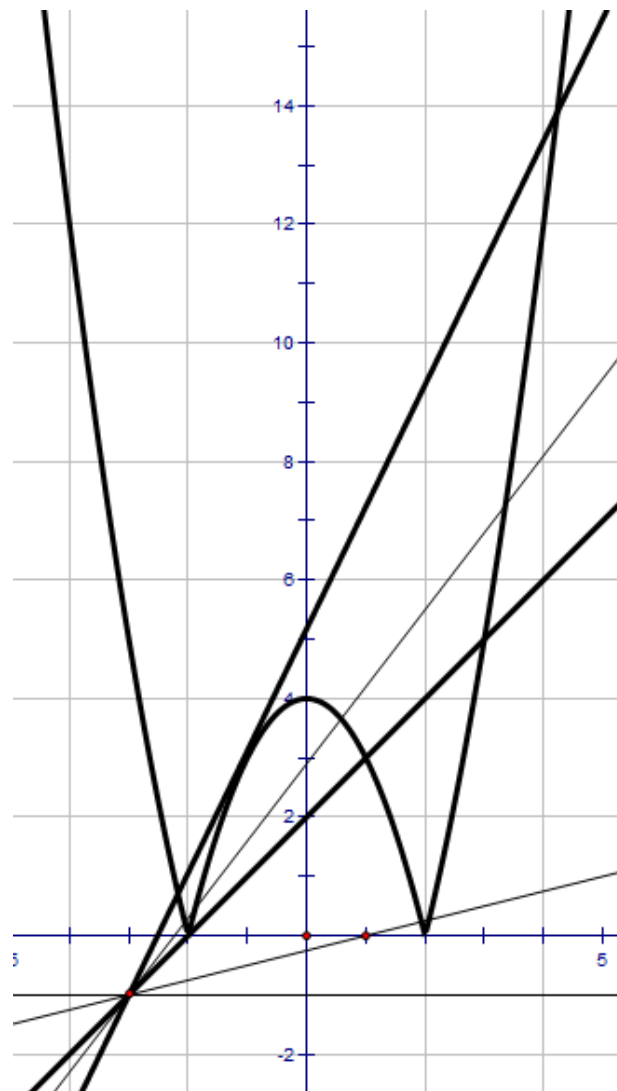


Рис. 28. Упражнение для самостоятельного выполнения

В последнем случае прямая проходит через точку  $(-2; 0)$ . И далее точек пересечения становится четыре вплоть до момента касания прямой с параболой. Найдем значение  $a$ , при котором прямая  $y = a(x + 3) - 1$  проходит через точку  $(-2; 0)$ :  $0 = a(-2 + 3) - 1$ , откуда  $a = 1$ .

$$x^2 + ax + 3a - 5 = 0.$$

Решение сводится к построению неподвижного графика функции  $y = |x^2 - 4|$  и семейства прямых, проходящих через точку  $(-3; -1)$ . Начиная вращать прямую вокруг точки  $(-3; -1)$  от горизонтальной прямой, получаем последовательно появление сначала одного, затем двух и, наконец, трех решений (рис. 28).

Найдем, при каком значении  $a$  прямая  $y = a(x + 3) - 1$  касается параболы  $y = 4 - x^2$  на промежутке  $[-2; 2]$ :

$$4 - x^2 = a(x + 3) - 1,$$

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3a - 5) = a^2 - 12a + 20 = 0$ . Отсюда  $a = 2$  или  $a = 10$ . Но при  $a = 10$  точка касания параболы  $y = 4 - x^2$  и прямой не входит в промежуток  $[-2; 2]$ .

Ответ:  $a \in (1; 2)$ .

Самопроверка проходит путем сличения решений учащихся с образцом, представленным на доске, при необходимости проводится коррекция.

Далее следует запись домашнего задания:

1. Решить графически уравнение а)  $\frac{6}{x} = x$ ; б)  $\frac{6}{x} = -x + 6$ .
2. С помощью графиков выяснить, сколько корней может иметь уравнение  $\frac{1}{x} = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые числа. Для каждого случая указать, каким условиям должны удовлетворять числа  $a$  и  $b$ .

Завершает урок *рефлексия*.

## 2.4. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Реализация на практике идеи взаимосвязи обучения с научным поиском породила своеобразную дидактическую систему, которую назвали проблемным обучением, так как основные ее элементы – учебная проблема и проблемная задача.

Проблемное построение занятий требует их особой организации, отражается на выборе методов и приемов обучения, а также влияет на структуру и в



определенной мере на само содержание излагаемого учебного материала. Поэтому есть все основания трактовать проблемное обучение как современную дидактическую систему, имеющую свою особую технологию.

По Д.В. Чернилевскому [60], проблемное обучение – это дидактическая система, основанная на закономерностях творческого усвоения знаний и способов деятельности, включающая сочетание приемов и методов преподавания и учения, которым присущи основные черты научного поиска.

Творческое усвоение знаний и способов деятельности обучающимися предполагает:

- самостоятельный перенос знаний и умений в новую ситуацию;
- видение новых проблем в знакомых стандартных условиях;
- видение структуры объекта, подлежащего изучению;
- видение новой функции знакомого объекта;
- умение видеть альтернативу решения, альтернативу подхода к его поиску;
- умение комбинировать ранее известные способы решения в новый способ;
- умение создавать оригинальный способ решения при известных других и т.д.

Творчество требует оригинальности, умения отказаться от стереотипов деятельности.

Любая дидактическая система имеет свою специфическую технологию обучения, т.е. проектирование и воспроизведение на практике научно обоснованных алгоритмов действий обучающего и обучающегося, особым образом скомпонованного содержания учебной информации, методов и средств педагогического взаимодействия.

*Технология проблемного обучения* – это специально созданная система специфических приемов и методов, которые способствуют тому, чтобы обучающийся самостоятельно добывал знания и учился самостоятельно их применять в решении новых познавательных практических задач, а не получал знания в готовом виде или решал задачи по образцу.

Проблемность является неотъемлемой чертой педагогического процесса, однако проблемным является не всякое занятие – всё зависит от того, какой объем методов и организационных форм, свойственных проблемному обучению, используется на занятии.

Структурными элементами проблемного обучения выступают следующие методические приемы:

- актуализация изученного материала; создание проблемной ситуации;
- постановка учебной проблемы; построение проблемной задачи;
- умственный поиск и решение проблемы (формулирование гипотезы или нескольких гипотез, основанных на допущениях и уже известных фактах;
- доказательство гипотез, анализ возможных ошибок, предсказание естественных следствий из каждой гипотезы, обобщение);
- проверка решения проблемы и повторение.

«Проблемная ситуация», «учебная проблема» и «проблемная задача» – основные понятия данной дидактической технологии.

*Проблемная ситуация* – осознанное субъектом затруднение, пути преодоления которого требуют поиска новых знаний, новых способов действий. Проблемная ситуация – источник мышления. Но из этого не следует, что всякое психологическое затруднение непременно побуждает мышление. Так, если ученика 5-го класса попросить найти производную функции  $y = \ln x$ , процесс мышления не возникнет, потому что у субъекта нет для этого необходимых исходных данных. Чтобы проблемная ситуация стала источником мышления, она должна быть принята субъектом к решению. А это возможно, если у субъекта имеются достаточные исходные знания, отвечающие предметному содержанию ситуации.

Кроме того, проблемная ситуация может возникнуть:

- когда обучающиеся встречаются с необходимостью использовать ранее усвоенные знания в новых практических условиях;
- когда имеются противоречия между теоретически возможным путем решения и его практической неосуществимостью;
- вследствие противоречия между практически доступным результатом и отсутствием знаний для теоретического обоснования;
- если обучаемый не знает способа решения поставленной задачи, не может дать объяснение новому факту в учебной и жизненной ситуации, т.е. осознает недостаточность прежних знаний для такого объяснения. В этом случае проблемная ситуация перерастает в учебную проблему.

Таким образом, проблемная ситуация – средство организации проблемного обучения, это начальный момент мышления, вызывающий познавательную потребность учения и создающий внутренние условия для активного усвоения новых знаний и способов деятельности.

*Учебная проблема* – это проблемная ситуация, принятая субъектом к решению на основе имеющихся у него средств (знаний, умений, опыта поиска). Учебная проблема обычно выражается в форме вопроса. Признаки учебной проблемы:

- наличие проблемной ситуации,
- определенная готовность субъекта к поиску решения,
- возможность неоднозначного решения.

Таким образом, учебная проблема понимается как отражение логико-психологического противоречия процесса усвоения, определяющее направление умственного поиска, пробуждающее интерес к исследованию сущности неизвестного и ведущее к усвоению нового понятия или нового способа действия.

*Проблемная задача* представляет собой учебную проблему, решаемую при заданных условиях или параметрах. Примером проблемной задачи может быть такое задание: «Исследовать на возрастание и убывание функцию  $y = x^x$ ». (Разумеется, такое задание будет проблемным, если способ решения еще неизвестен учащимся.)

Всякая учебная проблема и проблемная задача являются искусственной дидактической конструкцией, поскольку они специально строятся в учебных целях.

Постановка проблемной ситуации, создание условий для ее перехода в учебную проблему, конструирование проблемной задачи – это лишь начальный момент в проблемном обучении. Далее учащиеся под направляющим воздействием учителя должны самостоятельно выполнить следующие творческие мыслительные операции:

- выдвинуть возможные варианты решения познавательной проблемы, сформулировать гипотезы;
- теоретически или практически проверить гипотезы;
- сформулировать познавательный вывод.

Проблемное обучение состоит из двух взаимосвязанных элементов: *проблемного преподавания и проблемного учения*.

*Проблемное преподавание* – это деятельность педагога по обеспечению условий проблемного учения студентов путем преднамеренного создания системы последовательных проблемных ситуаций и управления процессом их разрешения обучающимися. *Проблемное учение* – особая структура творческой учебной деятельности студентов по усвоению знаний и способов деятельности с наличием анализа проблемных ситуаций, формулировок проблем

и их решения посредством выдвижения предположений, обоснования и доказательств гипотез.

В педагогической практике различают три метода проблемного обучения, характеризующихся своими системами действий обучающего и обучаемого: проблемное изложение учебного материала, частично-поисковый и исследовательский.

Сущность *проблемного изложения учебной информации* состоит в том, что, создав проблемную ситуацию, преподаватель не просто сообщает конечные выводы науки, а показывает «эмбриологию истины» (А.И. Герцен), т.е. воспроизводит в какой-то мере путь к открытию, раскрывает внутренние противоречия, демонстрирует сам путь научного поиска.

*Частично-поисковый метод* требует, чтобы учащиеся, осознав проблему, самостоятельно намечали план поиска, строили предположения, обдумывали способ их проверки, проводили наблюдения, опыты, фиксировали факты, сравнивали, классифицировали, обобщали, доказывали, делали выводы. *Исследовательский метод* позволяет теснее связывать обучение с жизнью.

Технология проблемного обучения не нова: она получила распространение в 20–30-х годах XX в. в советской и зарубежной школе. Проблемное обучение основывается на теоретических положениях американского философа, психолога и педагога Дж. Дьюи (1859–1952), основавшего в 1894 г. в Чикаго опытную школу, в которой классно-урочная система была заменена игровой и трудовой деятельностью. Занятия чтением, счетом, письмом проводились только в связи с потребностями, возникавшими у детей спонтанно, по мере их физиологического созревания. Для удовлетворения этих потребностей ребенку предоставлялись в качестве источников познания слово, произведения искусства, технические устройства, дети вовлекались в игру и практическую деятельность – труд.

В 1923 г. в СССР были «комплекс-проекты» на основе идей Дж. Дьюи (в процессе выполнения проектов «борьба за промфинплан», «за коллективизацию» усваивались знания). Классно-урочная система объявлялась отжившей формой, она заменялась лабораторно-бригадным методом. Однако в 1932 г. постановлением ЦК ВКП(б) эти методы были объявлены методическим прожектерством и отменены.

Сегодня под *проблемным обучением* понимается *такая организация учебных занятий, которая предполагает создание под руководством учителя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся*

*по их разрешению, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей.*

Г.К. Селевко [45] отводит технологии проблемного обучения следующее место в своей классификации. По уровню применения это общепедагогическая технология, а по основному фактору развития одновременно биогенная (по Дьюи), социогенная и психогенная. Для технологии проблемного обучения характерны следующие организационные формы: групповая, академическая, клубная.

Технология проблемного обучения способствует активизации и интенсификации деятельности учащихся и предназначена для обучения всех категорий обучающихся. Целями технологии проблемного обучения являются приобретение учащимися знаний, умений и навыков, усвоение ими способов самостоятельной деятельности, развитие познавательных и творческих способностей.

Концептуальными положениями (по Дж. Дьюи) технологии проблемного обучения являются следующие:

- ребенок в онтогенезе повторяет путь человечества в познании;
- усвоение знаний есть спонтанный, неуправляемый процесс;
- ребенок усваивает материал, не просто слушая или воспринимая органами чувств, а как результат удовлетворения возникшей у него потребности в знаниях, являясь активным субъектом своего обучения;
- условиями успешности обучения являются проблематизация учебного материала (знания – дети удивления и любопытства), активность ребенка (знания должны усваиваться с аппетитом) и связь обучения с жизнью ребенка, игрой, трудом.

Проблемное обучение основано на создании особого вида мотивации – проблемной, поэтому требует адекватного конструирования дидактического содержания материала, который должен быть представлен как цепь проблемных ситуаций.

Сама логика научных знаний в генезисе представляет логику проблемных ситуаций, поэтому часть учебного материала содержит исторически правдоподобные коллизии из истории науки. Однако такой путь познания был бы слишком неэкономичен; оптимальной структурой материала будет являться сочетание традиционного изложения с включением проблемных ситуаций.

Проблемные ситуации могут быть различными по содержанию неизвестного, по уровню проблемности, по виду рассогласования информации, по другим методическим особенностям.

*Проблемные методы* – это методы, основанные на создании проблемных ситуаций, активной познавательной деятельности учащихся, состоящей в поиске и решении сложных вопросов, требующих актуализации знаний, анализа, умения видеть за отдельными фактами явление, закон.

В современной теории проблемного обучения различают два вида проблемных ситуаций: психологическую и педагогическую. Первая касается деятельности учеников, вторая представляет организацию учебного процесса.

Педагогическая проблемная ситуация создается с помощью активизирующих действий, вопросов учителя, подчеркивающих новизну, важность, красоту и другие отличительные качества объекта познания. Создание психологической проблемной ситуации сугубо индивидуально. Ни слишком трудная, ни слишком легкая познавательная задача не создает проблемной ситуации для учеников. Проблемные ситуации могут создаваться на всех этапах процесса обучения: при объяснении, закреплении, контроле.

В технологии проблемного обучения учитель создает проблемную ситуацию, направляет учащихся в ее решении, организует поиск решения. Таким образом, ребенок ставится в позицию субъекта своего обучения и как результат он приобретает новые знания, овладевает новыми способами действия. Трудность управления проблемным обучением в том, что возникновение проблемной ситуации – акт индивидуальный, поэтому от учителя требуется использование дифференцированного и индивидуального подхода.

Методические приемы создания проблемных ситуаций:

- учитель подводит школьников к противоречию и предлагает им самим найти способ его разрешения;
- сталкивает противоречия практической деятельности;
- излагает различные точки зрения на один и тот же вопрос;
- предлагает классу рассмотреть явление с различных позиций (например, командира, юриста, финансиста, педагога);
- побуждает обучаемых делать сравнения, обобщения, выводы из ситуации, сопоставлять факты;

- ставит конкретные вопросы (на обобщение, обоснование, конкретизацию, логику рассуждения);
- определяет проблемные теоретические и практические задания (например: исследовательские);
- ставит проблемные задачи (например: с недостаточными или избыточными исходными данными, с неопределенностью в постановке вопроса, с противоречивыми данными, с заведомо допущенными ошибками, с ограниченным временем решения, на преодоление «психологической инерции» и др.).

Для реализации проблемной технологии необходимы:

- отбор самых актуальных, сущностных задач;
- определение особенностей проблемного обучения в различных видах учебной работы;
- построение оптимальной системы проблемного обучения, создание учебных и методических пособий и руководств;
- личностный подход и мастерство учителя, способные вызвать активную познавательную деятельность ребенка.

По Г.Ю. Ксензовой [27], в основе процедуры проблематизации лежит постижение учеником собственного незнания, а далее активизация нравственного усилия, здоровой психологической позиции для устранения этого незнания. Это означает, что методическое обеспечение процесса на ориентировочно-мотивационном этапе учебного цикла должно способствовать возникновению (еще до начала изучения нового материала) ощущения конфликта между знанием и незнанием. Этот конфликт и понимается как очередная учебная задача или проблема, на решение которой должно быть направлено учебное действие школьников. Конфликт в этом случае и служит тем механизмом, который запускает когнитивное и социальное развитие обучающихся.

Общая схема проблематизации определяется внутренним конфликтом, психологическим напряжением, связанным с желанием и готовностью к решению более сложных задач, но недостаточной для реализации задуманного суммы знаний и естественным возникновением потребности эти знания добыть.

Общеизвестно влияние проблемного обучения на активизацию мыслительной деятельности обучаемых, формирование нестандартных подходов к решению проблем и на развитие творческого мышления. Это влияние обеспечивается применением в процессе обучения специальных ситуаций интеллекту-

ального затруднения – проблемных ситуаций и их разрешения. Проблемная ситуация служит не только источником интеллектуального затруднения, что является необходимым условием развития мышления, но и важным мотивационным, а вместе с тем и эмоциональным средством в процессе обучения. Эффективность проблемного обучения убедительно доказана как в работах отечественных (А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов и др.) и зарубежных (Дж. Дьюи, В. Оконь и др.) ученых, так и непосредственно на практике при обучении различным дисциплинам в разных типах школ: начальной, средней специальной и высшей.

Как отмечает М.А. Чошанов [61], несмотря на то, что исследования в области проблемного обучения ведутся уже сравнительно давно, что позволяет некоторым ученым уже подводить какие-то итоги, тем не менее проблемное обучение привлекает к себе пристальное внимание ученых и на современном этапе [28]. Возникает ощущение, что после некоторого затишья начинается новая волна исследований этой, несомненно, интересной области дидактики. Новые проблемы возникают в связи с использованием достижений теории искусственного интеллекта в обучении индивидуализацией в проблемном обучении, применением различных форм (группового, кооперативного) обучения, использованием компьютера в проблемном обучении. В технологии проблемно-модульного обучения основное внимание М.А. Чошанов уделяет такому малоисследованному аспекту проблемного обучения, как **формирование критического мышления** учащихся. Критичность предполагает умение действовать в условиях выбора и принятия альтернативных решений, умение опровергать заведомо ложные решения, наконец, умение просто сомневаться. Формирование критичности в процессе проблемного обучения осуществляется через целенаправленное создание специальных ситуаций – *ситуаций поиска ошибок*, на этой идее построен *метод опоры на ошибки*. В процессе реализации этого метода используются три основные группы ошибок: *гносеологические, методические и учебные*.

*Гносеологические ошибки* – ошибки познавательного характера. совершенные в процессе эволюции знания. Они объективно обусловлены относительностью нашего знания: его неполнотой и ограниченностью. Использование гносеологических ошибок в процессе обучения формирует у обучаемых умение критически осмысливать действительность, анализировать и исправлять ошибки, а также существенно меняет их отношение к учебному предмету и науке: со-



держание изучаемой дисциплины предстает перед учащимися не как набор готовых истин, а как историческая драма идей и людей, как борьба научных школ и направлений, как противостояние инерции и обновления. Особый интерес среди гносеологических ошибок вызывают ошибки, «допущенные» известными учеными. Это так называемые *великие ошибки*. Луи де Бройль, всемирно известный физик, считал весьма полезным поразмыслить над ошибками, допущенными великими умами, поскольку они часто имели серьезное основание для того, чтобы их сделать.

*Методические ошибки* – ошибки преподавания, которые заключаются в нарушении преподавателем психолого-педагогических закономерностей восприятия, памяти, мышления в процессе обучения. Методические ошибки тесно связаны с учебными: чаще всего ошибки учения – результат ошибок преподавания.

*Учебные ошибки* М.А. Чошанов предлагает группировать в специальные таблицы по каждому проблемному модулю и использовать в дальнейшем в качестве одного из средств обучения. Иными словами, если при традиционной методике обучение ограничивается областью перехода от незнания к знанию с применением его, как правило, в стандартных ситуациях, то в проблемном обучении зона ближайшего развития учащегося расширяется до области критических ситуаций области ошибок, к которым приводят поверхностное усвоение и неправильное применение нового знания. При таком условии область перехода от незнания к знанию перестает быть для учащихся основной проблемой, она становится естественным звеном, зоной его актуального развития.

*Суть проблемного обучения заключается в создании (организации) проблемных ситуаций и их решении в процессе совместной деятельности учащихся и учителя при максимальной самостоятельности первых и под общим руководством последнего, направляющего деятельность обучающихся.* Проблемное обучение представляет собой современный уровень развития дидактики и передовой педагогической практики.

Приведем пример создания проблемной ситуации на уроке по теме «Криволинейная трапеция. Площадь криволинейной трапеции».

При изучении теоремы о площади не следует акцентировать внимание на том, что функция  $f(x)$  неотрицательна. После отработки вычисления площадей,

ограниченных функциями, удовлетворяющими условию теоремы, предлагаем задание:

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$f(x) = \cos x, y = 0, x = 0, x = \pi.$$

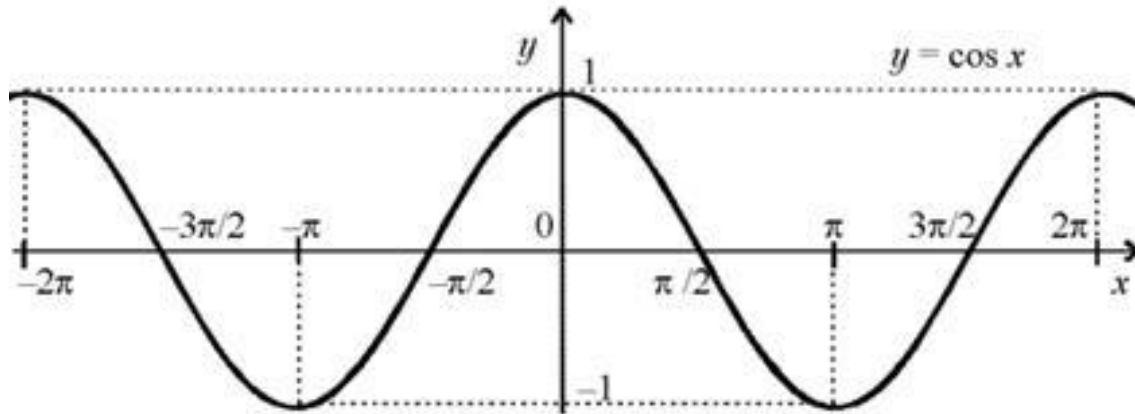


Рис. 29. График функции  $y = \cos x$

Следуя формулировке теоремы, но не учитывая, что на промежутке  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$  функция  $f(x) = \cos x$  не удовлетворяет ее условию, учащиеся получают в ответе ноль:

$$S = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Проблема порождается противоречием – фигура есть, а площадь ее равна нулю.

Далее в ходе проблемной беседы находится разрешение противоречия:

Учитель: Возможна ли такая ситуация, когда фигура не имеет площади?

Учащиеся: Нет.

Учитель: Раз это невозможно, какой вывод можно сделать относительно нашего решения?

Учащиеся: Оно неверно или содержит ошибку.

Учитель: Попробуйте найти эту ошибку. (После некоторой паузы, давая возможность самостоятельно ответить на вопрос.) Давайте сравним эту задачу с теми, что мы решали раньше. В чем ее отличие?

Учащиеся: Есть участок графика, располагающийся ниже оси  $x$ .

Учитель: Выразите эту мысль на языке неравенства.

Учащиеся:  $f(x) \leq 0$  на промежутке  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ .

Учитель: А как вычислить площадь фигуры, ограниченной неположительной функцией?

Учащиеся: Так же. (Возможно, ответа не будет.)

Учитель: Давайте еще раз вернемся к условию теоремы, чтобы выяснить, где мы совершили ошибку.

Учащиеся (проанализировав условие теоремы): Функция должна быть неотрицательна.

Учитель: Как же из отрицательной на промежутке  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  функции  $f(x) = \cos x$  сделать неотрицательную? Что должно произойти с графиком?

Учащиеся: Он должен располагаться над осью  $x$ .

Учитель: Как это отразится на формуле? (Если ответа нет.) Чем будут отличаться координаты  $y$ , соответствующие одному и тому же  $x$  в первом и во втором случае?

Учащиеся: У них разный знак.

Учитель: Как задать формулой функцию?

Учащиеся:  $f(x) = -\cos x$ .

Учитель: Вы знаете это из темы «Преобразование графиков». Как тогда будет выглядеть формула для вычисления площади? Чем она будет отличаться от той, что мы пользовались ранее?

Нам с вами осталось сформулировать условие теоремы для случая, когда функция неположительная.

Учащиеся:  $S = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$ .

Учитель: Как можно было еще решить задачу? Что вы обнаружили в ходе решения?

Учащиеся: Площади фигур над осью и под осью одинаковы. Можно было найти одну часть и удвоить ее.

Учитель: Какой способ рациональнее?

Учащиеся: Второй.

Учитель (провокация): Получается, мы зря потеряли столько времени, выясняя, что делать с неположительной функцией, и ничему не научились?

Учащиеся: Мы выяснили, что теорема применима не во всех случаях, и сами дополнили ее формулировку.

## 2.5. ИГРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Игра наряду с трудом и учением – один из основных видов деятельности человека, удивительный феномен нашего существования. По определению *иг-ра* – это вид деятельности в условиях ситуаций, направленных на воссоздание и усвоение общественного опыта, в котором складывается и совершенствуется самоуправление поведением.

Любая технология обладает средствами, активизирующими и интенсифицирующими деятельность учащихся, в некоторых же технологиях эти средства составляют главную идею и основу эффективности результатов. К таким технологиям можно отнести *игровые технологии*.

*Учебная дидактическая игра* с позиции игровой деятельности – это познание и реальное освоение обучаемыми социальной и предметной деятельности в процессе решения игровой проблемы путем игровой имитации, воссоздания в ролях основных видов поведения по определенным, заложенным в условиях игры правилам. Рассматриваемая с позиций учебной деятельности как сложная педагогическая технология, учебная игра представляет собой специфический способ управления учебно-познавательной деятельностью обучающегося.

С у щ н о с т ь дидактической игры как средства обучения состоит в ее способности служить целям обучения и воспитания, а также в том, что она переводит эти цели в реальные результаты. Способность эта заключена в игровом моделировании в условных ситуациях основных видов деятельности, направленных на воссоздание и усвоение социального опыта, в результате чего происходит накопление, актуализация и трансформация знаний в умения и навыки, накопление опыта личности и ее развитие. Игра как метод обучения является нормативной моделью процессов деятельности. В частности, такой моделью является роль, содержащая в себе набор правил, определяющих как содержание, так и направленность, характер действий играющих. Игровой метод – это прежде всего исполнение роли по определенным, заложенным в игре правилам, а сами игры, используемые в обучении и воспитании, являются ролевыми.

Особое регулятивное значение в данном виде обучения принадлежит *игровой проблеме*: именно она составляет ядро игровой роли и обуславливает воспитательную и обучающую ценность той или иной конкретной игры. В игре именно проблема выступает источником развития, «приводит в движение»

роль, она же создает проблемные ситуации игры. Учебная дидактическая игра – вариативная, динамично развивающаяся форма организации целенаправленного взаимодействия всех ее участников при педагогическом руководстве со стороны педагога. Сущность этой формы составляет взаимосвязь имитационного моделирования и ролевого поведения участников игры в процессе решения ими типовых учебных задач достаточно высокого уровня проблемности. Игра раскрывает личностный потенциал обучающегося: каждый участник может продиагностировать свои собственные возможности в отдельности и в совместной деятельности с другими участниками.

Игровые технологии связаны с *игровой формой* взаимодействия педагога и учащихся через реализацию определенного сюжета (игры, сказки, спектакли, деловое общение). При этом образовательные задачи включаются в содержание игры. В образовательном процессе используют занимательные, театрализованные, деловые, ролевые, компьютерные игры. Проблема применения игровых технологий в образовательном процессе в педагогической теории и практике не нова. Разработкой теории игры, ее методологических основ, выяснением ее социальной природы, значения для развития обучаемого в отечественной педагогике занимались Л.С. Выготский, А.Н. Леонтьев, Д.Б. Эльконин и др.

В настоящее время игровые технологии представляют огромный интерес для педагогов. Не раз возникала попытка научной классификации игры и определение ее каким-нибудь одним исчерпывающим понятием, к настоящему моменту научно определены связи между игрой и человеческой культурой, выяснено значение, которое оказывает игра на развитие личности ребенка и взрослого, эмпирическим путем выявлена биологическая природа игры и ее обусловленность психологическими и социальными факторами.

Игровые технологии имеют огромный потенциал с точки зрения приоритетной образовательной задачи формирования субъектной позиции ребенка в отношении собственной деятельности, общения и самого себя. Игра как одно из древнейших педагогических средств обучения и воспитания переживает в настоящее время период своеобразного расцвета. Чем же вызвано повышение интереса к игре в настоящее время? С одной стороны, оно вызвано развитием педагогической теории и практики, распространением проблемного обучения, с другой – обусловлено социальными и экономическими потребностями формирования разносторонне активной личности.

*Концептуальные основы игровых технологий:*

- психологические механизмы игровой деятельности опираются на фундаментальные потребности личности в самовыражении, самоутверждении, самоопределении, саморегуляции, самореализации;
- игра – форма психогенного поведения, т.е. внутренне присущего, имманентного личности (Д.Н. Узнадзе);
- игра – пространство «внутренней социализации» ребенка, средство усвоения социальных установок (Л.С. Выготский);
- игра – свобода личности в воображении, «иллюзорная реализация нереализуемых интересов» (А.Н. Леонтьев);
- способность включаться в игру не связана с возрастом человека, но в каждом возрасте игра имеет свои особенности;
- содержание детских игр развивается от игр, в которых основным содержанием является предметная деятельность, к играм, отражающим отношения между людьми, и, наконец, к играм, в которых главным содержанием выступают подчинение правилам общественного поведения и отношения между людьми;
- в возрастной периодизации детей (Д.Б. Эльконин) особая роль отведена ведущей деятельности, имеющей для каждого возраста свое содержание. В каждой ведущей деятельности возникают и формируются соответствующие психические новообразования.

Игра является ведущим видом деятельности для дошкольного возраста. Все следующие за дошкольным возрастными периодами со своими ведущими видами деятельности (младший школьный возраст – учебная деятельность, средний – общественно полезная, старший школьный возраст – учебно-профессиональная деятельность) не вытесняют игру, а продолжают включать ее в процесс деятельности. В подростковом возрасте наблюдается обострение потребности в создании своего собственного мира, в стремлении к взрослости, бурное развитие воображения, фантазии, появление стихийных групповых игр. Особенности игры в старшем школьном возрасте являются нацеленность на самоутверждение перед обществом, юмористическая окраска, стремление к розыгрышу, ориентация на речевую деятельность.

Д.В. Чернилевский [60], акцентируя внимание на применении игровых технологий в вузе, отмечает, что игровые технологии обучения позволяют:

во-первых, не бояться отрицательных последствий для общества каких-либо неправильных действий обучаемых, а, наоборот, обращать это в пользу, так как приобретается опыт;

во-вторых, значительно ускорять время протекания реальных процессов (например, то, что происходит в жизни в течение нескольких лет, можно сжать до нескольких часов);

в-третьих, многократно повторять те или иные действия для закрепления навыков их выполнения;

в-четвертых, поскольку действия выполняются в обстановке условной (модельной) реальности, раскрепостить поведение обучаемых и стимулировать их к поиску наиболее эффективного решения.

*Принцип активности* ребенка в процессе обучения был и остается одним из основных в дидактике. Под этим понятием подразумевается такое качество деятельности, которое характеризуется высоким уровнем мотивации, осознанной потребностью в усвоении знаний и умений, результативностью и соответствием социальным нормам. Такого рода активность сама по себе возникает нечасто, она является следствием целенаправленных управленческих педагогических воздействий и организации педагогической среды, т.е. применяемой педагогической технологии [11].

Выделим наиболее важные *функции игры* как педагогического феномена культуры.

Игра – сильнейшее *средство социализации* ребенка, включающее в себя как социально контролируемые процессы целенаправленного воздействия на становление личности, усвоение знаний, духовных ценностей и норм, присущих обществу или группе сверстников, так и спонтанные процессы, влияющие на формирование человека. *Социокультурное назначение* игры может означать синтез усвоения человеком богатства культуры, воспитания и формирования его как личности, позволяющей функционировать в качестве полноправного члена коллектива, включение в систему общественных отношений, усвоение норм человеческого общежития.

*Функция межнациональной коммуникации* означает усвоение единых для всех людей социально-культурных ценностей. Игры национальны и в то же время интернациональны, межнациональны, общечеловечны. Игры дают возможность моделировать разные ситуации жизни, искать выходы из конфликтов, не прибегая к агрессивности, учат разнообразию эмоций в восприятии всего существующего в жизни.

Функция *самореализации* человека в игре как полигоне человеческой практики – одна из основных функций игры. Для человека игра важна как сфера реализации себя как личности. Именно в этом плане ему важен сам процесс игры, а не ее результат, конкурентность или достижение какой-либо цели. Процесс игры – это пространство самореализации. Человеческая практика постоянно вводится в игровую ситуацию, чтобы раскрыть возможные или даже имеющиеся проблемы у человека и моделировать их снятие.

*Коммуникативная* функция игры предполагает освоение в игре диалектики общения. Игра – деятельность коммуникативная, она вводит учащегося в реальный контекст человеческих отношений. Любое игровое общество – коллектив, выступающий применительно к каждому игроку как организация и коммуникативное начало, имеющее множество коммуникативных связей. Если игра есть форма общения людей, то вне контактов взаимодействия, взаимопонимания, взаимоуступок никакой игры между ними быть не может.

*Диагностическая* функция игры реализует выявление отклонений от нормативного поведения, самопознание в процессе игры. Диагностика – способность распознавать, процесс постановки диагноза. Игра обладает предсказательностью; она диагностичнее, чем любая другая деятельность человека, во-первых, потому, что индивид ведет себя в игре на максимуме проявлений интеллекта или творчества; во-вторых, игра сама по себе – это особое «поле самовыражения».

*Игротерапевтическая* функция игры реализует возможности преодоления различных трудностей, возникающих у человека в поведении, в общении с окружающими, в учении. Оценивая терапевтическое значение игровых приемов, Д.Б. Эльконин писал, что эффект игровой терапии определяется практикой новых социальных отношений, которые получает ребенок в ролевой игре.

Функция *коррекции* в игре означает внесение позитивных изменений в структуру личностных показателей. Психологическая коррекция в игре происходит естественно, если все учащиеся усвоили правила и сюжет игры, если каждый участник игры хорошо знает не только свою роль, но и роли своих партнеров, если процесс и цель игры их объединяют. Коррекционные игры способны оказать помощь учащимся с отклоняющимся поведением, помочь им справиться с переживаниями, препятствующими их нормальному самочувствию и общению со сверстниками в группе.

*Развлекательная* функция игры – развлечь, доставить удовольствие, воодушевить, пробудить интерес. Развлечение – это влечение к разному, разно-



образному. Развлекательная функция игры связана с созданием определенного комфорта, благоприятной атмосферы, душевной радости как защитных механизмов, т.е. стабилизации личности, реализации уровней ее притязаний. Игра обладает магией, способной давать пищу фантазии, выводящей на развлекательность.

Игровые технологии занимают важное место в учебно-воспитательном процессе, так как не только способствуют воспитанию познавательных интересов и активизации деятельности учащихся, но и выполняют ряд других функций:

- тренируют память, помогают учащимся выработать речевые умения и навыки (при правильной организации с учетом специфики материала);
- стимулируют умственную деятельность учащихся, развивают внимание и познавательный интерес к предмету;
- являются одним из приемов преодоления пассивности учеников.

Большинству игр присущи четыре главных элемента:

- *свободная развивающая деятельность*, осуществляемая лишь по желанию ребенка, ради удовольствия от самого процесса деятельности, а не только от результата (процедурное удовольствие);
- *творческий*, в значительной мере импровизационный, очень активный характер этой деятельности («поле творчества»);
- *эмоциональная приподнятость* деятельности, соперничество, состязательность, конкуренция, аттракция и т.п. (чувственная природа игры, «эмоциональное напряжение»);
- *наличие* прямых или косвенных *правил*, отражающих содержание игры, логическую и временную последовательность ее развития.

В структуру игры как *деятельности* органично входит целеполагание, планирование, реализация цели, а также анализ результатов, в которых личность полностью реализует себя как субъект. Мотивация игровой деятельности обеспечивается ее добровольностью, возможностями выбора и элементами соревновательности, удовлетворения потребности в самоутверждении, самореализации.

В структуру игры как *процесса* входят:

- а) роли, взятые на себя играющими;
- б) игровые действия как средство реализации этих ролей;
- в) игровое употребление предметов, т.е. замещение реальных вещей игровыми, условными;
- г) реальные отношения между играющими;

д) сюжет (содержание) – область действительности, условно воспроизводимая в игре.

Значение игры невозможно исчерпать и оценить развлекательно-рекреативными возможностями. В том и состоит ее феномен, что, являясь развлечением, отдыхом, она способна перерасти в обучение, в творчество, в терапию, в модель человеческих отношений и проявлений в труде.

Игру как *метод обучения*, передачи опыта старших поколений младшим люди использовали с древности. Широкое применение игра находит в народной педагогике, в дошкольных и внешкольных учреждениях. В современной школе, делающей ставку на активизацию и интенсификацию учебного процесса, игровая деятельность используется в следующих случаях:

- в качестве самостоятельных технологий для освоения понятия, темы и даже раздела учебного предмета;
- как элементы (иногда весьма существенные) более обширной технологии;
- в качестве урока (занятия) или его части (введения, объяснения, закрепления, упражнения, контроля);
- как технологии внеклассной работы.

Понятие «игровые педагогические технологии» включает достаточно обширную группу методов и приемов организации педагогического процесса в форме различных *педагогических игр*.

В отличие от игр вообще педагогическая игра обладает существенным признаком – четко поставленной целью обучения и соответствующим ей педагогическим результатом, которые могут быть обоснованы, выделены в явном виде и характеризуются учебно-познавательной направленностью.

Игровая форма занятий создается на уроках при помощи игровых приемов и ситуаций, которые выступают как средство побуждения, стимулирования учащихся к учебной деятельности.

Реализация игровых приемов и ситуаций при урочной форме занятий происходит по таким основным направлениям: дидактическая цель ставится перед учащимися в форме игровой задачи; учебная деятельность подчиняется правилам игры; учебный материал используется в качестве ее средства, в учебную деятельность вводится элемент соревнования, который переводит дидактическую задачу в игровую; успешное выполнение дидактического задания связывается с игровым результатом.

Место и роль игровой технологии в учебном процессе, сочетание элементов игры и учения во многом зависят от знания учителем классификации педагогических игр.

В первую очередь следует разделить игры *по виду деятельности* на физические (двигательные), интеллектуальные (умственные), трудовые, социальные и психологические.

*По характеру педагогического процесса* выделяются следующие группы игр:

- обучающие, тренировочные, контролирующие и обобщающие;
- познавательные, воспитывающие, развивающие;
- репродуктивные, продуктивные, творческие;
- коммуникативные, диагностические, профориентационные, психотехнические и др.

Обширна типология педагогических игр *по характеру игровой методики*. Укажем лишь важнейшие из применяемых типов: предметные, сюжетные, ролевые, деловые, имитационные и игры-драматизации. *По предметной области* выделяются игры по всем школьным дисциплинам.

К целям *дидактических игровых технологий* относятся расширение кругозора, познавательная деятельность; применение ЗУН в практической деятельности; формирование определенных умений и навыков, необходимых в практической деятельности; развитие общеучебных умений и навыков; развитие трудовых навыков.

Цели *воспитывающих игровых технологий* включают воспитание самостоятельности, воли; формирование определенных подходов, позиций, нравственных, эстетических и мировоззренческих установок; воспитание сотрудничества, коллективизма, общительности, коммуникативности.

Цели *развивающих игровых технологий* – развитие внимания, памяти, речи, воображения, фантазии, мышления, творческих способностей, эмпатии, рефлексии, мотивации учебной деятельности; умений сравнивать, сопоставлять, находить аналогии, оптимальные решения.

*Социализирующие игровые технологии* направлены на приобщение к нормам и ценностям общества; адаптацию к условиям среды; стрессовый контроль, саморегуляцию; обучение общению; психотерапию.

Рассмотрим *этапы создания игры*. На *первом этапе* создания игры необходимо определиться, что требуется от игры, какова ее основная цель, на какую аудиторию она будет рассчитана, с помощью каких инструментов игроки будут взаимодействовать друг с другом, то есть необходимо создать техническое за-

дание игры. *Техническое задание* – это набор требований и условий по созданию игры. Техническое задание игры – это то, что мы хотим видеть в игре, из чего она состоит, какие задачи она выполняет. С помощью технического задания намного легче придумать игру, так как в нем рассматриваются основные пункты, которым должна удовлетворять игра, то есть с помощью технического задания мы определяем, что важно для игры и что необходимо в ней реализовать. Если игра создается в команде, происходит распределение обязанностей – кто и за какую часть игры будет отвечать.

Для того чтобы создать техническое задание игры, необходимо понять для чего разрабатывается игра, какую проблему она решает и для чего она необходима. Определив *цель*, нужно выбрать *тип* игры. Основные типы игры:

- эксперимент-проект (игра, в которой игроки создают проект, имеющий экспериментальный этап);
- вовлечение, мотивация (игра, в которой основными движущими мотивами является вовлечение и мотивация);
- аналитика, рефлексия – это тип игры, при котором применяются и развиваются аналитические умения, возможность рефлексии;
- навыки, знания, умения – это тип игры, направленный на закрепление и/или развитие знаний, умений и навыков.

Тип игры может быть *чистый*, если выбирается только один тип, и *смешанный*, если в игру включается несколько разных типов.

Вторым шагом будет определение таких пунктов, как тематика игры (какой теме она посвящена); количество и возраст игроков, продолжительность игры (на какое количество времени она будет рассчитана) и количество модулей.

Третий шаг – выбор игровой платформы, на которой будет осуществляться наша игра. Основные виды настольных платформ: настольная игра или игра живого действия (с компьютерными элементами или без), компьютерная игра (однопользовательская или многопользовательская), книга-игра.

Кроме того, нужно учесть реиграбельность – свойство игры быть интересной при повторном прохождении, т.е. ее порог может быть:

- низкий – это обозначает, что игра одноразовая, либо 2–3-разовая, то есть в нее интересно сыграть только один раз, либо 2–3 раза (например, логические игры);
- средний – это игра с отдельными модулями (то есть правила и логику игры можно перенести на другую местность/в другую локацию) либо игра с разными стратегиями;

– высокий – это игра, в которой существует иерархия уровней мастерства, либо это аддиктивная игра.

Четвертым шагом определяется соревновательный момент или конкурентность в игре. По характеру конкурентности игра может быть:

- жестко-конкурентная (может быть только один победитель);
- конкурентная (победители игры определяются по очкам либо по игровому процессу);
- полуконкурентная (в игре присутствует совместная деятельность, но также есть и конкуренция);
- кооперативная (цели игры могут достигаться только совместно);
- жестко-кооперативная (в игре происходит битва против самой игры либо против ведущего).

Одновременно с конкурентностью определяется степень случайности игры. В любой игре должно присутствовать некоторое количество случайностей:

- много (основой игры является, например рандомизация, например, «Рулетка»);
- умеренно (отдельные элементы зависят от рандома: бой, движение и т.п. – либо карты с особым значением, перемешанные в колоде);
- мало (рандомом является человеческий фактор, либо он вообще отсутствует).

Специфика ролей раскрывается через понятие «ролевой отыгрыш», т.е. возможность сыграть роли:

- отсутствует – абстрактная игра;
- слабый (номинальная роль);
- умеренный (при желании отыгрываешь);
- глубокий (роль – основа игры).

При этом выделяются следующие разновидности игрового конфликта:

- конфликт игроков друг с другом, то есть игроки сражаются друг против друга;
- конфликт со «злодеем» – это значит, что в игре есть определенный злодей, против которого и играют участники;
- конфликт с «ситуацией» – это значит, что в игре существует ситуация, которую необходимо исправить, либо перебороть, как-то решить;
- конфликт внутренний (личностный);
- конфликт с «системой» – это конфликт, который похож на тот, что с ситу-

ацией, только здесь всё намного сложнее, по сути система состоит из множества ситуаций.

Варианты действий в игре: задействуется память; развитие элементов, расширение возможностей персонажей; инвестирование; выполнение внутриигровых миссий; логистические задачи; ролевой отыгрыш; использование инструментов/ролей; сопоставление элементов; экспансия; творчество/придумывание; торговля; коммуникация/дипломатия; сбор/накопление ресурсов; боевые ситуации сражения; строительство/апгрейд; поиск, открытие закрытых областей; коллекционирование (сбор комплектов); погоня (гонки); расшифровывание; распутывание хитросплетений сюжета; использование дедуктивной логики – формулирование и доказательство гипотез.

Задачи, условия победы: определение групповых и персональных задач, сопоставление задач по длительности и игровой деятельности, количеству очков.

Баланс: найти баланс между игровыми и образовательными элементами.

После того как будет разработано техническое задание игры, можно будет приступать ко *второму этапу – этапу творчества*. На этом этапе сюжет игры наполняется содержанием: о чем она будет, какова ее легенда, герои, из каких этапов-уровней она будет состоять и т.п. На этом этапе важным является учет интересов целевой аудитории игры, потому что в игре самое главное – получить удовольствие от процесса игры, что возможно тогда и только тогда, когда игра удовлетворяет интересы и потребности игрока.

После того как придуман сюжет и правила игры, необходимо разработать список оборудования, мест и человеческих сил, которые потребуются для проведения игры. При подготовке к *тестовому этапу* выявится, что необходимо для проведения данной игры, какие материальные и человеческие ресурсы. На этом этапе впервые проводится игра с игроками.

После проведения игры анализируется, как она была проведена, рассматриваются все недочеты, выявленные во время тестовых проведений игры. Находятся способы для устранения ошибок, варианты развития игры и прочее. Происходит рефлексия.

В подготовке дидактической игры можно выделить следующие *операции*:

1. Выбор темы и диагностика исходной ситуации. Темой может быть практически любой раздел учебного курса.

2. Формирование целей и задач. Цели и задачи формируют с учетом не только темы, но и исходной ситуации. В одной ситуации, но с разными целями

можно по-разному построить игру. Для этого надо соответствующим образом расставить акценты и сформулировать цели на каждом этапе или операции.

3. Определение структуры. Структура определяется с учетом целей, задач, темы, состава участников.

4. Диагностика игровых качеств участников дидактической игры. Проведение занятий в игровых формах будет эффективно, если действия учителя обращены не к абстрактному ученику, а к конкретному человеку или хорошо знакомой группе людей.

5. Диагностика объективных обстоятельств. В данном случае рассматривается вопрос о том, где, как, когда, при каких условиях и с какими предметами будет проходить игра, т.е. оцениваются ее внешние атрибуты.

При подготовке к игровой деятельности следует соблюсти следующие **методические требования**:

- 1) игра – логическое продолжение или завершение конкретной темы (раздела), практическое дополнение к теме;
- 2) создание атмосферы поиска и непринужденности;
- 3) тщательная подготовка учебно-методической документации;
- 4) четко сформулированные задачи, условия и правила игры;
- 5) выявление вариантов возможных решений указанной проблемы;
- 6) наличие необходимого оборудования.

При использовании игровых технологий на уроках необходимо соблюдение следующих **условий**:

- 1) соответствие игры учебно-воспитательным целям урока;
- 2) доступность для учащихся данного возраста;
- 3) оптимальность в использовании игр на уроках.

Можно выделить следующие виды уроков с использованием игровых технологий:

- 1) ролевые игры на уроке;
- 2) игровая организация учебного процесса с использованием игровых заданий (урок – соревнование, урок-конкурс, урок-путешествие, урок-КВН);
- 3) игровая организация учебного процесса с использованием заданий, которые обычно предлагаются на традиционном уроке;
- 4) использование игры на определенном этапе урока (начало, середина, конец; знакомство с новым материалом, закрепление знаний, умений, навыков, повторение и систематизация изученного);

5) различные виды внеклассной работы (КВН, экскурсии, вечера, олимпиады и т.п.), которые могут проводиться между учащимися разных классов одной параллели.

Актуальность применения игровых технологий на уроках математики обусловлена тем, что:

- игровые формы обучения на уроках создают возможности эффективной организации взаимодействия педагога и учащихся, продуктивной формы их общения с присущими их элементами соревнования;
- в игре заложены огромные воспитательные и образовательные возможности;
- игры очень хорошо уживаются с «серьезным» учением;
- включение в урок игр делает процесс обучения интересным и занимательным, облегчает преодоление трудностей в усвоении учебного материала;
- разнообразные игровые действия, при помощи которых решается та или иная умственная задача, поддерживают и усиливают интерес к учебному предмету.

Рассмотрим цели, задачи, особенности математических игр и требования к ним.

К целям применения математических игр относятся:

- развитие мышления;
- углубление теоретических знаний;
- самоопределение в мире увлечений и профессий;
- организация свободного времени;
- общение со сверстниками;
- воспитание сотрудничества и коллективизма;
- приобретение новых знаний, умений и навыков;
- формирование адекватной самооценки;
- развитие волевых качеств;
- контроль знаний;
- мотивация учебной деятельности.

Задачи математических игр делятся на образовательные, развивающие и воспитательные. К образовательным относится задача способствовать прочному усвоению учащимися учебного материала и расширению кругозора учащихся. Развивающие задачи: развивать у учащихся творческое мышление; способствовать практическому применению умений и навыков, полученных на уроках и внеклассных занятиях, развитию воображения, фантазии, творческих способностей и др.



Воспитательные задачи математических игр:

- способствовать воспитанию развивающейся и реализующейся личности;
- воспитать нравственные взгляды и убеждения;
- способствовать воспитанию самостоятельности и воли в работе.

Особенности математических игр:

- во время математической игры происходит одновременно игровая, учебная и трудовая деятельность, игра сближает то, что в жизни не сопоставимо и разводит то, что считается единым;
- математическая игра требует от школьника знания предмета. Ведь не умея решать задачи, разгадывать, расшифровывать и распутывать, ученик не сможет участвовать в игре;
- в играх школьники учатся планировать свою работу, оценивать результаты не только чужой, но и своей деятельности, проявлять смекалку при решении задач, творчески подходить к любому заданию, использовать и подбирать нужный материал;
- результаты игр показывают школьникам их уровень подготовленности, помогают в самосовершенствовании учащихся и пробуждают их познавательную активность;
- во время участия в математических играх учащиеся не только получают новую информацию, но и приобретают опыт сбора нужной информации и правильного ее применения.

К участникам математической игры должны предъявляться определенные требования в отношении знаний. В частности, чтобы играть, надо знать. Это требование придает игре познавательный характер. Правила игры должны быть такими, чтобы учащиеся проявили желание поучаствовать в ней. Поэтому игры должны разрабатываться с учетом возрастных особенностей детей, проявляемых ими интересов в том или ином возрасте, их развития и имеющихся знаний.

Математические игры должны разрабатываться с учетом индивидуальных особенностей учащихся, с учетом различных групп учащихся: слабые, сильные; активные, пассивные и др. Они должны быть такими, чтобы каждый тип учащихся смог проявить себя в игре, показать свои способности, возможности, свою самостоятельность, настойчивость, смекалку, испытать чувство удовлетворенности, успеха.

При разработке игры нужно предусмотреть более легкие варианты игры, задания для слабых учащихся и более сложный вариант – для сильных учеников. Для совсем слабых учащихся разрабатываются игры, где не нужно думать, а нужна, лишь смекалка. Тогда не только сильные учащиеся проявляют заинтересованность к предмету, но и слабые учащиеся начинают проявлять свою активность в учении.

Математические игры должны разрабатываться с учетом предмета и его материала. Они должны быть разнообразны. Многообразие видов математических игр поможет повысить эффективность урока математики, послужит дополнительным источником систематических и прочных знаний.

При организации игровой формы урока необходимо придерживаться следующих положений:

- правила игры должны быть простыми, точно сформулированными, а математическое содержание предлагаемого материала доступно пониманию школьников, в противном случае игра не вызовет интереса и будет проводиться формально;

- игра должна давать достаточно пищи для мыслительной деятельности, в противном случае она не будет содействовать выполнению педагогических целей, не будет развивать математическую зоркость и внимание;

- дидактический материал, используемый во время игры, должен быть удобен в использовании, иначе игра не даст должного эффекта;

- при проведении игры, связанной с соревнованиями команд, должен быть обеспечен контроль над ее результатами со стороны всего коллектива учеников или выбранных лиц, учет результатов соревнования должен быть открытым, ясным и справедливым;

- каждый ученик должен быть активным участником игры, длительное ожидание своей очереди для включения в игру снижает интерес детей к игре;

- игровой характер при проведении уроков по математике должен иметь определенную меру, превышение которой может привести к тому, что дети во всем будут видеть только игру;

- в процессе игры учащиеся должны математически грамотно проводить свои рассуждения, речь их должна быть правильной, четкой, краткой.

По назначению различают обучающие, контролирующие и воспитывающие математические игры; также можно выделить развивающие и занимательные. Участвуя в обучающей игре, школьники приобретают новые знания,

навыки. Такая игра может служить стимулом для получения новых знаний: ученики вынуждены приобрести новые знания перед игрой; очень заинтересовавшись каким-либо материалом, полученным в ходе игры, ученик может изучить его подробнее уже самостоятельно. Воспитывающая игра имеет целью воспитать у учащихся отдельные качества личности, такие как внимание, наблюдательность, смекалка, самостоятельность и др. Для участия в контролирующей игре учащимся достаточно имеющихся у них знаний. Цель такой игры и состоит в том, чтобы школьники закрепили свои полученные знания, проконтролировать их. Занимательные игры отличаются от других видов тем, что для участия в ней никаких конкретных знаний не надо, нужна только смекалка. Основная цель такой игры – привлечь к математике слабых учеников, не проявляющих интереса к предмету.

Развивающие игры в основном предназначены для сильных учеников, увлекающихся математикой. Они развивают нестандартность мышления при решении соответствующих заданий. Все эти виды переплетаются между собой, и одна игра может быть одновременно и контролирующей, и обучающей, лишь в соотношении между целями можно говорить о принадлежности математической игры к тому или иному виду.

Игры чаще всего принимают коллективный характер. Они привлекают не только сильных учеников, но и слабых, желающих поучаствовать в игре вместе со своими друзьями. Такие ученики, не проявляющие интереса к математике, в коллективной игре могут добиться успеха, у них появляется чувство удовлетворенности, интерес. С другой же стороны, сильные ученики предпочитают индивидуальные игры, так как они более самостоятельны. Они стремятся к самоанализу, самооценке, и поэтому у них возникает потребность проявить свои индивидуальные возможности, качества.

Основной деятельностью учащихся является учеба. Они проводят в школе 5–6 часов в день в школе, и дома 2–3 часа уходит на выполнение домашнего задания. Естественно, что их растущий организм требует движения, поэтому на занятиях нужно вводить элементы подвижности. Математическая игра позволяет включить в себя подвижную деятельность и не мешает умственной работе. Встречаются дети, которые предпочитают тихие игры, требующие пытливости ума, настойчивости. Для таких детей подойдут тихие игры, такие как различные головоломки, кроссворды, игры на складывание и разрезание фигур и многие другие. По темпу выделяют скоростные и качественные игры. Некоторые математические игры должны принимать форму состязаний, соревнований между

командами или на личное первенство, это обусловлено характерной чертой подростков – стремлением к различным видам состязаний.

Следует различать два вида состязаний. Во-первых, это игры, в которых победа достигается за счет скорости действий, но без ущерба качеству решения задач. Например, задания на скорость выполнения вычислений, преобразований, доказательств теорем и т.д. Такие игры называются скоростными. Во-вторых, можно выделить игры, победа в которых достигается не за счет скорости выполнения заданий, а за счет качества его выполнения, правильности решения, безошибочности. Такие игры условно называют качественными. Первый вид игр (скоростные) необходим, когда нужен автоматизм действий, формируется навык быстрого вычисления, выполнения действий, не требующих большого умственного труда. Также элементы скоростных игр могут быть включены в другие математические игры. Использование таких игр сопровождается эмоциональным подъемом, желанием выиграть, стремлением быть не только лучшим, но и самым быстрым, вызывает интерес учащихся. Качественные же игры направлены на серьезные вычисления, требует вдумчивой работы над трудными задачами, теоремами. Такие игры способствуют пробуждению мыслительной деятельности учащихся, заставляют их активно думать над задачей, развивают настойчивость, упорство, что необходимо в учебе. Неразрешимые, казалось бы, сложные задачи способствуют повышению уровня умственного труда, и, как следствие, желанию узнать больше, появлению интереса к предмету.

Дидактические игры влияют на повышение качества знаний, умений и навыков учащихся, развитие умственной деятельности. Условно можно выделить несколько типов дидактических игр, сгруппированных по виду деятельности учащихся.

Среди математических игр можно выделить игры-упражнения, игры-путешествия, сюжетные ролевые игры, игры-соревнования. Игры-упражнения занимают обычно 10–15 минут и направлены на совершенствование познавательных способностей учащихся, осмысления и закрепления учебного материала. Это разнообразные викторины, кроссворды, ребусы, шарады, головоломки, загадки. Сюжетная игра отличается тем, что инсценируются условия воображаемой ситуации, а учащиеся играют определенные роли. Существенной особенностью игры-соревнования является наличие в ней соревновательной борьбы и сотрудничества. Элементы соревнования занимают ведущее место в основных игровых действиях, а сотрудничество, как правило, определяется конкретными обстоятельствами и задачами. Игра-соревнование позволяет учителю в зависи-

мости от содержания материала вводить в игру не просто занимательный материал, но весьма сложные вопросы учебной программы.

*Игры-путешествия* имеют сходство со сказкой, ее развитием, чудесами. Игры-путешествия служат в основном целям углубления, осмысления и закрепления учебного материала. Игра-путешествие отражает реальные факты или события, но обычное раскрывается через необычное, простое – через загадочное, трудное – через преодолимое, необходимое – через интересное. Все это происходит в игре, в игровых действиях, становится близким ребенку, радует его. Примерами таких игр являются «Путешествие в страну дробей», «Космическое путешествие (площади и объемы фигур)», «Веселый математический поезд». Цель игры-путешествия — усилить впечатление, придать познавательному содержанию чуть-чуть сказочную необычность, привлечь внимание детей на то, что находится рядом, но не замечается ими. Игры-путешествия обостряют внимание, наблюдательность, осмысление игровых задач, облегчают преодоление трудностей и достижение успеха. Игры-путешествия всегда несколько романтичны. Именно это вызывает интерес и активное участие в развитии сюжета игры, обогащение игровых действий, стремление овладеть правилами игры и получить результат: решить задачу, что-то узнать, чему-то научиться. Роль педагога в игре сложна, требует знаний, готовности ответить на вопросы детей, играя с ними, вести процесс обучения незаметно.

*Игры-поручения* имеют те же структурные элементы, что и игры-путешествия, но по содержанию они проще и по продолжительности короче. В основе их лежат действия с предметами, игрушками, словесные поручения. Игровая задача и игровые действия в них основаны на предложении что-то сделать: «Помоги Буратино расставить знаки в примерах», «Проверь домашнее задание у Незнайки».

Началом *игры-предположения* («Что было бы...?» или «Что бы я сделал...», «Как я решил и почему?» и др.) может послужить картинка, задание, задача, проблема. Дидактическое содержание игры заключается в том, что перед детьми ставится задача и создается ситуация, требующая осмысления последующего действия. Игровая задача заложена в самом названии «Что было бы...?» или «Что бы я сделал...». Игровые действия определяются задачей и требуют от детей целесообразно предполагаемого действия в соответствии с поставленными условиями или созданными обстоятельствами. Дети высказывают предположения, констатирующие или обобщенно-доказательные. Эти игры требуют умения со-

отнести знания с обстоятельствами, установления причинных связей. В них содержится соревновательный элемент: «Кто быстрее сообразит?».

Педагогическая направленность *игр-загадок* заключается в проверке знаний учащихся. В настоящее время загадки, загадывание и отгадывание рассматриваются как вид обучающей игры. Основным признаком загадки является замысловатое описание, которое нужно расшифровать (отгадать и доказать). Описание должно быть лаконично и нередко оформляется в виде вопроса или заканчивается им. Главной особенностью загадок является логическая задача. Способы построения логических задач различны, но все они активизируют умственную деятельность ребенка. Детям нравятся игры-загадки. Необходимость сравнивать, припоминать, думать, догадываться доставляет радость умственного труда. Разгадывание загадок развивает способность к анализу, обобщению, формирует умение рассуждать, делать выводы, умозаключения.

В основе *игр-беседы* лежит общение педагога с детьми, детей с педагогом и детей друг с другом. Это общение имеет особый характер игрового обучения и игровой деятельности детей. В игре-беседе учитель часто идет не от себя, а от близкого детям персонажа и тем самым не только сохраняет игровое общение, но и усиливает радость его, желание повторить игру. Однако игра-беседа таит в себе опасность усиления приемов прямого обучения. Ценность игры-беседы заключается в том, что она предъявляет требования к активизации эмоционально-мыслительных процессов: единства слова, действия, мысли и воображения детей. Игра-беседа воспитывает умение слушать и слышать вопросы учителя, вопросы и ответы детей, умение сосредоточивать внимание на содержании разговора, дополнять сказанное, высказывать суждение.

Рассмотрим некоторые примеры использования дидактических игр на уроках математики в 5–6 классах.

*Пример 1.* Тема «Прямоугольная система координат на плоскости» (6 класс).

Игра «Соревнование художников». На доске записаны координаты точек:  $(0; 0)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(-2; 3)$ ,  $(-3; 3)$ ,  $(4; 6)$ ,  $(0; 8)$ ,  $(2; 5)$ ,  $(2; 11)$ ,  $(6; 10)$ ,  $(3; 9)$ ,  $(4; 5)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(1; -7)$ ,  $(3; -8)$ ,  $(0; -8)$ ,  $(0; 0)$ . Учащимся необходимо отметить на координатной плоскости каждую точку и соединить с предыдущей при помощи отрезка. Результат – определенный рисунок. Эту игру можно провести с обратным заданием: нарисовать самим любой рисунок, имеющий конфигурацию ломаной и записать координаты вершин.

Широко известная игра «Морской бой» также может быть использована на уроке по теме «Прямоугольная система координат на плоскости». Эти игры раз-

вивают внимание, наблюдательность, сообразительность, ученики быстрее усваивают, что положение точки на плоскости определяется с помощью двух ее координат.

*Пример 2.* Тема «Действия с целыми числами» (6 класс)

Игра «Математическое лото»

Каждому ученику выдается конверт, в котором 1 большая карта с заданиями и маленькие, их больше, чем заданий. На маленьких – результаты вычислений. Ученик должен выполнить задание на большой карте и накрыть его ответом (результатом его вычислений). После выполнения всех заданий ученик переворачивает маленькие карточки и получает задание (если верно выполнены все вычисления). Например: определение целых чисел, правило сравнения, правило сложения, вычисление, деление, умножения целых чисел и др. Затем ученики выполняют полученные задания.

$-15 + 12$	$-20 : (-2)$	$-2 * (-3)$		опре	деле	ние
$-2 - (-2)$	$-6 * (-2)$	$4 * 17$		про	тиво	полож
$15 - (-5)$	$17 - 50$	$96 : (-2)$		ных	чи	сел

Игра «Магические квадраты»

А. В клетки квадрата записать такие числа, чтобы сумма чисел на любой вертикали, горизонтали была равна 0.

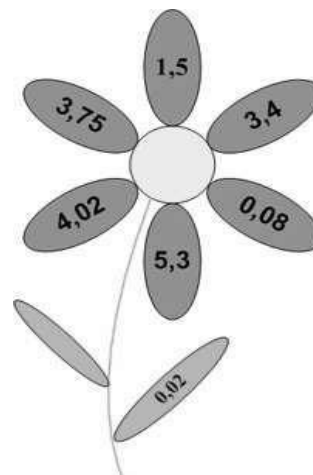
-3	5	
7		
		3

Б. Записать в клетки квадрата числа  $-1; 2; -3; -4; 5; -6; -7; 8; -9$  так, чтобы произведение по любой диагонали, вертикали, горизонтали было равно положительному числу.


*Пример 3.* Тема «Десятичные дроби».

Игра «Цветочек». В листе цветка помещается дробь, которую нужно сложить, умножить, разделить, вычесть. Дроби, с которыми нужно произвести эти действия, записаны на лепестках цветка.

- 1)  $1,5 \cdot 0,02$ ;
- 2)  $3,75 \cdot 0,02$ ;
- 3)  $3,4 : 0,02$ ;
- 4)  $0,08 + 0,02$ ;
- 5)  $4,02 + 0,02$ ;
- 6)  $5,3 - 0,02$ .



После того, как учащиеся выполняют указанные действия, ученик, первым выполнивший все вычисления, рисует на доске такой же цветок, но в лепестках записывает результаты вычислений.

*Пример 4.* Тема «Признаки делимости чисел»

Игра «Лучший счетчик». Класс делится на три команды. Каждая выбирает «счетчика», который будет защищать свою команду. Примеры «счетчику» задают члены других команд до тех пор, пока он не собьется. Затем его сменяет «счетчик» другой команды. За каждый правильный ответ 1 очко. Побеждает команда, которая набрала больше очков. Условие игры – отвечать на вопросы быстро. В ходе игры вырабатывается быстрота вычислений, внимательность, сообразительность.

*Пример 5.* Тема «Действия с рациональными числами». Игра «Брейн-ринг» используется при закреплении или повторении темы. В игре принимают участие 4 команды. Команды начинают решать задания одновременно после сигнала учителя. Команда, которая первой выполняет задание, звонит в колокольчик. Первые две команды, ответившие правильно, получают по баллу. За нарушение дисциплины баллы снимаются. Каждая команда после ответа собирает карточки и сдает на проверку, затем получает новое задание. Время выполнения задания 2 минуты. Задания подбираются по определенной теме урока.

Основным в дидактической игре на уроках математики является обучение математике. Игровые ситуации лишь активизируют деятельность учащихся, делают восприятие более активным, эмоциональным, творческим. Создание игровых ситуаций на уроках повышает интерес к предмету, вносит разнообразие и



эмоциональную окраску в учебной работе, снижает утомление, развивает внимание, взаимопомощь.

## **2.6. ТЕХНОЛОГИЯ МАСТЕРСКИХ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

Одним из альтернативных и эффективных способов изучения и добывания новых знаний, является технология мастерских. Она представляет собой альтернативу классно-урочной организации учебного процесса. В ней используется педагогика отношений, всестороннее воспитание, обучение без жестких программ и учебников, метод проектов и методы погружения, безоценочная творческая деятельность учащихся.

Актуальность технологии заключается в том, что она может быть использована не только при изучении нового материала, но и при повторении и закреплении ранее изученного. Данная форма урока направлена как на всестороннее развитие учащихся в процессе обучения, так и на развитие самого педагога.

*Мастерская* – это технология, которая предполагает такую организацию процесса обучения, при которой учитель-мастер вводит своих учеников в процесс познания через создание эмоциональной атмосферы, в которой ученик может проявить себя как творец. При реализации этой технологии знания не даются, а приобретаются самим учеником в паре или группе с опорой на свой личный опыт, учитель-мастер лишь предоставляет ему необходимый материал в виде заданий для размышления. Эта технология позволяет личности самостоятельно приобретать знания, в этом ее большое сходство с проблемным обучением. Создаются условия для развития творческого потенциала и для ученика и для учителя. Формируются коммуникативные качества личности, а также субъектность ученика – способность являться субъектом, активным участником деятельности, самостоятельно определять цели, планировать, осуществлять деятельность и анализировать. Данная технология позволяет научить самостоятельно формулировать цели урока, находить наиболее эффективные пути для их достижения, развивает интеллект, способствует приобретению опыта групповой деятельности.

Мастерская схожа с проектным обучением, потому что есть проблема, которую надо решить. Педагог создает условия, помогает осознать суть проблемы,

над которой надо работать. Учащиеся формулируют эту проблему и предлагают варианты ее решения. В качестве проблем могут выступать различные типы практических заданий.

В мастерской обязательно сочетаются индивидуальная, групповая и фронтальная формы деятельности, и обучение идет от одной к другой.

Технологию мастерских исповедует группа французских учителей «Французская группа нового воспитания». Эта технология основывается на идеях свободного воспитания Ж.-Ж. Руссо, Л. Толстого, С. Френе, психологии гуманизма Л.С. Выготского, Ж. Пиаже, К. Роджерса.

Мастерская – это оригинальный способ организации деятельности учеников в составе малой группы при участии учителя-мастера, иницирующего поисковый, творческий характер деятельности учеников.

Мастерская закладывает основы для прочного усвоения знаний. Дальнейшая отработка и закрепление знаний происходят в других формах работы.

Целевая ориентация технологии мастерских, по Г.К. Селевко [45], – предоставить учащимся средства, позволяющие им лично саморазвиваться, осознать себя и свое место в мире, понимать других людей, а также перспективы будущего, которые затронут их самих, и дать им возможность проделать путь от культуры полезности к культуре достоинства (человек самоценен).

В отношении технологии мастерских Г.К. Селевко высказал следующие концептуальные положения [45]:

- культурные формы должны лишь предлагаться ребенку, но не навязываться;
- отказ от методов принуждения и форм подавления достоинства учеников;
- в мастерской предоставляется возможность каждому продвигаться к истине своим путем;
- процесс познания гораздо важнее, ценнее, чем само знание;
- в отличие от урока, знания на уроках-мастерских не даются в готовом виде, а приобретаются учащимися в ходе совместной познавательной деятельности;
- ученик имеет право на ошибку, ошибка считается закономерной ступенью процесса познания, точные знания следуют за ошибками;
- творческая деятельность – безоценочная деятельность;
- мастер – для ученика, а не ученик для мастера;
- сотрудничество, сотворчество, совместный поиск;

– мастер – садовник, выращивающий растение – ребенка, создающий условия для реализации заложенных в нем природных задатков.

Мастерская как локальная технология охватывает некоторую часть содержания учебной дисциплины. Она состоит из ряда заданий, которые направляют работу ребят в нужное русло, но внутри каждого задания школьники абсолютно свободны. Они каждый раз вынуждены осуществлять выбор пути исследования, выбор средств для достижения цели, выбор темпа работы и т.д. Мастерская часто начинается с актуализации знаний каждого по данному вопросу, которые затем обогащаются знаниями товарищей по группе. На следующем этапе знания корректируются в разговоре с другой группой, и только после этого точка зрения группы объявляется классу. В этот момент знания еще раз корректируются в результате сопоставления своей позиции с позицией других групп.

*Алгоритм* – это формализация технологического процесса в виде последовательности некоторых шагов, блоков деятельности, которые зависят от содержания познавательной области, но имеют и метапредметную часть, определяемую общими для всех областей способами деятельности учащихся. В технологии мастерских разработаны алгоритмы для типичных метапредметных задач, например, поиска подхода к решению проблемы, выполнения домашнего задания, аналогии, конструирования теорем, свободы творчества, способов обучения, способов саморегуляции и т.п. Алгоритмы различаются по уровню сложности, продолжительности выполнения, связи с областями жизнедеятельности детей.

Рассмотрим пример алгоритма деятельности учащихся, состоящий из трех этапов.

I часть. Этап актуализации знаний в данной области: выделение проблем, работа с литературой, обсуждение в парах, обсуждение в группах, постановка вопросов в группах, представление вопросов классу, выбор проблемы для исследования.

II часть. Представление проблем: объединение в группы для решения проблем, каждый представляет группе свое понимание проблемы, каждый формулирует гипотезу решения проблемы, выбор в группе наиболее вероятной гипотезы, планирование и проведение эксперимента по проверке гипотезы, формулирование выводов.

III часть. Представление результатов работы групп: составление и обмен вопросами по представленным результатам, ответы на вопросы и корректировка результатов, составление группами серии заданий на применение результа-

тов их поиска, обмен заданиями между группами, знакомство групп с представленными другой группой решениями их задания.

Этап актуализации знаний дает возможность всем желающим высказать свою точку зрения на проблему, которой будет посвящена мастерская. В ходе разговора у каждого возникают мысли как в поддержку высказанных идей, так и в их опровержение. Разобраться каждому с этой массой вопросов предлагается на втором этапе, когда ученик будет работать с литературой. Конечно, сначала каждый пороеется в книгах, почитает те отрывки, которые его заинтересуют. Потом поговорит с соседом, а затем в группе. Группа соберет и зафиксирует прозвучавшую информацию, обдумает и начнет создавать свою новую версию, которая затем на следующем этапе будет опять усовершенствована. Ребятам могут быть предоставлены копии исторических документов, с которыми ученые работали в то время, когда эта проблема обсуждалась. Именно копии или сами документы, но не их обработка, хотя познакомить школьников с различным восприятием учеными одних и тех же документов тоже интересно.

Итак, слово мастера, работа с документами – все это предоставляет группе возможность не только сформулировать версию, но и поработать с ней, а на следующем этапе организовать ее опытную проверку. Но, конечно, опыт не даст полной уверенности в истинности выбранной версии, необходимо ее логическое обоснование, доказательство. Поэтому ребята строят цепочку умозаключений и с опорой на утверждения, об истинности которых они договорились, приходят к выводу об истинности их версии. Однако в доказательство может вкратиться ошибка. Поэтому необходим критический анализ всей проделанной работы (рефлексия). На последнем этапе группы представляют друг другу всё, что они сделали.

В каком соотношении находится предполагаемый объем индивидуальной и групповой работы? Практика показывает, что наилучший результат дает оптимальное чередование периодов индивидуального и группового мышления.

Предложенные алгоритмы пригодны не для любого содержания и не для любого класса. Мастерская пройдет с пользой для ребят, если у них уже имеются необходимые учебные и интеллектуальные умения. Поэтому технологическая линия занятий включает специальные мастерские, на которых ребята учатся: а) работать на первом этапе, этапе восприятия; б) работать с гипотезой; в) понимать текст; г) выполнять критический анализ текста, рассуждений, доказательств; д) ставить опыт, отбирать для опыта материал, формулировать задачу, делать наблюдения, описывать результат; е) выполнять сравнение, обобщение;

ж) ставить вопросы. Все эти общеобразовательные мастерские формируют у ребят общеинтеллектуальные умения, без которых невозможна серьезная мыслительная работа.

*Основными методическими элементами* (этапами) технологии мастерских являются индукция, деконструкция, реконструкция, самоконструкция, социализация, афиширование, разрыв, рефлексия.

Обязательный этап мастерской – осознание конфликта в себе и разрешение его через преодоление, поэтому одним из ключевых ее элементов – системообразующим – являются проблемные ситуации. *Проблемная ситуация* – это ситуация интеллектуального затруднения, которая побуждает ученика к решению проблемы, требует поиска новых знаний и новых способов получения знаний. Проблемная ситуация должна быть доступна, интересна ученику, но в то же время достаточно сложна и находиться в зоне его ближайшего развития. Вопрос должен занимать, волновать ум исследователя, быть в круге его интересов; представить это неизвестное, показать необходимость работы с ним; определить круг средств, объектов, которые позволят начать работу и через период незнания прийти к открытию; присоединить к имеющемуся знанию новое и поставить иные проблемы для исследования. Такая проблемная ситуация в технологии мастерских называется *индукцией* (индуктором). *Индукция* (наведение) – это этап, который направлен на создание эмоционального настроения и мотивации учащихся к творческой деятельности. На этом этапе предполагается включение чувств, подсознания и формирование личностного отношения к предмету обсуждения. Индуктор – всё то, что побуждает ребенка к действию. В качестве индуктора может выступать слово, текст, предмет, звук, рисунок, форма – все то, что способно вызвать поток ассоциаций. Это может быть и задание, но неожиданное, загадочное.

Составляя индуктор, надо соотнести его с чувствами, мыслями, эмоциями, которые он может вызвать у детей.

Широкий индуктор рассчитывается на тех учащихся, у которых обучение опирается и на зрительную, и на слуховую, и на двигательную память. Он дает большую свободу выбора каждому реализовать свое стремление к актуализации.

Индуктор в зачаточном состоянии есть в каждом ребенке, он как бы настраивает организм на саморазвитие. Если у ученика вообще нет потребности изучать науку, то одним индуктором не обойтись, нужна серия мастерских по формированию данной познавательной потребности. Существует и масса дру-

гих, не менее значимых: потребность быть личностью, потребность в самоутверждении, в общении, в самовыражении, в эмоциональном насыщении, в свободе, в эмоциональном контакте, в двигательной активности, в игре и др. Мастерская стремится реализовать все эти потребности, но приоритет отдается развитию познавательной потребности.

Если интереса к предмету нет, мастерская направляет действия на создание мотива, на обозначение цели и на то, чтобы ребята сами открыли, что эта цель для них достижима. Осознать возможность решения проблемы – могучее средство для стимулирования интереса.

*Деконструкция* – разрушение, хаос, неспособность выполнить задание имеющимися средствами. Это работа с материалом, текстом, моделями, звуками, веществами. Это формирование информационного поля. На этом этапе ставится проблема и отделяется известное от неизвестного, осуществляется работа с информационным материалом, словарями, учебниками, компьютером и другими источниками, то есть создается информационный запрос.

*Реконструкция* – воссоздание из хаоса своего проекта решения проблемы. Это создание микрогруппами или индивидуально своего мира, текста, рисунка, проекта, решения. Обсуждается и выдвигается гипотеза, способы ее решения, создаются творческие работы: рисунки, рассказы, загадки. Идет работа по выполнению заданий, которые дает учитель. *Самоконструкция* – это индивидуальное создание гипотезы, решения, текста, рисунка, проекта.

Важнейшим элементом технологии мастерских является групповая работа (малые группы выделяются в классе, образуются из учащихся разных классов, часто возникают стихийно, по инициативе ребят). При обучении математике в условиях проведения творческой мастерской сочетаются различные варианты организации групповой работы (начиная с работы парами и заканчивая работой всего класса).

Мастер может корректировать состав групп, регулируя равновесие психологических качеств детей (экстра- и интровертность, тип мышления, эмоциональность, лидерство и др.). Мастер разбивает задание на ряд частичных задач. Группам предстоит придумать способ их решения, причем ребята свободны в выборе метода, темпа, поиска, каждому предоставлена независимость в выборе пути поиска решения, дано право на ошибку и на внесение корректив.

*Социализация* – это соотнесение учениками или микрогруппами своей деятельности с деятельностью других учеников или микрогрупп и представление всем промежуточных и окончательных результатов труда, чтобы оценить и

скорректировать свою деятельность. Дается одно задание на весь класс, идет работа в группах, ответы сообщаются всему классу. На этом этапе ученик учится говорить. Это позволяет учителю-мастеру вести урок в одинаковом темпе для всех групп.

Всякое выступление ребенка в группе представляет сопоставление, сверку, оценку, коррекцию окружающими его индивидуальными качествами, иными словами, социальную пробу, социализацию.

*Афиширование* – это вывешивание, наглядное представление результатов деятельности мастера и учеников. Это может быть текст, схема, проект и ознакомление с ними всех. На этом этапе все ученики ходят, обсуждают, выделяют оригинальные интересные идеи, защищают свои творческие работы.

Когда группа выступает с отчетом о выполнении задачи, важно настоять, чтобы в отчете были задействованы все. Выступать за группу ответственно и почетно. Каждому хочется, чтобы его группа выступила хорошо. Это заражает всех. Работа в малых группах в отличие от фронтальной работы с классом позволяет использовать уникальные способности ребят, дает им возможность самореализоваться. Она в большей мере, чем индивидуальная и фронтальная работа с классом, позволяет учесть и включить в работу различные способы познания у каждого из ребят.

*Разрыв* – это внутреннее осознание участником мастерской неполноты или несоответствия старого знания новому, внутренний эмоциональный конфликт, подвигающий к углублению в проблему, к поиску ответа, к сверке нового знания с литературным источником. Ближе всего отражают смысл этого слова озарение, инсайт, понимание. Такой же процесс можно наблюдать в лабораториях ученых, исследователей, когда длительный поиск приводит их не только к накоплению информации по изучаемому вопросу, но и к иному пониманию, а порой и к разрыву со старой теорией, старым обоснованием. Разрыв – резкое приращение в знаниях. Это кульминация творческого процесса, новое выделение учеником предмета и осознание неполноты своего знания, побуждение к новому углублению в проблему. Результат этого этапа – инсайт (озарение).

*Рефлексия* – это осознание учеником себя в собственной деятельности, это анализ учеником осуществленной им деятельности, это обобщение чувств, возникших в мастерской, это отражение достижений собственной мысли, собственного мироощущения. Мастерская дает ученикам творческий «опыт дерзновения», а не «опыт послушания». В какой же мере в мастерской предоставляется возможность использовать свое дерзновение, в какой мере мастер требует от

него послушания? Каковы их пропорции в мастерской? Принять задание мастера – акт послушания ученика. Но в выполнении задания есть свобода творчества, ребята сами выбирают путь его осуществления, и одна версия не исчерпывает всего задания. Мастер не получает запланированных им дома ответов, а иногда результат выполнения задания учениками приводит к разрыву цепей, сковывающих самого мастера.

Позиция ведущего мастера – это, прежде всего, позиция консультанта и советника, помогающего организовать учебную работу, осмыслить наличие продвижения в освоении способов. С ним можно обсудить причины неудач, составить программу действий. Проводя мастерскую, мастер не стремится просто передать знания. Он старается задействовать разум, мысль ребенка, сделать их активными, разбудить в нем то, что скрыто даже для него самого, понять и устранить то, что ему мешает учиться. Все задания мастера и его действия направлены на то, чтобы активизировать воображение ребенка, создать такую атмосферу, чтобы он проявил себя как творец. Мастер мягко, демократично, незаметно руководит работой ребят. Его миссия удивительная: развивать способности человека, способствовать реализации творческого потенциала, заложенного природой.

Мастерская состоит из системы заданий, которая:

- позволит уйти от информационной формы обучения (передачи информации учителем);
- включит учащихся в творческий процесс открытия знаний, построения системы новых знаний и включения их в систему имеющихся;
- предоставит школьникам абсолютную свободу (выбор пути исследования, выбор средств для достижения цели, выбор темпа работы и т.д.).

Мастерские каждодневного применения обычно строятся по алгоритму:

- индивидуальная работа по выполнению предложенных заданий (на базе имеющихся знаний, использования личного жизненного опыта);
- работа в парах (обмен результатами индивидуальной работы);
- работа в группах (выработка общего мнения группы);
- обмен мнениями в классе (группы представляют итоги своей работы);
- коррекция (группы вносят исправления и дополнения в свой вариант выполнения задания, учитывая результаты работы других групп);
- слово учителя (акцентирование внимания на ключевых моментах, выделение находок, ошибок);



– обсуждение мастерской (подведение итогов, формулирование нерешенных проблем).

Рассмотрим мастерскую по теме «Делимость чисел».

Ее образовательная цель – обобщить и систематизировать знания по теме «Делимость чисел» для подготовки ребят 11 класса к сдаче ЕГЭ по математике. Развивающая цель – развивать аналитические способности и логическое мышление, учить адаптироваться в новой ситуации при решении нестандартных заданий. Воспитательная цель – формировать активность личности школьника, взаимопомощь, коллективизм.

1. Индукция.

Дети заходят в класс, каждый берет карточку, на которой написаны признаки делимости и садится за тот стол, где стоит соответствующий признак.

2. Оргмомент.

Сообщение цели мастерской, плана работы, выбор командиров групп, запись в тетрадях числа и темы урока.

3. Реконструкция. Устная работа.

На доске даны числа. Нужно выбрать из них те, которые делятся на 3, 25, 11, 125, и записать их в разные столбцы.

4. Реконструкция. Работа в группах.

Ребята решают задание.

Через  $n!$  обозначается произведение натуральных чисел от 1 до  $n$ . Например,  $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ . Решите следующие уравнения:

а)  $n! = 2n$ ;

б)  $n! = 30(n - 1)$ ;

в)  $n! + 1 = (2n + 1)^2$ .

5. Афиширование и социализация.

Один ученик выходит к доске, показывая свое решение. Остальные ребята проверяют в тетради и, если есть ошибки (или неправильное решение), исправляют.

А.  $n! = 2n$ ,

$(n - 1)! \cdot n = 2n \mid \div n$ ,

$(n - 1)! = 2$ ,

$n - 1 = 2$ ,

$n = 3$ .

Ответ:  $n = 3$ .

$$Б. n! = 30(n - 1),$$

$$(n - 2)!(n - 1)n = 30(n - 1) \mid \div (n - 1),$$

$$(n - 2)!n = 30,$$

$$30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6.$$

Ответ:  $n = 5$ .

#### 6. Деконструкция.

Ребята берут карточку с заданием (для каждой группы разное). Они должны решить в группе и представить решение на доске.

Разбившись на бригады, 30 школьников пошли собирать яблоки. После окончания сбора школьники каждой бригады делят между собой поровну собранные этой бригадой яблоки, а остаток от такого деления (если он есть) отправляют в общий котел, где будет вариться компот (котел один на все 30 человек). Всего в саду на деревьях росло 336 яблок, и все они были собраны. Какое наибольшее число яблок может оказаться в котле, если:

а) в каждой бригаде 6 человек;

б) в бригадах может быть любое количество человек (причем в разных бригадах – разное)?

#### 7. Афиширование.

Каждая группа представляет свое решение с полным объяснением. Среди них обязательно найдется такая группа, которой потребуется помощь других групп. Если появляются вопросы и сомнения в решении, то ребятам из других групп предлагается предложить решение или высказать гипотезы.

Дано:

$$M = 30 \text{ (школьников),}$$

$$N = 336 \text{ (яблок).}$$

Пусть  $A$  – количество яблок в котле.

*Решение задачи при условии а)*

$$k = 6 \text{ – человек в каждой бригаде,}$$

$$30/6 = 5 \text{ бригад.}$$

Остаток от деления на 6: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Таким образом, от каждой бригады в котел может отправиться максимум 5 яблок.

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ – максимальное количество яблок, которые могут оказаться в котле.}$$

$(N - A)$  – количество яблок, которые поделены между 30 школьниками.

Пусть  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  – количество яблок, которые собрала каждая бригада и поделила между собой.

Так как в каждой бригаде 6 человек, то  $n_1 : 6, n_2 : 6, n_3 : 6, n_4 : 6, n_5 : 6$  и  $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = N - A$ , то  $(N - A) : 6$ .

Пусть  $A = 25$ , тогда  $N - A = 336 - 25 = 311$ . 311 не делится на 6, т.е. в котле не может быть 25 яблок.

Пусть  $A = 24$ , тогда  $N - A = 336 - 24 = 312$ . 312 делится на 6, т.е. наибольшее число яблок, которое может оказаться в котле, равно 24.

Ответ: 24 яблока.

*Решение задачи при условии б)*

От каждой бригады из  $m$  участников в котел попадет не более  $(m - 1)$  яблок.

Просуммируем все такие величины (т.е. яблоки, попавшие в котел). Эта сумма будет равна разности между общим числом школьников и числом бригад.

Пусть всего 1 бригада, получается, что  $336 = 11 \cdot 30 + 6$ , т.е. 6 яблок попадет в котел.

Пусть всего 2 бригады, получается, что в котле будет не более 28 яблок. Если в одной бригаде будет 2 школьника, и они соберут 29 яблок (в котел пойдет 1 яблоко), а во второй – 28 школьников, и они соберут 307 яблок (в котел пойдет 27 яблок), то в котле окажется 28 яблок.

Ответ: 28 яблок.

8. Разрыв.

Всем группам предлагается одно задание.

Ребята обсуждают решение в группах и предлагают разные способы решения.

Найдите восьмизначное число  $x$  в каждом из следующих случаев:

а) первая цифра в записи числа  $x$  равна 8. Если первую цифру перенести в конец, сдвинув остальные цифры на один разряд влево, то число не изменится;

б) первая цифра в записи  $x$  равна 6. Если ее стереть, то получится число в 16 раз меньше исходного;

в) первая цифра в записи числа  $x$  не больше 6. Если ее увеличить на 3, то получится число в 3 раза больше исходного.

$$x = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$$

а)  $a_1 = 8$

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = \overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_1}$$

$$a_1 = a_2,$$

$$a_2 = a_3,$$

$$a_3 = a_4,$$

$$a_4 = a_5,$$

$$a_5 = a_6,$$

$$a_6 = a_7,$$

$$a_7 = a_8,$$

$$a_8 = a_1,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8,$$

$$x = 88\,888\,888.$$

Ответ:  $x = 88\,888\,888$ ;

б)  $a_1 = 6$

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = 16 \cdot \overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8};$$

$$a_1 \cdot 10^7 + a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8 = 16 \cdot (a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8).$$

$$6 \cdot 10^7 = 15 \cdot (a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8).$$

$$4 \cdot 10^6 = a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8;$$

$$a_2 = 4,$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$

$$x = 64\,000\,000.$$

Ответ:  $64\,000\,000$ ;

в)  $a_1 \leq 6$

$$b_1 = a_1 + 3$$

$$\overline{b_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = 3 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}.$$

$$(a_1 + 3) \cdot 10^7 + a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8 = 3 \cdot (a_1 \cdot 10^7 + a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8).$$

$$3 \cdot 10^7 = 2 \cdot (a_1 \cdot 10^7 + a_2 \cdot 10^6 + a_3 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_5 \cdot 10^3 + a_6 \cdot 10^2 + a_7 \cdot 10 + a_8).$$

$$15\,000\,000 = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}.$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 5,$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$

$$x = 15\,000\,000.$$

Ответ:  $15\,000\,000$ .

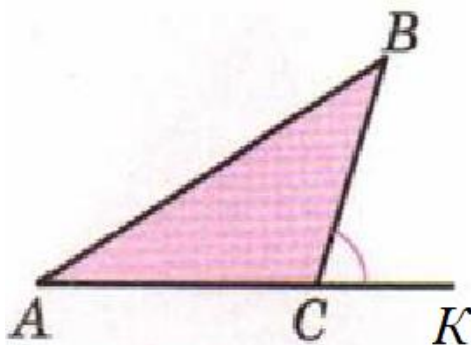
9. Рефлексия.

Подводятся итоги работы на уроке, объясняется индивидуальное домашнее задание, которое будет дано каждому ученику с учетом запросов, знаний и способностей. Дети оценивают свою работу и работу других групп.

Рассмотрим еще один пример мастерской по теме «Неравенства в треугольнике», приведенной в книге А.А. Окунева [39].

I. Нарисуйте треугольник ABC.

Продолжите отрезок AC за точку C, обозначьте его продолжение – луч CK. Отметьте  $\angle BCK$ .  $\angle BCK$  называется внешним углом треугольника (углы A, B, C – внутренние его углы). Сформулируйте и запишите определение внешнего угла треугольника.



Нарисуйте всевозможные внешние углы  $\Delta ABC$ .

II. Перечислите все геометрические фигуры на своем рисунке и запишите замеченные вами зависимости между ними. Возможны такие варианты:

$P_1: \angle BCK + \angle C = 180^\circ$   $P_2: \angle A + \angle B = \angle BCK$   $P: \angle BCK > \angle A, \angle BCK > \angle B$ .

III. В четверках. Сформулируйте теорему, в которой выражается зависимость внешнего угла ABC и угла треугольника, не смежного с ним. Слушаем.

Предложенные варианты теоремы мастер записывает на доске.

IV. Из всех вариантов формулировки теоремы, записанных на доске, группы выбирают один и, если надо, корректируют его. Слушаем. Мастер дает и свой вариант.

Внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника.

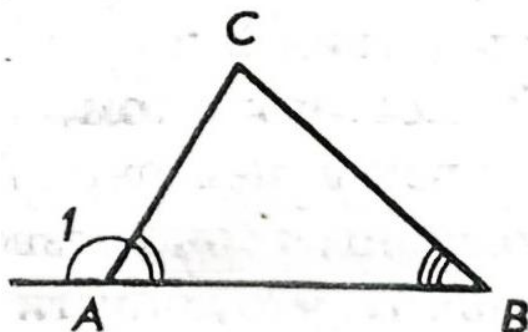
V. Допустим, что эта теорема доказана. Придумайте и сформулируйте предложения об углах треугольника ABC, которые будут следовать из этой теоремы.

Возможные варианты:

- сумма любых двух углов в треугольнике меньше развернутого;
- в каждом треугольнике не меньше двух острых углов;
- в прямоугольном треугольнике два острых угла.

VI. Слушаем. Если придумали, то доказываем:

а) сумма любых двух углов треугольника меньше развернутого угла, т.е. меньше  $180^\circ$ .



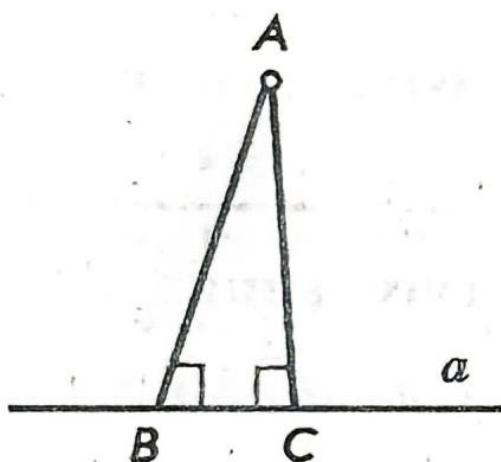
Рассмотрим в треугольнике ABC любые два угла, например  $\angle A$  и  $\angle B$ . Пусть  $\angle 1$  – внешний, смежный с углом A. Тогда  $\angle 1 + \angle A = 180^\circ$  и  $\angle B < \angle 1$ . Поэтому  $\angle B + \angle A < 180^\circ$ ;

б) в каждом треугольнике не меньше двух острых углов. Доказательство. Действительно, если бы в треугольнике оказалось два неострых угла, то их сумма была бы не меньше  $180^\circ$ . А это противоречит утверждению а). Следовательно, двух неострых углов в треугольнике быть не может. А значит, не менее двух углов в треугольнике – острые;

с) в прямоугольном треугольнике два угла – острые.

Таким образом, мы ответили на вопрос, почему в треугольнике лишь один угол может быть тупым или прямым.

Если не придумали ничего, то изучаем проблему: сколько перпендикуляров можно провести из одной точки на прямую.



Предполагаемый ответ: из каждой точки, не лежащей на данной прямой, на эту прямую может быть опущен лишь один перпендикуляр. Действительно, в противном случае появился бы треугольник с двумя прямыми углами, что невозможно.

VII. Возвращаемся к пункту V:

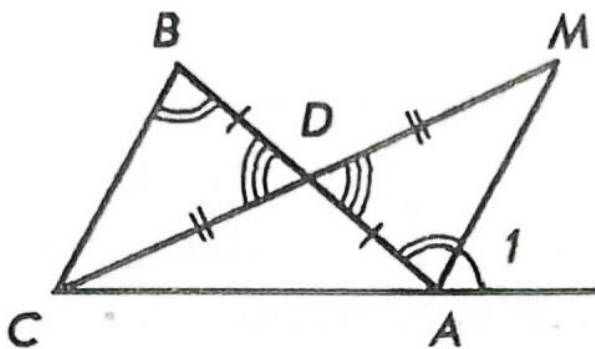
- a) нарисуйте треугольник, в котором сумма каких-нибудь углов больше или равна развернутому;
- b) нарисуйте треугольник, в котором лишь один острый угол;
- c) нарисуйте прямоугольный треугольник, в котором один острый угол.

Рассмотрите рисунки, подумайте над заданиями, которые вы выполняли, и сформулируйте вывод в виде теоремы.

VIII. Слушаем, обсуждаем. Все выводы, сделанные группами, мастер записывает на доске.

IX. Возвращаемся к доказательству теоремы (см. пункт IV).

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle 1$  – внешний угол треугольника  $ABC$ , смежный с углом



Доказать:  $\angle 1 > \angle B$  и  $\angle 1 > \angle C$ .

Доказательство. Докажем, например, что  $\angle 1 > \angle B$ . Пусть точка  $D$  – середина стороны  $AB$ . Проведем медиану  $CD$  и продолжим ее на отрезок  $DM = CD$ . Проведем отрезок  $MA$  и рассмотрим треугольники  $BCD$  и  $AMD$ . Они равны по первому признаку равенства, так как  $DC = DM$ ,  $DA = DB$  и  $\angle BDC = \angle MDA$  (как вертикальные). Поэтому  $\angle B = \angle DAM$ . Но  $\angle DAM$  лишь часть  $\angle 1$ , и потому  $\angle 1 > \angle DAM$ . Следовательно,  $\angle 1$  будет больше и  $\angle B$ , равного  $\angle DAM$ . Утверждение, что  $\angle 1 > \angle C$  доказывается аналогично.

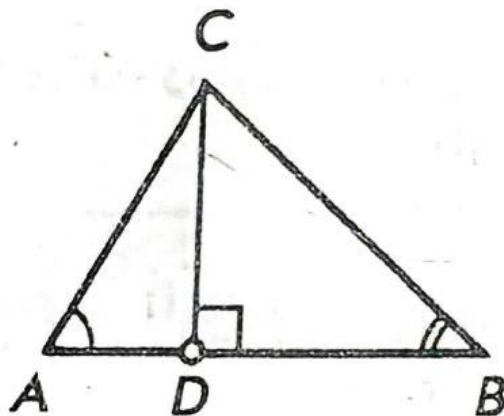
X. 1. Постройте остроугольный треугольник  $ABC$  и из точки  $B$  проведите высоту.

2. Постройте тупоугольный треугольник  $ABC$ , угол  $B$  – тупой. Проведите из точки  $C$  высоту.

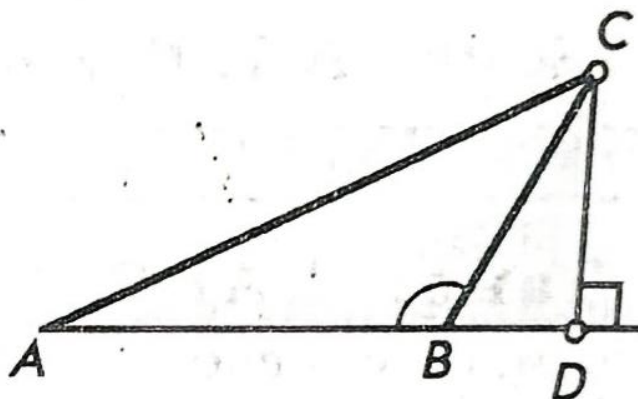
Объясните, почему в одном случае высота внутри треугольника, а в другом – вне.

Предполагаемый ответ: высота, опущенная на ту сторону треугольника, к которой прилегают два острых угла, лежит внутри треугольника. Высота, опу-

щенная на ту сторону треугольника, к которой прилегает тупой угол, лежит вне треугольника.



Ученики пытаются доказать эти утверждения самостоятельно, допустив, что эти предложения не выполняются, и получив противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника.



XI. Слушаем, обсуждаем.

XII. Евклид в «Началах» сформулировал предложение: «Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол».

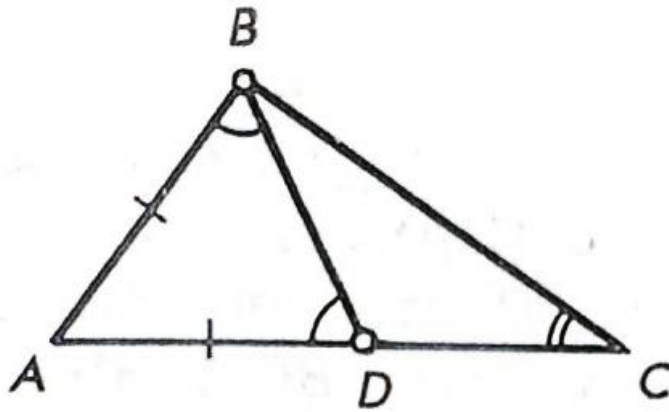
Попробуйте понять, о чем говорит Евклид; объясните это утверждение.

Запишите, что дано, что надо доказать, предварительно нарисовав треугольник.

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $AC > AB$ .

Доказать:  $\angle ABC > \angle BCA$ .





XIII. Поговорите в четверках, сверьте ваше понимание смысла утверждения Евклида и докажите это положение Евклида.

XIV. Четверки, придумавшие доказательство, пишут его на доске.

XV. Слушаем доказательство.

Действительно, поскольку  $AC$  больше, чем  $AB$ , отложим  $AD$ , равную  $AB$ , и соединим  $B$  с  $D$ . И поскольку в треугольнике  $BCD$  угол  $ADB$  – внешний, то он больше внутреннего ему противолежащего угла  $DCB$ . Но угол  $ADB$  равен углу  $ABD$ , поскольку и сторона  $AB$  равна  $AD$ ; значит, и угол  $ABD$  больше угла  $ACB$ ; значит, угол  $ABC$  больше угла  $ACB$ .

Следовательно, во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол, что и требовалось доказать.

XVI. Домашнее задание. Докажите предложение Евклида: «Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной».

(Допустите, что это не так, и попробуйте прийти к противоречию.)

## 2.7. ТЕХНОЛОГИЯ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Основные задачи уроков-консультаций:

- ликвидация пробелов в знаниях;
- углубление знаний;
- формирование новых знаний (методов решения задач);
- передача как опыта учителя, так и положительного опыта учащихся по решению задач.

По каждому из выделенных блоков учитель разрабатывает задания с теоретическим и практическим содержанием, которые предлагаются учащимся для самостоятельного обучения.

Ученик в процессе выполнения задания по предложенной программе составляет карточку, где формулирует вопросы теории, в которых не смог разобраться, фиксирует те задачи, которые не смог решить, отмечает наиболее интересную задачу, решением которой он хотел бы поделиться. Эту карточку он отдает учителю за день до урока-консультации.

На основе таких карточек учитель планирует урок-консультацию. Целесообразно, чтобы отобранный материал был логически связан между собой и выстроен таким образом, чтобы каждый ученик получил ответы на поставленные им вопросы.

Близкой к технологии консультирования является *модель перевернутого класса*. Перевернутый класс (урок) – это модель обучения, при которой учитель предоставляет материал для самостоятельного изучения дома, а на занятии проходит практическое закрепление материала. Для перевернутого обучения характерно использование *водкастов* (vodcast), *подкастов* (podcast), и *преводкастинга* (pre-vodcasting).

*Подкаст* (Podcast) – это звуковой файл (аудиолекция).

*Водкаст* (Vodcast от *video-on-demand* – видео по запросу) – видеофайл (видеолекция).

*Пре-водкастинг* (Pre-Vodcasting) – это образовательный метод, предполагающий создание школьным учителем или преподавателем вуза водкаста с лекцией для ознакомления учащихся с темой занятия до занятия, на котором эта тема будет рассмотрена. Метод пре-водкастинга – это первоначальное название метода перевернутого класса.

В модели перевернутого класса (Flipped Class) выполнение домашней работы, помимо прочего, включает в себя применение технологий водкаста:

- просмотр видеолекции;
- чтение учебных текстов, анализ поясняющих рисунков;
- выполнение тестов на начальное усвоение темы.

Классная работа посвящается разбору сложной теоретической части и вопросов, возникших у учащихся в процессе выполнения домашней работы, решению учащимися под наблюдением учителя практических задач и выполнению исследовательских заданий. После занятия в классе дома завершается решение

практических задач, выполняются тесты на понимание и закрепление пройденной темы.

Разработчиками модели перевернутого класса считаются два учителя – Джонатан Бергман (Jonathan Bergman) и Аарон Сэмс (Aaron Sams), реализовавшие в 2007 году свою идею обеспечения лекциями спортсменов, часто пропускающих занятия, а затем развившие эту идею в новое образовательное направление. Бергман вспоминает: «Весной 2007 года Аарон показал мне статью о программном продукте, позволяющем создать слайдшоу в PowerPoint, включающее голос и любые текстовые заметки. Затем все это конвертируется в видеофайл, который легко распространять онлайн. Мы поняли, что это может позволить нашим студентам пропускать занятия, не пропуская обучения! Мы начали размещать наши лекции онлайн, чтобы студенты могли получить к ним доступ. Если честно, мы записывали наши лекции из эгоистических побуждений. Мы расходовали непомерно много времени на проведение повторных занятий для студентов, пропустивших занятия. Записи лекций стали нашей первой линией обороны» [42].

Перевороту обучения способствовали следующие факторы:

- пассивность учащихся;
- необходимость пересмотра роли учителя как транслятора информации;
- появление новых технологий и средств;
- неэффективность заучивания материала.

Федеральный государственный образовательный стандарт содержит множество требований, которым соответствует обучение в рамках модели «Перевернутого класса», – учащиеся должны:

- использовать в процессе обучения технологические инструменты, а также персонализировать учебное пространство для углубления знаний;
- понимать специфику обучения в цифровом мире и действовать только безопасными и законными методами;
- мыслить критически при изучении материала;
- изучить существующие материалы и уметь «решать проблемы путем создания новых решений» [55].

Преимущества модели перевернутого класса:

- педагоги располагают большим количеством времени, чтобы помочь обучающимся, объяснить содержание разделов, вызвавших затруднение;

- ученики, как это часто бывает в традиционной системе, не игнорируют выполнение домашнего задания, потому что не поняли объяснение нового материала на уроке, так как традиционное домашнее задание делается в классе, при поддержке и помощи учителя;

- обучающиеся не испытывают неловкости или смущения, просматривая один и тот же материал несколько раз, пока не поймут его; после просмотра видеоматериала у них есть возможность записать возникшие вопросы и разобрать их отдельно с педагогом;

- педагог на уроке имеет возможность качественно организовать учебную деятельность, вовлекая в разные виды работ всех учеников класса;

- использование образовательных возможностей интернет-пространства, общения между учащимися способствуют формированию у детей критического мышления, ответственности за собственное обучение, других интеллектуальных способностей и ключевых компетенций.

Критики технологии перевернутого класса утверждают, что эта модель ухудшает традиционный аспект образования из-за невозможности оперативно задать вопросы лектору. Защитники модели отвечают, что потребность в таких вопросах снижается за счет дополнительных возможностей, появляющихся при ее использовании:

- неограниченно пересматривать непонятное место видеолекции; обратиться к справочнику часто задаваемых вопросов;

- задавать вопросы другим ученикам с помощью модуля дискуссии (здесь дополнительно включаются механизмы социальной теории познания);

- отправить вопросы учителю через встроенную электронную почту, чтобы получить разъяснения на предстоящем занятии в классе.

Обобщая перечисленные аргументы, можно сформулировать положительные и отрицательные черты технологии перевернутого класса (рис. 30) [17].

Положительные черты		Отрицательные черты
Учащиеся и родители будут тесно работать с ИКТ, тем самым повышая свой уровень компетентности в данной области	↔	Отсутствие необходимого технического оснащения в семье (отсутствие компьютера, сети Интернет)
Учащиеся могут прочитывать, просматривать, прослушивать материал неограниченное количество раз	↔	Необходимо контролировать время, проводимое учащимся за компьютером
Учитель, создавая комплекс теоретического материала и заданий на первичное закрепление, имеет возможность повышать уровень своей научно-методической подготовки, развивать навыки использования инноваций и ИКТ в области преподаваемого предмета	↔	Первоначально потребуются затраты большого количества времени для создания качественной базы электронных образовательных ресурсов

Рис. 30. Положительные и отрицательные черты технологии перевернутого класса

Обучение в рамках модели «Перевернутого класса» происходит следующим образом:

1. Педагоги готовят несколько видеолекций в неделю (это могут быть и готовые материалы из сети Интернет).

2. Обучающиеся смотрят данные видеолекции дома. Особенности просмотра видеолекций заключаются в следующем:

- ученик осваивает материал в индивидуальном темпе;
- отсутствуют временные ограничения;
- возможность общаться со сверстниками и педагогом, используя систему онлайн-обсуждений.

3. Урочное время используется для выполнения практических работ или другой учебной деятельности.

Обучающиеся могут делиться на мини-группы по уровню подготовленности; на тех, кто больше любит смотреть, читать или писать. Сначала нужно ис-

пользовать те навыки, которые у них наиболее развиты: условных «читателей» садят вместе читать книги, «писатели» будут делать какие-то пометки, а предпочитающие визуальный контент – смотреть видео. Затем следует пробовать развивать и другие способности: группы можно перемешать, таким образом у детей откроются иные перспективы мышления и восприятия информации.

Безусловно, обучение в рамках модели перевернутого класса требует от педагога дополнительной подготовки, особенно на первых порах. Когда учитель только начинает организовывать подобную работу, необходимо учесть, что:

- каждое учебное видео или электронные образовательные ресурсы следует сопровождать поэтапной инструкцией с четким указанием учебных целей;
- обязательно нужно сопровождать каждое учебное видео заданием (если видео не содержит задания, то следует предложить ученикам составить несколько вопросов к видео, это могут быть вопросы общего характера и специальные вопросы к отдельным фрагментам видео);
- нужно привлекать учеников к написанию конспектов или небольших заметок по просмотренному видео.

При подготовке к занятиям преподаватели положительно отзываются о материалах площадки РЭШ (Российской электронной школы), ЭБС Юрайт (URL: [www.urait.ru](http://www.urait.ru)), ЭБС ЛАНЬ (URL: <https://e.lanbook.com>), МЭБ (URL: <https://icdlib.nspu.ru/>).

Презентация по новой теме нужна детям, которые будут несколько раз возвращаться к одному и тому же. Отдельный слайд просмотреть проще, чем возвращаться к конкретному фрагменту видеофильма. Найти готовый или создать свой материал можно в программе LearningApps (URL: <https://LearningApps.org>).

Задания по теме дети получают за неделю до урока, чтобы у них была возможность подготовиться. Задание должно включать не только познавательную часть, но и развлекательную, которая являет собой занимательные математические факты, ребусы, загадки и многое другое. На сайте (URL: <http://LearningApps.org>) содержится огромная коллекция игр, викторин, заданий по разным предметам.

Первый этап работы в условиях «перевернутого обучения» – освоение нового материала. Он включает в себя самостоятельную работу обучающегося с

учебными материалами: просмотр видеолекций, чтение учебных текстов, прохождение тестов на начальное усвоение материала.

Ученик должен посмотреть видеолекцию и выписать себе в тетрадь тему и основное правило (в видеолекции нужно показать несколько примеров применения данного правила). Усвоение проверяется учителем с помощью входного контроля в начале урока.

Следующим этапом обучения становится организация занятия на цифровой платформе либо аудиторное занятие. Обязательными компонентами следующего этапа занятия являются актуализация темы, обсуждение вопросов, появившихся у учащихся во время самостоятельного изучения материала, выполнение интерактивных заданий или профессионально-ориентированных кейсов в парах и малых группах.

Технологию консультирования или перевернутый класс можно применить при изучении не всех тем математики: для ее использования подходят легкие темы, которые учащиеся могут изучить самостоятельно.

Рассмотрим пример применения технологии консультирования при изучении темы «*Числовые последовательности*».

Содержание темы (теоретическое и практическое) можно разбить на 5 блоков:

- I. Понятие числовой последовательности.
- II. Свойства числовой последовательности.
- III. Арифметическая прогрессия.
- IV. Геометрическая прогрессия.
- V. Метод математической индукции

Урок-консультация будет проводиться по блоку III. Арифметическая прогрессия. В результате изучения блока учащиеся должны овладеть понятием арифметической прогрессии, изучить ее свойства, научиться ими пользоваться и сформировать практические умения решать задачи.

Сначала вводятся понятия арифметической прогрессии, затем изучаются ее свойства. Материалом этого параграфа должны овладеть все учащиеся.

При изучении теоретической части блока учащиеся должны прочитать и изучить самостоятельно:

1. Определение арифметической прогрессии.
2. Что значит разность арифметической прогрессии? Обозначение.
3. Что значит  $n$ -ый член? Как его можно найти? Свойство  $n$ -го члена.
4. Формула простых процентов.
5. Как можно найти сумму  $n$  первых членов?

Разработка основного содержания темы выполнялась на основе учебника С.М. Никольского «Алгебра. 9 класс» (Москва: Просвещение, 2014).

Ученик в процессе выполнения задания по предложенной программе составляет карточку (табл. 1–2), где формулирует вопросы теории, в которых он не смог разобраться, фиксирует те задачи, которые не смог решить, отмечает наиболее интересную задачу (используя знаки «–» – не смог, «+» – решил и понял, «++» – интересная задача).

Таблица 1

**Карточка для подготовки к уроку-консультации**

	Арифметическая прогрессия	Написать формулу	Выполнить задания
1	Определение		
2	Разность		
3	$n$ -ый член, свойство		
4	Формула простых процентов		
5	Сумма первых $n$ членов		

Эту карточку он отдает учителю за день до урока-консультации.



Таблица 2

**Карточка, заполненная учеником  
в ходе подготовки к уроку-консультации**

	Арифметическая прогрессия	Написать формулу	Выполнить задания										
1	Определение	$a_{n+1} = a_n + d$	<table border="1"> <tr> <td>440</td> <td>451</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>-</td> </tr> </table>	440	451	+	-						
440	451												
+	-												
2	Разность	$d = a_{n+1} - a_n$	<table border="1"> <tr> <td>442</td> <td>443</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>+</td> </tr> </table>	442	443	+	+						
442	443												
+	+												
3	п-й член, свойство	$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ $a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	<table border="1"> <tr> <td>445</td> <td>447</td> <td>451</td> <td>453</td> <td>455</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>-</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table>	445	447	451	453	455	+	-	+	-	+
445	447	451	453	455									
+	-	+	-	+									
4	Формула простых процентов	$x_n = a(1 + \frac{n \cdot p}{100})$	<table border="1"> <tr> <td>457</td> <td>458</td> </tr> <tr> <td>++</td> <td>-</td> </tr> </table>	457	458	++	-						
457	458												
++	-												
5	Сумма первых n членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1) \cdot d}{2} \cdot n$	<table border="1"> <tr> <td>460</td> <td>464</td> <td>473</td> <td>474</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td>-</td> <td>- ++</td> <td>+</td> </tr> </table>	460	464	473	474	+	-	- ++	+		
460	464	473	474										
+	-	- ++	+										

Рассмотрим ход урока-консультации по теме «Арифметическая прогрессия».

Целью урока является систематизация и закрепление знаний учащихся по теме «Арифметическая прогрессия».

На этапе актуализации знаний по теме учащиеся отвечают на вопросы учителя: что называют арифметической прогрессией, что такое разность арифмети-

ческой прогрессии, как она обозначается, что значит  $n$ -ый член и как его можно найти, формулируют характеристическое свойство арифметической прогрессии, записывают формулу простых процентов и формулу суммы  $n$  первых членов арифметической прогрессии.

На втором этапе происходит разбор задач, которые вызвали затруднение или которые ученики не смогли решить самостоятельно.

№ 443

Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а)  $-5, -2, 1, 1, 4, 7, 10 \dots$ ;      б)  $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, \dots$ ?

Решение: а) так как  $a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ , последовательность не является арифметической прогрессией;

б) так как  $a_3 - a_2 \neq a_2 - a_1$ , последовательность не является арифметической прогрессией.

№ 447

Докажите, что в арифметической прогрессии  $\{a_n\}$  разность  $d$  можно вычислить по формуле  $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ ,  $m \neq n$ .

Решение: по формуле  $n$ -го члена имеем  $a_m = a_1 + (m - 1)d$ ,  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ .  $a_m - a_n = (m - 1 - n + 1)d = (m - n)d$ , поэтому  $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ , что и требовалось доказать.

№ 451

Является ли число 12 членом арифметической прогрессии

а)  $-11, -8, -5, \dots$ ;      б)  $44,5, 43, 41,5 \dots$ ?

Если да, то укажите его номер.

Решение: а) сначала найдем разность арифметической прогрессии.  $d = -8 - (-11) = 3$ . Если 12 является членом арифметической прогрессии с номером  $n$ , то верно равенство  $12 = -11 + (n - 1) 3$ , из которого следует, что  $n = 8\frac{2}{3}$ . Так как номер члена арифметической прогрессии не может быть дробным числом, то 12 не является членом арифметической прогрессии;

б) сначала найдем разность арифметической прогрессии.  $d = 44,5 - 43 = -1,5$ . Если 12 является членом арифметической прогрессии с номером  $n$ , то верно равенство  $12 = 44,5 + (n - 1) (-1,5)$ , из которого следует, что  $n = 22\frac{2}{3}$ . Так как номер члена арифметической прогрессии не может быть дробным числом, то 12 не является членом арифметической прогрессии.

№ 453

Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия 3,8; 3,5; 3,2...?

Решение: сначала найдем разность арифметической прогрессии.  $d = 3,5 - 3,8 = -0,3$ . По формуле  $n$ -го члена имеем  $a_n = 3,8 + (n - 1)(-0,3) = 4,1 - 0,3n$ . Найдем все натуральные  $n$ , для которых верно неравенство  $4,1 - 0,3n > 0$ . Решив это неравенство, получим, что  $n < 13\frac{2}{3}$ . Итак, арифметическая прогрессия имеет 13 положительных членов.

№ 455

Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена:

а)  $a_n = 3n - 7$ ; б)  $a_n = -3n + 5$ , – является арифметической прогрессией.

Решение: а) так как для данной последовательности  $\{a_n\}$  разность  $a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) - 7 - (3n - 7) = 3$  – число постоянное, то эта последовательность является арифметической прогрессией;

б) так как для данной последовательности  $\{a_n\}$  разность  $a_{n+1} - a_n = -3(n + 1) + 5 - (-3n + 5) = -3$  – число постоянное, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Далее следует разбор интересных задач, решение которых учащиеся показывают сами (или разбирают с учителем).

№ 457

Предприниматель взял в банке кредит на сумму  $a$  р. при условии, что ежемесячно его долг перед банком будет увеличиваться на  $p$  % от суммы взятого кредита. Предприниматель вернул деньги банку сполна в сумме  $b$  р. через  $n$  месяцев. Ответьте на вопросы:

1. Какую сумму предприниматель вернул банку, если  $a = 500\ 000$ ,  $p = 2$ ,  $n = 10$ ?
2. На какую сумму предприниматель взял кредит, если  $p = 2$ ,  $n = 12$ ,  $b = 992\ 000$ ?
3. Через сколько месяцев предприниматель вернул банку деньги, если  $a = 600\ 000$ ,  $p = 3$ ,  $b = 852\ 000$ ?
4. Под какой процент в месяц предприниматель взял кредит, если  $a = 700\ 000$ ,  $n = 6$ ,  $b = 910\ 000$ ?

Решение: 1. Предприниматель вернул банку  $500\ 000$  р. и еще по  $2$  % от этой суммы за каждый из  $10$  месяцев, т.е.  $500\ 000 + \frac{500\ 000 \cdot 2 \cdot 10}{100} = 600\ 000$  (р.);

2. Так как за  $12$  месяцев предприниматель выплатил дополнительно  $12 \cdot 2 = 24$  (%) взятой в кредит суммы, то  $992\ 000$  р. составляет  $100 + 24$  (%)

взятой в кредит суммы, которая равна  $\frac{992\,000 \cdot 100}{124} = 800\,000$  (р.), то есть предприниматель взял кредит на сумму 800 000 р.

3. Так как 852 000 р. от 600 000 составляют  $\frac{852\,000 \cdot 100}{600\,000} = 142$  (%) взятой в кредит суммы, то за пользование кредитом предприниматель вернул банку  $142 - 100 = 42$  (%) взятой в кредит суммы. Предприниматель вернул кредит через  $42 : 3 = 14$  (месяцев).

4. Так как 910 000 р. от 700 000 составляют  $\frac{910\,000 \cdot 100}{700\,000} = 130$  (%) взятой в кредит суммы, то за пользование кредитом предприниматель вернул банку  $130 - 100 = 30$  (%) взятой в кредит суммы. Предприниматель взял кредит по  $30 : 6 = 5$  (%) в месяц.

№ 458

Покажите, как ответ к каждой задаче из задания № 457 можно получить с помощью формулы общего члена арифметической прогрессии.

Решение. После первого месяца долг увеличится на  $\frac{pa}{100}$  р. и станет равным  $a + \frac{pa}{100}$  (р.). Суммы долга в конце каждого месяца образуют арифметическую прогрессию с первым членом  $a_1 = a + \frac{pa}{100}$  (р.) и разностью  $\frac{pa}{100}$  (р.), поэтому после  $n$  месяцев сумма его долга может быть получена как  $n$ -й член этой прогрессии, т.е.  $b = a_n = a_1 + (n - 1)d = a + \frac{pa}{100} \cdot n = a \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$  (р.).

Таким образом,  $b = a \left(1 + \frac{pn}{100}\right)$  (р.).

Далее в каждом из пунктов а) – г) по известным значениям трех величин можно получить значение четвертой величины, то есть получить те же ответы, что и в предыдущем задании.

№ 464.

1. Определите сумму первых 40 четных натуральных чисел.

2. Определите сумму всех трехзначных натуральных чисел.

Решение: 1. Здесь требуется определить сумму первых членов арифметической прогрессии, у которой  $a_1 = 2$ ,  $d = 2$ . По формуле суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии для  $n = 40$  имеем

$$s_n = \frac{2a_1 + (40 - 1)d}{2} \cdot 40 = \frac{4 + 39 \cdot 2}{2} \cdot 40 = 1\,640.$$

Итак, сумма первых 40 четных натуральных чисел равна 1 640.

2. Здесь требуется определить сумму числа от 100 до 999, т.е. сумму первых  $999 - 100 + 1 = 900$  членов арифметической прогрессии, у которой  $a_1 = 100$ ,

$d = 1$ . По формуле суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии для  $n = 900$  имеем

$$s_n = \frac{2a_1 + (900 - 1)d}{2} \cdot 900 = \frac{200 + 899 \cdot 1}{2} \cdot 900 = 494\,550.$$

Итак, сумма всех трехзначных натуральных чисел равна 494 550.

Ответ: 1. 1 640. 2. 494 550.

№ 474

В арифметической прогрессии сумма первых  $n$  членов равна сумме первых  $m$  членов ( $m \neq n$ ). Докажите, что сумма первых  $(m+n)$  членов равна нулю.

Доказательство. По условию задачи сумма первых  $n$  членов равна сумме первых  $m$  членов, т.е. верно равенство

$$\frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \text{ из которого получим, что}$$

$$(m - n)(2a_1 - (m + n - 1)d) = 0.$$

В задаче предполагается, что  $m \neq n$ , поэтому, разделив последнее равенство на  $m - n \neq 0$ , получим, что

$$(2a_1 - (m + n - 1)d) = 0. \quad (1)$$

В формуле суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии заменим  $n$  на  $n + m$  и получим:

$$s_{m+n} = \frac{2a_1 + (m + n - 1)d}{2} \cdot (m + n). \quad (2)$$

Из равенства (1) следует, что числитель дроби в равенстве (2) равен 0, следовательно  $s_{m+n} = 0$ , что и требовалось доказать.

Завершает урок самостоятельная работа:

1. Найдите двенадцатый член арифметической прогрессии 4,2; 3,5; ...
2. Тринадцатый член арифметической прогрессии ( $a_n$ ) равен 5, а двадцатый член равен 1,5. Найдите первый член и разность этой арифметической прогрессии.
3. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии 4,8; 4,6; ...
4. Сколько первых членов арифметической прогрессии  $-7; -6; -5; \dots$  нужно сложить, чтобы получить  $-27$ ?

Итак, к положительным сторонам технологии консультирования можно отнести:

- саморазвитие учащихся (самостоятельно изучают тему);
- самоконтроль и самоанализ учащихся (указывают выполненные, сложные и интересные задания);
- возможность углубленного изучения темы;

- возможность ликвидации пробелов в знаниях по теме;
- возможность использования технологии консультирования как интернет-консультирование (во время эпидемий, карантинов и т.д.).

Технология консультирования развивает:

- личностные качества учащихся (ответственность, способность принимать решения, развитие логического и критического мышления);
- метапредметные качества (умение адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи; умение устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение; умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом)
- предметные компетентности (овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни и для дальнейшего обучения).

Таким образом, данная технология позволяет учащимся развивать способность самостоятельно обучаться, что важно для современного информационного общества.

## 2.8. Кейс-технология

По технологии применения она относится к классу технологий решения сложных, слабоструктурированных проблем, предполагающих использование творческого потенциала исследователя, ориентацию на инновации.

Опыт использования кейс-технологии в обучении показал ее высокую эффективность с точки зрения:

- развития навыков структурирования информации и идентификации проблем;
- научения технологиям выработки управленческих решений различного типа (стратегических, тактических);
- актуализации и критического оценивания накопленного опыта в практике принятия решений;
- эффективных коммуникаций в процессе коллективного поиска и обоснования решения;
- разрушения стереотипов и штампов в технике и организации поиска верного решения;

- стимулирования инноваций за счет синергетики знаний – развитие системного, концептуального знания;
- повышения мотивации на расширение базы теоретического знания для решения прикладных задач.

Использование кейс-технологии предполагает ее адаптацию к различным аудиториям. Для этого целесообразно провести предварительную классификацию возможных типов ситуаций с целью подбора эффективной технологии преподавания каждой конкретной ситуации и методического выстраивания курсов по принципу нарастающей сложности и интенсивности организации занятий.

Родиной кейс-метода считают Школу бизнеса Гарвардского университета (США). Впервые кейс-метод был использован в 1924 году.

Преподаватели давали описания определенной ситуации, с которой сталкивалась реальная организация, учреждение в своей деятельности, чтобы у обучающихся была возможность ознакомиться с проблемой и самостоятельно найти ее решение в ходе коллективного обсуждения. Таким образом, основой появления метода является принцип «прецедента» (реального случая успешно решенной бизнес-задачи).

В постсоветское время этот метод – уже в современном, обновленном виде – стал использоваться в России работниками управления, которые получили за рубежом звание MBA (Master of Business Administration). С 2007 года организуются чемпионаты по решению бизнес-кейсов. Стала широко применяться практика тестирования при помощи бизнес-кейсов при трудоустройстве.

*Кейс* – пример, взятый из жизни и представляющий собой единый информационный комплекс, с помощью которого анализируется данная ситуация.

Кейсы строятся на фактическом материале или же максимально близки к реальной ситуации. Кейс в своем составе имеет три части: описание конкретной ситуации, вспомогательную информацию, которая нужна для изучения кейса, и задания к кейсу.

У кейс-технологии есть свои признаки, которые позволяют отличать ее от других технологий обучения:

- контролируемое педагогом эмоциональное напряжение обучающихся;
- наличие модели социальной (социально-экономической) системы, состояние которой подлежит рассмотрению в некоторый определенный момент времени;
- присутствие единой цели при поиске решений;
- осуществление и возможность коллективной выработки решений;

- наличие множества способов решений;
- принципиальное отсутствие единственного решения;
- использование системы группового оценивания деятельности.

Кейс-технология обучения включает в себя следующие этапы:

- 1) ознакомление учеников с материалом кейса;
- 2) анализ кейса;
- 3) организацию обсуждения кейса (наиболее распространены такие формы обсуждения, как презентация с использованием слайд-шоу и дискуссия);
- 4) оценивание участников обсуждения;
- 5) подведение итогов.

Ознакомление учеников с материалом кейса и следующий за ним анализ кейса необходимо осуществить заранее, за несколько дней до обсуждения кейса, в виде самостоятельной работы; при этом время, которое отводится на подготовку, определяется непосредственно видом кейса, сложностью и его объемом. На данном этапе работу с кейсом можно представить следующим образом:

- определяются наиболее значимые проблемы кейса и понятия;
- затем необходимо понять ситуационный контекст кейса, отобрать понятия и факты, которые нужны для анализа, выявить, какие трудности возможны при решении задачи;
- выбрать метод исследования.

Обсуждение небольших по объему кейсов может входить в образовательный процесс, и у обучающихся в этом случае есть возможность знакомиться с ними прямо на занятиях. Особенно важным в данном случае является то, чтобы ученики обладали теоретическими знаниями, на которых строится кейс.

При изучении в курсе математики темы «Дифференциальные уравнения» студентам может быть предложено задание ознакомиться с примерами формулировки различных задач на языке дифференциальных уравнений:

1. Закон распада некоторых радиоактивных веществ состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству этого вещества. Если  $x$  – количество вещества в некоторый момент времени  $t$ , то этот закон можно записать так:  $\frac{dx}{dt} = -kx$ , где  $\frac{dx}{dt}$  – скорость распада, а  $k$  – некоторая положительная постоянная, характеризующая данное вещество.

2. Пусть на тело массы  $m$ , подвешенное к концу пружины, действует возвращающая сила, пропорциональная величине растяжения пружины. Пусть  $x$  – величина отклонения тела от положения равновесия. Тогда по вто-



тому закону Ньютона, который утверждает, что ускорение пропорционально силе,  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ .

После этого дается задание кейса:

1) составьте дифференциальное уравнение, описывающее следующую ситуацию: «Емкость первоначально содержит 10 кг соли, растворенной в 100 м<sup>3</sup> воды. Если чистая вода вливается в емкость со скоростью 1 м<sup>3</sup> в минуту и равномерно перемешивается с раствором, а образовавшийся раствор вытекает из емкости с такой же скоростью, то сколько соли окажется в емкости в любой последующий момент времени, если  $x$  – количество соли (в кг) в емкости в момент времени  $t$  ?»;

2) представьте ситуацию, которая описывается с помощью дифференциального уравнения вида  $\frac{dE}{dt} = -k(T - 20)$ , где  $T$  – температура в момент времени  $t$ .

Рассмотрим использование кейс-технологии на уроке *по теории вероятностей*.

Учащиеся уже знают, что вероятность – численное значение возможности или шансов чего-то происходящего. Обычно мы представляем вероятность в виде обыкновенной или десятичной дроби или процентов.

Вероятность любого события находится в пределах  $0 \leq P \leq 1$ , где 0 соответствует невозможному событию, а 1 соответствует событию, в происшествии которого мы уверены абсолютно. В промежутке между 0 и 1 событие произойдет с той или иной степенью уверенности.

Сумма вероятностей всех возможных событий равна 1.

*Классическое* определение вероятности успеха основано на предшествующем знании о протекании процесса; *эмпирическое* определение предполагает вычисление вероятности по наблюдаемым данным, а не по априорным знаниям (по предшествующим эксперименту); *субъективное* определение основывается на мнении исследователя, оценивающего шансы потенциальных исходов.

#### ОПИСАНИЕ КЕЙСА

Челябинские Авиалинии (ЧА) – небольшая региональная авиакомпания. ЧА планирует авиасообщение между Екатеринбург и Челябинском – ежедневно 3 рейса туда-обратно (всего 6 полетов за день).

ЧА предполагает проведение промоакции с большим главным призом в один день месяца на каждом рейсе.

День акции в каждом месяце выбирается случайным образом в последний день предыдущего месяца. В этот день все пассажиры каждого рейса

напишут день своего рождения (день и месяц). Если у любых двух пассажиров одного рейса дни рождения будут совпадать, они поместят записки со своими именами в темный мешок, и владелец случайно выбранной записки получит главный приз.

Вместимость авиасудна не превышает 40 пассажиров (без учета экипажа). Маркетолог ЧА Ксюша надеется, что вероятность сдвоенного дня рождения крайне низка, поэтому маловероятна частая выдача главного приза. Ксюша заявила, что вероятность сдвоенного дня рождения составляет  $40/365$  ( $\approx 11\%$ ) для полностью заполненного самолета, и чем меньше пассажиров будет на борту, тем меньше шансы.

Владелец хочет узнать, какова вероятность одного или более совпадений дней рождений на рейсах с 20, 30 и 40 пассажирами?

Права ли маркетолог компании Ксюша в ее предположении?

Давайте проверим!

Независимые события – такие события, возникновение одного из которых никак не влияет на вероятность возникновения других событий. Например, день твоего рождения никак не связан с днем моего рождения.

Для независимых событий вероятность всех произошедших событий равна произведению вероятностей каждого случившегося события:

$$P(A, \text{ и } B, \text{ и } \dots) = P(A) \cdot P(B) \cdot \dots$$

Какова вероятность для 20 пассажиров, что *хотя бы* двое из них имеют день рождения в один день?

Посмотрим по-другому: какова вероятность, что у всех 20 пассажиров день рождения в разные дни?

Последовательно: 20 независимых событий, где каждое событие соответствует определенному пассажиру, день рождения которого не совпадает с днем рождения ни одного человека, рассматриваемого прежде.

Пренебрегаем високосными годами, путешествиями близнецов и сезонностью рождаемости. В итоге дни рождения во все 365 дней равновероятны!

Классическая вероятность:

$P(A)$  – вероятность того, что как минимум два пассажира имеют день рождения в один день:

$$P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{общее число исходов}}.$$

Дополнение события А:

$P(A')$  — вероятность того, что ни у каких двух пассажиров нет дней рождений, приходящихся на одну дату.

И поскольку  $P(A)$  и  $P(A')$  всего два возможных события, причем взаимоисключающих, то:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

$P(1)$  — для одного человека; 365 различных возможностей:

$$P(1) = \frac{365}{365};$$

$P(2)$  — для двух людей; 364 варианта, чтобы у второго человека ДР не совпало с днем рождения первого человека:

$$P(2) = \frac{364}{365};$$

$P(3)$  — для третьего человека; если он родился в любой другой из 363 дней, отличных от дня рождения 1-го и 2-го человека, тогда у всех трех дни рождения будут «непересекающимися»:

$$P(3) = \frac{363}{365}.$$

Считаем для всех 20 пассажиров:

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{346}{365} = 0,588528\dots$$

Тогда вероятность того, что как минимум двое имеют день рождения в один и тот же день:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,588528, \\ P(A) \approx 41.15\%.$$

Для 30 пассажиров:

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{336}{365} = 0,293665\dots$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.293665 ;$$

$$P(A) \approx 70,63 \%.$$

Для 40 пассажиров:

$$P(A') = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \dots \cdot \frac{326}{365} = 0,108760\dots$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0,108760$$

$$P(A) \approx 89,12 \%.$$

Итак, вероятность совпадения дней рождения для 20 пассажиров – 41,15 %, для 30 пассажиров – 70,63 % и для 40 пассажиров – 89,12 %.

Кажется неправдоподобным, не так ли?

Далее, считаем, что каждый день компания ЧА осуществляет 6 полетов. Умножаем вероятность *повторяемости* дней рождений на количество пассажиров:

$$6 * 0,4115 = 2,47 \text{ приза/месяц за полет 20 пассажиров;}$$

$$6 * 0,7063 = 4,24 \text{ приза/месяц за полет 30 пассажиров;}$$

$$6 * 0,8912 = 5,35 \text{ приза/месяц за полет 40 пассажиров.}$$

Следующий пример кейс-технологии предназначен для учащихся 5 класса, изучающих *задачи на проценты*.

Учащимся предлагается следующее задание.

В каком из магазинов города (по данным табл. 3 и 4) покупателю выгодно приобрести следующий набор продуктов: 1 батон пшеничного хлеба, 4 кг картофеля, 1 кг сыра, 2 литра молока, 1 литр подсолнечного масла, 1кг говядины, на общую сумму, не превышающую 1500 рублей?

Как вы думаете, в каком из магазинов наиболее выгодно совершить покупку? Как выгодно потратить средства: за наличный расчет или за наличный расчет с использованием дисконтной карты?

*Памятка*

Нахождение процента от числа
$1 \% = 0,01 = \frac{1}{100}$
Чтобы найти процент от числа, нужно число умножить на процент, выраженный обыкновенной или десятичной дробью.

Пример:

Предприятие изготовило за квартал 500 насосов, из которых 60 % имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества изготовило предприятие?

Решение:

$$500 : 100 \cdot 60 = 500 \cdot 0,6 = 300.$$

Ответ: 300 насосов высшей категории качества.

Дисконтная карта – это средство, гарантирующее получение потребителем скидки в торговых точках при соблюдении правил использования дисконтных карт.

Таблица 3

**Цены на некоторые основные продукты питания  
в трех сетях магазинов города (в рублях)**

Наименование продукта	Стоимость продуктов в сетях магазинов города (р.)		
	«Магнит» (р.)	«Альянс» (р.)	«Бриг» (р.)
Пшеничный хлеб (батон)	25	26	25
Молоко (1 литр)	47	50	48
Картофель (1 кг)	30	32	28
Сыр (1 кг)	250	260	260
Говядина (1кг)	300	295	260
Подсолнечное масло (1 литр)	72	69	75

Таблица 4

**Скидки по дисконтным картам у покупателя в сетях магазинов города**

	«Магнит»	«Альянс»	«Бриг»
Процент скидок	6	7	5

## 1. Анализ кейса

### Группа 1. Анализ условий покупки в сети магазинов «Магнит»

Используя текст кейса, проведите расчеты, чтобы узнать стоимость набора продуктов за наличный расчет и стоимость набора продуктов с использованием дисконтной карты в сети магазинов «Магнит». Сравните результаты.

### Группа 2. Анализ условий покупки в сети магазинов «Альянс»

Используя текст кейса, проведите расчеты, чтобы узнать стоимость набора продуктов за наличный расчет и стоимость набора продуктов с использованием дисконтной карты в сети магазинов «Альянс». Сравните результаты.

### Группа 3. Анализ условий покупки в сети магазинов «Бриг»

Используя текст кейса, проведите расчеты, чтобы узнать стоимость набора продуктов за наличный расчет и стоимость набора продуктов с использованием дисконтной карты в сети магазинов «Бриг». Сравните результаты.

## 2. Обсуждение кейса

Задание для обсуждения:

– обсудите в группах результаты исследования. Данные оформите в виде таблицы;

– опираясь на материалы кейса и результаты исследования, сравните стоимость покупки за наличный расчет и стоимость набора продуктов за наличный расчет с использованием дисконтной карты отдельно в группе по каждому магазину.

В итоге каждая группа выступает с предложениями по решению задачи. В группах происходит обсуждение результатов исследования работы и выработка рекомендаций по результатам работы.

Таблица 5

**Цены на некоторые основные продукты питания  
в трех сетях магазинов города (в рублях)**

Наименование продукта	Стоимость продуктов в сетях магазинов города (р)		
	«Магнит» (р.)	«Альянс» (р.)	«Бриг» (р.)
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
Пшеничный хлеб (батон)	25	26	25
Молоко (1 литр)	47	50	48

1	2	3	4
Картофель (1 кг)	30	32	28
Сыр (1 кг)	250	260	260
Говядина (1 кг)	300	295	260
Подсолнечное масло (1 литр)	72	69	75
Стоимость покупки	724	732	696
Стоимость покупки с учетом дисконтной карты	$0,94 \cdot 724 = 680,56$	$0,93 \cdot 732 = 680,76$	$0,95 \cdot 696 = 661,2$

Рассмотрим еще один пример кейса для урока в 9 классе по теме «Прогрессии».

Целями урока было научить видеть арифметическую и геометрическую прогрессию в реальной ситуации, научить применять формулу для нахождения  $n$ -го члена прогрессии, развивать коммуникативные навыки путем работы в группе (в т.ч. научиться отстаивать свою точку зрения), развивать презентационные умения, развивать навыки анализа и критического мышления.

*Описание кейса.*

В семье Назаровых в 2011 году родились близнецы: Вова и Костя. Папа Саша и мама Катя на пятилетие детей решили посадить яблони в своем огромном саду. Причем, папа и Вова сажали 5 яблонь сорта «Осеннее полосатое», а мама с Костей – 5 яблонь сорта «Сентябрьское».

Семья решила каждый год пополнять количество яблонь в саду на 10, по пять каждого сорта. Спустя некоторое время папа узнал, что фирма «ФрутоНяня» хочет сотрудничать с поставщиком яблок для изготовления детского пюре. Но у этой фирмы условие: каждый год им необходимо получать не менее 10 тонн яблок от поставщика. В таком случае после заключения договора «ФрутоНяня» обязуется купить яблоки по цене 30 рублей за кг. Папа подумал, что неплохо было бы продолжить посадку яблонь каждый год и наладить сотрудничество с фирмой «ФрутоНяня», поскольку захотел сделать сыновьям подарки на 18-летие: подарить им машину Ford Focus.

Сможет ли семья Назаровых осуществить свою задумку и вручить подарки детям на их совершеннолетие при следующих условиях:

- яблоня сорта «Осеннее полосатое» начинает плодоносить в среднем на 6 год после посадки, урожайность такого дерева в среднем 150 кг;
- яблоня сорта «Сентябрьское» начинает плодоносить в среднем на 5 год после посадки, урожайность такого дерева в среднем 120 кг;
- каждый пятый год – неурожайный для яблонь сорта «Осеннее полосатое», урожайность понижается в 4 раза (неурожайные годы считаются от момента посадки);
- каждый шестой год – неурожайный для яблонь сорта «Сентябрьское», урожайность понижается в 3 раза;
- в 2016 году машина фирмы Ford Focus стоила в среднем 650 тысяч рублей, каждый год цена растет на 2 %, по сравнению с предыдущей стоимостью.

Если на 18-летие не удастся подарить машину, то к какому году можно будет это сделать при условии сохранения денег, полученных за каждый год после указанного?

Давайте разбираться.

При внимательном прочтении задачи можно увидеть, что выделяется несколько числовых последовательностей, каждая из которых образует арифметическую прогрессию, а именно: количество яблок, в кг; количество яблонь; возраст детей; годы.

Поскольку каждый год, начиная с 2021 (детям 10 лет) количество килограммов яблок увеличивается на  $5 \cdot 150$ , можно говорить об арифметической прогрессии с начальным членом 750, разностью 750, количеством членов 9. Если говорить о количестве плодоносящих яблонь, также видим прогрессию с начальным членом 5, шаг равен 5, количеством членов 9, если говорить о количестве яблонь. Найдем девятый член (количество яблонь, которое будет плодоносить на 18-летие) по формуле  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ :

$$a_9 = 5 + 5(9 - 1) = 45.$$

Вычислим количество яблок «Осеннее полосатое», которые можно собрать на 18-летие:  $45 \cdot 150 = 6\,750$  кг.

Вычислим количество яблок «Сентябрьское», которые можно собрать на 18-летие:  $45 \cdot 120 = 5\,400$  кг.

Помним про неурожайные годы, но замечаем, что год 18-летия не является таковым.

В сумме: 12 150 кг. Условия фирмы соблюдены, собран урожай более 10 т. При покупке яблок по цене 30 рублей за килограмм папа Саша получит сумму:  $30 \cdot 12\,150 = 364\,500$  рублей.



Вычислим стоимость машины к этому времени. Поскольку каждый год цена увеличивается в 1,02 раза, цены на машину на протяжении тринадцати указанных лет образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,02. Итак,  $650\ 000 \cdot 1,02^{13}$  (650 тысяч – стоимость в 2016 году, 2028 год учитывается)  $\approx 841\ 000$  рублей. Делаем вывод, что покупку машины придется отложить. Когда же осуществится мечта папы Саши? На следующий год, когда ребятам исполнится по 19 лет, ожидается неурожай сорта «Осеннее полосатое», а когда сыновья достигнут 20-летия, неурожай постигнет сорт «Сентябрьское».

2029 год:  $50 \cdot (150/4 + 120) = 7\ 875$  кг яблок.

Поскольку полученный урожай получился меньше 10 тонн, то в 2029 году фирма «ФрутоНяня» не купит яблоки у семьи Назаровых.

Считаем далее: 2030 год:  $55 \cdot (150 + 120/3) = 10\ 450$  кг яблок (более 10 тонн, условия соблюдены). Выручка:  $10\ 450 \cdot 30 = 313\ 500$  рублей. В сумме 678 000 рублей. Вычислим стоимость машины к этому времени. Поскольку каждый год цена увеличивается в 1,02 раза, цены на машину на протяжении пятнадцати указанных лет образуют геометрическую прогрессию с разностью 1,02. Итак,  $650\ 000 \cdot 1,02^{15}$  (650 тысяч – стоимость в 2016 году, 2030 год учитывается)  $\approx 875\ 000$  рублей. Ждем следующего года для покупки машины.

2031 год:  $60 \cdot (150 + 120) = 16\ 200$  кг яблок. Выручка:  $16\ 200 \cdot 30 = 486\ 000$  рублей. В сумме 1 164 000 рублей. Вычислим стоимость машины к этому времени. Итак,  $650\ 000 \cdot 1,02^{16}$  (2031 год учитывается)  $\approx 892\ 500$  рублей.

Ура! Сыновья получают подарок, достигнув возраста 21 года. Поскольку в России совершеннолетие наступает с 18 лет, то получаем ответ на вопрос задачи: нет, на совершеннолетие дети подарок не получают. Но, если бы семья Назаровых жила, например, в Монако, Сингапуре или штате Миссисипи, Пуэрто-Рико США, то ответ на вопрос задачи был бы положительным, поскольку в данных странах (и еще в нескольких) совершеннолетие наступает с 21 года.

Решив данную задачу, учащиеся научатся видеть прогрессии, применять формулу нахождения n-го члена прогрессии, выделять проблему в тексте задачи, выбирать необходимые данные для решения, работать в группе, отстаивать свою точку зрения, разовьют презентационные умения.

Итак, включение участников работы с кейсом в реальные жизненные ситуации обеспечивает связь обучения с жизнью и трудом, показывая важность изучаемого материала, его прикладную направленность.

Активная работа учащихся с кейсом на всех технологических этапах, предполагающих разный характер деятельности, способствует развитию их кругозора, формированию предметных и общеучебных компетенций.

Высокая доля самостоятельной работы обучающихся в этой технологии позволяет успешно формировать их познавательную самостоятельность, что является важным условием развития интереса в учебной деятельности.

Дискуссионный характер кейс-задания и обсуждения кейса включает в учебный процесс элемент соревнования и определяет личную заинтересованность ученика, формирует такие важные для реализации личных интересов умения, как умения работать в команде, находить общее в разных взглядах на проблему, отстаивать и аргументировать свою точку зрения.

«Свободный» характер педагогического взаимодействия (по сравнению с традиционными формами обучения) является гораздо более привлекательным для учащихся подросткового возраста – именно в тот период, когда психологи отмечают резкое снижение интереса к учебе.

При наличии хорошей базы кейсов кейс-технология можно использовать на различных этапах обучения, поддерживая и развивая познавательные интересы учеников.

#### *Контрольные вопросы и задания*

1. Сформулируйте положительные стороны технологии консультирования.
2. Укажите основные задачи уроков-консультаций.
3. Перечислите этапы формирования умственных действий в технологии поэтапного формирования умственных действий.
4. Перечислите виды уроков, входящих в технологию учебных циклов.
5. Перечислите концептуальные положения технологии обучения на основе деятельностного подхода.
6. Перечислите этапы работы над приемом учебной деятельности в технологии обучения математике на основе деятельностного подхода.
7. Опишите основные этапы технологии творческих мастерских
8. По какому алгоритму строятся мастерские каждодневного применения?
9. Укажите особенности реализации игровых технологий при урочной форме занятий.
10. Задание: изучите сценарий игры «Суперлюди» [11]. Укажите предметные, метапредметные и личностные результаты, которые могут быть достигнуты при проведении этой игры.

11. Укажите концептуальные положения технологии проблемного обучения (по Д. Дьюи).

12. Перечислите основные этапы проектирования содержания обучения математике по технологии проблемно-модульного обучения.

13. Укажите отличительные черты технологии модульного обучения.

14. В чем проявляется эффективность использования кейс-метода при обучении математике?

15. Перечислите как можно больше особенностей кейс-технологии.

16. Перечислите этапы применения кейс-технологии в обучении.

17. Разработайте фрагмент урока, иллюстрирующего реализацию одной из технологий обучения математике:

- технологии обучения математике на основе деятельностного подхода;
- технологии консультирования в обучении математике;
- технологии мастерских в обучении математике;
- кейс-технологии обучения математике;
- технологии проблемного обучения математике;
- игровой технологии в обучении математике;
- технологии поэтапного формирования умственных действий в обучении математике.

В презентации должны быть представлены:

1) Ф. И. О студента;

2) тема урока;

3) цели (личностные, метапредметные и предметные результаты) в соответствии с концептуальными положениями технологии;

4) организация процесса обучения в виде пошаговой, поэтапной последовательности действий. При этом:

– обязательны этапы начальной и итоговой диагностики в соответствии с поставленными целями и этап мотивации деятельности учащихся;

– отбор материала, его структурирование, методы, формы и средства, особенности работы с ними должны соответствовать технологии.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, нами рассмотрены понятие педагогической технологии, история возникновения и развития, сущность, структура и классификации педагогических технологий, критерии их эффективности и вопросы выбора и разработки технологий обучения математике.

Подробно раскрыты особенности ряда предметно-ориентированных и лично ориентированных технологий. Показаны примеры практической реализации в процессе обучения математике таких технологий, как модульная технология, технология поэтапного формирования умственных действий, технология обучения математике на основе деятельностного подхода, технология консультирования, технология мастерских, игровые технологии, технология проблемного обучения и кейс-технология. Мы полагаем применение современных средств ИКТ неотъемлемой частью реализации технологий обучения, поэтому не рассматривали отдельно информационные технологии обучения математике.

Практические задания пособия в первую очередь направлены на освоение студентами умений реализации в процессе обучения математике эффективных педагогических технологий.

Обращение к источникам из библиографического списка позволит студентам самостоятельно расширить свой арсенал педагогических технологий.

Целенаправленное применение педагогом современных технологий обучения математике поможет воспитать инициативную, вдумчивую, ответственную личность, которая способна решать повседневные задачи, адаптироваться и находить свое место в постоянно меняющемся мире.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабанский, Ю.К. Избранные педагогические труды / Ю.К. Бабанский; АПН СССР. – Москва: Педагогика, 1989. – 558 с. – ISBN 5-7155-0174-1. – Текст: непосредственный.
2. Бархаев, Б.П. Новые аргументы в педагогических технологиях / Б.П. Бархаев // Школьные технологии. – 1997. – № 4. – С. 47–52. – ISSN 2220-2641. – Текст: непосредственный.
3. Башарин, В.Ф. Педагогическая технология: что это такое? / В.Ф. Башарин // Специалист. – 1993. – № 9. – С. 25–26. – ISSN 0869-5210. – Текст: непосредственный.
4. Безрукова, В.С. Словарь нового педагогического мышления / В.С. Безрукова. – Екатеринбург, 1992. – 92 с. – Текст: непосредственный.
5. Бершадский, М.Е. Дидактические и психологические основания образовательной технологии / М.Е. Бершадский, В.В. Гузеев. – Москва: Педагогический поиск, 2003. – 256 с. – ISBN 5-901030-62-1. – Текст: непосредственный.
6. Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологии / В.П. Беспалько. – Москва: Педагогика, 1989. – 192 с. – ISBN 5-7155-0099-0. – Текст: непосредственный.
7. Беспалько, В.П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В.П. Беспалько. – Москва: Изд-во Ин-та проф. м-ва образования, 1995. – 336 с. – Текст: непосредственный.
8. Брейтигам, Э.К. Обусловленность технологии обучения математике в школе возрастными особенностями учащихся / Э.К. Брейтигам, И.В. Кисельников, И.Г. Кулешова // Педагогический журнал. – 2021. – Т. 11. – № 3А. – С. 24–39. – ISSN 2223-5434. – Текст: непосредственный.
9. Брыксина, О.Ф. Инновационные технологии в образовании: где найти точку опоры, чтобы перевернуть урок? / О.Ф. Брыксина // Поволжский педагогический вестник. – 2015. – № 3 (8). – С. 53–57. – ISSN 2307-1052. – Текст: непосредственный.

10. Буланова-Топоркова, М.В. Педагогические технологии: учеб. пособие для студ. пед. специальностей / М.В. Буланова-Топоркова, А.В. Духавнева, В.С. Кукушин, Г.В. Сучков. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2010. – 333 с. – ISBN: 978-5-222-16549-2. – Текст: непосредственный.
11. Буслова, Н.С. Игровые технологии в обучении математике, информатике, физике: учебное пособие / Н.С. Буслова, А.К. Алексеевнина. – Казань: Бук, 2021. – 98 с. – ISBN 978-5-00118-749-3. – Текст: непосредственный.
12. Виленский, М.Я. Технологии профессионально-ориентированного обучения в высшей школе / М.Я. Виленский, П.И. Образцов, А.И. Уман; под ред. В.А. Сластенина. – Москва: Педагогическое общество России, 2005. – 192 с. – ISBN: 5-93134-207-9. – Текст: непосредственный.
13. Волков, И.П. Цель одна – дорог много. Проектирование процессов обучения / И.П. Волков. – Москва: Просвещение, 1990. – ISBN 5-09-002775-7. – Текст: непосредственный.
14. Волович, М.Б. Наука обучать. Технология преподавания математики / М.Б. Волович. – Москва: LINKA-PRESS, 1995. – 280 с. – ISBN 5-7193-0058-9. – Текст: непосредственный.
15. Выготский, Л.С. Воображение и творчество в детском возрасте / Л.С. Выготский. – Санкт-Петербург: Перспектива, 2020. – 125 с. – ISBN: 978-5-6043828-4-4. – Текст: непосредственный.
16. Гальперин, П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П.Я. Гальперин. – Москва: Изд-во МГУ, 1985. – 45 с. – Текст: непосредственный.
17. Говдырь, А.И. Формы, методы и средства технологии «Перевернутый класс» при обучении математике в средних классах / А.И. Говдырь, Д.В. Шармин // Математическое и информационное моделирование: материалы Всероссийской конференции молодых ученых (Тюмень, 18–23 мая 2022 г.). – Тюмень: ТюмГУ-Press, 2022. – Вып. 20. – С. 400–404. – Текст: электронный.
18. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики / Я.И. Груденов. – Москва: Просвещение, 1990. – 224 с. – ISBN 5-09-002723-4. – Текст: непосредственный.
19. Гузеев, В.В. Образовательная технология: от приема до философии / В.В. Гузеев. – Москва: Сентябрь, 1996. – 112 с. – ISBN 5-88753-009-X. – Текст: непосредственный.

20. Давыдов, В.В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – Москва: ИНТОР, 1996. – 544 с. – ISBN 5-89404-001-9. – Текст: непосредственный.
21. Епишева, О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Кн. для учителя / О.Б. Епишева. – Москва: Просвещение, 2003. – 223 с. – ISBN 5-09-010905-2. – Текст: непосредственный.
22. Дидактические основы подготовки инженеров-педагогов: учебное пособие / под ред. П.Ф. Кубрушко, В.П. Косырева. – Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 2000. – 200 с. – Текст: непосредственный.
23. Змеев, С.И. Технология обучения взрослых / С.И. Змеев. – Москва: Академия. 2002. – 127 с. – ISBN 5-7695-0856-6. – Текст: непосредственный.
24. Иванова, Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с. – ISBN 978-5-85219-182-3. – Текст: непосредственный.
25. Кларин, М.В. Педагогические технологии в учебном процессе / М.В. Кларин. – Москва: Знание, 1989. – 80 с. – ISBN: 5-07-000132-9. – Текст: непосредственный.
26. Корушева, С.Е. Технологии профессионально-ориентированного обучения: учебное пособие / С.Е. Корушева, Ю.В. Жильцова. – Ульяновск: Зебра, 2023. – 40 с. – ISBN 978-5-6049345-5-5. – Текст: непосредственный.
27. Ксензова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии / Г.Ю. Ксензова. – Москва: Педагогическое общество России, 2000. – 224 с. – ISBN 5-93134-051-3. – Текст: непосредственный.
28. Кудрявцев, В.Т. Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы / В.Т. Кудрявцев. – Москва: Знание, 1991. – ISBN 5-07-001687-3. – Текст: непосредственный.
29. Кучинов, Й. Разработване и внедряване на някои дидактически технологии в обучение то по математика в 4–6 класна ЕСПУ / Й. Кучинов, Д. Шопова // Обучение то по математика и информатика. – 1990. – Кн. 6. – С. 1–6. – Текст: непосредственный.
30. Левитас, Г.Г. Технология учебных циклов, или Как улучшить классно-урочную систему обучения / Г.Г. Левитас. – Москва: Аркти, 2006. – 72 с. – ISBN 5-89415-503-7. – Текст: непосредственный.

31. Лихачев, Б.Т. Педагогика. Курс лекций: учеб. пособие / Б.Т. Лихачев. – Москва: Юрайт, 2001. – 607 с. – ISBN 5-94227-099-6. – Текст: непосредственный.
32. Лихолетов, В.В. Технологии творчества: теоретические основы, моделирование, практика реализации в профессиональном образовании / В.В. Лихолетов. – Челябинск: Изд-во Юж.-Урал. гос. ун-та, 2001. – 287 с. – ISBN 5-696-01887-4. – Текст: непосредственный.
33. Лихолетов, В.В. Профессиональное образование: гуманизация и технологии творчества / В.В. Лихолетов, М.М. Зиновкина. – Москва: Изд-во Моск. гос. индустр. ун-та. 2001. – 231 с. – ISBN 5-276-00-220-7. – Текст: непосредственный.
34. Матяш, Н.В. Инновационные педагогические технологии. Проектное обучение: учеб. пособие для вузов / Н.В. Матяш. – Москва: Академия, 2011. – 158 с. – ISBN 978-5-4468-0645-4. – Текст: непосредственный.
35. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособ. для студ. матем. Ф-тов пед. ун-тов / под науч. ред. В.В. Орлова. – Москва: Дрофа, 2007. – 320 с. – ISBN 978-5-358-01304-9. – Текст: непосредственный.
36. Монахов, В.М. Аксиоматический подход к проектированию педагогической технологии / В.М. Монахов // Педагогика. – 1997. – № 6. – С. 26–31. – ISSN 0869-561X. – Текст: непосредственный.
37. Морева, Н.А. Технологии профессионального образования: учеб. пособие для вузов / Н.А. Морева. – Москва: Академия. 2008. – 429 с. – ISBN 978-5-7695-5147-5. – Текст: непосредственный.
38. Ожегов, С.И. Толковый словарь русского языка: 80 000 тысяч слов и фразеологических выражений / С.И. Ожегов, Н.Ю. Шведова. – Москва: Азбуковник, 1997. – 944 с. – ISBN 5-89285-003-X. – Текст: непосредственный.
39. Окунев А.А. Как учить не уча. 1 000 мастерских по математике, русскому языку и для начальной школы / А.А. Окунев. – Санкт-Петербург: Питер Пресс, 1996. – 448 с. – ISBN 5-88782-080-2. – Текст: непосредственный.
40. Окунев, А.А. Спасибо за урок, дети: О развитии творческих способностей учащихся: Книга для учителя: Из опыта работы / А.А. Окунев. – Москва: Просвещение, 1988. – 128 с. – ISBN 5-09-000830-2. – Текст: непосредственный.



41. Панфилова, А.П. Инновационные педагогические технологии / А.П. Панфилова – Москва: Академия, 2009. – 192 с. – ISBN 978-5-7695-6220-4. – Текст: непосредственный.
42. Перевернутый класс: технология обучения XXI века. – URL: <https://www.ispring.ru/elearning-insights/perevernutyi-klass-tekhnologiya-obucheniya-21-veka> (дата обращения: 22.10.2024). – Текст: электронный.
43. Савельева, М.Г. Педагогические кейсы: конструирование и использование в процессе обучения и оценки компетенций студентов: учеб.-метод. пособие / М.Г. Савельева. – Ижевск: УдГУ, 2013. – 94 с. – Текст: непосредственный.
44. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – Москва: Просвещение, 1995. – 239 с. – ISBN 5-09-004602-6. – Текст: непосредственный.
45. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие для вузов и программ повышения квалификации / Г.К. Селевко. – Москва: Народное образование, 1998. – 256 с. – ISBN 87953-127-9. – Текст: непосредственный.
46. Селевко, Г.К. Альтернативные педагогические технологии / Г.К. Селевко. – Москва: НИИ школьн. технологий. 2005. – 219 с. – ISBN 5-87953-197-X. – Текст: непосредственный.
47. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2 т. Т. 2 / Г.К. Селевко. – Москва: Народное образование, 2006. – 816 с. – Текст: непосредственный.
48. Семушина, Л.Г. Содержание и технологии обучения в средних специальных учебных заведениях / Л.Г. Семушина, Н.Г. Ярошенко. – Москва: Мастерство, 2001. – 272 с. – ISBN 5-294-00062-8. – Текст: непосредственный.
49. Сериков, В.В. Личностный подход в образовании: концепция и технологии / В.В. Сериков; Волгогр. гос. пед. ун-т. – Волгоград: Перемена, 1994. – 150 с. – ISBN 5-88234-061-6. – Текст: непосредственный.
50. Слостенин, В.А. Доминанта деятельности / В.А. Слостенин // Народное образование. – 1997. – № 9. – С. 41–42. – ISSN 0130-6928. – Текст: непосредственный.
51. Столяр, А.А. Педагогика математики: учеб. пособие / А.А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1986. – 414 с.

52. Суховиенко, Е.А. Теоретические основы информационных технологий педагогической диагностики: монография / Е.А. Суховиенко. – Челябинск: Изд-во Челябинского гос. пед. ун-та, 2004. – 212 с. – ISBN 5-85716-517-2. – Текст: непосредственный.

53. Суховиенко, Е.А. Математическая модель рейтинговой системы диагностики компетенций будущих учителей математики / Е.А. Суховиенко // Актуальные проблемы развития среднего и высшего образования. XI Межвуз. сб. науч. тр. – Челябинск: Край Ра, 2015. – С. 92–98. – ISBN 978-5-905251-74-0. – Текст: непосредственный.

54. Талызина, Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н.Ф. Талызина. – Москва: Изд-во МГУ, 1975. – 344 с. – Текст: непосредственный.

55. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г. № 287. – URL:<https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/#1000>. – Текст: электронный.

56. Философский словарь / под ред. И.Т. Фролова. – 4-е изд. – Москва: Политиздат, 1980. – 444 с. – Текст: непосредственный.

57. Фокин, Ю.Г. Теория и технология обучения: деятельностный подход / Ю.Г. Фокин. – Москва: Академия, 2008. – 240 с. – ISBN 978-5-534-05712-6. – Текст: непосредственный.

58. Цявичене, П.Ю. Теория и практика модульного обучения / П.Ю. Цявичене. – Каунас: Швиеса, 1989. – 272 с. – ISBN 5-430-00874-5. – Текст: непосредственный.

59. Чекалева, Н.В. Современные теории и технологии образования / Н.В. Чекалева. – Омск: Изд-во Омского пед. ун-та, 1993. – 71 с. – ISBN 5-8268-0043-7. – Текст: непосредственный.

60. Чернилевский, Д.В. Дидактические технологии в высшей школе / Д.В. Чернилевский. – Москва: ЮНИТИ, 2002. – 437 с. – ISBN 5-238-00350-1. – Текст: непосредственный.

61. Чошанов, М.А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения: методическое пособие / М.А. Чошанов. – Москва: Народное образование, 1996. – 160 с. – ISBN 5-87953-008-6. – Текст: непосредственный.

62. Шепель, В.М. Ортобиотика: слагаемые оптимизма / В.М. Шепель. – Москва: Авиценна ЮНИТИ, 1996. – 295 с. – ISBN: 5-85178-015-0. – Текст: непосредственный.

63. Юнина, Е.А. Технологии качественного обучения в школе / Е.А. Юнина. – Москва: Педагогическое общество России, 2007. – 223 с. – ISBN 978-5-93134-369-3. – Текст: непосредственный.

64. Bergmann, J. Flip Your Classroom: Reaching Every Student in Every Class Every Day / J. Bergmann, A. Sams // International Society for Technology in Education, 1 edition, 2012. – 122 p.

65. Gilboy, M. Enhancing Student Engagement Using the Flipped Classroom / M. Gilboy, S. Heinerichs, G. Pazzaglia // Journal of Nutrition Education And Behavior. – 2015. – 47(1). – Pp. 109–114. – doi: 10.1016/j.jneb.2014.08.008. Epub 2014 Sep 26.

66. McLean, S Flipped classrooms and student learning: not just surface gains / S. McLean, S.M. Attardi, L. Faden, M. Goldszmidt // Adv. Physiol. Educ. – 2016. – 40(1). – Pp. 7–55. – doi: 10.1152/advan.00098.2015.PMID:26847257.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ</b> .....	4
1.1. ИСТОРИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ОБРАЗОВАНИЮ .....	4
1.2. СУЩНОСТЬ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ .....	12
1.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЙ. СТРУКТУРА ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ ..	26
1.4. ВЫБОР И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ, КРИТЕРИИ ЕЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ .....	35
<b>ГЛАВА 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ</b> .....	55
2.1. ТЕХНОЛОГИЯ МОДУЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ .....	55
2.2. ТЕХНОЛОГИЯ ПОЭТАПНОГО ФОРМИРОВАНИЯ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ .....	88
2.3. ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА .....	125
2.4. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОБЛЕМНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ .....	135
2.5. ИГРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ .....	147
2.6. ТЕХНОЛОГИЯ МАСТЕРСКИХ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ .....	168
2.7. ТЕХНОЛОГИЯ КОНСУЛЬТИРОВАНИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ .....	184
2.8. КЕЙС-ТЕХНОЛОГИЯ .....	197
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	211
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b> .....	212

*Учебное издание*

**Суховиенко Елена Альбертовна**

**СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ**

*Учебное пособие*

ISBN 978-5-907869-55-4

Работа рекомендована РИС ЮУрГГПУ  
Протокол № 30 от 2024 г.

Издательство ЮУрГГПУ  
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Редактор О.В. Боярская  
Технический редактор Н.А. Усова

Подписано в печать 14.11.2024                      Тираж 100 экземпляров  
Формат 60\*84/8  
Объем 10,7 уч.-изд. л. (25,6 усл.п.л.)  
Заказ \_\_\_\_\_

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ  
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69