А. Л. Королев

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Лабораторный практикум

Министерство просвещения РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет»

А. Л. Королев

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

Лабораторный практикум

Челябинск
2024

УДК 681.4(021)

ББК 32.973:2-018я73

К 68

Королев, А. Л. Компьютерное моделирование случайных событий: лабораторный практикум / А. Л. Королев; Министерство просвещения РФ, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. гуманит.-пед. ун-та, 2024. – 66 с. – ISBN 978-5-907869-18-9. – Текст: непосредственный.

Пособие посвящено одной из важных информационных технологий – компьютерному моделированию случайных событий и процессов, которое лежит в основе имитационного моделирования. Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по следующим специальностям:

1. Направление: 44.03.05 «Педагогическое образование» по профилям: «Информатика–Английский язык», «Математика–Информатика», «Физика–Информатика», «Информатика–Математика» при изучении курсов «Компьютерное моделирование».
2. Направление: 09.03.02 «Информационные системы и технологии», профиль: «Информационные технологии в образовании» при изучении курсов «Моделирование систем».

Цель пособия – сформировать у студентов способности разрабатывать компьютерные модели процессов и систем на основе современной методологии моделирования с использованием современных технологий и основных естественно-научных законов, а также проводить модельные исследования и компьютерные эксперименты в области профессиональной деятельности. Пособие содержит материалы для лабораторных работ по построению различных типов моделей случайных событий и процессов. Практическая часть курса построена на доступном для образовательных целей программном обеспечении.

ISBN 978-5-907869-18-9

Рецензенты:

Дильман В. Л., д-р физ.-мат. наук, доцент ЮУрГУ

Дмитриева О. А., канд. пед. н. доцент ЮУрГГПУ

© Королев А. Л., 2024

© Издательство Южно-Уральского государственного гуманитарно-педагогического университета, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Глава	**1.**	**Моделирование случайных событий и анализ случайных величин в среде электронных таблиц**	8
	1.1.	Моделирование случайного события	8
	1.2.	Определение числа π методом Монте-Карло	11
	1.3.	Моделирование полной группы случайных событий	14
	1.4.	Моделирование независимых случайных событий	15
	1.5.	Моделирование случайного блуждания	16
	1.6.	Моделирование случайных событий, имитационная модель автомобиля	18
	1.7.	Моделирование зависимых случайных событий	24
	1.8.	Игра в «кости»	26
	1.9.	Построение регрессионной модели	28
	1.10.	Описательная статистика и генерация случайных чисел	36
	1.11.	Построение гистограммы	41
	1.12.	Построение модели на основе корреляционного анализа	45
Глава	**2.**	**Моделирование случайных событий в среде программных комплексов моделирования**	51
	2.1.	Моделирование случайных событий в среде MVS	51
	2.2.	Моделирование средствами MVS случайного блуждания	55
	2.3.	MVS-модель автомобиля	57
	2.4.	Моделирование случайных событий в среде AnyDynamics	62
Глава	**3.**	**Задачи и контрольные вопросы**	66
	3.1.	Задачи	66
	3.2.	Контрольные вопросы	70

Библиографический список 72

Введение

Моделирование является общенаучным методом изучения законов окружающего мира, свойств объектов и систем самой различной природы или новых объектов и систем. Моделирование как метод – мощный инструмент науки и техники. Как показывает опыт, активное участие в моделировании вырабатывает более глубокое понимание сути протекающих процессов и наблюдаемых явлений.

Развитие компьютерных технологий предоставляет в профессиональной деятельности новые возможности с максимальной степенью наглядности и оперативности получить и представить информацию о свойствах объектов и характере протекающих в них процессов в рамках урока в виде демонстрации закономерностей, самостоятельной работы при реализации учебных проектов. Применение компьютерных методов моделирования, проведение компьютерных экспериментов способствуют углублению и расширению знаний о процессах, протекающих в конкретных системах или объектах, существующих или проектируемых.

Долгое время достаточно сильным препятствием в этом направлении была необходимость создания моделей средствами какой-либо системы программирования. В этом случае собственно моделирование отодвигалось на второй план, так как разработка модели путем непосредственного программирования с получением в итоге программного комплекса требует значительных затрат времени и средств.

В этом смысле компьютерное моделирование на основе специализированных инструментальных программных комплексов типа MVS или AnyDynamics предоставляет возможность построить процесс моделирования, который будет принципиально отличаться тем, что модель создается средствами быстрой разработки, визуальными методами с автоматическим выбором численных методов и генерацией программы. Это позволяет использовать технологию компьютерного моделирования в учебном процессе по ряду дисциплин профессионального и естественно-научного циклов. Таким образом, инструментальные программные комплексы моделирования, дающие возможность конструирования моделей с наглядным представлением результатов при минимальной потребности в программировании, имеют особую ценность.

Визуализация – уникальная возможность компьютерной технологии моделирования, так как показать невидимое явление способны только компьютерные модели. Моделирование составляет неотъемлемую часть современного образования, причем по важности моделирование приобретает первостепенное значение. Термин «моделирование» в большинстве случаев означает «компьютерное моделирование», так как применение компьютеров существенно расширило возможности и породило новые технологии.

Цель настоящего пособия – сформировать представление о современных методах построения, реализации и исследования моделей объектов, процессов и систем разнообразной природы; расширить представления студентов о моделировании как о методе научного познания; познакомить с методологией моделирования; научить применять компьютер как средство познания и научных исследований в различных областях практической деятельности; вырабатывать умения применять методы моделирования для решения конкретных задач в области моделирования процессов и систем различной природы. Таким образом, пособие позволяет решить следующие задачи подготовки специалистов:

- познакомить с современными методами и технологиями построения моделей и проведения модельных экспериментов средствами специализированных программных комплексов;
- обучить эффективному применению моделирования и модельного эксперимента;
- развить творческий потенциал будущего специалиста, необходимый для дальнейшего самообучения в условиях непрерывного развития и совершенствования информационных технологий.

В результате изучения представленного в пособии материала студенты должны быть способны использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования, проводить моделирование процессов и систем. Результатом формирования компетенции в области моделирования будет являться готовность к участию в постановке и проведению экспериментальных исследований; способность обосновывать правильность выбранной модели, сопоставляя результаты экспериментальных данных

и полученных решений; способность использовать математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований; способность применять естественно-научные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности, а также применение математических моделей, методов и средств проектирования при моделировании систем.

Пособие будет полезно студентам направлений: 44.03.01 Педагогическое образование, профиль «Информатика»; 44.03.05 Педагогическое образование, профиль «Информатика (с дополнительной специальностью)», «Физика (с дополнительной специальностью)»; 09.03.02 Информационные системы и технологии.

Настоящее пособие является дополненным и переработанным продолжением учебных пособий:

1. Королев, А. Л. Компьютерное моделирование. – Москва: ЛБЗ-БИНОМ, 2010. – 232 с.
2. Королев, А. Л. Компьютерное моделирование технических систем. Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2009. – 170 с.

За время, прошедшее с момента написания данных пособий, изменились требования по составу компетенций в курсах «Компьютерное моделирование» и «Моделирование систем» и появились новые программные комплексы и технологии. Таким образом, переработка и обновление учебных пособий становятся актуальной задачей.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СРЕДЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ

1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Моделирование случайных процессов и событий это одно из важнейших направлений современного компьютерного моделирования – имитационного моделирования. Само понятие **«случайный»** является фундаментальным. Случайные события наблюдаются в технических, экологических, экономических, социальных и других системах. Таким образом, знакомство с подобными процессами и их характеристиками представляется актуальной задачей. **Событие** называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо. Событие может наблюдаться всегда или никогда.

Моделирование случайных процессов и событий связано с многократным повторением модельных экспериментов с целью получения статистики о свойствах системы, получения данных о свойствах случайных событий и случайных величин. В результате для параметров объекта должна быть получена оценка **математического ожидания, дисперсии и закона распределения случайных величин** (рис. 1.1.1).

Решение задач моделирования случайных событий позволяет на наглядных примерах познакомиться с понятием вероятности и построить имитационную модель.

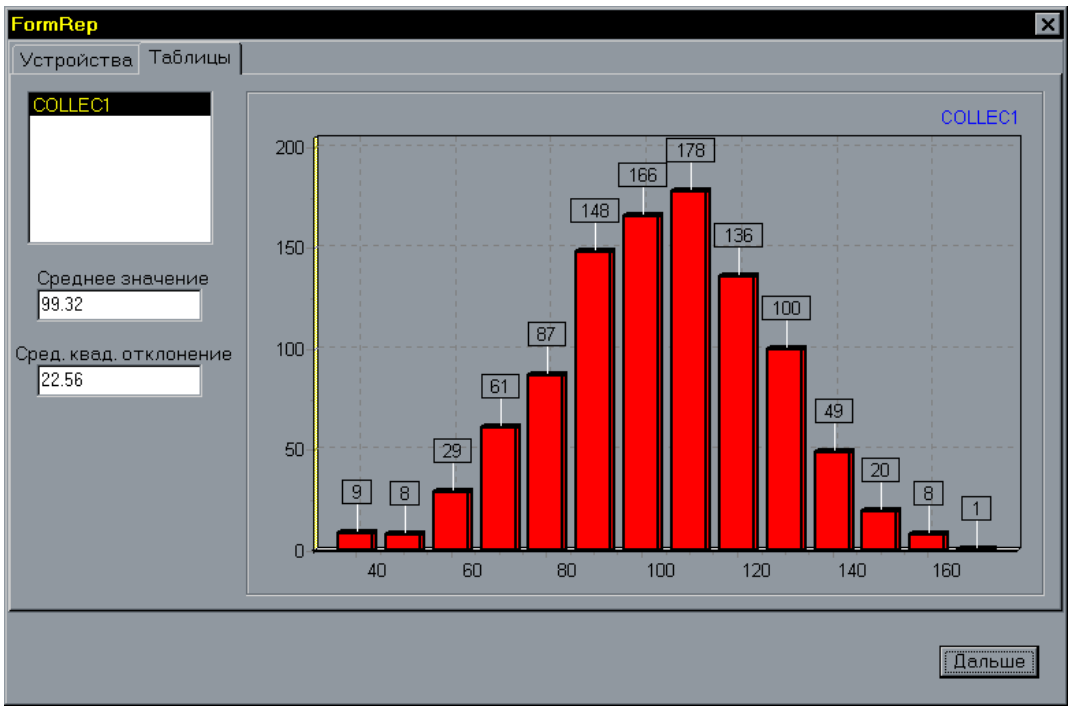

Рис. 1.1.1. Гистограмма распределения случайной величины

В качестве классической задачи стохастического моделирования обычно рассматривается задача вычисления площади круга методом Монте-Карло (см. работу 1.2). Однако метод Монте-Карло является вычислительным приемом, когда приближенное решение детерминированной задачи получается с помощью генерации последовательности случайных чисел с равномерным законом распределения.

Рассмотрим ряд задач моделирования случайных событий, которые легко могут быть реализованы с использованием электронных таблиц Excel. Моделирование случайных событий связано с генерацией случайных чисел с равномерным законом распределения на интервале (0;1), которое реализуется функцией электронных таблиц **СЛЧИС()**.

Пусть некоторое случайное событие ***A*** наступает с вероятностью ***P***. Пусть имеется возможность генерировать последовательность значений случайной величины с равномерным распределением на интервале (0;1): $X_1, X_2,...X_N$. Определим, что событие ***A*** наступает **(*A = 1*)** в том случае, если значение сгенерированной случайной величины удовлетворяет неравенству $X_I \leq P$, в противном случае исходом испытания является противоположное событие ***НеА*** **(*A = 0*).**

Рассмотрим построение компьютерной модели реализации случайного события с заданной вероятностью. Для решения задачи необходимо построить электронную таблицу по рис. 1.1.2. Исходными данными для модели является значение

вероятности реализации события ***P*** (**ячейка A2**). В колонку **B** (диапазон **B2:B1001**) электронной таблицы вводится функция **СЛЧИС(),** которая генерирует последовательность случайных чисел x_i в диапазоне (0,1) с равномерным законом распределения. В ячейку **C2** вводится функция **ЕСЛИ()**, которая возвращает значение, равное 1, если выполняется неравенство $X_i \le P$, или значение 0 в противном случае: **=ЕСЛИ(B2<=$A$2;1;0)**. Далее формула копируется в ячейки столбца **C** (диапазон ячеек **C2:C1001**).

В ячейках **D2** и **E2** с помощью функции **СЧЕТЕСЛИ()** подсчитывается количество реализаций событий ***A (A = 1)*** и ***НЕА (A = 0);*** (**=СЧЁТЕСЛИ(C1:C1001;1)**, **=СЧЁТЕСЛИ(C1:C1001;0)**). В ячейках **D4** и **E4** необходимо рассчитать частоту реализации событий ***A*** и ***НЕА*** с помощью формул: =**D2/(E2+D2); =E2/(E2+D2).** Естественно, в сумме должна получиться единица (рис. 1.1.2). Сумму частот рассчитать и поместить в ячейку **F4**.

	A	B	C	D	E
1	**P**	**Xi**	**A**	**Кол-во событий A**	**Кол-во событий НЕ A**
2	**0,75**	0,1738	1	**77**	**23**
3		0,1429	1	**Частота A**	**Частота НЕ A**
4		0,1960	1	**0,77**	**0,23**
5		0,2181	1		

Рис. 1.1.2. Таблица моделирования случайного события

Можно провести ряд экспериментов при разном количестве реализаций события: 100; 500; 1000 и сопоставить значение заданной вероятности ***P*** события и частоты его реализации в эксперименте. Чем больше реализаций событий, тем больше частота приближается к вероятности.

Это – закон больших чисел (так называемая устойчивость частот). Например, Карл Пирсон, английский математик, статистик, биолог и философ, выполнил 24000 бросаний монеты, герб выпал 12012 раз, т.е. частота события равна 0,5005. Жорж Луи Бюффон, французский естествоиспытатель и популяризатор науки, провел 4040 подбрасываний монеты. При этом получил частоту выпадения орла 0,508.

1.2. Определение числа π методом Монте-Карло

Покажем классическое использование метода Монте-Карло — найдём число **π**. Для этого нам понадобится круг, вписанный в квадрат (рис. 1.2.1), причём

у круга радиус будет равен 1. Это значит, что сторона квадрата равна 2 — это диаметр (или два радиуса) круга (рис. 1.2.1):

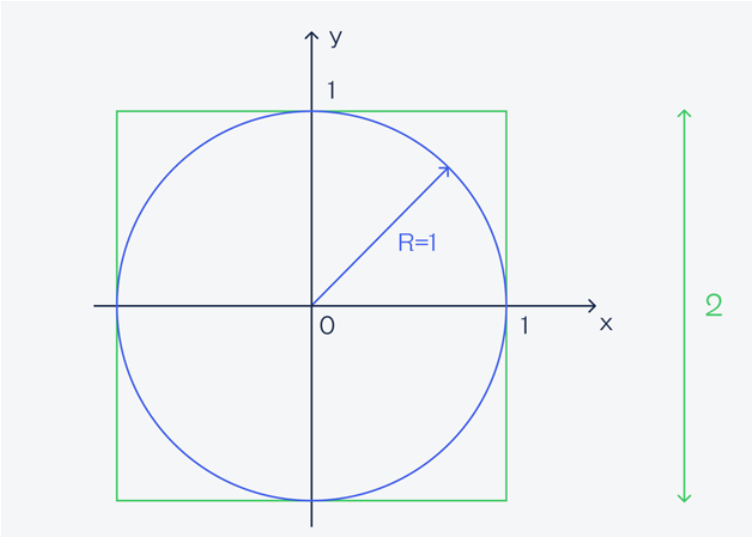

Рис. 1.2.1. Круг, вписанный в квадрат

В этот квадрат будем случайным образом кидать «песчинки» (координаты «песчинок» ***X, Y*** – случайные числа). Будем отмечать, попадут ли они в круг или нет (но останутся в границах квадрата). Исходя из этого набора данных, мы можем посчитать отношение всех «песчинок», которые попали в круг, ко всем песчинкам.

Напоминаем формулы:

Площадь квадрата со стороной 2 равна 4;

Площадь круга радиусом $R = 1$ равна $\pi R^2 \rightarrow \pi \times R^2 = \boldsymbol{\pi}$.

Если разделим площадь круга на площадь квадрата, то получим $\boldsymbol{\pi / 4}$. Но мы ещё не можем посчитать площадь круга, потому что мы не знаем значение числа $\boldsymbol{\pi}$. Вместо этого мы можем разделить количество одних «песчинок», которые попали в круг, на общее количество — в этом суть метода Монте-Карло.

Это соотношение даст результат — $\boldsymbol{\pi / 4}$. Получается, что если мы умножим этот результат на 4, то получим число $\boldsymbol{\pi}$, причём чем больше «песчинок» мы кинем, тем точнее будет результат.

Кидать «песчинки» будем так: в качестве координат попадания ***X*** и ***Y*** будем брать случайные числа от 0 до 1. Это значит, что все числа попадут только в правый верхний квадрант (рис 1.2.2):

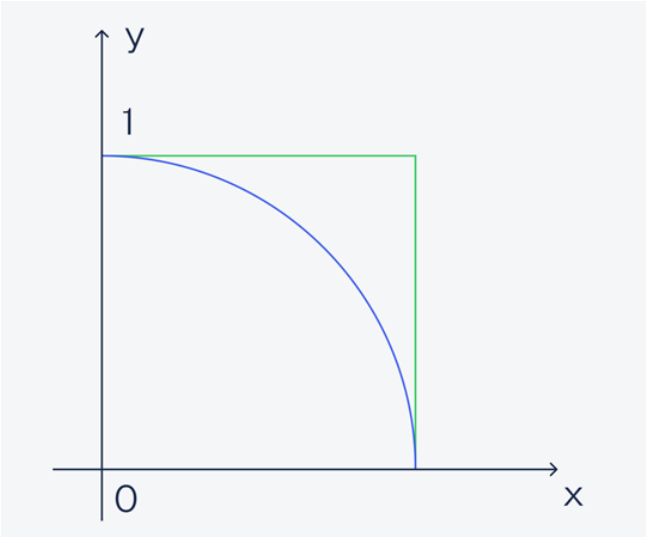

Рис. 1.2.2. Четверть круга и четверть квадрата

В квадранте ровно четверть круга и ровно четверть квадрата, таким образом, соотношение промахов и попаданий будет таким же, как для целого круга и целого квадрата.

Чтобы проверить, попадает ли «песчинка» в круг, используем формулу длины гипотенузы: $X^2 + Y^2 = 1$ (так как гипотенуза — это радиус окружности, рис. 1.2.3):

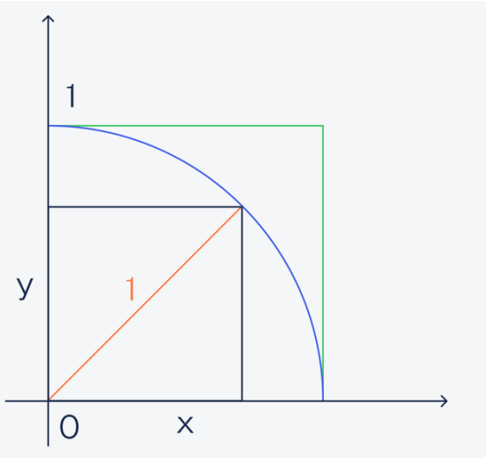

Рис. 1.2.3. Принадлежность точки к кругу

Если длина гипотенузы меньше единицы — точка попадает в круг. В итоге посчитаем и общее количество точек, и точек, которые попали в круг. Потом мы разделим одно на другое, умножим результат на 4 и получим приближённое значение числа π.

Для вычисления числа π составим электронную таблицу (рис. 1.2.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	Z					ПИ
2	0,799273	0,839334	0		1568	431	1999	3,137569
3	0,188084	0,510553	1					
4	0,645389	0,03232	1					
5	0,011922	0,586392	1					
6	0,09224	0,358012	1					
7	0,927727	0,765655	0					
8	0,920941	0,889932	0					
9	0,065604	0,935806	1					

Рис. 1.2.4. Результат применения метода Монте-Карло

В колонки ***A*** и ***B*** (ячейки **A2** и **B2**) вводим функцию **=СЛЧИС()** и копируем до 2000 строки. Так определяются координаты «песчинок». В колонку ***C*** в ячейку **C2** вводим функцию **=ЕСЛИ(A2*A2+B2*B2<=1;1;0)** и ее копируем до 2000 строки. В ячейках **E2, F2, G2**, **H2** размещены формулы: **=СУММ(C2:C2000), =СЧЁТЕСЛИ(C2:C2000;0), =E2+F2, =E2/G2*4** соответственно**.**

Как видно, метод Моте-Карло требует достаточно большого количества испытаний.

1.3. Моделирование полной группы случайных событий

Следующая задача моделирования случайных событий связана с построением модели полной группы случайных событий ***A, B, C***. События происходят с вероятностями P_a, P_b, P_c. Причем всегда реализуется только одно событие: $P_a+P_b+P_c=1$ (рис. 1.3.1). Например, полная группа из шести несовместных случайных событий реализуется при бросании игрального кубика.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Pa	Xi	A	B	C		Кол-во событий A	Кол-во событий B	Кол-во событий C	
2	0,6	0,3438	1	0	0		60	28	12	
3	Pb	0,4234	1	0	0		Частота A	Частота B	Частота C	Сумма частот
4	0,3	0,6923	0	1	0		0,6	0,28	0,12	1
5	Pc	0,0596	1	0	0					
6	0,1	0,2776	1	0	0					
7		0,9607	0	0	1					

Рис. 1.3.1. Моделирование полной группы случайных событий

В столбец **B** вводится функция **СЛЧИС()** – генератор случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне (0,1).

Событие ***A (A = 1)*** реализуется, если выполняется условие $X_I \le P_A$, событие ***B (B = 1)*** реализуется, если справедливо соотношение $P_A < X_I \le P_A+P_B$. В свою очередь, событие ***C (C = 1)*** реализуется, если справедливо соотношение $P_A+P_B < X_I$ ($X_I < 1$ по определению). Столбцы таблицы ***C, D, E*** (начиная с ячеек ***C2, D2, E2***) заполняются по аналогии с предыдущей задачей с использованием функции **ЕСЛИ():**

=ЕСЛИ(B2<=$A$2;1;0) – произошло событие ***A,***

=ЕСЛИ(И(B2>$A$2;B2<=$A$2+$A$4);1;0) – произошло событие ***B***,

=ЕСЛИ(B2>$A$2+$A$4;1;0) – произошло событие ***C***.

Количество событий ***A, B, C*** подсчитывается с помощью функции **СУММ().** Частоту событий ***A, B, C*** можно посчитать с помощью функции **СРЗНАЧ().** Сумма частот должна быть равна единице (рис. 1.3.1).

1.4. Моделирование независимых случайных событий

Используя предыдущие задачи, можно построить модель реализации двух независимых событий ***A*** и ***B***, которые происходят с вероятностями P_a и P_b соответственно, причем события могут происходить совместно. Эта задача может быть решена, например, аналогично задаче моделирования полной группы случайных событий, так как в этом случае образуется полная группа из четырех несовместных событий:

Событие 1-(A и B), Событие 2-(НЕА и B), Событие 3-(A и НЕВ),
Событие 4-(НЕА и НЕВ),

теоретически вероятности, которых равны:

$$P_1 = (P_a \cdot P_b), \quad P_2 = (1 - P_a)\cdot P_b, \quad P_3 = (1 - P_b)\cdot P_a, \quad P_4 = (1 - P_a)\cdot(1 - P_b).$$

Задача может быть решена с помощью двух датчиков случайных чисел отдельно для события ***A*** и для события ***B***. Тогда в результате моделирования можно проверить справедливость последних формул для вероятностей (рис. 1.4.1).

Если событие ***(A и B)*** произошло, то в колонке **G** значение 1, иначе 0. Это определено с помощью функции **ЕСЛИ**: **=ЕСЛИ(И(C2=1;E2=1);1;0).** Другие события определяются аналогично. Частоты событий вычисляются с помощью функции **СРЗНАЧ()** по соответствующему столбцу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Pa	Xi	A	Yi	B		A и B	НЕ A и B	A и НЕ B	НЕ A и НЕ B		Вероятности событий				
2	0,6	0,921	0	0,968	0		0	0	0	1		P1=Pa·Pb	P2=(1-Pa)·Pb	P3=Pa·(1-Pb)	P4=(1-Pa)·(1-Pb)	Сумма
3	Pb	0,926	0	0,786	0		0	0	0	1		0,180	0,120	0,420	0,280	1,000
4	0,3	0,468	1	0,329	0		0	0	1	0						
5		0,592	1	0,486	0		0	0	1	0		Частоты событий				
6		0,418	1	0,608	0		0	0	1	0		A и B	НЕ A и B	A и НЕ B	НЕ A и НЕ B	Сумма
7		0,309	1	0,109	1		1	0	0	0		0,187	0,093	0,413	0,307	1,000
8		0,973	0	0,811	0		0	0	0	1						

Рис. 1.4.1. Модель для двух независимых случайных событий

Сумма частот и вероятностей (рис. 1.4.1), естественно, должна быть равна единице, так как имеем полную группу из четырех несовместных событий: $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$.

Провести ряд экспериментов при разном количестве реализаций событий: 100; 500, 1000 сравнить и объяснить результаты.

1.5. Моделирование случайного блуждания

В этой задаче моделируется случайное изменение координат точки ***X*** и ***Y*** (случайное блуждание). Изменение координат происходит случайно и дискретно. Каждая координата может остаться неизменной, либо изменить свое значение, добавив +1 или -1. Таким образом, возможна реализация 9-и случайных событий:

$$(X, Y);\ (X, Y + 1);\ (X, Y - 1);$$

$$(X + 1, Y);\ (X + 1, Y + 1);\ (X + 1, Y - 1);$$

$$(X - 1, Y);\ (X - 1, Y + 1);\ (X - 1, Y - 1).$$

Вероятности изменения каждой координаты заданы: PX_a, PX_b, PX_c; PY_a, PY_b, PY_c. Причем $PXa + PX_b + PX_c = 1$; $PYa + PY_b + PY_c = 1$.

Таким образом, возможны следующие события: событие $A = 1$ – координата осталась неизменной; событие $B = 1$ – координата изменилась на +1; событие $C = 1$ – координата изменилась на -1. Изменение значения каждой координаты происходит независимо. Для решения данной задачи необходимо построить электронную таблицу по рис. 1.5.1. Исходными данными является вероятности реализации событий ***A, B, C***. Начальные значения координат: $X = 0$, $Y = 0$. На рис. 1.5.1 события изменения значения для каждой координаты обозначены ***Ax, Bx, Cx*** и ***Ay, By, Cy*** соответственно. В таблице (рис. 1.5.1) X_i и Y_i – сгенерированные функцией **СЛЧИС()**

случайные числа. Таблица строится по аналогии с работой, в которой построена модель полной группы случайных событий.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Pxa**	**Xi**	**Ax**	**Bx**	**Cx**	**Yi**	**Ay**	**By**	**Cy**		**t**	**X**	**Y**
2	0,6	0,7030	0	1	0	0,8171	0	0	1		0	0	0
3	**PXb**	0,3636	1	0	0	0,3516	1	0	0		1	1	-1
4	0,3	0,2998	1	0	0	0,9798	0	0	1		2	1	-1
5	**PXc**	0,7300	0	1	0	0,2319	1	0	0		3	1	-2
6	0,1	0,1429	1	0	0	0,1341	1	0	0		4	2	-2
7	**PYa**	0,8642	0	1	0	0,5624	0	1	0		5	2	-2
8	0,4	0,4570	1	0	0	0,1203	1	0	0		6	3	-1
9	**PYb**	0,2313	1	0	0	0,2667	1	0	0		7	3	-1
10	0,4	0,4876	1	0	0	0,4606	0	1	0		8	3	-1
11	**PYc**	0,0692	1	0	0	0,4233	0	1	0		9	3	0
12	0,2	0,3794	1	0	0	0,8818	0	0	1		10	3	1

Рис. 1.5.1. Электронная таблица для моделирования случайного блуждания

По результатам моделирования строится фазовая диаграмма ***Y(X)*** (диаграмма точечная, точки с прямыми отрезками и маркерами, рис. 1.5.2).

Координаты подсчитываются следующим образом, например, в ячейку **L3** вводится формула **=L2+D2-E2**, а в ячейку **M3** формула **=M2+H2-I2**. В остальные ячейки столбцов **L** и **M** формулы копируются. С моделью можно провести серию экспериментов при разных значениях вероятностей.

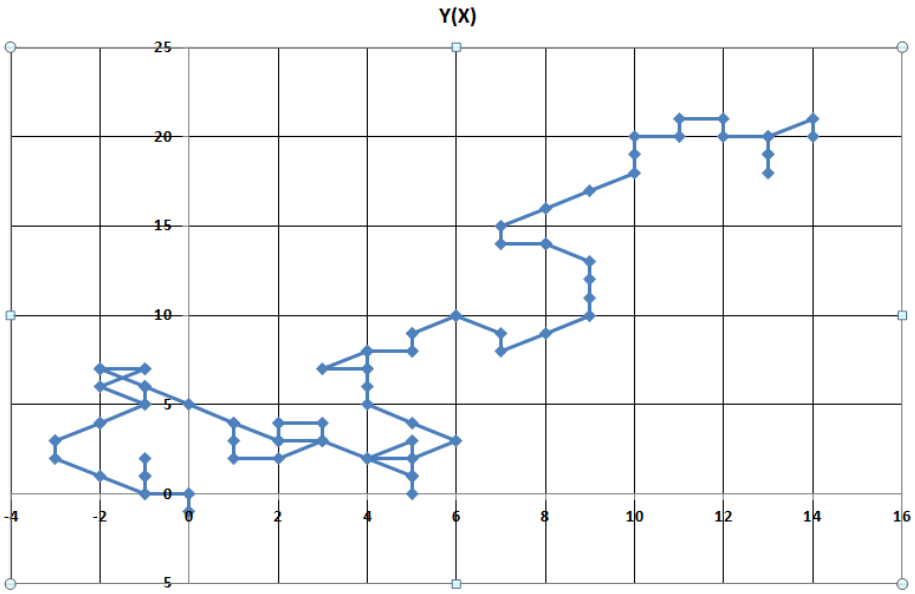

Рис. 1.5.2. Траектория случайного блуждания

Переработайте модель по следующим соотношениям:

(X, Y); (X, Y + СЛЧИС()); (X, Y - СЛЧИС());

(X + СЛЧИС(), Y); (X + СЛЧИС(), Y + СЛЧИС()); (X + СЛЧИС(),Y - СЛЧИС());

(X - СЛЧИС(), Y); (X - СЛЧИС(), Y+ СЛЧИС()); (X - СЛЧИС(),Y - СЛЧИС()).

1.6. Моделирование случайных событий – имитационная модель автомобиля

Рассмотрим содержательную задачу моделирования случайных событий. Пусть необходимо выполнить прогноз работы автомобиля. В течение суток автомобиль может быть исправным или стать неисправным (рис. 1.6.1). Состояние автомобиля изменяется дискретно с шагом изменения «сутки».

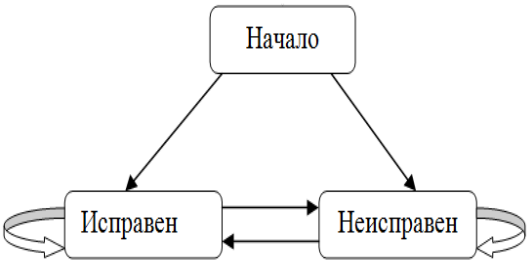

Рис.1.6.1. Граф изменения состояния автомобиля

Смена состояния автомобиля является случайным событием, так как зависит от многих факторов, которые заранее учесть невозможно. Вероятности смены состояний автомобиля устанавливаются в реальной практике на основе статистических данных по эксплуатации и ремонту, а в данной задаче задаются как исходные величины.

В начальный момент времени автомобиль может быть исправным с вероятностью P_0. Естественно, что новый автомобиль в начальный момент с достаточно большой вероятностью исправен. Дальнейшее развитие событий может быть следующим: автомобиль в течение суток с вероятностью P_1 может сохранить свое исправное состояние. Если он станет неисправным, то на следующие сутки приступят к его ремонту. Неисправный автомобиль после суток ремонта с вероятностью P_2 вернется к работе, т.е. станет исправным, или его ремонт продолжится.

Изменение состояния автомобиля представлено графом (рис. 1.6.1). Будем считать, что вероятности переходов зависят только от конкретного состояния автомобиля (исправен–в ремонте), а не от того, каким путем данное состояние достигнуто. Далее автомобиль находится в каждом возможном состоянии ровно сутки и переходит в новое состояние или сохраняет текущее состояние с учетом вероятности перехода. Модель изменения состояния автомобиля представлена электронной таблицей на рис. 1.6.2.

Здесь X_i, Y_i – случайные числа, полученные с применением функции **СЛЧИС()**. Случайное число X_i используется при моделировании события «изменение состояния исправного автомобиля» (событие ***A = 1*** – автомобиль исправен; событие ***A = 0*** – автомобиль неисправен). Случайное число Y_i используется при моделировании результата ремонта автомобиля (событие

C = 1 – автомобиль отремонтирован; событие ***C = 0*** – автомобиль остается в ремонте).

	A	B	C	D	E	F
1	P0	P1	P2			
2	0,9	0,8	0,7			
3						
4	День	Xi	А-машина работает	Yi	В-машина в ремонте	С-машина отремонтирована
5	1	0,035	1		0	0
6	2	0,854	0		1	0
7	3	0,776	1	0,119	0	1
8	4	0,532	1	0,575	0	0
9	5	0,597	1	0,398	0	0
10	6	0,590	1	0,825	0	0
11	7	0,968	0	0,014	1	0
12	8	0,460	1	0,631	0	1
13	9	0,343	1	0,711	0	0
14	10	0,880	0	0,188	1	0

Рис. 1.6.2. Модель изменения состояния автомобиля

Начальное состояние автомобиля (в первый день, ячейка **C5**, рис. 1.6.2) определяется формулой: **=ЕСЛИ(B5<=$A$2;1;0) (**определение состояния автомобиля в первый день, как случайное событие). В ячейке **E5** вводится число 0, так как по условиям задачи он поступит в ремонт на следующий день, если в первый день окажется неисправным. Соответственно, в ячейку **F5** также вводится число 0, так как ремонт по условиям задачи длится минимум один день. В ячейку **F6** также вводится

0, так как в первый день в ремонте не может быть автомобиля. Случайные числа в ячейках **D5, D6** не потребуются.

Состояние исправного в первый день автомобиля (**C5 = 1**) на следующий день может измениться вследствие поломки – случайное событие. Поэтому в ячейку **C6** вводится формула: **=ЕСЛИ(И(B6<=$B$2;C5=1);1;0)**.

Если в текущий день автомобиль окажется неисправным, то на следующий день он поступит в ремонт: **=ЕСЛИ(C6+F6=0;1;0)** (ячейка **E6**, рис. 1.6.2). Действительно, в один и тот же день автомобиль может быть либо исправен, либо находиться в ремонте. Если автомобиль в этот день отремонтирован, то он на следующий день считается исправным. Например, ячейка: **E6 = 1** (день=2, автомобиль поступил в ремонт) → **F7 = 1** (день=3, автомобиль отремонтирован) → **C7 = 1** (и в этот же день автомобиль приступил к работе, рис. 1.6.2).

Результат ремонта определяется формулой **=ЕСЛИ(И(E6=1;D7<=$C$2);1;0)** (ячейка **F7**, рис. 1.6.2), в ремонте находится неисправный автомобиль (**E6 = 1**). Результат ремонта – случайное событие. Состояние автомобиля на третий день (ячейка **C7**, рис. 1.6.2) и последующие дни определяется тем, что автомобиль либо сохраняет свое исправное состояние, либо поступает из ремонта: **=ЕСЛИ(ИЛИ(И(C6=1;B7<=$B$2);F7=1);1;0).** В остальные ячейки столбцов **C, D, E, F** формулы копируются. Результат моделирования изменения состояния одного автомобиля представлен на рис. 1.6.3.

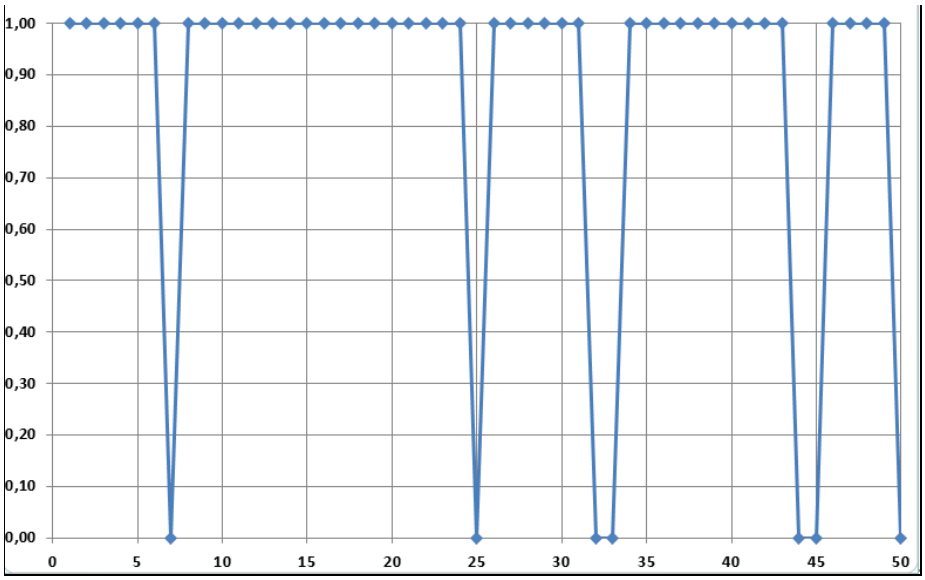

Рис. 1.6.3. Результат моделирования состояния одного автомобиля

Если автопарк состоит из нескольких автомобилей, то аналогичным образом строятся модели изменения состояния каждого автомобиля.

Выполнить это можно путем копирования таблицы по рис. 1.6.2 и подсчета общего числа исправных автомобилей на каждый день (рис. 1.6.4).

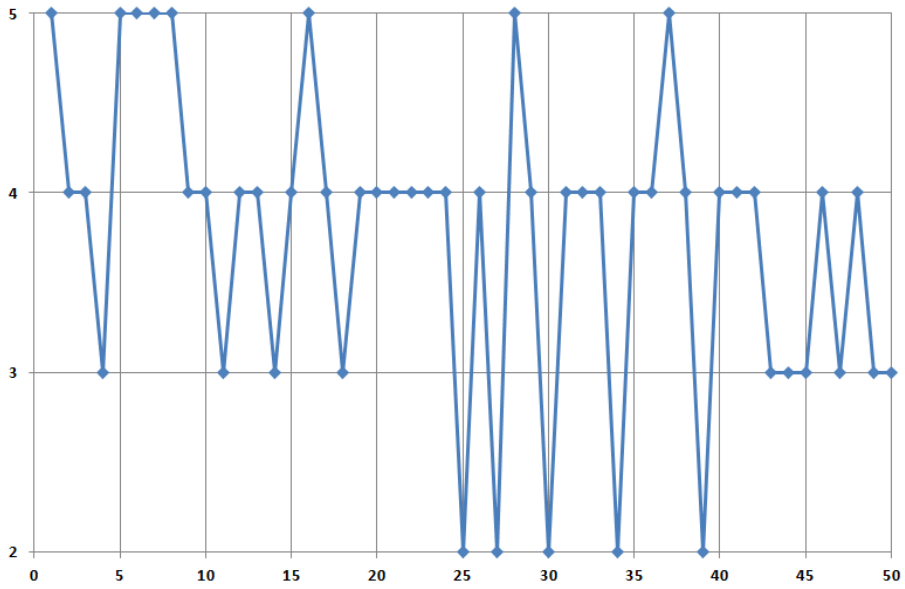

Рис. 1.6.4. Диаграмма изменения состояния автопарка из пяти автомобилей

Теперь можно решать типичную задачу **имитационного моделирования**. Например, какое количество автомобилей необходимо иметь, с учетом их возможной поломки, чтобы выполнить за заданное время определенный объем работ, который определен в машиноднях, какова вероятность выполнения этой работы имеющимся парком автомобилей за требуемое время.

В этом случае требуется многократное повторение имитационных экспериментов для получения статистических данных о состоянии парка автомобилей. Это является особенностью стохастического моделирования. Естественно, что в рассмотренных моделях приняты достаточно грубые предположения о вероятностях поломки автомобиля и окончания его ремонта. Однако уточнение модели требует привлечения теории надежности, что в курсе информатики неприемлемо.

Задач имитационного моделирования в учебной литературе для школьников чрезвычайно мало. В настоящей работе предлагается построение задачи имитационного моделирования в среде электронных таблиц.

Допустим, что фирме, имеющей пять автомобилей, требуется выполнить за 100 дней определенную работу. Объем этой работы в машиноднях известен. Ясно,

что 100 дней все автомобили работать не смогут, так как возможны их поломки. Для выяснения возможности выполнения работы был проведен имитационный эксперимент (модель для пяти автомобилей), который состоял из 20 испытаний. Его результаты представлены на рис. 1.6.5.

P0	P1	P2
0,9	0,8	0,7
Количество автомобилей	Срок выполнения работы (дней)	
5	100	
Объем работы (машино-дни)	Число положительных результатов	Частота реализации события: "Работа выполнена"
370	20	1,00
380	18	0,90
390	10	0,50
400	4	0,25
410	0	0,00

Рис. 1.6.5. Результат имитационного эксперимента

Таким образом, если работа требует 370 машинодней или менее, то она будет выполнена. Объем работ в 380 машинодней будет выполнен с вероятностью 0,9. В этом случае, скорее всего, дополнительной техники не потребуется. Если для выполнения работы требуется 390 машинодней, то вероятность выполнения работы в срок оценивается как 0,5. Можно сделать вывод, что для выполнения такого и большего объема работ необходимы дополнительные автомобили. Ясно, что имитационный эксперимент позволит оценить вероятность выполнения работы имеющимся количеством автомобилей. Кроме того, результаты экспериментов позволят исключить привлечение излишнего количества автомобилей для выполнения работы.

Можно, например, рассчитать, на сколько дней необходимо арендовать дополнительные автомобили, чтобы выполнить требуемую работу. Собственно, в этом и состоит цель имитационного моделирования – определить оптимальные значения параметров системы. Проведите компьютерный имитационный эксперимент и постройте таблицу наподобие таблицы по рис. 1.6.5, если компания имеет в распоряжении только 4 машины.

1.7. Моделирование зависимых случайных событий

Моделирование случайных процессов – это одно из важнейших направлений современного компьютерного моделирования. Само понятие **«случайный»** является фундаментальным. **Событие** называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо.

Под **событием** будем понимать всякий факт, который может наблюдаться или не наблюдаться в данных условиях. Различают достоверное событие, которое наступает каждый раз при реализации определенного комплекса условий. Невозможное (недостоверное) событие не наступает никогда.

Формирование компьютерных реализаций случайных событий (т.е. моделирование случайных событий) сводится к генерации случайных чисел с равномерным законом распределения вероятности на интервале (0;1), например, функцией электронных таблиц **СЛЧИС()**.

Пусть событие ***A*** наступает с заданной вероятностью P_A. Пусть имеется возможность генерировать последовательность значений случайной величины с равномерным распределением вероятности на интервале (0,1): $X_1, X_2,...X_i$. Определим, что событие ***A (A = 1)*** наступает в том случае, если значение сгенерированной случайной величины удовлетворяет неравенству $X_i <= P_A$.

Событие ***B*** наступает с вероятностью $P_{B/A}$ только в том случае, если событие ***A*** произошло.

Построить компьютерную модель реализации случайного события ***B*** с заданной вероятностью $P_{B/A}$ и исследовать ее свойства.

Работа выполняется в среде электронных таблиц. Для решения задачи необходимо построить таблицу по рис. 1.7.1. Исходными данными для модели является вероятность реализации события ***A*** P_A – ячейка **A2** и вероятность события ***B*** – $P_{B/A}$. В колонку **B** электронной таблицы вводится функция **СЛЧИС(),** которая генерирует ряд значений случайной величины: $X_1, X_2,...X_i$. В колонку **C** вводится функция **ЕСЛИ(),** которая возвращает значение равное **1**, если выполняется неравенство $X_i <= P_A$, или значение **0** в противном случае. В колонку **D** вводится функция **СЛЧИС()**, которая генерирует ряд значений случайной величины $y_1, y_2,.... y_i$. В колонку **E** вводится функция **ЕСЛИ(),** которая возвращает значение равное **1**, если выполняется неравенство $y_i < P_{B/A}$ и значение ***A*** равно 1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pa	Xi	A	Yi	B	Кол-во событий A	Кол-во событий B
2	0,75	0,1208	1	0,2160	1	76	20
3	Pb/a	0,5320	1	0,5627	0	Частота A	Частота B
4	0,3	0,2010	1	0,1420	1	0,76	0,2
5		0,6667	1	0,8967	0		
6		0,9595	0	0,2611	0		
7		0,9437	0	0,9056	0		
8		0,0714	1	0,0234	1		
9		0,0657	1	0,0811	1		
10		0,4949	1	0,4847	0		
11		0,3840	1	0,4579	0		
12		0,6032	1	0,3753	0		
13		0,7857	0	0,7517	0		
14		0,4813	1	0,8110	0		
15		0,1311	1	0,4494	0		

Рис. 1.7.1. Таблица моделирования зависимых случайных событий

В ячейках **F2 и G2** с помощью функции **СУММ()** подсчитывается количество реализаций событий ***A*** и ***B*.** В ячейках **F4** и **G4** необходимо рассчитать частоту реализации каждого события (функция **СРЗНАЧ()**).

Провести ряд экспериментов при разном количестве реализаций событий: 100; 500; 1000, сопоставить значение заданных вероятностей событий и частот их реализации в эксперименте. Пересчет формул производится при нажатии клавиши F9.

Построить график изменения событий ***A*** и ***B*** (рис. 1.7.2).

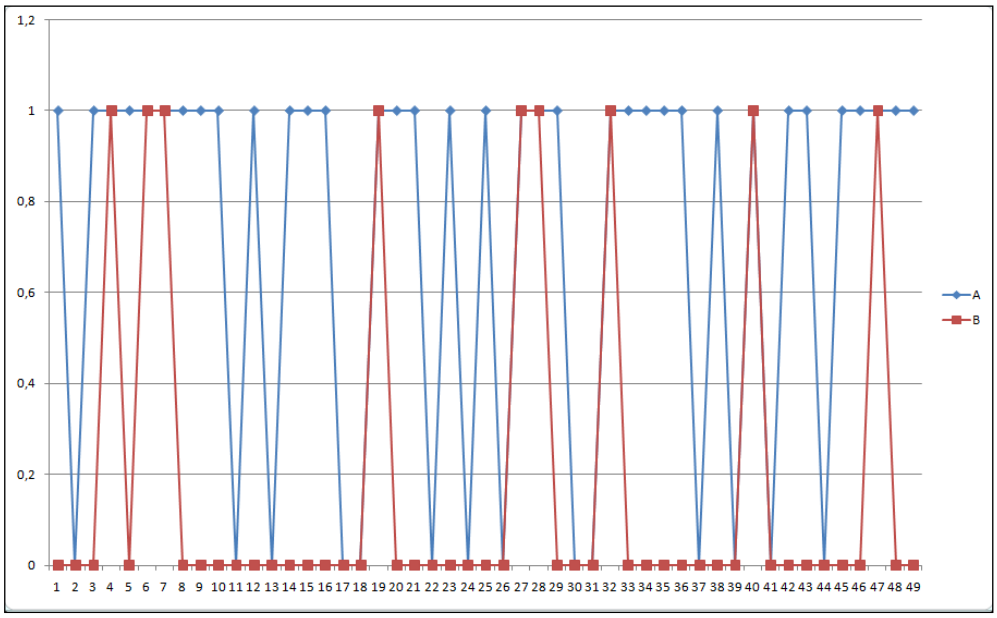

Рис. 1.7.2. График изменения событий

1.8. Моделирование игры в «кости»

Данная игра – пример реализации случайных событий. Действительно результат бросания монеты или игрального кубика заранее предсказать невозможно. Итак, в результате бросания кубика возможна равновероятная реализация одного из шести событий – выпадение чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность каждого события равна $\frac{1}{6}$. Для двух кубиков возможна реализация одной из 36 комбинаций: 1,1; 1,2; 1,3;…….6,1; 6,2;… и т.д.

Построить компьютерную модель игры в «кости», в которую играют два игрока. Игроки по очереди бросают «кости» и записывают счет. Победителем является игрок, который первым наберет 100 очков или более 100.

Работа выполняется в среде электронных таблиц. Для решения задачи необходимо построить таблицу по рис. 1.8.2. Исходных данных в данном случае нет.

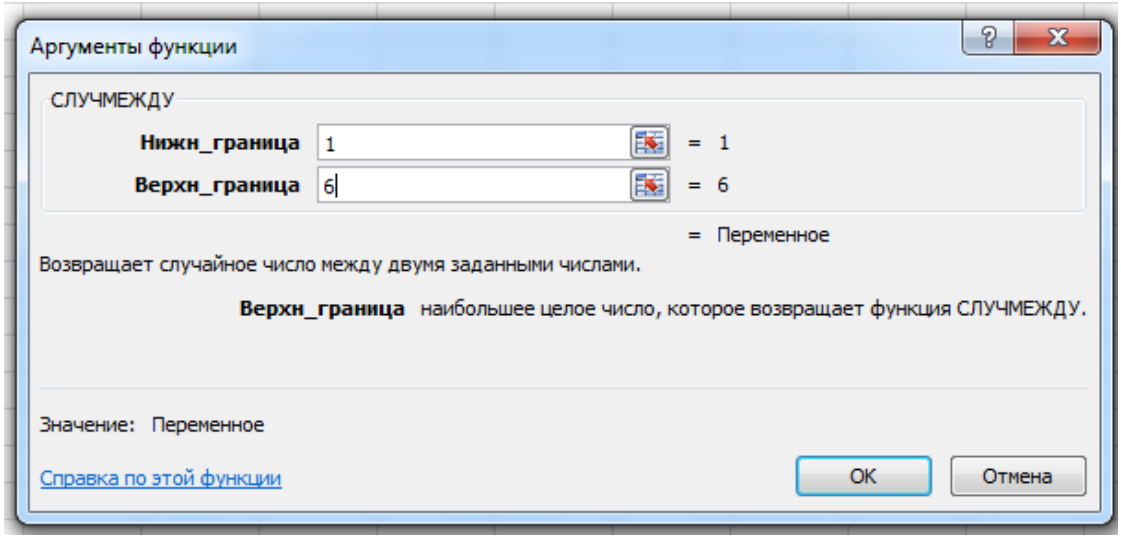

Рис. 1.8.1. Функция СЛУЧМЕЖДУ()

Результат бросания кубиков имитируется с помощью функции **СЛУЧМЕЖДУ()** (рис. 1.8.1). Сумма очков при первом бросании кубиков – простая сумма двух полученных значений.

При последующих бросаниях кубиков сумма очков вычисляется нарастающим итогом.

Результат игры нужно определять с 9-го броска, т.к. максимальное количество очков за восемь туров 96 (8×12=96). Результатом игры может быть одно из двух сообщений: **«Играем»** или **«Конец игры»**. Конец игры наступает, если один из игроков набирает 100 очков или более. Результат игры определяется с помощью функции **ЕСЛИ().** Победитель определяется по условию: один игрок набрал сто очков или более, при этом другой игрок набрал меньше ста очков. Запишите эти условия в виде логического выражения с использованием логических функций электронных таблиц **И, ИЛИ**. Результатом может быть сообщение: **«Нет победителя»**, «**Первый игрок**», **«Второй игрок»** (рис. 1.8.2).

Провести ряд экспериментов с моделью. Пересчет формул производится при нажатии клавиши F9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2				**Игра в кости.**					
3									
4									
5	**Бросок**	**Первый игрок**			**Второй игрок**			**Результат игры**	**Победитель**
6		**Кость 1**	**Кость 2**	**Сумма1**	**Кость 1**	**Кость 2**	**Сумма2**		
7	1	6	2	8	4	6	10	-	-
8	2	6	5	19	4	3	17	-	-
9	3	5	4	28	2	5	24	-	-
10	4	5	3	36	1	2	27	-	-
11	5	3	2	41	2	3	32	-	-
12	6	6	5	52	3	6	41	-	-
13	7	5	3	60	2	4	47	-	-
14	8	1	5	66	6	5	58	-	-
15	9	2	4	72	5	3	66	**играем**	**Нет победителя**
16	10	4	6	82	6	4	76	**играем**	**Нет победителя**
17	11	3	2	87	5	4	85	**играем**	**Нет победителя**
18	12	2	6	95	6	2	93	**играем**	**Нет победителя**
19	13	3	1	99	4	3	100	**конец игры**	**Второи игрок**
20	14	1	3	103	6	2	108	**конец игры**	**Нет победителя**
21	15	1	6	110	6	2	116	**конец игры**	**Нет победителя**

Рис. 1.8.2. Таблица для моделирования игры в «кости»

1.9. Построение регрессионной модели

Одно из характерных явлений современной науки – это переход к изучению **сложных, больших и плохо организованных систем.** В начале XX века на основе методов математической статистики были сделаны первые шаги по изучению таких систем, в которых нельзя выделить отдельные физически однородные явления и разграничить их действие.

Математическое моделирование с использованием законов, описывающих протекающие в подобных системах процессы, приводит к весьма сложным нелинейным системам дифференциальных уравнений, в которых параметры либо заданы приближенно, либо неизвестны, либо таких моделей нет. В то же время подобные системы достаточно просто поддаются экспериментальному изучению.

В этом случае при построении модели реализуется чисто **эмпирический подход** – **устанавливается формальная количественная связь** между свойствами объекта и определяющими их факторами в виде какой-либо формальной математической зависимости (т.е. построение уравнения регрессии или регрессионной модели).

Пусть эксперимент поставлен и проведен, результаты наблюдений получены и зафиксированы. Теперь их необходимо представить в какой-то компактной форме, удобной для практического применения и анализа.

Пусть явление или процесс характеризуется только двумя случайными величинами X и Y, значения которых фиксируются путем измерений в процессе эксперимента и всегда имеют случайный характер. Задачей исследования является установление так называемой статистической зависимости между случайными величинами X и Y.

Выбор той или иной формы зависимости определяет точность, с которой модель описывает реальную действительность. Регрессионный анализ сводится к тому, что на основе экспериментальных данных определяются коэффициенты модели и делается оценка ее адекватности.

Рассмотрим простой пример. Предположим, выполнено N измерений случайных величин X и Y – (X_I, Y_I). Допустим, что зависимость $У$ от X предполагается линейной: $f(x) = a\,x + b$.

Результаты измерений (X_I, Y_I) всегда представляют собой случайные величины. Требуется построить такую линейную зависимость, которая наилучшим образом приближает результаты наблюдений. Таким образом, требуется определить параметры линейной функции a и b. Для решения данной задачи используется **метод наименьших квадратов (МНК)**. Параметры линейной функции должны иметь такие значения, чтобы в целом точки (X_1,Y_1), (X_2,Y_2), … (X_N, Y_N) лежали как можно ближе к прямой.

Назовем отклонением разность: ***f(x$_i$)-y$_i$.*** Подберем параметры ***a*** и ***b*** таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна:

$$\sum_{i=1}^{N}(f(x_i)-y_i)^2 \to \min .$$

В этом и состоит требование метода наименьших квадратов. Данная сумма есть функция искомых параметров ***a*** и ***b****:*

$$\Phi(a,b)=\sum_{i=1}^{N}((a\cdot x_i+b)-y_i)^2.$$

По заданным значениям ***(X$_i$,,Y$_i$),*** полученным в результате измерений (таблица 1.9.1), методом наименьших квадратов определить параметры линейной регрессионной модели и оценить ее адекватность.

Подобным образом метод наименьших квадратов применяется для нахождения параметров множественной линейной и нелинейной регрессии.

Для оценки адекватности регрессионной модели используется **коэффициент детерминации**, который характеризует соответствие полученной зависимости, имеющимся эмпирическим данным:

$$D=1-\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}} .$$

Величина $\sigma^2_{общ}$ – общая дисперсия, характеризует разброс наблюдаемых величин *y$_i$* относительно среднего значения $\bar{y}$; $\sigma^2_{ост}$ – остаточная дисперсия, характеризует отклонения наблюдаемых величин ***Y$_i$*** от значений, полученных по регрессионной зависимости:

$$\sigma^2_{общ}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}{N-1}, \qquad \sigma^2_{ост}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-f(x_i))^2}{N-1} .$$

Если ***D = 1****,* значит $\sigma^2_{ост}=0$, т.е. все наблюдаемые точки соответствуют построенной регрессионной зависимости. В противном случае, при ***D = 0****,* регрессионная связь между величинами отсутствует.

Первоначально построим линейную зависимость. Для исходных данных (вариант 1, таблица 1.9.3) выполнить поиск значений параметров линейной функции

с помощью надстройки **«Поиск решения»**. Таблица для решения задачи представлена на рис. 1.9.1. Целевой функцией является зависимость:

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=1}^{N} ((a \cdot x_i + b) - y_i)^2.$$

	A	B	C	D	E	F
1	Σ(F(Xi)-Yi)^2			Xi	Yi	(F(Xi)-Yi)^2
2	64,4			0	8,375	6,17
3				-1	3,377	2,29
4	a	1,001916		-2	2,980	0,82
5	b	5,891839		-3	2,457	0,18
6				-4	1,726	0,03
7				-5	1,308	0,18

Рис. 1.9.1. Решение задачи путем поиска оптимального значения параметров *a, b* с помощью надстройки «**Поиск решения**»

Задача определения параметров регрессионной зависимости может быть решена средствами электронных таблиц путем построения **линии тренда** (рис. 1.9.2). При этом ЭТ реализуют метод наименьших квадратов автоматически.

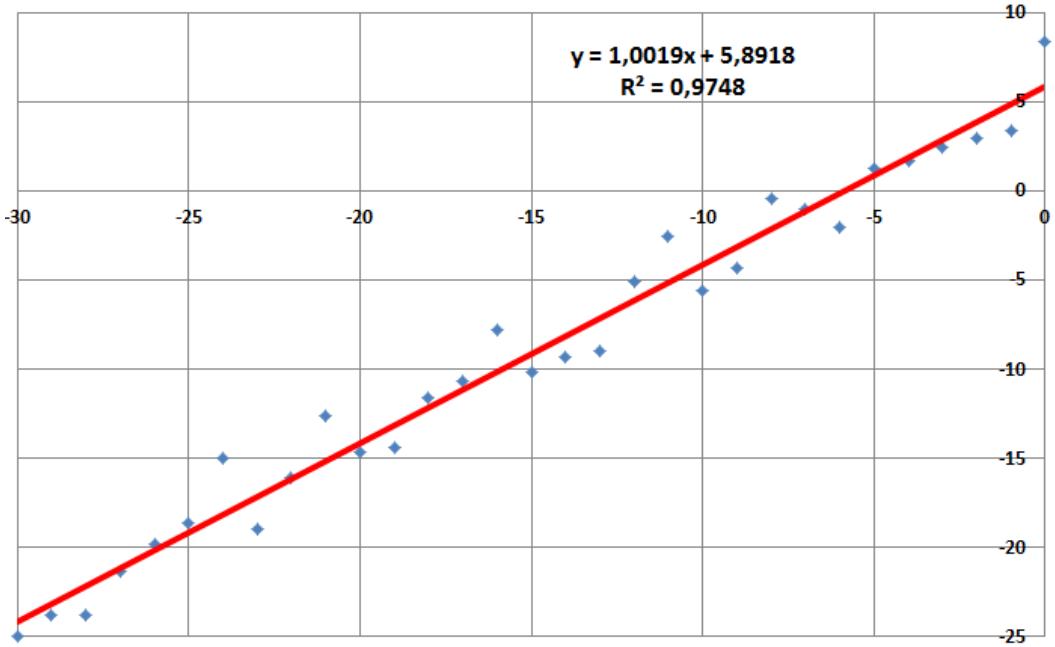

Рис. 1.9.2. Линия тренда и величина достоверности (коэффициент детерминации **R^2**)

При построении уравнения регрессии кроме линейной функции могут быть использованы другие типы зависимостей (Таблица 1.9.1):

Таблица 1.9.1

Тип зависимостей для построения линии тренда

Тип зависимости	Уравнение	Параметры
Линейная	$Y=ax+b$	a, b
Полиномиальная	$Y=a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+b$	a_1, ...a_n, b
Логарифмическая	$Y=a+b\ln(\mathbf{x})$	a, b
Экспоненциальная	$Y=a\exp(bx)$	a, b
Степенная	$Y=a\,x^b$	a, b

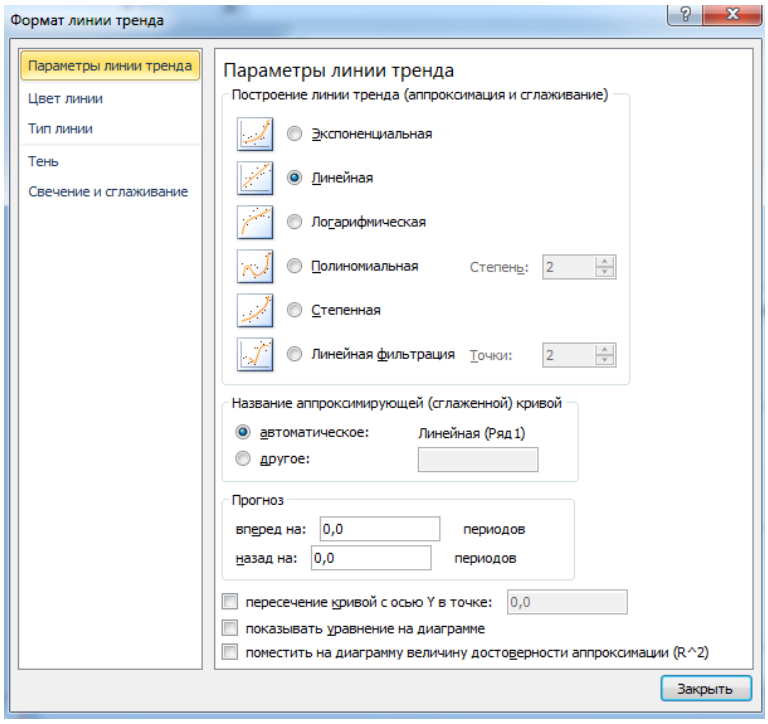

Рис. 1.9.3. Диалоговое окно «Линия тренда»

Для построения уравнения регрессии необходимо создать таблицу числовых данных. Затем по таблице построить диаграмму «**точечная**» (одни точки). При этом выбрать вариант диаграммы, который отображает табличные данные только в виде **точек**. Далее необходимо левой кнопкой мыши выделить любую точку и правой кнопкой вызвать контекстное меню.

В нем выбрать команду **«Добавить линию тренда».** В открывшемся диалоговом окне **«Линия тренда»** (рис. 1.9.3) выбрать **тип зависимости**.

Выбрать опции «**Показывать уравнение**» и «**Поместить величину достоверности...».** Для исходных данных по таблице 1 постройте **линию тренда, тип зависимости – линейная** (рис. 1.9.3). Параметры модели и величина достоверности должны совпадать с данными по рис. 1.9.1 – 1.9.2.

После построения таблицы и линии тренда выполните расчеты для других вариантов исходных данных (см. таблицу 1.9.3.). Сделайте выводы по результатам выполнения расчетов. Сравните значение коэффициента достоверности и характер расположения точек относительно линии тренда. Сделайте вывод о достоверности с учетом шкалы **Чеддока**:

Таблица 1.9.2

Шкала Чеддока

Количественная мера тесноты связи	Качественная характеристика силы связи
0,1 – 0,3	Слабая
0,3 – 0,5	Умеренная
0,5 – 0,7	Заметная
0,7 – 0,9	Высокая
0,9 – 0,99	Весьма высокая

Таблица 1.9.3

Исходные данные для построения линейной регрессионной модели

Вариант 1		**Вариант 2**		**Вариант 3**		**Вариант 4**		**Вариант 5**		**Вариант 6**	
Xi	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	8,375	0	0,035	–10	109,419	–10	71,240	0	51,252	0	3,478
–1	3,377	–1	0,609	–9	113,980	–9	181,782	1	16,692	1	9,612
–2	2,980	–2	2,472	–8	112,020	–8	135,268	2	26,552	2	0,518
–3	2,457	–3	7,949	–7	42,951	–7	108,825	3	55,914	3	5,879
–4	1,726	–4	8,458	–6	34,328	–6	40,015	4	40,930	4	0,965
–5	1,308	–5	8,972	–5	39,302	–5	150,105	5	67,935	5	1,978
–6	–1,996	–6	9,032	–4	27,614	–4	109,822	6	42,130	6	6,457
–7	–1,013	–7	15,721	–3	39,073	–3	122,879	7	76,190	7	5,249
–8	–0,460	–8	12,093	–2	49,666	–2	38,201	8	93,933	8	2,873
–9	–4,280	–9	18,104	–1	20,254	–1	83,144	9	56,719	9	4,535
–10	–5,567	–10	21,725	0	77,364	0	29,889	10	64,334	10	9,700
–11	–2,546	–11	18,033	1	65,910	1	50,734	11	93,016	11	3,680
–12	–5,080	–12	22,028	2	22,109	2	95,016	12	81,085	12	8,780

Окончание табл. 1.9.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
–13	–8,950	–13	23,876	3	5,387	3	23,463	13	94,356	13	2,943
–14	–9,293	–14	26,726	4	36,700	4	41,848	14	103,390	14	2,707
–15	–10,150	–15	32,700	5	8,397	5	96,997	15	109,889	15	1,711
–16	–7,761	–16	31,984	6	9,984	6	92,412	16	124,780	16	3,167
–17	–10,667	–17	34,619	7	12,648	7	94,748	17	121,857	17	9,589
–18	–11,646	–18	35,826	8	–29,042	8	82,813	18	105,916	18	9,479
–19	–14,417	–19	38,157	9	–22,035	9	84,729	19	103,719	19	0,626
–20	–14,625	–20	42,685	10	–41,299	10	–32,834	20	115,616	20	0,095
–21	–12,622	–21	40,718	11	–36,582	11	–34,060	21	147,567	21	7,522
–22	–16,120	–22	44,549	12	17,818	12	–21,884	22	146,456	22	0,282
–23	–18,949	–23	46,038	13	–43,874	13	42,097	23	163,219	23	5,297
–24	–15,026	–24	44,622	14	–4,144	14	58,452	24	169,869	24	5,539
–25	–18,647	–25	50,108	15	–40,185	15	25,905	25	176,089	25	8,154
–26	–19,784	–26	50,710	16	–43,215	16	–15,821	26	162,759	26	4,598
–27	–21,303	–27	52,832	17	–19,873	17	–70,115	27	143,582	27	2,349
–28	–23,828	–28	56,789	18	–60,302	18	–57,702	28	151,614	28	2,292
–29	–23,794	–29	60,493	19	–87,485	19	41,363	29	149,228	29	7,402
–30	–24,943	–30	57,202	20	–91,660	20	–69,631	30	185,204	30	0,619

Выполнить построение нелинейных регрессионных моделей средствами ЭТ. На основе значения **коэффициента детерминации** выбрать наиболее адекватную модель. (В ЭТ **коэффициент детерминации** называется **величиной достоверности – R^2.)** Исходные данные представлены в таблице 1.9.4. Пример решения задачи представлен на рис. 1.9.4.

Таблица 1.9.4

Исходные данные для построения нелинейной регрессионной модели

Вариант 1		**Вариант 2**		**Вариант 3**		**Вариант 4**		**Вариант 5**	
Xi	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**	**Xi**	**Yi**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,300	5	–53,5	–2	0,74	5	–1,84	1	0,8415
2	0,424	4,9	–50,02	–1,9	0,77	6	–1,99	1,1	0,8912
3	0,520	4,4	–34,79	–1,8	0,81	7	–2,11	1,2	0,9320
4	0,600	3,9	–22,86	–1,7	0,85	8	–2,22	1,3	0,9636
5	0,671	3,4	–13,85	–1,6	0,90	9	–2,31	1,4	0,9854
6	0,735	2,9	–7,395	–1,5	0,94	10	–2,40	1,5	0,9975

Окончание табл. 1.9.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	0,794	2,4	–3,112	–1,4	0,99	11	–2,47	1,6	0,9996
8	0,849	1,9	–0,63	–1,3	1,04	12	–2,54	1,7	0,9917
9	0,900	1,4	0,428	–1,2	1,10	13	–2,61	1,8	0,9738
10	0,949	0,9	0,4355	–1,1	1,15	14	–2,67	1,9	0,9463
11	0,995	0,4	–0,232	–1	1,21	15	–2,72	2	0,9093
12	1,039	–0,1	–1,2	–0,9	1,28	16	–2,77	2,1	0,8632
13	1,082	–0,6	–2,092	–0,8	1,34	17	–2,82	2,2	0,8085
14	1,123	–1,1	–2,535	–0,7	1,41	18	–2,87	2,3	0,7457
15	1,162	–1,6	–2,152	–0,6	1,48	19	–2,91	2,4	0,6755
16	1,200	–2,1	–0,57	–0,5	1,56	20	–2,95	2,5	0,5985
17	1,237	–2,6	2,588	–0,4	1,64	21	–2,99	2,6	0,5155
18	1,273	–3,1	7,6955	–0,3	1,72	22	–3,03	2,7	0,4274
19	1,308	–3,6	15,128	–0,2	1,81	23	–3,06	2,8	0,3350
20	1,342	–4,1	25,261	–0,1	1,90	24	–3,10	2,9	0,2392
21	1,375	–4,6	38,468	0	2,00	25	–3,13	3	0,1411
22	1,407	–5,1	55,126	0,1	2,10	26	–3,16	3,1	0,0416
23	1,439	–5,6	75,608	0,2	2,21	27	–3,19	3,2	–0,0584
24	1,470	–6,1	100,29	0,3	2,32	28	–3,22	3,3	–0,1577
25	1,500	–6,6	129,55	0,4	2,44	29	–3,25	3,4	–0,2555
26	1,530	–7,1	163,76	0,5	2,57	30	–3,28	3,5	–0,3508
27	1,559	–7,6	203,29	0,6	2,70	31	–3,30	3,6	–0,4425
28	1,588	–8,1	248,52	0,7	2,84	32	–3,33	3,7	–0,5298
29	1,616	–8,6	299,83	0,8	2,98	33	–3,35	3,8	–0,6119
30	1,643	–9,1	357,59	0,9	3,14	34	–3,38	3,9	–0,6878
31	1,670	–9,6	422,17	1	3,30	35	–3,40	4	–0,7568

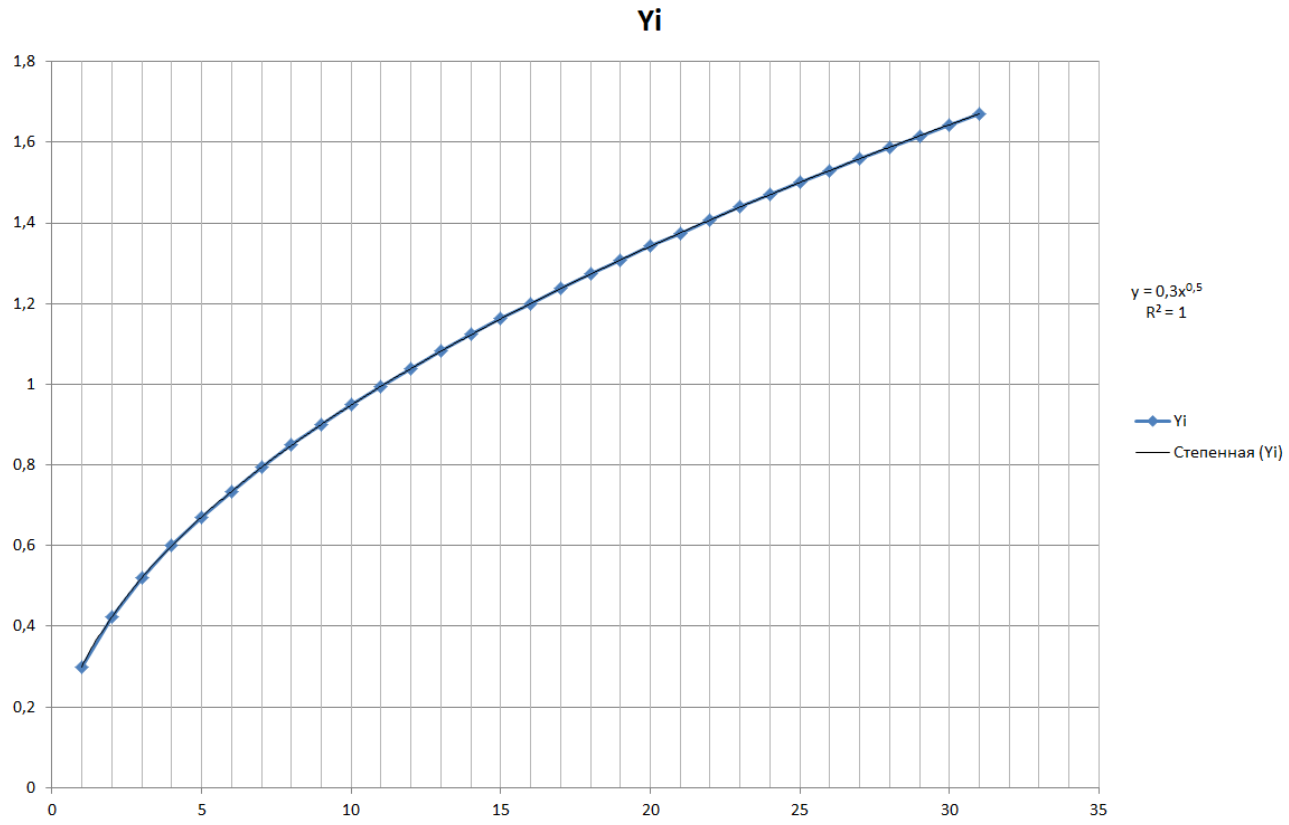

Рис. 1.9.4. Линия тренда (нелинейная зависимость)

1.10. Описательная статистика и генерация случайных чисел

Описательная статистика должна определить ряд показателей: минимальное и максимальное значения, данные о средних значениях, например, среднее арифметическое, медиана, мода и т.д.; показатели разброса данных, например, дисперсия или размах выборки (разность максимального и минимального значений); показатели закона распределения случайной величины.

Сгенерировать ряд значений дискретной случайной величины и определить показатели описательной статистики: минимальное и максимальное значения; медиану и моду.

Для работы с надстройкой **«Анализ данных»** ее необходимо установить.

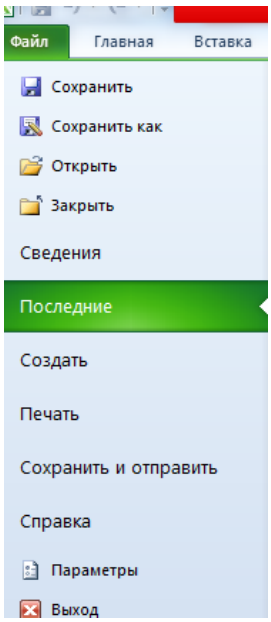

Рис. 1.10.1. Меню вкладки «Файл»

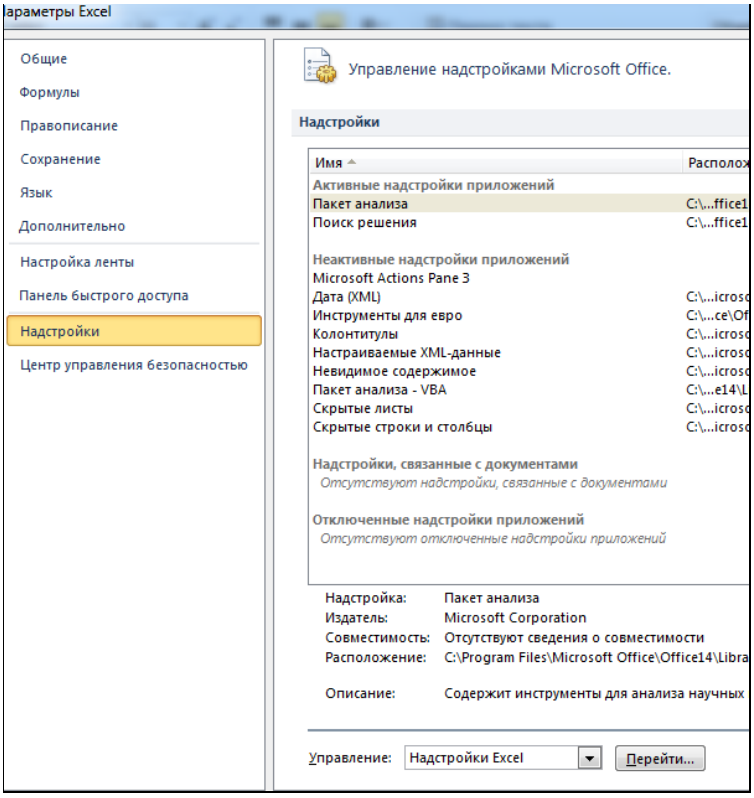

Рис. 1.10.2. Содержание окна «Параметры Excel»

Для установки надстройки **«Анализ данных»**. Выполните следующие действия: В MS Excel раскройте меню **«Файл»** (рис. 1.10.1).

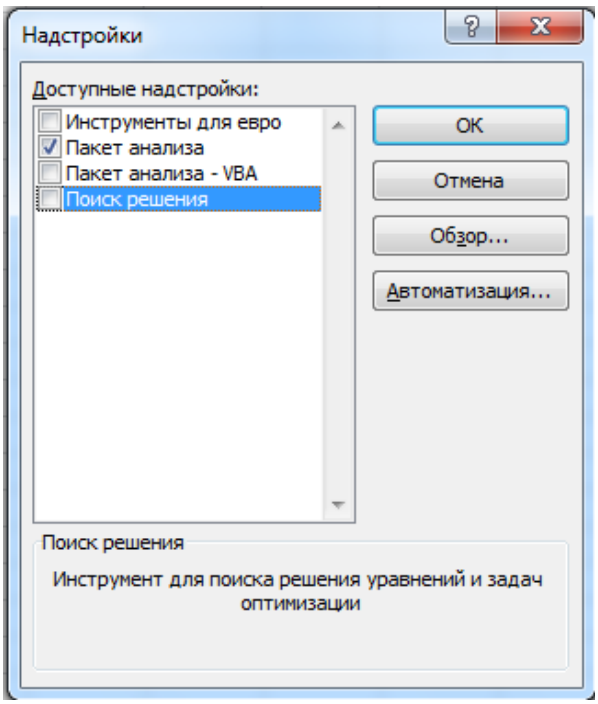

Рис. 1.10.3. Окно «Надстройки»

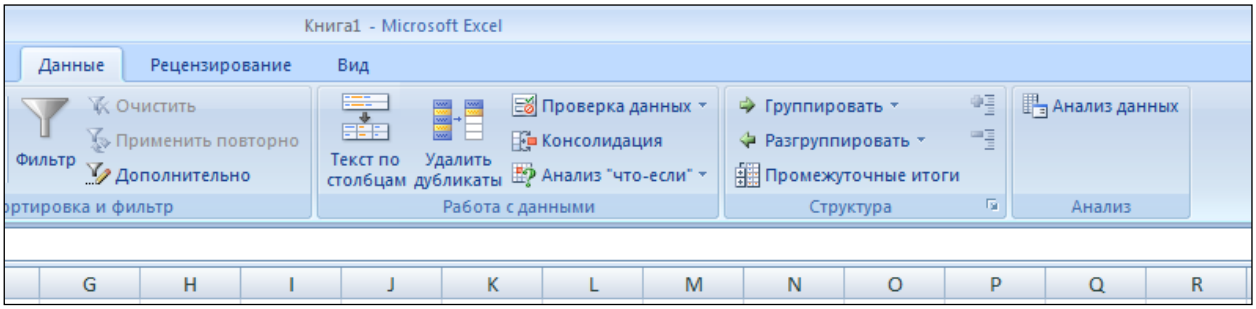

Рис. 1.10.4. Содержание вкладки «Данные»

Выберите пункт **«Параметры»** (рис. 1.10.1). В окне **«Параметры»** выберите пункт **«Надстройки»** и кнопку **«Перейти»** (рис. 1.10.2).

Откроется окно **«Надстройки»** (рис. 1.10.3), в котором отметьте пункт **«Пакет анализа» – «ОК»**. В результате этих действий на вкладке **«Данные»** появится пункт **«Анализ данных»** (рис. 1.10.4).

Выполните команду **«Данные» – «Анализ данных»**. В окне **«Анализ данных»** выберите пункт **«Генерация случайных чисел»** (рис. 1.10.5).

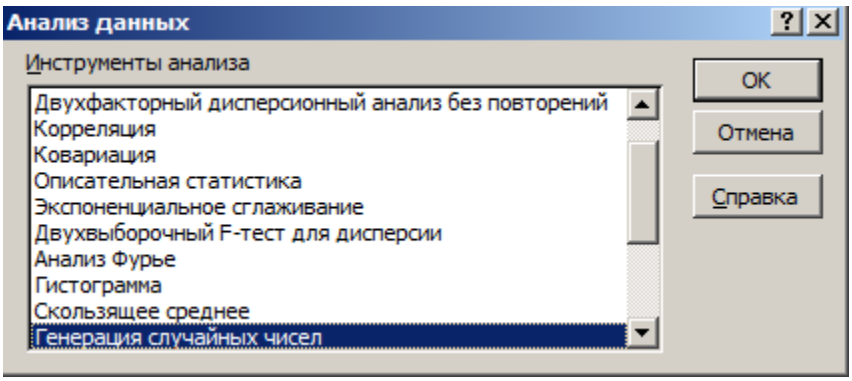

Рис. 1.10.5. Пункт «Генерация случайных чисел»

Средствами надстройки **«Анализ данных»** создать последовательность значений дискретной случайной величины с заданным распределением вероятностей (рис. 1.10.6, рис. 1.10.7).

	A	B
1	**X**	**P**
2	1	0,1
3	2	0,3
4	3	0,2
5	4	0,3
6	5	0,1

Рис. 1.10.6. Таблица значений вероятностей случайной величины

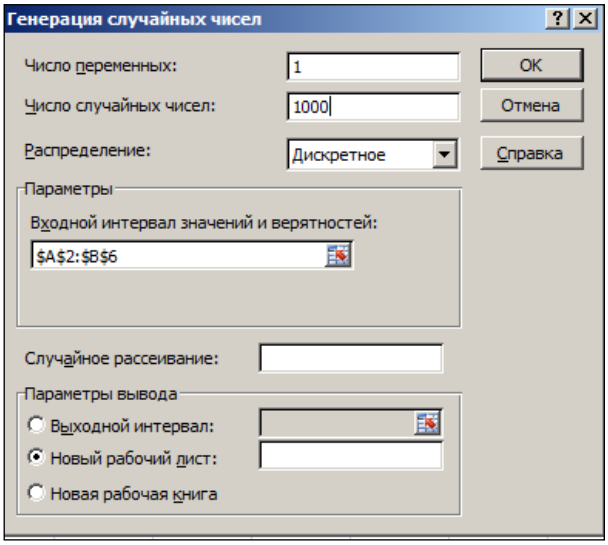

Рис. 1.10.7. Параметры операции «Генерация случайных чисел»

С использованием функций **МЕДИАНА, МОДА, МИН, МАКС** определить характеристики случайной величины (рис. 1.10.8-1.10.9). Результаты выполнения работы представлены на рис. 1.10.10.

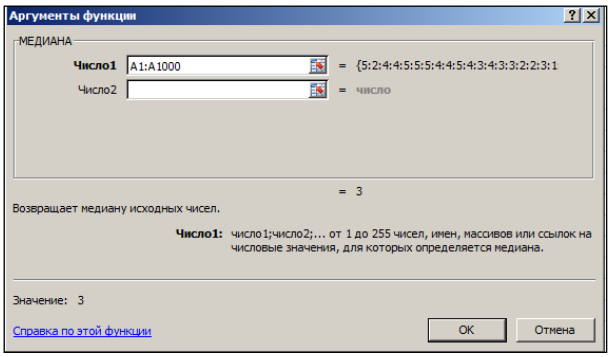

Рис. 1.10.8. Окно ввода значений аргументов функции МЕДИАНА

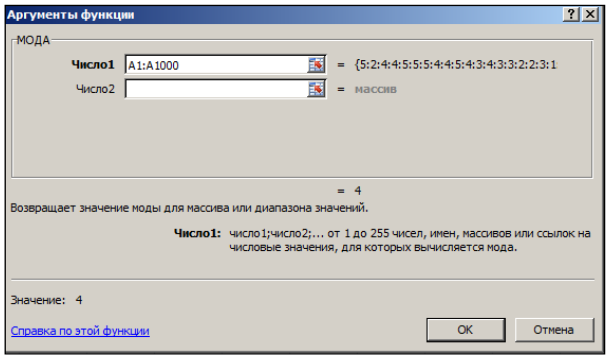

Рис. 1.10.9. Окно ввода аргументов функции МОДА

	A	B	C	D
1	5		Me	3
2	2		Mo	4
3	4		Мин	1
4	4		Макс	5

Рис. 1.10.10. Результаты выполнения работы

1.11. Построение гистограммы

Важной характеристикой случайной величины является распределение вероятностей. Можно сгенерировать случайную величину с помощью надстройки Excel **«Анализ данных»** (подробно о подключении надстройки «Анализ данных» см. в работе 1.9).

Для получения доступа к этой надстройке Excel ее необходимо подключить: **«Файл»-«Параметры-«Надстройки»«Перейти»«Доступные надстройки»**, затем пометить надстройку **«Анализ данных»**. Запуск надстройки осуществляется через вкладку Excel **«Данные»**.

Надстройка **«Анализ данных»** позволяет получить равномерное, нормальное, биноминальное и другие распределения случайных чисел.

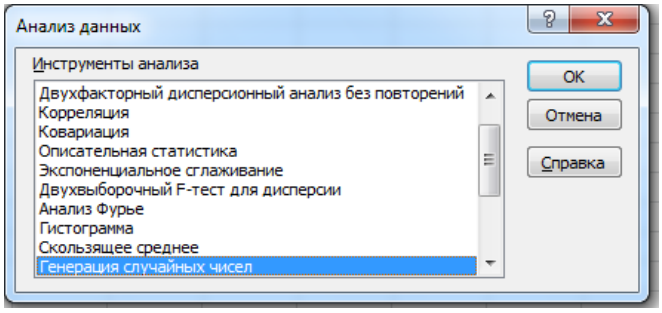

Рис. 1.11.1. Окно надстройки «Анализ данных»

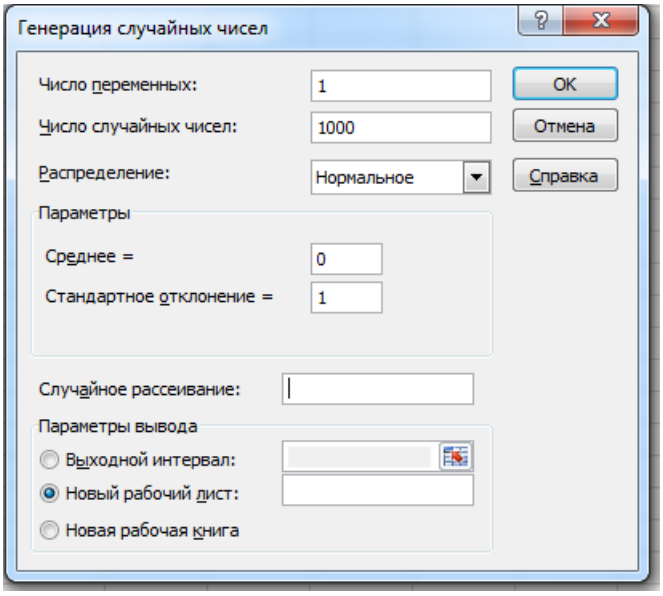

Рис. 1.11.2. «Пакет анализа». Генерация случайных чисел

Нормальное распределение характерно для величины, которая является результатом воздействия множества случайных факторов, например, данные по количеству баллов, которые получены на ЕГЭ по конкретному предмету в масштабе всей страны (рис. 1.11.3).

Теоретически должна быть гладкая симметричная кривая, но неслучайные факторы (апелляция) создали горб в районе 25 баллов и 75 баллов, что соответствовало школьной двойке и пятерке.

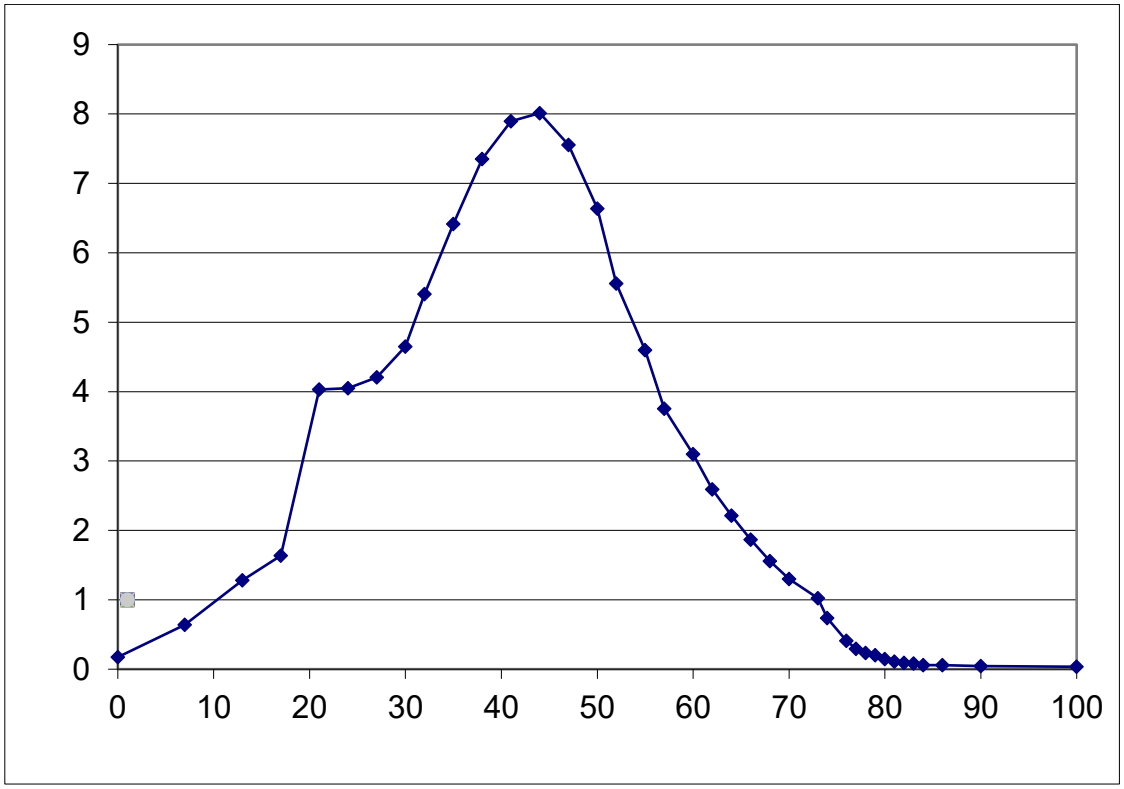

Рис. 1.11.3. Тестовый балл ЕГЭ в 2009 г. по математике

Получив выборку случайных чисел, можно с помощью надстройки **«Пакет анализа»** (рис. 1.11.4) построить гистограмму. Необходимо иметь выборку порядка 1000 значений.

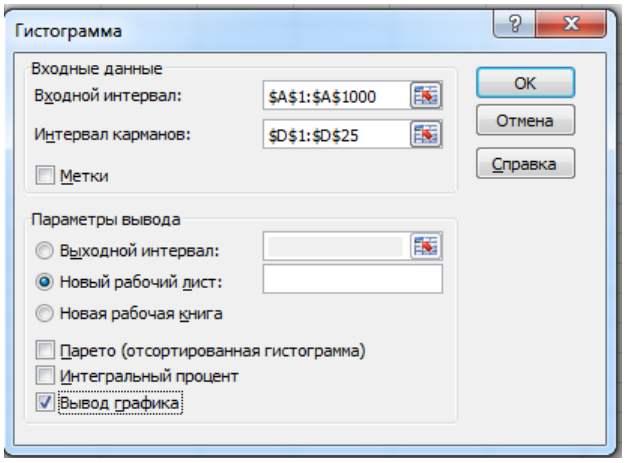

Рис. 1.11.4. «Пакет анализа». Построение гистограммы

Интервал карманов **$D$1:$D$25** (рис. 1.11.4) – это границы отрезков, для которых определяется частота сгенерированной случайной величины (задать самостоятельно).

Впрочем, случайные величины с нормальным законом распределения можно получить как сумму случайных величин с равномерным законом распределения. В теории вероятностей доказано (центральная предельная теорема), что при сложении достаточно большого числа одинаково распределенных независимых случайных чисел получается случайная величина, имеющая нормальное распределение.

Рис. 1.11.5. Гистограмма распределения случайной величины (нормальный закон)

Как показали исследования, при сложении даже 12 случайных величин с равномерным законом распределения в интервале (0;1) получается величина, которая может считаться распределенной нормально [2]. Построить гистограмму для суммы 12 случайных величин, сгенерированных функцией **СЛЧИС()**.

Естественно, что выборку случайных величин можно получить любым другим образом, например, по результатам компьютерного эксперимента.

AnyDynamics поддерживает типовые стохастические вычислительные эксперименты, такие как определение математического ожидания переменной, распределения случайной величины и определение вероятности события.

Пусть производится ***N*** бросаний мячика со случайным изменением начальной скорости и угла бросания по нормальному закону. Визуальная модель AnyDynamics, которая реализует типовой вычислительный эксперимент, представлена на рис. 1.11.6.

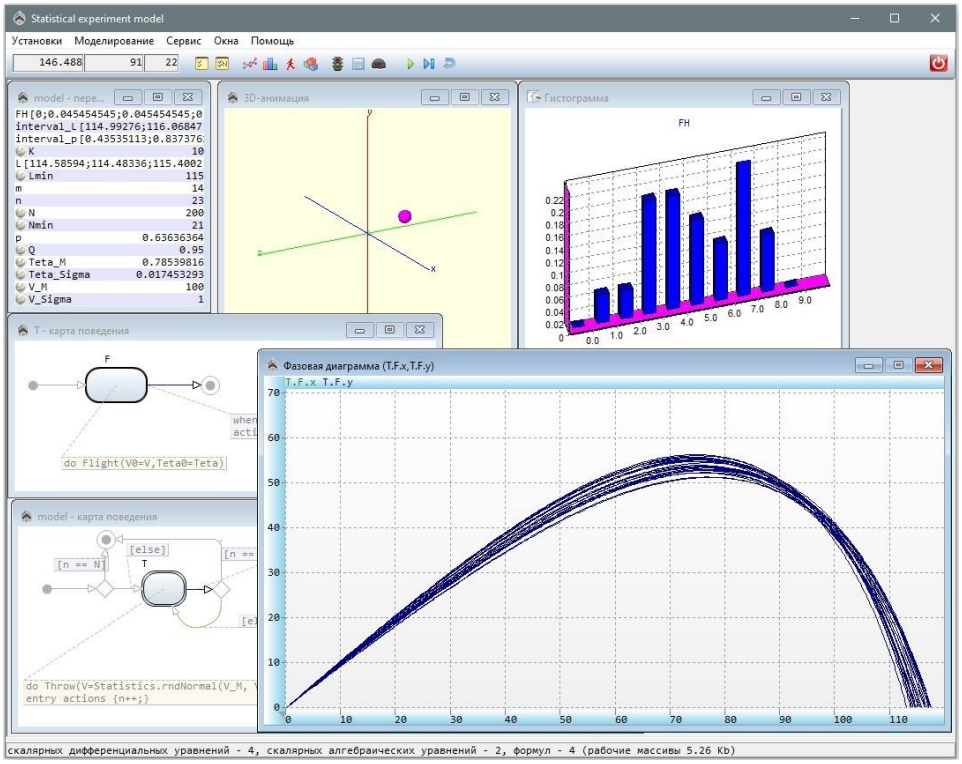

Рис. 1.11.6. Визуальная модель AnyDynamics с гистограммой

1.12. Построение модели на основе корреляционного анализа

При построении регрессионной модели формируется перечень факторов, которые могут влиять на свойства объекта. Исходя из содержательного описания объекта, выявляются переменные – параметры модели – и производится их разделение на зависимые, малозначимые и взаимозависимые.

В модель включаются все факторы, скорее всего с избытком, которые, по мнению исследователя, могут оказать какое-либо влияние на свойства объекта. Таких факторов может оказаться достаточно много. Какие факторы являются главными, а какие второстепенными, необходимо выяснить.

Пусть исходная информация о свойствах объекта, полученная в ходе экспериментов, представляется в таблице 1.12.1.

Таблица 1.12.1

X_1	X_2	X_3	….	X_n	Y
……	……	……	……	……	……

Для уменьшения количества факторов необходимо выявить и исключить **взаимозависимые** и **малозначимые** факторы, которые оказывают несущественное влияние на величину зависимой переменной ***Y***. С этой целью строится корреляционная матрица следующего вида (таблица 1.12.2).

Таблица 1.12.2

Корреляционная матрица

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Y
X_1	**1**	Rx_1x_2	Rx_1x_3	Rx_1x_4	Rx_1x_5	Rx_1y
X_2		**1**	Rx_2x_3	Rx_2x_4	Rx_2x_5	Rx_2y
X_3			**1**	Rx_3x_4	Rx_3x_5	Rx_3y
X_4				**1**	Rx_3x_5	Rx_4y
X_5					**1**	Rx_5y
Y						**1**

Здесь X_i – факторы (случайные величины), ***Y*** – отклик системы (случайная величина). По определению коэффициента корреляции ясно, что данная матрица является симметричной относительно главной диагонали. Коэффициент корреляции вычисляется с помощью функции Excel ***КОРРЕЛ.***

Значение коэффициента корреляции заключены в пределах от – 1 до + 1. В случае $r_{xy} = 0$ связь между ***X*** и ***Y*** отсутствует. При $r_{xy} = 1$ существует строгая положительная связь. Если $r_{xy} = -1$, то существует строгая отрицательная связь.

Взаимозависимость между факторами X_I, X_J имеет место, если коэффициент парной корреляции $\left|Rx_i x_j\right| \geq 0,7$. Опыт показывает, что один из факторов можно исключить, так как он существенно зависит от другого. Исключается фактор, который можно изменять в ходе экспериментов.

Кроме того, факторы, для которых $|Rx_iy| \leq 0,3$, фактически не связаны с ***Y*** и подлежат исключению как **малозначимые.** Естественно, что далее регрессионная модель строится без учета малозначимых и взаимосвязанных факторов.

Выявить значимые и независимые факторы и на основе данных экспериментов построить регрессионную модель.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		x1	x2	x3	x4	x5	y	X1	X2	X3	X4	X5	Y
2	x1	1,0000	0,1831	1,0000	0,1831	-0,0977	0,5694	0,16	2,62	8,32	0,12	4,53	8,54
3	x2		1,0000	0,1831	1,0000	-0,0756	0,0894	0,31	3,42	9,71	0,92	3,02	5,62
4	x3			1,0000	0,1831	-0,0977	0,5694	0,46	2,73	11,09	0,23	0,34	0,59
5	x4				1,0000	-0,0756	0,0894	0,60	2,58	12,48	0,08	0,32	0,70
6	x5					1,0000	0,6866	0,75	2,54	13,86	0,04	0,15	0,52
7	y						1,0000	0,89	3,27	15,25	0,77	0,06	0,50
8								1,04	2,57	16,64	0,07	3,09	5,92

Рис. 1.12.1. Корреляционная матрица и фрагмент таблицы исходных данных

Работа выполняется в среде электронных таблиц. Исходными данными является таблица результатов экспериментов с объектом моделирования (таблица 1.12.5), которая содержит значения факторов $X_1 - X_5$ и отклика Y. Применив корреляционный анализ, необходимо выявить и исключить малозначимые и взаимозависимые факторы.

С этой целью построить корреляционную матрицу (рис. 1.12.1). При построении корреляционной матрицы использовать функцию электронных таблиц **КОРРЕЛ**.

На основе корреляционной матрицы выявить и исключить малозначимые и взаимозависимые факторы. После чего необходимо построить новую таблицу данных (таблица 1.12.3), которая не содержит исключенных факторов.

Таблица 1.12.3

Таблица без значений исключенных факторов

X_1	X_5	Y
...	...	...

Далее необходимо методом наименьших квадратов создать регрессионную модель, т.е. определить значения параметров $b_{i,j}$, при этом необходимо использовать надстройку **«Поиск решения»**. При построении регрессионной модели используем многочлен 2-й степени: $f(X_1, X_5) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_5 + b_{12} X_1 X_5$. При этом целевая функция имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} (f(X_1, X_5) - Y_i)^2 \to \min .$$

Дальнейшие вычисления проводятся аналогично работе **«Построение регрессионной модели»** (таблица 1.12.4).

Таблица 1.12.4

Таблица для расчёта коэффициентов многочлена

$$f(X_1, X_5) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_5 + b_{12} X_1 X_5$$

b_0	b_1	b_2	b_{12}	X1	X5	Y	$(Y - f(X_1,X_5))^2$	$\sum(Y - f(X_1,X_5))^2$
1	1	1	1	….	….	….	……..	**Вычисление целевой функции**

Затем необходимо графически отобразить **поверхность отклика** по полученной регрессионной зависимости средствами электронных таблиц (диаграмма **«Поверхность»**). Для построения поверхности отклика необходимо на отдельном листе ЭТ построить таблицу значения функции отклика (рис. 1.12.2). Диапазон изменения факторов определить по таблице. При этом необходимо использовать тип диаграммы – **«Поверхность»** (рис. 1.12.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	b0	b1	b2	b12								
2	-0,50421	1,002068	2,000605	-0,25014								
3		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
4	0	-0,50421	-0,30415	-0,10409	0,095974	0,296035	0,496095	0,696156	0,896216	1,096277	1,296337	1,496398
5	0,1	-0,404	-0,20644	-0,00888	0,188677	0,386236	0,583795	0,781354	0,978913	1,176472	1,374032	1,571591
6	0,2	-0,30379	-0,10874	0,086322	0,28138	0,476437	0,671495	0,866553	1,06161	1,256668	1,451726	1,646784
7	0,3	-0,20359	-0,01103	0,181526	0,374082	0,566639	0,759195	0,951751	1,144308	1,336864	1,52942	1,721976
8	0,4	-0,10338	0,086675	0,27673	0,466785	0,65684	0,846895	1,03695	1,227005	1,41706	1,607114	1,797169
9	0,5	-0,00317	0,18438	0,371934	0,559488	0,747041	0,934595	1,122148	1,309702	1,497255	1,684809	1,872362
10	0,6	0,097034	0,282086	0,467138	0,65219	0,837242	1,022294	1,207347	1,392399	1,577451	1,762503	1,947555
11	0,7	0,19724	0,379791	0,562342	0,744893	0,927444	1,109994	1,292545	1,475096	1,657647	1,840197	2,022748
12	0,8	0,297447	0,477497	0,657546	0,837595	1,017645	1,197694	1,377743	1,557793	1,737842	1,917892	2,097941
13	0,9	0,397654	0,575202	0,75275	0,930298	1,107846	1,285394	1,462942	1,64049	1,818038	1,995586	2,173134
14	1	0,497861	0,672907	0,847954	1,023001	1,198047	1,373094	1,54814	1,723187	1,898234	2,07328	2,248327

Рис. 1.12.2. Фрагмент таблицы значений функции отклика

Коэффициенты многочлена определить по методу наименьших квадратов, используя надстройку **«Поиск решения»**. Для решения этой задачи необходимо составить таблицу следующего вида (таблица 1.12.4):

Так как решение нелинейной задачи оптимизации требует задания начальных значений искомых параметров, то предварительные значения коэффициентов задайте по таблице 1.12.4. Изменяемые ячейки – это ячейки, содержащие значения коэффициентов $b_{i,j}$. Целевая ячейка содержит сумму квадратов разностей. Ограничений нет.

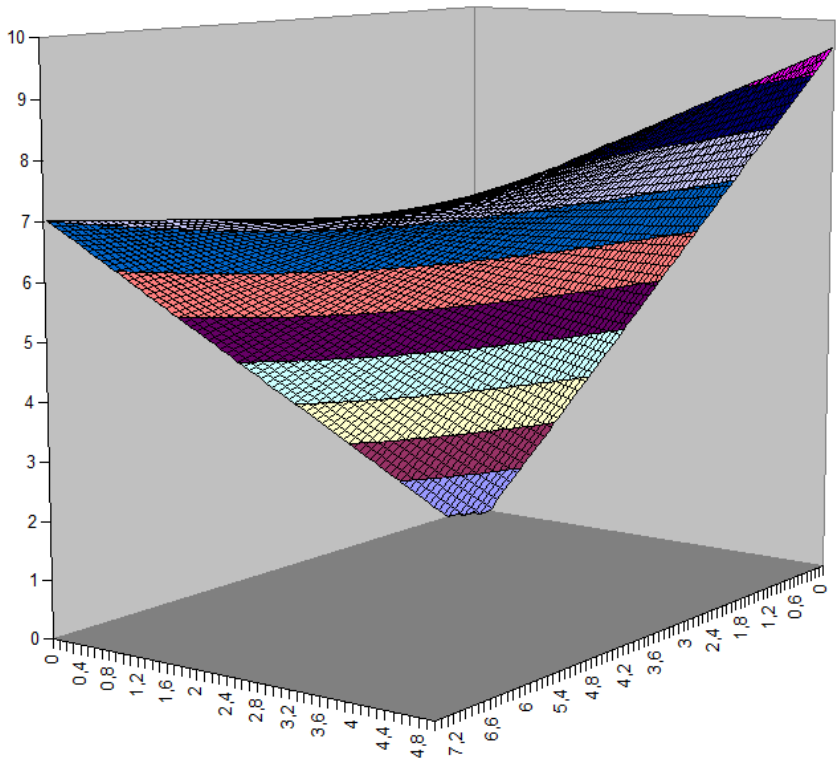

Рис. 1.12.3. Поверхность отклика

По таблице 5 необходимо построить корреляционную матрицу, выявить значимые факторы и поверхность отклика.

Таблица 1.12.5

Результаты измерений

X1	X2	X3	X4	X5	Y
1	2	3	4	5	6
0,16	2,62	8,32	0,12	4,53	8,54
0,31	3,42	9,71	0,92	3,02	5,62
0,46	2,73	11,09	0,23	0,34	0,59
0,60	2,58	12,48	0,08	0,32	0,70
0,75	2,54	13,86	0,04	0,15	0,52
0,89	3,27	15,25	0,77	0,06	0,50
1,04	2,57	16,64	0,07	3,09	5,92
1,18	2,98	18,02	0,48	2,24	4,50
1,33	3,19	19,41	0,69	0,01	0,85
1,48	2,79	20,79	0,29	0,31	1,47
1,62	3,43	22,18	0,93	0,41	1,78
1,77	3,22	23,56	0,72	1,80	4,07

Продолжение табл. 1.12.5

1	2	3	4	5	6
1,91	2,69	24,95	0,19	4,15	7,72
2,06	2,61	26,34	0,11	0,02	1,58
2,20	2,51	27,72	0,01	0,23	2,03
2,35	2,96	29,11	0,46	0,06	1,93
2,49	2,91	30,49	0,41	0,10	2,13
2,64	3,32	31,88	0,82	4,37	7,99
2,79	3,05	33,27	0,55	2,27	5,24
2,93	2,70	34,65	0,20	4,42	8,03
3,08	2,83	36,04	0,33	0,37	3,03
3,22	2,91	37,42	0,41	0,53	3,36
3,37	2,64	38,81	0,14	1,56	4,67
3,51	3,20	40,19	0,70	0,95	4,08
3,66	3,22	41,58	0,72	0,02	3,18
3,81	2,54	42,97	0,04	0,42	3,74
3,95	2,80	44,35	0,30	0,13	3,58
4,10	3,27	45,74	0,77	0,26	3,85
4,24	3,25	47,12	0,75	0,28	4,00
4,39	2,52	48,51	0,02	2,24	5,91
4,53	2,98	49,89	0,48	2,72	6,39
4,68	3,38	51,28	0,88	1,09	5,08
4,82	2,70	52,67	0,20	0,76	4,93
4,97	3,10	54,05	0,60	0,25	4,66
5,12	2,85	55,44	0,35	0,35	4,86
5,26	2,89	56,82	0,39	1,02	5,46
5,41	2,68	58,21	0,18	0,06	4,94
5,55	3,49	59,59	0,99	0,61	5,43
5,70	3,02	60,98	0,52	1,21	5,89
5,84	2,99	62,37	0,49	2,60	6,75
5,99	2,80	63,75	0,30	1,93	6,46
6,14	2,82	65,14	0,32	0,32	5,79
6,28	3,49	66,52	0,99	1,82	6,56
6,43	2,68	67,91	0,18	0,29	6,04

Окончание табл. 1.12.5

1	2	3	4	5	6
6,57	3,32	69,29	0,82	0,77	6,35
6,72	3,50	70,68	1,00	0,13	6,26
6,86	2,52	72,07	0,02	1,05	6,66
7,01	3,47	73,45	0,97	2,37	7,10
7,15	2,60	74,84	0,10	4,27	7,56
7,30	3,25	76,22	0,75	0,68	6,92
7,45	2,94	77,61	0,44	0,01	6,95

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ В СРЕДЕ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ В СРЕДЕ MVS

Моделирование случайных процессов – это одно из важнейших направлений современного компьютерного моделирования. Само понятие «случайный» является фундаментальным. **Событие** называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо.

Под **событием** будем понимать всякий факт, который может наблюдаться в данных условиях. Различают достоверное событие, которое наступает каждый раз при реализации определенного комплекса условий. Невозможное (недостоверное) событие не наступает никогда.

Формирование компьютерных реализаций случайных событий (т.е. моделирование случайных событий) сводится к генерации случайных чисел с равномерным законом распределения вероятности на интервале (0;1), например, функцией **MVS uniform (0,1).**

Пусть событие ***A*** наступает с заданной вероятностью ***P***. Пусть имеется возможность генерировать последовательность значений случайной величины с равномерным распределением вероятности на интервале (0,1): $X_1, X_2 \ldots Xi$. Определим, что событие ***A*** наступает в том случае, если значение сгенерированной случайной величины удовлетворяет неравенству $X_i <= P$.

Построить компьютерную модель реализации случайного события с заданной вероятностью и исследовать ее свойства. Построить модель в среде **MVS**.

Для решения задачи необходимо построить модель по рис. 2.1.1. Исходными данными для модели является вероятность реализации события ***P***. Для генерации случайного события используется функция **uniform (0,1)**. Переменная **«Исход»** возвращает значение, равное **1**, если выполняется неравенство $X_I < P$, или значение **0** в противном случае. Переменные **«Кол_А»** и «**Кол_НЕ_А»** подсчитывают количество

исходов событий, которые произошли и не произошли соответственно, они являются вспомогательными для расчета частоты событий, выражаемых переменными **«Частота_А»** и «**Частота_НЕ_А»**.

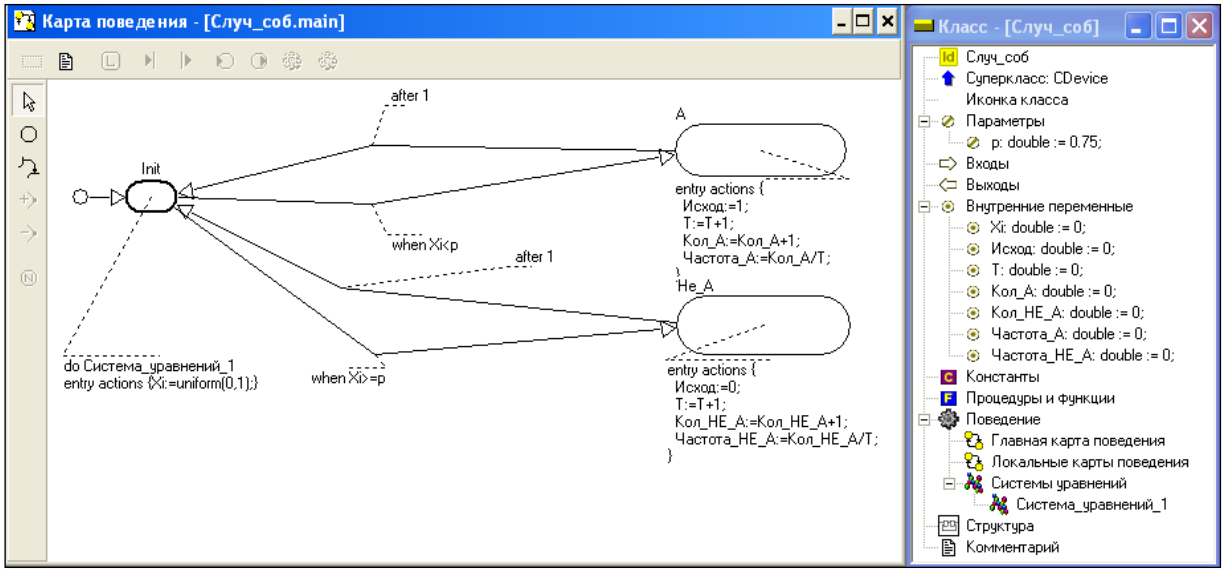

Рис. 2.1.1. MVS-модель случайного события

Постройте временную диаграмму рис. 2.1.2.

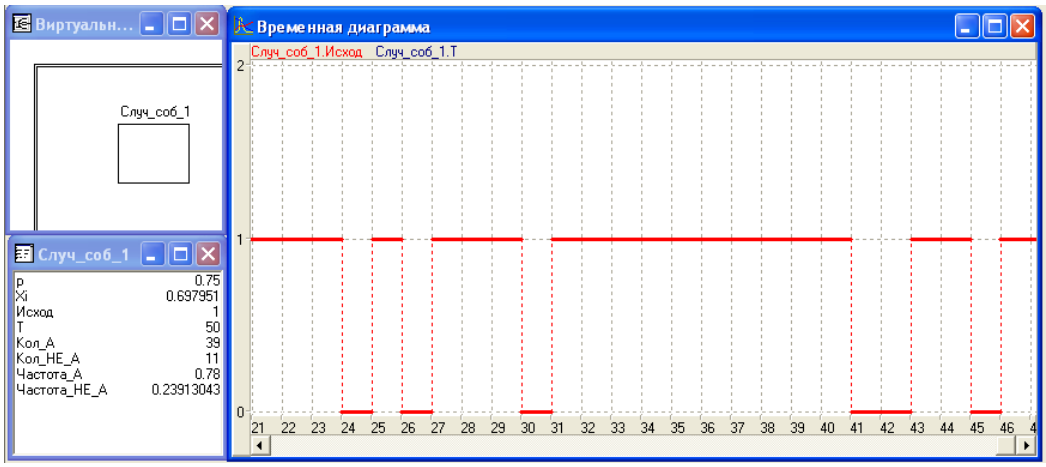

Рис. 2.1.2. Временная диаграмма события

Построить MVS-модель реализации полной группы событий: ***A, B, C*** с вероятностями P_a, P_b, P_c причем $P_a + P_b + P_c = 1$ (см. рис. 2.1.3-2.1.4).

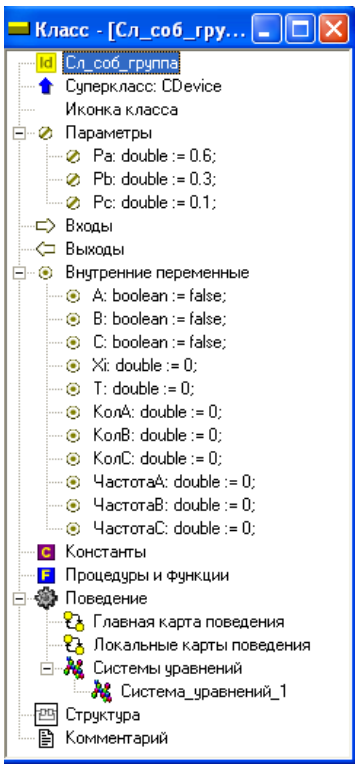

Рис. 2.1.3. Моделирование полной группы случайных событий

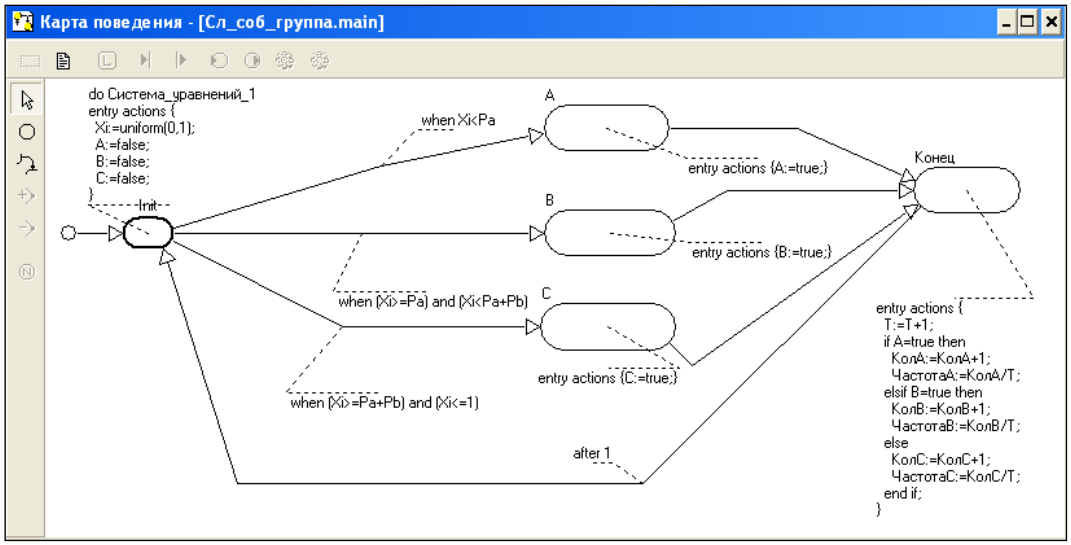

Рис. 2.1.4. Карта поведения при моделировании полной группы из трех событий

Для демонстрации результатов моделирования выполните команду «**Окна» – «Новая 2D анимация»**, разместите в появившемся окне три цветовых индикатора, свяжите их с переменными, соответствующими исходам событий. Используя контекстное меню, установите цвет для минимального и максимального значения (рис. 2.1.5). В установках модели подберите такое соотношение модельного и реального времени, чтобы результаты моделирования были наглядны.

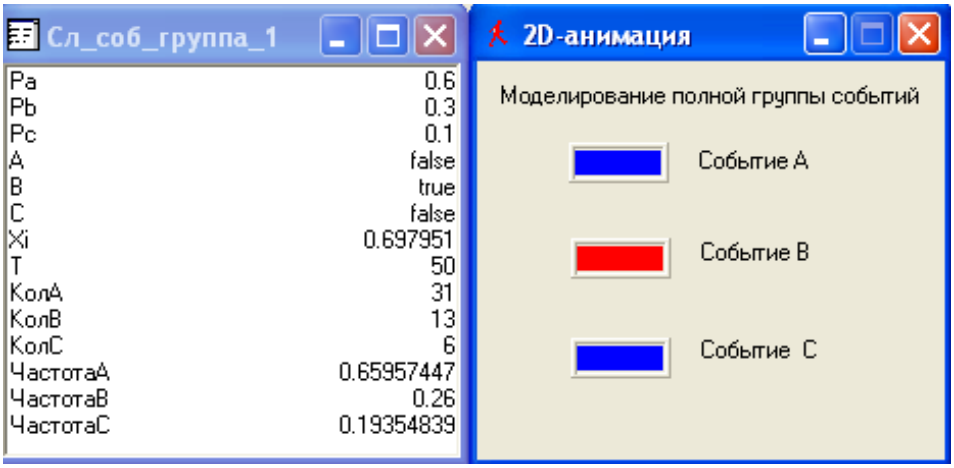

Рис. 2.1.5. Результаты моделирования полной группы событий

2.2. Моделирование средствами MVS случайного блуждания

В данной работе моделируется случайное изменение состояния объекта. Состояние объекта характеризуется двумя параметрами ***X*** и ***Y***. Изменение состояния объекта связано с изменением значений этих параметров, которое происходит случайно и дискретно. Каждый параметр может: остаться неизменным, либо изменить свое значение на +1 или -1.

Таким образом, возможна реализация 9 взаимоисключающих событий, которые образуют полную группу:

Событие 1-(А и В), Событие 2-(НЕА и В), Событие 3-(А и НЕВ),

Событие 4-(НЕА и НЕВ),

Вероятность изменения каждого параметра задана: ***PXa, PXb, PXc; PYa, PYb, PYc***. Причем ***PXa + PXb + PXc=1; PYa + PYb + PYc=1.***

Таким образом, для каждого параметра возможны следующие события: событие ***A*** – параметр остался неизменным; событие ***B*** – параметр изменился на +1; событие ***C*** – параметр изменился на -1. Изменение значения каждого параметра происходит независимо.

Построить компьютерную модель реализации случайного блуждания в среде MVS. Для решения задачи необходимо построить модель по рис. 2.2.1–2.2.2.

Исходными данными для модели является вероятности реализации событий ***A, B, C.*** Начальные значения: ***X = 0, Y = 0***.

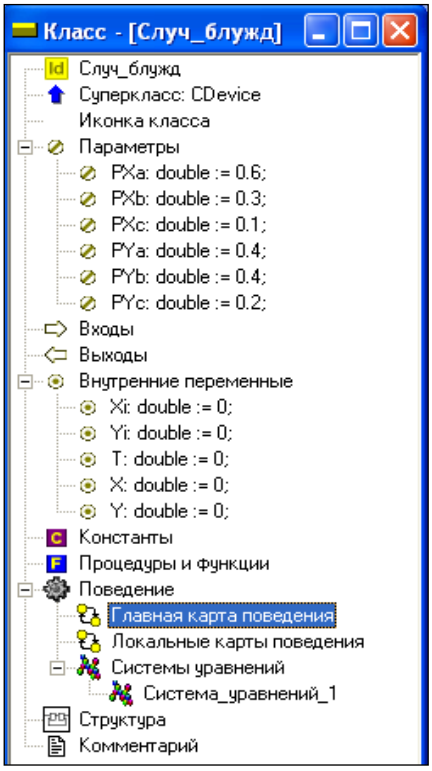

Рис. 2.2.1. MVS-моделирование случайного блуждания

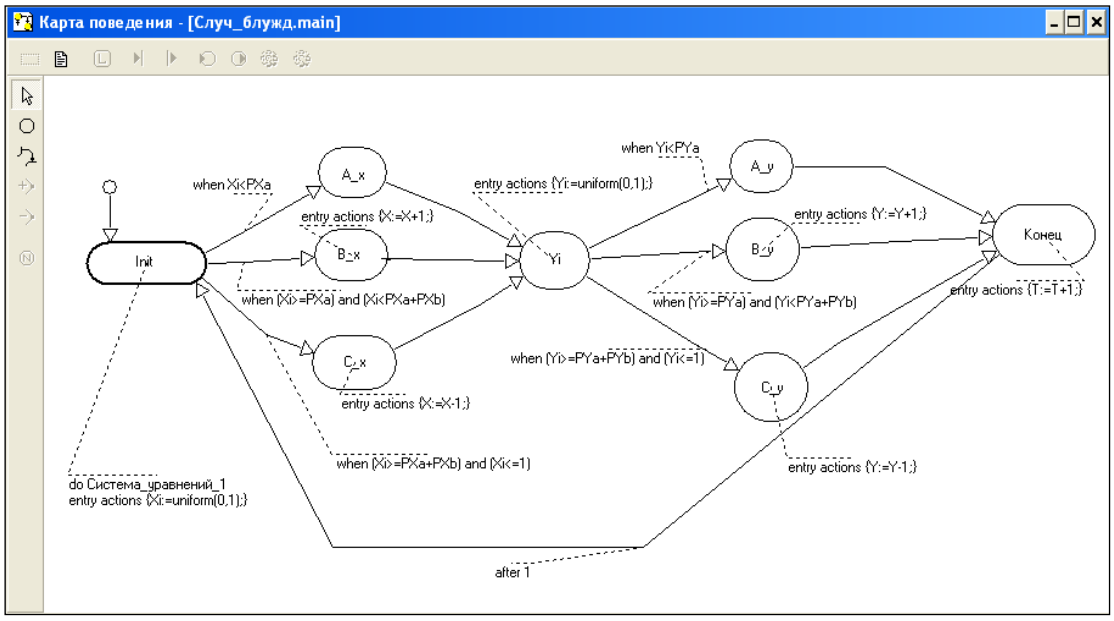

Рис. 2.2.2. Карта поведения для MVS-модели случайного блуждания

При моделировании случайных событий изменения ***X*** и изменения ***Y*** использовать отдельный датчик случайных чисел – функцию **uniform (0,1)**. В модели X_i и Y_i – случайные числа.

По результатам моделирования постройте фазовую диаграмму изменения переменной ***Y(X)*** (рис. 2.2.3), рекомендуется использовать автомасштабирование.

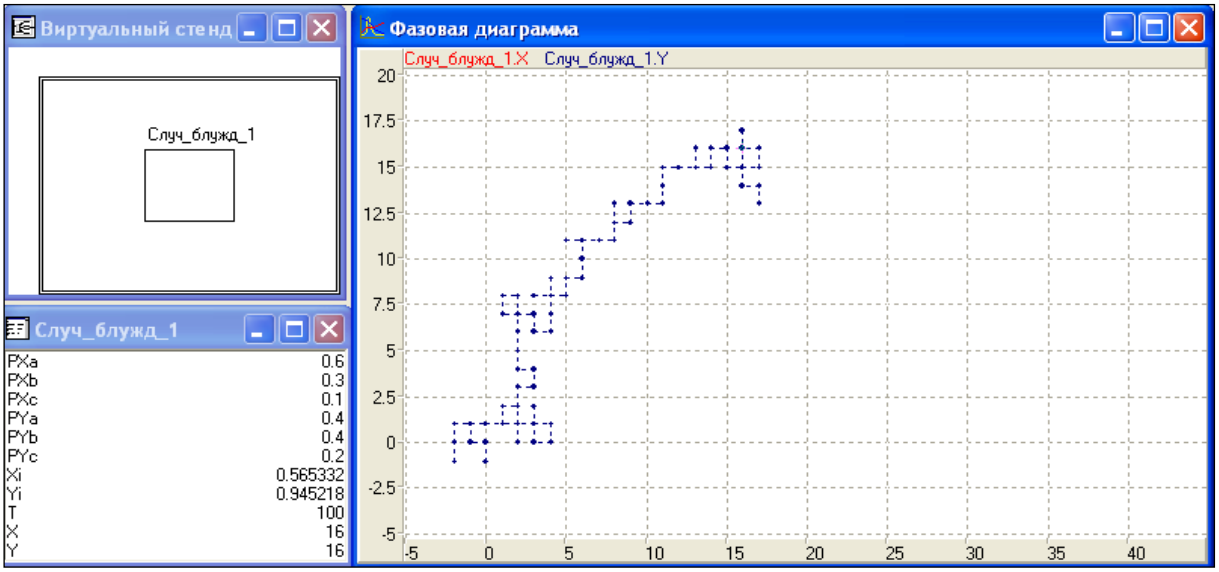

Рис. 2.2.3. Результат моделирования: траектория блуждания

Проведите серии экспериментов при разных значениях вероятностей событий и понаблюдайте, как изменяется диаграмма.

2.3. MVS-МОДЕЛЬ АВТОМОБИЛЯ

Рассмотрим пример прогнозирования работы автомобиля, который предоставляется напрокат в любое время суток. В течение суток автомобиль может остаться исправным или стать неисправным. Будем через ***T*** обозначать количество суток, прошедших с начала наблюдения, то есть мы выбираем дискретное время с единицей измерения «сутки».

История гаража начинается с прихода в гараж нового директора в момент t_0. Он может застать автомобиль исправным или неисправным с одинаковой вероятностью $P_{01} = P_{02} = 0,5$

Дальнейшее развитие событий можно описать следующими законами: исправный автомобиль может сломаться, но это обнаружат только на следующие сутки, после чего приступят к ремонту; исправный автомобиль будет продолжать работу на следующие сутки; неисправный автомобиль после суток ремонта продолжит работу; неисправный автомобиль не успеют отремонтировать за сутки.

Таким образом:

P_{11} – вероятность исправного автомобиля не сломаться за сутки;

P_{12} – вероятность исправного автомобиля сломаться за сутки;

P_{21} – вероятность неисправного автомобиля не быть починенным за сутки;

P_{22} – вероятность неисправного автомобиля быть починенным за сутки.

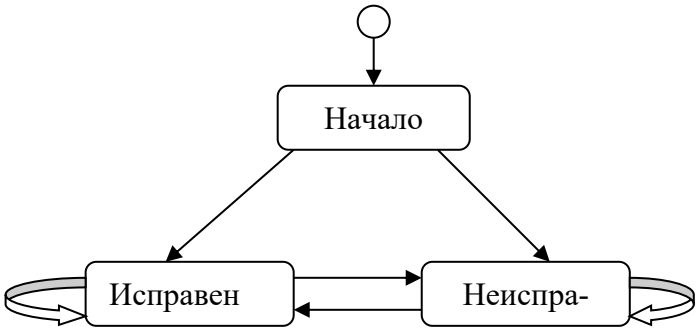

Рис. 2.3.1. Карта состояний при моделировании работы автомобиля

Работу автомобиля можно представить графом (рис. 2.3.1), который похож на карту поведения, но у этой карты есть существенное отличие. Переход из текущего в новое состояние осуществляется с учетом вероятностей. А именно, на каждом такте дискретного времени генерируется значение случайной величины, распределенной по заданному закону. На основании этого значения выбирается тот или иной переход, после чего система переходит в новое текущее состояние. Если ввести события: «автомобиль работает», «автомобиль сломался» и так далее и построить генератор событий, выбирающий одно из независимых событий на каждом такте, то можно этот граф представить соответствующей картой состояний, т. к. мы ее трактовали раньше (рис. 2.3.2).

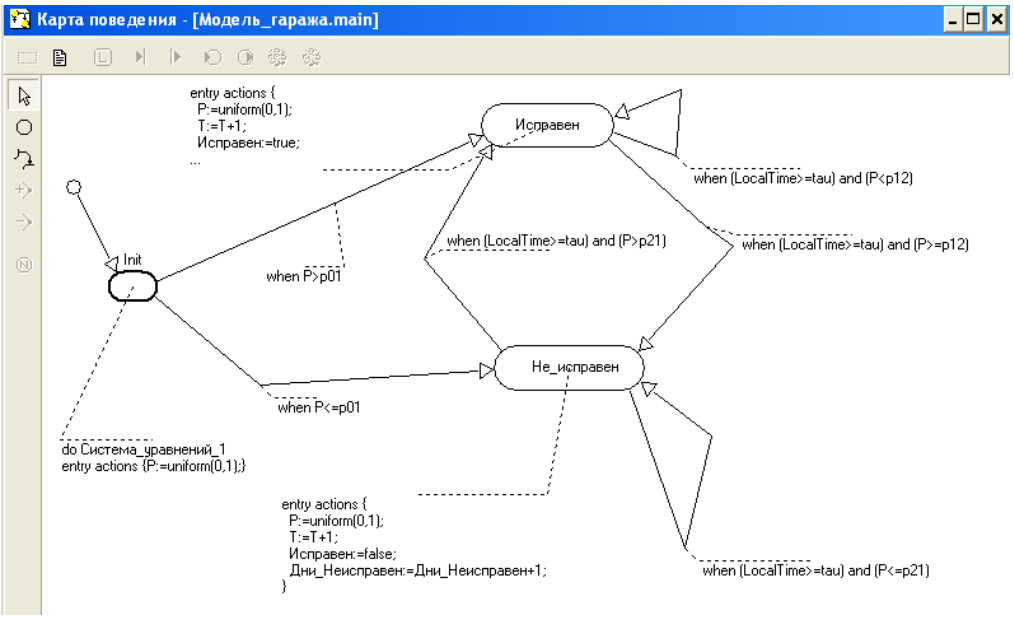

Рис. 2.3.2. Карта поведения при моделировании работы автомобиля

Все вероятности переходов в этой модели зависят только от конкретного состояния, а не от того, как система пришла в данное состояние. Нас интересую вопрос, с какой вероятностью на *N*-е сутки автомобиль будет исправным или будет неисправным.

Система относится к числу стохастических. Вероятность смены состояния постоянна и зависит от того, в каком текущем состоянии находится система.

Вернемся к примеру с гаражом (см. рис. 2.3.2). На этом рисунке представлена имитационная модель гаража, и теперь уже изображенный граф является картой поведения. Мы моделируем случайное событие и возможность в момент прихода нового директора найти машину исправной или неисправной. Далее модель находится в каждом возможном состоянии ровно сутки и переходит в новое состояние опять же с учетом реализовавшегося случайного события.

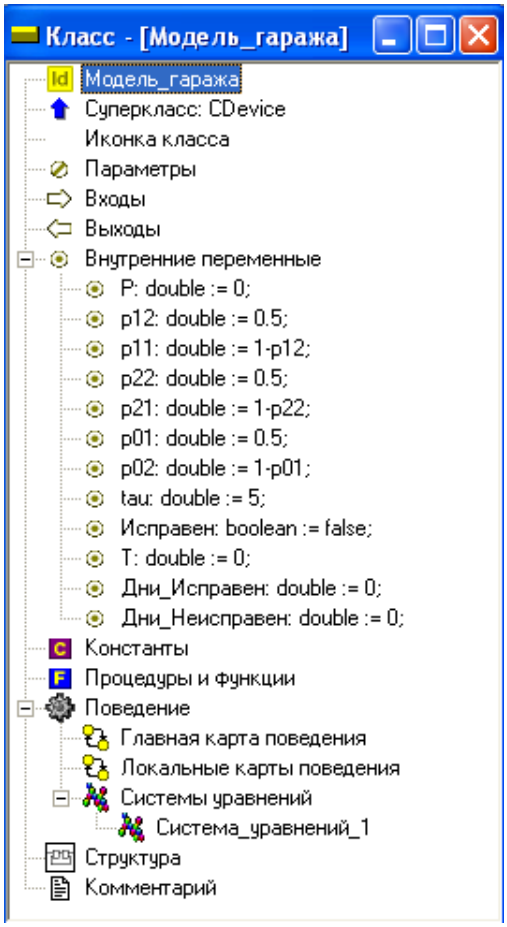

Рис. 2.3.3. Исходные данные для моделирования автомобиля

Построить компьютерную модель работы автомобиля и исследовать ее свойства.

1. Создадим новую модель, назовем ее «Модель гаража». Введем переменные на рис. 2.3.3.

- ***P_{11}*** — вероятность исправного автомобиля не сломаться за сутки; (double), значение *1 – P_{12}*,
- ***P_{12}*** — вероятность исправного автомобиля сломаться за сутки; (double), значении 0,5,
- ***P_{21}*** — вероятность неисправного автомобиля не быть починенным за сутки; (double), значение 1 – P_{22},
- ***P_{22}*** — вероятность неисправного автомобиля быть починенным за сутки. (double), значении 0,5,
- ***P*** – переменная (double),
- ***T*** – количество суток (double),
- ***P_{01}*** – вероятность застать машину в начальный момент времени исправной (double), значение 1 – P_{02},
- ***P_{02}*** – вероятность застать машину в начальный момент времени неисправной (double), значение 0,5,
- ***Тау*** – тип double = 5,
- **Исправен** – тип Boolean,
- **Дни_Исправен** – переменная, количество дней, когда автомобиль исправен,
- **Дни_Неисправен** – переменная, количество дней, когда автомобиль неисправен.

2. Составим карту поведения как показано на рис. 2.3.2.
3. Запустите модель.
4. Создайте фазовую диаграмму (рис. 2.3.4).

Перетащите на неё переменные ***T*** и ***«Исправен».***

Настройка (Фазовая диаграмма):

Отложить **T** по оси **X**: шаг = 1 Min 0 Max 50.

По оси Y: шаг = 1 Min 0 Max 1.

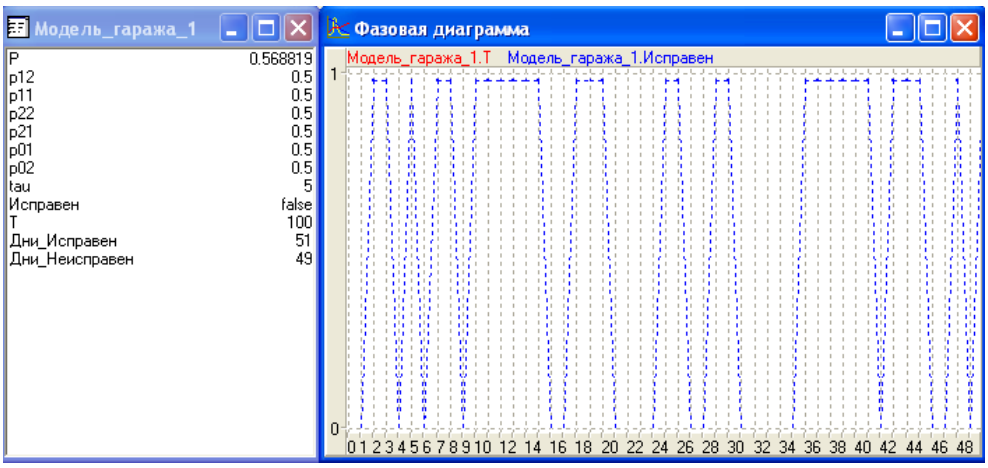

Рис. 2.3.4. Фазовая диаграмма работы автомобиля

5. Добавим новую **2D-анимацию**.

Добавим **«Цифровой индикатор»** и **«Цветовой индикатор»**.

На цифровые индикаторы перетащим **T**, «**Дни_Исправен» «Дни_Неисправен»**, на цветовой индикатор «**Исправен».**

На цветовом индикаторе установите цвет **min** и цвет **max** (Контекстное меню) (рис. 2.3.5).

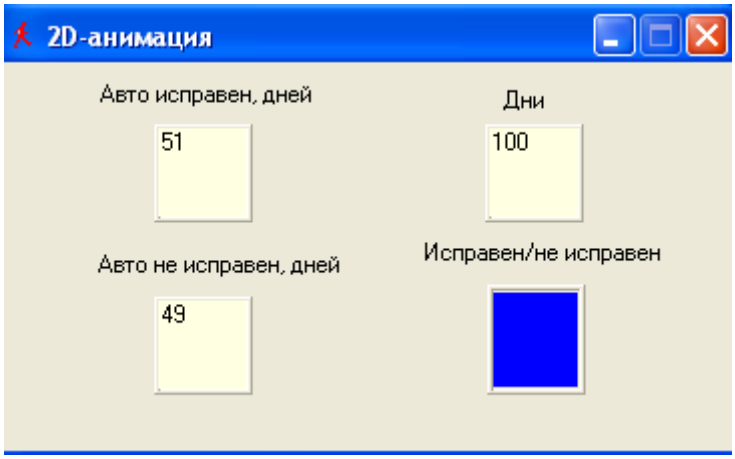

Рис. 2.3.5. Результаты моделирования

2.4. Моделирование случайных событий в среде AnyDynamics

Моделирование случайных процессов – это одно из важнейших направлений современного компьютерного моделирования. Само понятие «случайный» является фундаментальным. **Событие** называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо.

Под **событием** будем понимать всякий факт, который может наблюдаться в данных условиях. Различают достоверное событие, которое наступает каждый раз при реализации определенного комплекса условий. Невозможное (недостоверное) событие не наступает никогда.

Формирование компьютерных реализаций случайных событий (т.е. моделирование случайных событий) сводится к генерации случайных чисел с равномерным законом распределения вероятности на интервале (0,1)**.** В **AnyDynamics** имеется встроенная функция ***uniform (0,1)***.

Пусть событие ***A*** наступает с заданной вероятностью ***P***. Пусть имеется возможность генерировать последовательность значений случайной величины с равномерным распределением вероятности на интервале (0,1): $x_1, x_2, \ldots x_n$, Определим, что событие ***A = 1*** наступает в том случае, если значение сгенерированной случайной величины удовлетворяет неравенству $X_I <= P$.

Вероятность противоположного события равна ***P(НеA) = 1 - P***. Следовательно, если соотношение $X_I <= P$ выполняется, то исходом испытания является событие ***A (A = 1)***, в противном случае исходом испытания является событие ***НеA (A = 0)***.

Построить компьютерную модель реализации случайного события с заданной вероятностью и исследовать ее свойства.

При построении модели выберем ***«Гибридный элементарный объект»*** (рис. 2.4.1). Для решения задачи необходимо построить модель по рис. 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5.

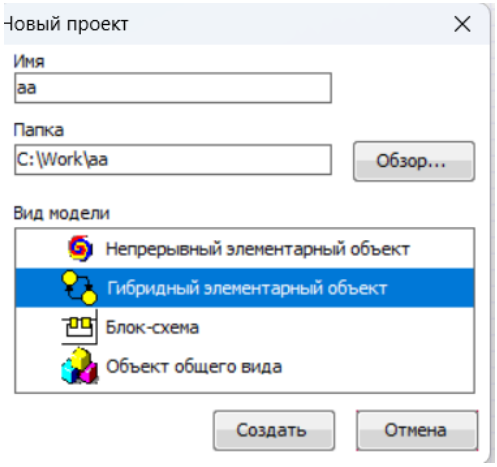

Рис. 2.4.1. Выбор вида модели

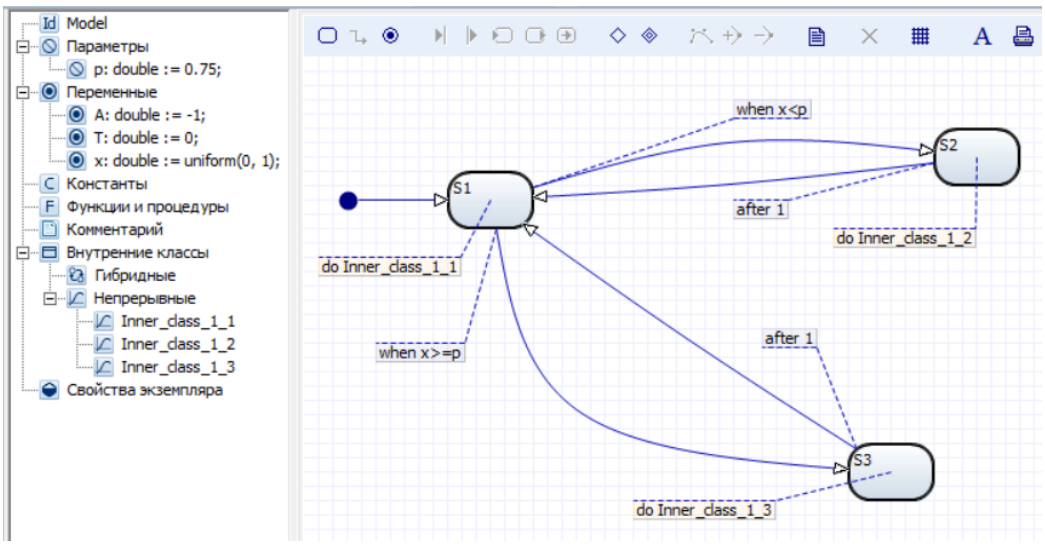

Рис. 2.4.2. Модель случайного события

Узел ***«S1»*** является начальным. Узел ***«S2»*** соответствует событию ***A = 1***, а узел ***«S3»*** соответствует событию ***A = 0***.

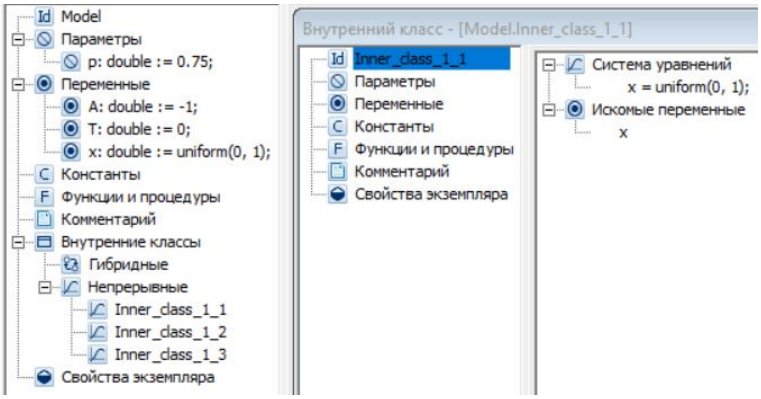

Рис. 2.4.3. Система уравнений класса ***«Inner_class_1_1»***

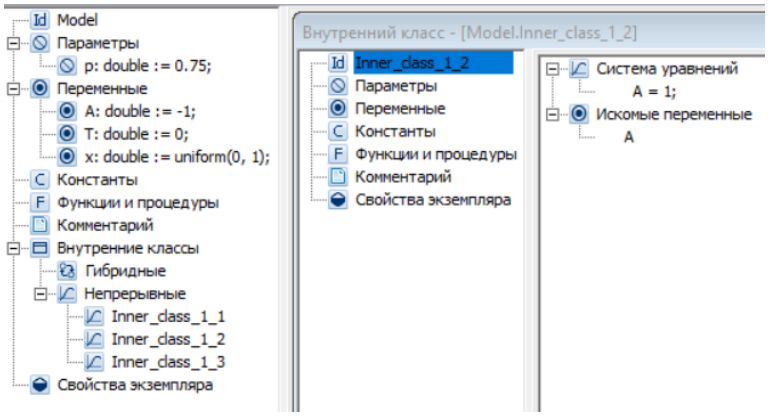

Рис. 2.4.4. Система уравнений класса ***«Inner_class_1_2»***

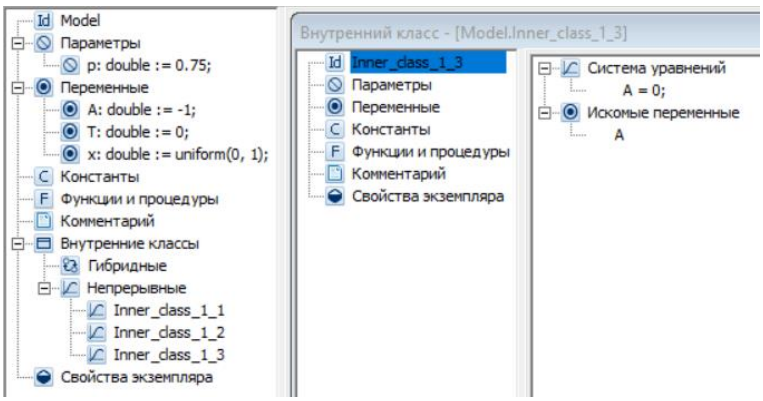

Рис. 2.4.5. Система уравнений класса ***«Inner_class_1_3»***

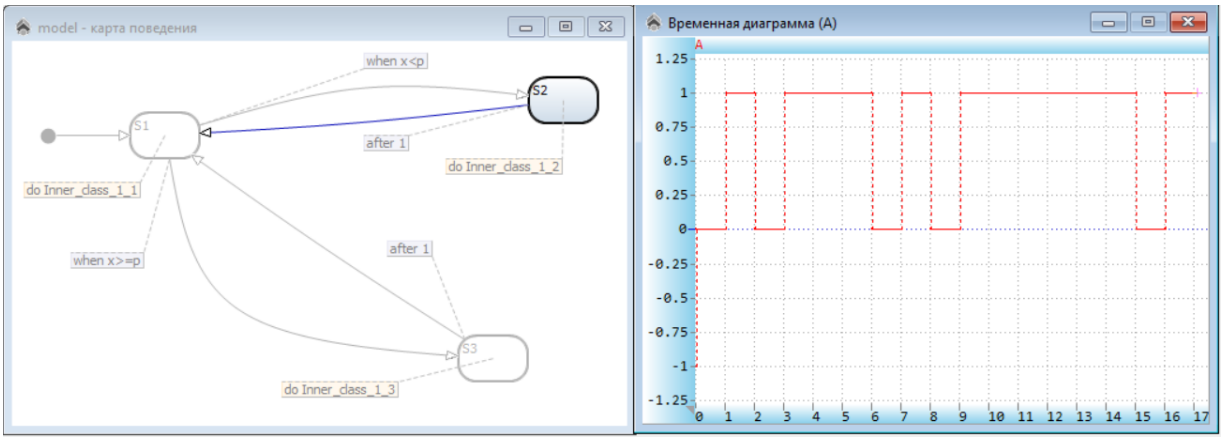

Рис. 2.4.6. Временная диаграмма случайного события

Постройте временную диаграмму случайного события (рис. 2.4.6).

Проанализируйте переключения в **«Карте поведения»** (рис. 2.4.2) и изменения переменных модели.

ГЛАВА 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

3.1. Задачи

Задача 1

Студент не подготовился к тесту и отвечает на вопросы наугад. К каждому вопросу дано четыре варианта ответа, один из которых правильный. Поэтому вероятность P того, что студент отгадает правильный ответ, равна 0,25. Создайте модель для определения количества правильных ответов, которые дал студент, если в тесте всего 90 вопросов.

Задача 2

Вероятность Pд срыва срока поставки товара поставщиком равна 0,14. В этом случае фирма несет убыток Y = 500 руб., связанный с дефицитом товара. Создайте модель, определяющую убыток фирмы при A = 20 поставках. Какое произойдет событие, если для одной из поставок z = 0,20 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 3

Вероятность Pд покупки бракованного товара в магазине равна 0,07. Создайте модель, определяющую количество проданного бракованного товара для N = 200 покупателей. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,15 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 4

Вероятность P_A получения студентом положительной оценки на экзамене равна 0,80. Создайте модель события сдачи экзамена, если студент сдает экзамен до тех пор, пока не получит положительную оценку, а максимальное число пересдач равно 3. Какое произойдет событие, если для одной из попыток z = 0,24 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 5

Вероятность P_A того, что мобильный телефон абонента занят, равна 0,42. Напишите алгоритм моделирования N = 120 звонков для определения числа принятых вызовов. Какое произойдет событие, если для одного из звонков z = 0,53 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1)).

Задача 6

Вероятность Рд годовых внеплановых убытков фирмы, связанных с чрезвычайными ситуациями, равна 0,03. Создайте модель, определяющую убытки фирмы за N = 3 года, если их величина равна 50000 руб. (У = 50000 руб.). Какое произойдет событие, если для одного из годов z = 0,30 (z –случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 7

Вероятность Р д поломки изделия в процессе производства равна 0,10. В этом случае убытки Y фирмы составят 500 руб. Напишите алгоритм, определяющий убытки фирмы, если рассматривается производство N = 30 изделий. Какое произойдет событие, если для одного из изделий z = 0,15 (z –случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 8

Вероятность Рд выигрыша в лотерею равна 0,20. Напишите алгоритм, определяющий общую сумму выигрыша, если билеты купили N = 50 человек. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,19 (z –случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 9

Вероятность Рд того, что покупатель вернет купленный товар, равна 0,38. Напишите алгоритм, определяющий количество товара, которое было возвращено N = 50 покупателями. Какое произойдет событие, если для одного из покупателей z = 0,75 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 10

Вероятность Рд отсутствия товара на складе предприятия равна 0,23. В случае дефицита фирма платит неустойку покупателям в размере Y = 300 руб. Создайте мод

ель, определяющую убытки предприятия, вызванные дефицитом товара, считая, что в фирму обратилось t = 150 клиентов. Какое произойдет событие, если для одного из клиентов z = 0,12 (z –случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 11

Вероятность Рд того, что работник фирмы заболеет, равна 0,12. Создайте модель, определяющую количество заболевших людей, если в фирме работает Л = 120 человек. Какое произойдет событие, если для одного из сотрудников z = 0,70 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 12

Вероятность Рд того, что клиент туристической фирмы поедет отдыхать за границу, равна 0,33. В этом случае прибыль составит S = 15000 руб. Создайте модель, определяющую прибыль туристической фирмы, считая, что в фирму обратилось Л = 80 клиентов. Какое произойдет событие, если для одного из клиентов z = 0,52 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 13

Вероятность Рд того, что инвестиционный проект не окупится, равна 0,19. В этом случае убытки составят У = 150000 руб. Создайте модель, определяющую, возможные убытки для N = 100 инвестиционных проектов. Какое произойдет событие, если для одного из проектов z = 0,22 (z –случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 14

Вероятность Рд того, что срок годности товара истечет прежде, чем он будет продан, равна 0,47. В случае продажи товара фирма получает выручку в размере 40 руб. В случае истечения срока годности фирма несет убыток, равный 30 руб. Создайте модель, определяющую прибыль рассматриваемой фирмы, считая, что в продажу поступило N = 350 товаров. Какое произойдет событие, если для одного из товаров z = 0,14 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 15

Вероятность Рд получения в каждом месяце премии работником равна 0,67. Создайте модель, определяющую количество полученных премий работником за год. Какое произойдет событие, если для одного из работников z = 0,82 (z – случайная величина, распределенная равномерно на интервале (0,1))?

Задача 17

Два игрока бросают по очереди монету. Вероятность выпадения «Герба» равна 0,5. Создайте модель для определения победителя, если выигрывает тот игрок, у кого первого выпал «Герб».

Задача 18

С помощью конвейера осуществляется сборка изделия. Число деталей равно 25. Каждая деталь с вероятностью P = 0,01 может оказаться бракованной. В том случае, если хотя бы одна деталь бракованная, то изделие также считается бракованным. Напишите алгоритм для определения, будет ли рассматриваемое изделие бракованным или нет.

Задача 19

Вероятность Рд выхода из строя оборудования в производственном цехе равна 0,29. Напишите алгоритм для определения числа поломок, если в цехе расположено 40 машин. Какое произойдет событие, если для одного из оборудований z = 0,25?

Задача 20

Вероятность P заболевания человеком простудой равна 0,6. В том случае, если человеку сделали прививку, то вероятность уменьшается до P2 = 0,2. Создайте модель для определения, на сколько человек уменьшилось число больных благодаря прививке, если рассматривается N = 90 человек.

3.2. Контрольные вопросы

1. Какое событие называется случайным?
2. Как называется событие вероятность, которого равна 1?
3. Как называется событие вероятность, которого равна 0?
4. Какая функция ЭТ используется для генерации случайных величин с равномерным законом распределения в диапазоне (0;1)?
5. Какая функция MVS используется для генерации случайных величин с равномерным законом распределения в диапазоне (0;1)?
6. Какая функция AnyDynamics используется для генерации случайных величин с равномерным законом распределения в диапазоне (0;1)?
7. Каков алгоритм моделирования случайного события с заданной вероятностью?
8. Каков алгоритм моделирования полной группы трех случайных событий с заданной вероятностью?
9. Чем отличается временная диаграмма от фазовой диаграммы?
10. Какова вероятность совместного свершения двух независимых случайных событий?
11. Что такое полная группа случайных событий?
12. Каков алгоритм моделирования зависимых случайных событий с заданной вероятностью?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учебное пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – Москва: Финансы и статистика, 2003. – 368 с. – ISBN 5-279-02291-8.

2. Варфоломеев, В. И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: учебное пособие / В. И. Варфоломеев, С. В. Назаров. – Москва: Финансы и статистика, 2004. – 264 с. – ISBN 5-279-02772-3.

3. Королев, А. Л. Лабораторный практикум. «Компьютерное моделирование»: учебное пособие / А. Л. Королев. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. гуман.-пед. ун-та, 2022. – 242 с. – ISBN 978-5-907611-29-0.

4. Королев, А. Л. Компьютерное моделирование объектов, процессов и систем: учебное пособие / А. Л. Королев, Н. Б. Паршукова. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. гуман.- пед. ун-та, 2020. – 349 с. – ISBN 978-5-907409-15-6.

5. Макарова, Н. В. Статистика в Excel: учеб. пособие / Н.В. Макарова, В. Я. Трофимец. – Москва: Финансы и статистика, 2002. – 368 с. – ISBN 5-279-02282-9.

Учебное издание

Королев Александр Леонидович

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

ISBN 978-5-907869-18-9

Рукопись рекомендована РИС ЮУрГГПУ
Протокол № 30 от 2024 г.
Редактор Е.М. Сапегина
Технический редактор Н.А. Усова

Издательство ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Подписано в печать 27.06.2024 г.
Объем 1,8 уч.-изд. л. (7,8 усл. п. л.)
Формат 60*84/8 Тираж 100 экз.
Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69