МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Технология проектной деятельности в обучении математике

Выпускная квалификационная работа по направлению

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность программы бакалавриата

«Математика. Информатика»

Форма обучения очная

Проверка на объем заимствований:
68,78 % авторского текста
Работа рекомендована к защите
«05» апреля 2023 г.
зав. кафедрой математики и МОМ
________ Звягин К.А.

Выполнила:
Студентка группы ОФ-513/204-5-1
Путнова Анастасия Валерьевна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Шарафутдинова Анна Михайловна

Челябинск
2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В связи с тем, что в настоящее время происходят изменения во всех сферах жизнедеятельности, то и система российского образования подвергается изменениям. Модернизация образования направлена не только на подготовку высококвалифицированного специалиста, но и на человека, готового применять полученные знания на практике. Также значительно возросла роль информационных технологий, и у любого человека возникает потребность самостоятельно ориентироваться в обилии информации.

Современное общество предъявляет серьезные требования к качеству образования молодого поколения: владение различными способами деятельности (познавательной, творческой, проектной), умение ориентироваться в огромном информационном потоке, обладание способностью к самостоятельному добыванию своих знаний, умение критически мыслить, владение навыками коллективного труда. А так как все эти способности трудно развивать, используя только стандартную форму проведения уроков, то в образовательный процесс внедряются нетрадиционные формы проведения урока.

Нетрадиционные формы проведения уроков также дают возможность повысить интерес учащихся к изучению предмета математика, развить у учащихся неординарные способности. Одной их нетрадиционных форм обучения, используемой на уроках математики, является метод проектов.

Метод проектов – это определенная совокупность учебно-познавательных приемов, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных действий учащихся [4]. Эта технология позволяет повысить уровень усвоения учебного материала, развить самостоятельное мышление и повысить творческий потенциал учащихся, научить применять знания и умения, приобретенные в школе, на практике.

Объект исследования – процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования – применение метода проектов в обучении математике.

Целью работы является теоретическое обоснование применения метода проектов в обучении математике, а также разработка методических материалов для его реализации.

Гипотеза: предполагается, что систематическое включение проектной деятельности в процесс обучения математике может способствовать повышению уровня развития познавательной деятельности обучающихся и формированию навыков групповой работы.

Задачи исследования:

1. Изучить историю появления метода проектов.
2. Проанализировать различные подходы к определению понятия «метод проектов».
3. Выявить особенности применения проектной деятельности на уроках математики.
4. Реализовать метод проектов при изучении геометрии.

При написании работы использовались различные источники: учебные материалы, научные труды, статьи специализированных периодических изданий, ресурсы Интернет.

При работе над темой был использован метод теоретического анализа педагогических, научных и методических источников по проблеме исследования, а также метод эмпирического анализа.

Структура работы: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ПРОЕКТОВ

1.1 История возникновения метода проектов

На данном этапе развития образования актуально использование и внедрение новых педагогических технологий, использование активных методов обучения. К одной из таких известных педагогических технологий, применяемых в школе, относится метод проектов. Данный метод способствует формированию у обучающихся творческих способностей, вырабатыванию навыков самостоятельной работы, а также помогает найти необходимую информацию из различных источников.

Метод проектов не является принципиально новым в педагогической деятельности. Возник он ещё во второй половине XIX века. Изначально данный метод появился в США и основывался на теоретических концепциях прагматической педагогики, главной идеей которой было «обучение посредством деления».

Впервые об организации проектной деятельности детей по решению практических задач задумался Д. Дьюи в 20-е годы XX века. Это были первые попытки внедрения проектного обучения в школе. Согласно его мнению, истинным и ценным является то, что дает практический результат и направлено на развитие всего общества. Джон Дьюи предлагал строить обучение на активной основе, то есть через практическую деятельность ученика, соответствующую его личным интересам именно в этом знании.

Отсюда очень важно было показать учащимся их собственную заинтересованность в приобретаемых знаниях, которые могут и должны пригодиться им в жизни. И для этого требуется проблема, взятая из реальной жизни, знакомая и немаловажная для учащихся. Для решения этой проблемы им необходимо использовать знания, которые уже известны, и абсолютно новые, которые еще предстоит получить.

Продолжил идеи Д. Дьюи его соотечественник, американский педагог У. Х. Килпатрик. Он разработал основы теории метода проектов.

Уильям Херд Килпатрик предложил следующую педагогическую систему обучения:

– отсутствие классно-урочной системы;

– отсутствие заранее подготовленной учебной программы;

– программа обучения формируется в ходе совместной деятельности учителя и ученика;

– ученик самостоятельно выбирает вид и тематику деятельности [16].

Основная идея метода проектов Килпатрика состояла в том, что деятельность ребенка должна выполняться с огромным интересом, которую он сам выбрал и не должна строиться на основании учебного предмета. Девиз его деятельности был: «Все из жизни – все для жизни». Его типология проектов относилась практически к любой области: от построения механизмов до решения математических задач, изучения французских слов, наблюдений за солнечным закатом или прослушивания сонаты Бетховена [18].

В России в 20-е годы XX века также использовался метод проектов. Идеи проектного обучения в России зарождались параллельно с разработками американских педагогов. Совместно с С. Т. Шацким в 1905 году группа сотрудников предпринимала попытки использовать проектные методы в преподавании. Станислав Теофилович Шацкий исходил из того, что школа должна готовить учащихся к жизни, а не только учить грамоте. Он считал, что воспитание человека должно быть воспитанием его самостоятельности.

При советской власти идеи метода проектов стали широко внедряться в школу, но недостаточно продуманно и последовательно. Сторонниками метода проектов в советской России стали В. Н. Шульгин, М. В. Крупенина, Б. В. Игнатьев, провозгласив его единственным средством преобразования школы-учебы в школу-жизни.

В качестве ведущих и прогрессивных идей в методе проектов выделялись:

– совместная деятельность учеников с учителем;

– комплексный подход к реализации проекта, предусматривающий самостоятельное приобретение знаний и навыков непосредственно в процессе выполнения проекта.

В советской школе предпринимались неоднократные попытки модифицировать метод проектов, сочетать его с принципом «система индивидуального обучения» и коллективной работой учащихся. Так возник бригадно-лабораторный метод обучения. Но в 1931 году постановлением ЦК ВКП (б) метод проектов был осужден и с тех пор до 80-х годов не использовался в школах [12]. За рубежом же метод проектов приобрел большую популярность и активно развивался.

В современной системе образования активно возрождают метод проектов на уроках. Сейчас к числу российских исследователей, которые занимаются вопросами проектного обучения, можно отнести таких ученых, как Э. В. Бурцеву, В. В. Гузееву, М. И. Гуревича, Н. О. Деньгину, И. А. Зимнюю, Е. С. Полата, А. А. Карачева, Н. В. Матяша, П. Р. Полякову, В. В. Рубцову и других [15].

1.2 Понятие метода проектов и классификация проектов

Термин метод проектов тесно связан с понятием «проект». Это понятие было заимствовано из латинского языка (projectus) и в дословном переводе звучит как «выступающий, выдающийся вперёд, торчащий». Единого определения понятия «проект» в словарях нет, поэтому следуя из всех определений данного понятия можно получить следующее: «Проект – это разработанный план, замысел решения проблем, комплекс взаимосвязанных мероприятий, предназначенных для достижения поставленных задач с определёнными целями, в результате которых должен получиться какой-то новый продукт» [11]. То есть «проект» – это всегда творческая деятельность. Что касается термина «метод проектов», то и тут существует множество подходов к определению данного понятия.

В педагогическом энциклопедическом словаре под методом проектов понимают систему обучения, при которой учащиеся приобретают знания в процессе планирования и выполнения постоянно усложняющихся практических заданий – проектов [2]. Активное включение школьника в создание тех или иных проектов дает ему возможность осваивать новые способы деятельности.

По определению доктора педагогических наук, профессора Полат Евгении Семёновны: «Метод проектов – совокупность учебно-познавательных приемов, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных действий учащихся с обязательной презентацией этих результатов в виде конкретного продукта деятельности » [12].

Метод проектов – это комплексный обучающий метод, который позволяет индивидуализировать учебный процесс, дает возможность учащемуся проявить самостоятельность в планировании, организации и контроле своей деятельности (Селевко Г. К.) [15].

О. В. Брыкова под методом проектов понимает способ достижения дидактической цели через детальную разработку проблемы, которая завершается практическим результатом, оформленным определенным образом [3].

Кандидат педагогических наук Пахомова Нинель Юловна дает следующее определение: «Метод проектов – это одна из личностно-ориентированных технологий, способ организации самостоятельной деятельности учащихся, направленный на решение задач учебного проекта» [12].

Таким образом, проанализировав приведенные выше определения можно сделать вывод, что метод проектов всегда нацелен на самостоятельное решение какой-то проблемы с обязательной презентацией результата проделанной работы.

Метод проектов – это технология моделирования и организации образовательных ситуаций, в которых обучающиеся выполняют комплекс действий по решению какой-либо важной для себя проблемы. Разумно методу проектов уделить больше внимания в процессе обучения математике, поскольку он позволяет реализовать деятельностный подход к обучению.

В основе метода проектов лежит развитие познавательных навыков учащихся, умений самостоятельно формировать свои знания и ориентироваться в информационном пространстве. Усвоение теоретических знаний осуществляется как раз через выполнение проектов. Чтобы разработать какой-либо проект, учащемуся необходимо детально изучить проблему, поставленную перед ним. Во время решения проблемы используются различные методы и средства обучения, а также применяются знания и умения из различных сфер науки, техники и творческих областей.

Метод проектов в математике характеризуется формированием навыков системного подхода к решению задач, проявлением самостоятельности в процессе работы. Учащиеся, выполняя проекты на уроках математики, выполняют определенные алгоритмы действий, упражнения. Выбор тематики проектной деятельности учащихся может быть различным. В одних случаях тема проектов, особенно предназначенная для внеурочной деятельности, может быть предложена и самими учащимися, которые ориентируются при этом на собственные интересы, не только познавательные, но и творческие, прикладные. В других случаях – определяют тематику с учетом учебной ситуации по своему предмету, исходя из естественных профессиональных интересов, интересов и способностей учащихся.

Данная технология способствует повышению познавательного интереса учащихся к изучаемому предмету, развивает такие качества, как коммуникабельность, умение слушать и грамотно излагать свои мысли.

К классификации метода проектов так же, как и к определению «метода проектов» не существует единственного подхода. Так, например, американский ученый Э. Коллингс разделял проекты на следующие группы (рисунок 1):

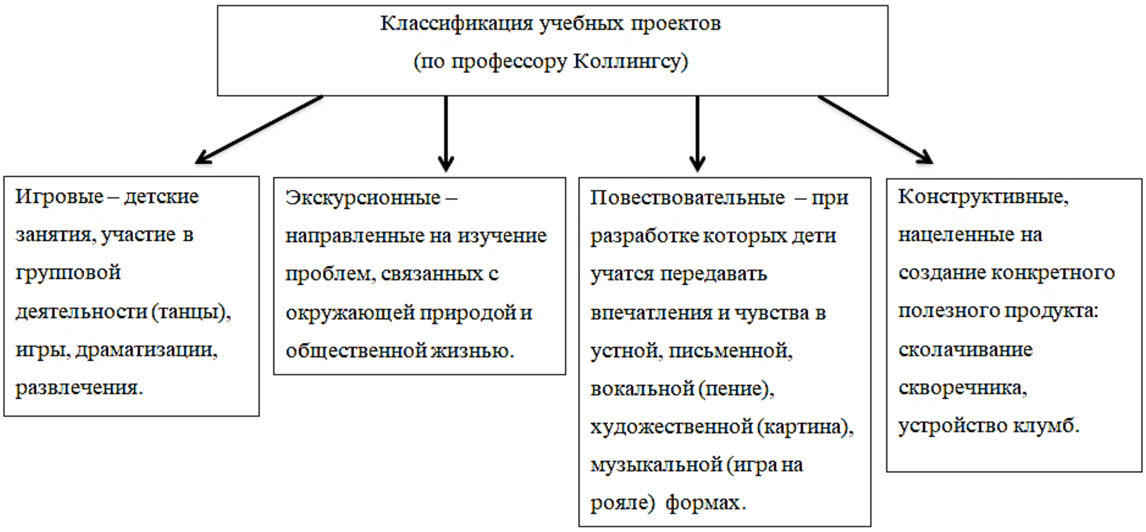


Рисунок 1 – Классификация учебных проектов по Э. Коллингсу

Его соотечественник У. Х. Килпатрик рассматривал классификацию метода проектов по двум следующим признакам (Таблица 1) [7]:

Таблица 1 – Классификация проектов по У. Х. Килпатрику

Признак проекта	Тип проекта
1	*2*
Целевая установка	Созидательный
	Потребительский
	Интеллектуальный
	Проект-упражнение

Продолжение таблицы 1

1	2
Количество участников проекта	Индивидуальный
	Групповой

Кандидат педагогических наук Алла Степановна Сиденко разделяет учебные проекты следующим образом (Таблица 2) [16]:

Таблица 2 – Классификация проектов по А. С. Сиденко

Признак проекта	Тип проекта
По характеру результата	Информационный
	Исследовательский
	Обзорный
	Продукционный
По профилю знаний	Монопроект
	Межпредметный
По количеству участников	Личностные
	Парные
	Групповые
По уровню контактов	Внутришкольные
	Межшкольные
	Региональные
	Международные
По типу объекта проектирования	Морфологические
	Социальные
	Экзистенционные

Но более полную классификацию представляет Евгения Семеновна Полат. Она предлагает 5 критериев, по которым можно различать методы проектов:

1. *По доминирующей деятельности:*
   - исследовательская;
   - поисковая;

– творческая;
– ролевая;
– практико-ориентированная;
– ознакомительно-ориентировочная.

2. *По предметно-содержательной области:*
– монопроект;
– межпредметный.

3. *По числу участников:*
– индивидуальные;
– парные;
– групповые;
– коллективные.

4. *По продолжительности:*
– мини-проект (1-2 урока);
– краткосрочный;
– недельный;
– долгосрочный.

5. *По характеру контактов:*
– скрытый;
– открытый [10].

Выводы по главе 1

В современной системе образования активно возрождают метод проектов. Метод проектов – это не принципиально новая педагогическая технология. Возник он еще во второй половине XIX века.

В мире много исследователей, которые занимаются вопросами проектного обучения и как следствие существует различные взгляды о понятии метода проектов и их классификации. Одни из них рассматривают метод проектов как совокупность учебно-познавательных приемов, которые позволяют решить ту или иную проблему в результате самостоятельных действий учащихся с обязательной презентацией этих результатов в виде конкретного продукта деятельности. Другие под методом проектов понимают систему обучения, при которой учащиеся приобретают знания в процессе планирования и выполнения постоянно усложняющихся практических заданий – проектов. Так же как и подходов к определению «метод проектов» существует немало классификаций, которые разделяют проекты на различные группы.

В результате реализации метода проектов на уроке, у обучающихся повышается уровень знаний, формируются навыки творческой деятельности, лучше усваивается теоретический материал, а так же они учатся самостоятельно конструировать свои знания и ориентироваться в информационном пространстве.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

2.1 Применение метода проектов на уроках математики

Для современного образования целью является развить учащегося как личность и субъект познавательной деятельности. Основной особенностью ФГОС ООО является деятельностный характер, вовлечение ученика в активную работу на уроке. Вследствие этого меняются и технологии обучения, используемые на уроках. Использование интерактивных технологий в педагогической деятельности, в частности и на уроках математики, значительно расширяют образовательные рамки по предмету. Для решения данной проблемы применяются инновационные технологии, включающие активные методы обучения. Одной из таких технологий является метод проектов, который может использоваться при изучении отдельных разделов курса математики.

В настоящее время актуальность использования метода проектов на уроках математики обусловлена тем, что данный метод обеспечивает в наибольшей степени подготовленность учащихся к быстрой смене технологий. В основе этого метода лежит творческая деятельность учащихся, проявление инициативы и самостоятельности, развитие критического мышления. Метод проектов позволяет научиться решать нетиповые задачи. Через выполнение проектов идет усвоение теоретических знаний, а также учащиеся учатся применять полученные знания на практике.

При подготовке проекта предполагается самостоятельная работа с информацией, причем информацией на различных носителях. Это могут быть книги, журналы, материалы уроков, информационные ресурсы Интернета. Проекты могут быть межпредметными и требовать привлечения знаний из разных областей образования.

В рамках освоения учащимися содержания математики, как учебной дисциплины им могут предлагаться различные типы проектных работ в зависимости от класса, сформированности проектных навыков, информационной грамотности учащихся. Это могут быть проекты по разработке информационных плакатов, образовательных квестов, кроссвордов, сборников заданий, ребусов, газет, а также создание интерактивных чертежей.

Так, например, в статье учителя математики И. В. Ромашко предлагается мини-проект для учащихся 5 класса после изучения темы «Меры длины, веса, площади». В ходе данного проекта учащимся необходимо составить таблицы по мерам длины, веса и площади, а так же подготовить викторину с вопросами на понимание пройденного материала [14].

Применение метода проектов на уроках и во внеклассной деятельности по математике обусловлено тем, что учащиеся хотят знать, зачем им изучать математику и где она пригодиться в жизни. Эффективнее всего применять данный метод для изучения трудных тем или разделов курса математики для того, чтобы учащимся было легче осмыслить сложный материал.

Процесс использования метода проектов при обучении математике в школе состоит из последовательно идущих, друг за другом, этапов, но в основе метода проблемной ситуации, в первую очередь, лежит проблема, которая впоследствии должна быть разрешена учащимися. То есть проектная деятельность обучающихся – это процесс, который реализуется в ходе выполнения комплексных задач поэтапно.

Проанализировав научную литературу, можно сделать вывод, что в современной педагогике нет единого подхода к определению этапов учебного проекта, однако обобщив мнения ученых, можно выделить основные этапы проектной деятельности обучающихся на уроках математики.

Например, Розанов Л. Л. выделяет следующие этапы проектной деятельности:

1. Организационно-подготовительный (выбор темы; определение задач проекта; поиск проблем; составление предварительного плана; определение участников, методов, приёмов исследования; владение терминологией).

2. Поисково-исследовательский (разработка программы исследования; сбор и изучение нужных данных; непосредственное исследование на основании использования методов наблюдения, эксперимента, анализа и синтеза).

3. Отчётно-оформительский (составление названия исследовательского проекта; изложение проекта).

4. Информационно-презентативный (защита проекта; самооценка и оценка проектов) [19].

По В. В. Николиной этапы работы над проектом разделяются на:

1. Ценностно-ориентированный (осознание мотива и цели деятельности, определение замысла проекта).

2. Конструктивный (собственно проектирование).

3. Оценочно-рефлексивный (самооценка деятельности).

4. Презентативный (защита проекта) [21].

Доктор педагогических наук Л. Н. Горобец в своей статье предлагает выделить шесть этапов работы над проектом (Таблица 3) [5]:

Таблица 3 – Этапы работы над проектами по Л. Н. Горобец

Этап	Характеристика этапа
1	*2*
Подготовительный	Включает формирование творческих групп, выбор темы, определение замысла проекта, целей и задач. Учитель выступает в роли организатора.

Продолжение таблицы 3

1	2
Реализация проекта	Включает выбор методов исследования, самостоятельную работу учащихся над задачами проекта. В ходе данного этапа приводятся доказательства и решения проблемы, а также проводится промежуточное обсуждение результатов и структурирование полученной информации.
«Тихая презентация» в мини-группе	Учащиеся представляют результат проделанной работы. Учитель проводит «тихую» проверку, редактирует, уточняет и детализирует материал, указывая недочеты.
Публичная защита («громкая» презентация)	Учащиеся представляют конечный результат своей работы и защищают его в разных формах. Учитель выступает в роли эксперта, оценивая представленные проекты.
Рефлексия	На данном этапе проходит самоанализ выступлений учащихся. Учитель подводит итоги и оценивает работы, стараясь выделить каждого участника. Это важный этап, так как умение анализировать свои и чужие работы, высказывать замечания, принимать их не всегда сформированы у учащихся школ.
Итог проекта	Учащимся предлагается составить «тематическое портфолио» в котором учащиеся под руководством учителя или самостоятельно, представляют оформленный продукт проекта в виде текста разных жанров.

Мария Анатольевна Ступницкая в своем методическом пособии «Что такое учебный проект?» выделяет 5 этапов работы над проектами [17]. Подробнее с ними можно ознакомиться на рисунке 2.

Е. С. Полат предлагает следующие этапы разработки плана проектов и его реализации:

1. Представление ситуаций, дающих возможность выявить одну либо несколько проблем по обговариваемой теме.

2. Выдвижение гипотез решения поставленной проблемы («мозговой штурм»), обсуждение и обоснование любой из гипотез.

3. Обсуждение методов проверки принятых гипотез в малых группах (в любой группе по 1 предположению), вероятных источников

данных для проверки выдвинутого предположения, оформление результатов.

4. Работа в группах над поиском результатов, аргументов, доказывающих либо опровергающих предположение.

5. Защита проектов (гипотез решения проблемы) любой из групп с обсуждением со стороны всех присутствующих.

6. Выявление новых проблем [13].

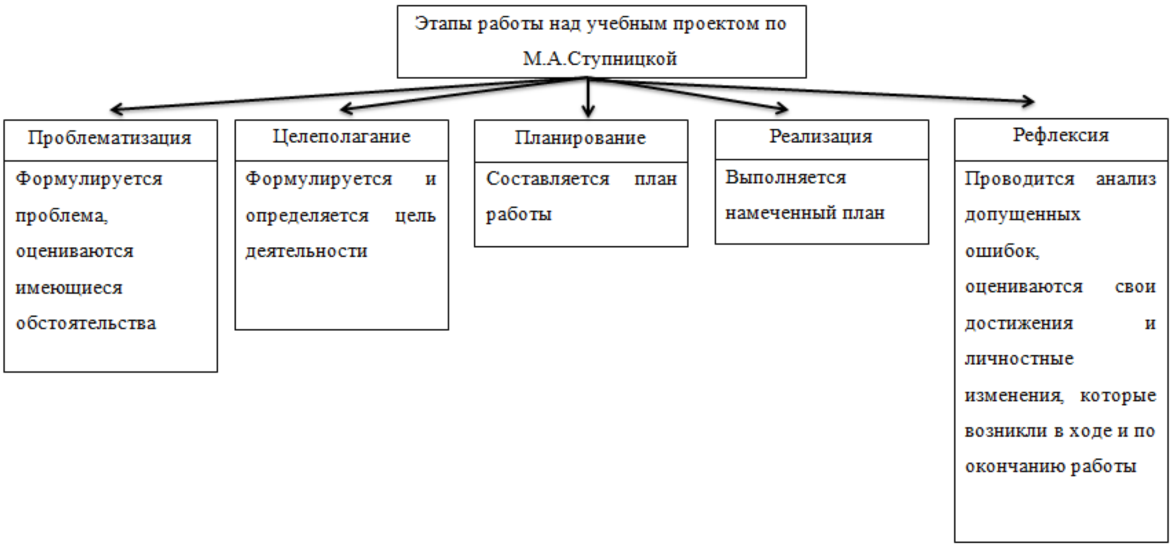


Рисунок 2 – Этапы учебных проектов по М. А. Ступницкой

Изучив все выше представленные классификации этапов проектной деятельности, можно с лёгкостью заметить, что они не сильно отличаются друг от друга. Поэтому целесообразно выделить четыре основных этапа проектной деятельности: планирование, реализация, презентация, оценка проектной деятельности. Именно эти этапы и используются для реализации метода проектов не только на уроках математики, но и на других дисциплинах.

Таким образом, метод проектов на уроках математики позволяет решать такие задачи, как: структурирование материала и установление связей между предметами, усиление мотивации учащихся к изучению предмета, формирование информационно-коммуникативных навыков, развитие социализации, закрепление работы в компьютерных программах.

А также позволяет создать условия для чередования различных видов деятельности на уроках, что позволяет уйти от однообразия учебного процесса.

2.2 Примерная тематика проектов по геометрии в соответствие с содержанием школьных учебников

Школьный курс геометрии, ориентирован на обеспечение обязательного общеобразовательного минимума подготовки учащихся. Однако при обучении возникает целый ряд проблем, связанных с недостаточностью и неравномерностью общей подготовки учащихся и низким уровнем мотивации обучения. Применение проектного метода позволяет решить данные проблемы, активизируя познавательные способности, раскрывая творческие возможности и учитывая интересы учащихся. Этот метод обеспечивает учёт индивидуальных особенностей учащихся, что важно для современного образования, которому присуще концепция личностно-ориентированного обучения.

Приведем примеры мини-проектов, которые можно выполнить с учащимися на уроках геометрии. Все проекты соответствуют образовательным линиям программы базового курса.

Первый проект разработан в рамках темы «Признаки равенства треугольников», которая изучается в 7 классе по учебно-методическому комплексу (далее – УМК) А. Г. Мерзляка [8]. В ходе данной темы изучаются три основных признака равенства треугольников, а также проводятся практические занятия на применение этих признаков. После изучения данной темы и проведения всех практических занятий заинтересованным учащимся будет предложен мини-проект «Мир равных треугольников» направленный на закрепление изученных признаков. Учащиеся получают следующее задание: применяя теоретические знания по теме, составьте карточку-подсказку по признакам равенства треугольников, а так же уточните их количество. В качестве программы для создания карточек-подсказок можно воспользоваться редакторами MS PowerPoint, MS Word, MS Publisher. Не смотря на то, что тема для проекта одинаковая, каждый учащийся сможет проявить свои творческие способности при создании карточки.

Тип проекта: межпредметный, творческий, мини-проект.

Цель проекта: закрепить и расширить полученные знания, создав карточку-подсказку по теме «Признаки равенства треугольников»

Задачи проекта:

1) создать информационную модель проекта (определить формат представления материала, поиск материала и так далее);

2) определить точное количество признаков равенства треугольников;

3) осуществить поиск дополнительной информации в сети Интернет;

4) вспомнить и отработать навыки работы в выбранной программе.

Продолжительность проекта: в течение недели.

Предметно-содержательная область: математика и информатика.

Предполагаемый продукт проекта: карточка-подсказка «Мир равных треугольников», которую впоследствии можно использовать как дидактический материал на уроках математики.

Ход проекта:

1) постановка цели и задачи проекта;

2) отбор материала, его анализ;

3) выбор формата представления материала;

4) разработка карточки;

5) представление результатов работы учителю и одноклассникам.

В ходе выполнения данного проекта учитель выступает в роли организатора развития творческо-практической деятельности учащихся. Работая над этим проектом, учащиеся смогут закрепить и расширить полученные знания по теме «Треугольники», вспомнить алгоритм поиска информации в сети Интернет, а также получат возможность проявить себя, свои творческие способности. Кроме этого, данный проект поможет учащимся получить оценки сразу по двум предметам: математика и информатика.

Еще два проекта разработаны в рамках темы «Геометрические преобразования», в которую входят параграфы: «Движение (перемещение) фигуры. Параллельный перенос», «Свойства параллельного переноса», «Осевая симметрия», «Свойства осевой симметрии», «Центральная симметрия» и тому подобное, в 9 классе по программе к УМК А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского выделяется 10 часов [9]. За это время необходимо рассказать учащимся о понятии движения и геометрического преобразования, о параллельном переносе, симметрии, гомотетии, а так же сформировать навыки применения преобразования фигур при решении задач.

На первых занятии учащиеся разбираются с понятием геометрического движения, изучают его свойства. Каждый урок это часть теоретического материала, которая впоследствии закрепляется на решении задач. Но, выполнение стандартных практических упражнений не даёт высоких результатов в освоении данной темы, потому что учащийся не представляет, где он сможет применить полученные навыки на практике. Поэтому в завершении данной темы им предлагается выполнить итоговый проект «создание мультимедийной презентации, альбома или интерактивных чертежей по изученной теме». Учащиеся получают следующее задание: с помощью сети Интернет, статей, книг найти дополнительную информацию по любому из видов движения. По этим данным учащиеся создают презентацию в любом известном им редакторе презентаций, альбом или строят интерактивный чертеж. Презентация и альбом обязательно должны содержать тему, цели и задачи, данные об авторе. В качестве программ для создания презентаций учащимся можно предложить такие программы, как PowerPoint, Prezi или Powtoon, а для создания интерактивных чертежей – программу GeoGebra. Тему для проекта учащиеся могут выбрать самостоятельно, исходя из собственных интересов. Таким образом, учащиеся будут с интересом собирать материал, расширяя свои знания по данной теме. Подобная работа позволит им осознать возможность применения полученных знаний и умений на практике. А также они смогут познакомиться с интересными свойствами движений и особенностями преобразования фигур, кроме этого учащиеся смогут углубить свои знания в использование редактора MS PowerPoint, познакомятся с программой GeoGebra.

Проект «Симметрия повсюду»

Тип проекта: индивидуальный, творческий, мини-проект.

Цель проекта: создать мультимедийную презентацию на тему «Симметрия повсюду» на основе изученного материала, статей, информации из сети Интернет.

Задачи проекта:

1) создать информационную модель проекта (поиск материала, выбор количества слайдов, дизайн слайдов, сбор фотографий и так далее);

2) сформулировать понятие «симметрия», изучить основные свойства симметрии, узнать о ее видах;

3) определить объекты исследования и провести их анализ на симметричность;

4) отработать навыки создания компьютерной презентации.

Продолжительность проекта: в течение двух недель.

Предметно-содержательная область: математика.

Предполагаемый продукт проекта: мультимедийная презентация по теме «Симметрия повсюду» для использования на уроках математики.

Ход проекта:

1) постановка цели и задачи проекта;

2) отбор материала, его анализ;

3) создание макета презентации;

4) разработка дизайна презентации;

5) создание мультимедийной презентации;

6) представление результатов работы учителю.

В ходе выполнения данного проекта учитель выступает в роли организатора самостоятельной познавательной деятельности учащегося и развития его творческих способностей. Работая над этим проектом, учащийся получит возможность проявить не только себя, но и свои творческие способности, расширить и углубить свои знания по теме геометрии и другим предметам школьного курса, а также закрепить уже имеющиеся знания по теме «Симметрия».

Проект «Секрет зрения или гомотетия?»

Тип проекта: индивидуальный, творческий, мини-проект, практико-ориентированный.

Цель проекта: создать интерактивный чертеж в среде GeoGebra на тему «Гомотетия глазами человека» используя информацию из учебника «Геометрия. 9 класс» и информацию из сети Интернет.

Задачи проекта:

1) создать информационную модель проекта (поиск материала, его структурирование);

2) изучить свойства гомотетии и особенности зрения человека;

3) развить умение анализировать изученный материал, делать выводы;

4) изучить и отработать основные приемы создания интерактивного чертежа в среде GeoGebra.

Продолжительность проекта: в течение двух недель.

Предметно-содержательная область: математика.

Предполагаемый продукт проекта: интерактивный чертеж по теме «Гомотетия» для использования на уроках математики, как демонстрационный материал к уроку.

Ход проекта:

1) постановка цели и задачи проекта;
2) отбор материала, его анализ;
3) изучение интерфейса выбранной среды;
4) создание интерактивного чертежа;
5) представление результатов работы учителю.

В ходе выполнения данного проекта учитель выступает в роли организатора самостоятельной познавательной деятельности учащегося и консультанта по вопросам, которые интересуют обучающегося. Работая над этим проектом, учащийся расширит и углубит свои знания по данной теме, разовьет творческое мышление, научиться анализировать и обобщать информацию.

Ниже, в Таблице 4, представлены примерные темы различных проектов в соответствии с учебно-методическим комплексом Л.С. Атанасяна.

Таблица 4 – Примерные темы проектов по УМК Л. С. Атанасян

№	Тема проекта	Тип проекта	Возможный продукт
1	*2*	*3*	*4*
7 класс			
1	Необычные геометрические фигуры	Творческий, поисковый, мини-проект	Альбом, презентация, фильм, плакат
2	В мире треугольников	Творческий, исследовательский, мини-проект	Презентация
3	Биссектриса – знакомая и не очень	Исследовательский, краткосрочный	Презентация, сборник заданий
4	Построение углов на клетчатой бумаге	Недельный, поисковый, практико-ориентированный	Презентация, макет, памятка

Продолжение таблицы 4

1	*2*	*3*	*4*
5	Прямоугольный треугольник в технике и в жизни	Поисковый, творческий, мини-проект	Альбом, презентация, плакат
8 класс			
6	Интересные свойства трапеции	Краткосрочный, практико-ориентированный	Сборник заданий, презентация
7	Теорема Пифагора и пифагоровы числа	Краткосрочный, практико-ориентированный, творческий	Набор карточек, сборник заданий
8	Мир симметрии	Творческий, краткосрочный	Презентация, альбом, сборник заданий
9	Измерительные работы с применением подобия треугольников	Творческий, мини-проект, практико-ориентированный	Сборник заданий, брошюра, памятка
10	Площадь у вас какая?	Практико-ориентированный, недельный	Презентация, сборник заданий, набор карточек
9 класс			
11	А в окружность я влюбился и на ней остановился	Творческий, групповой, мини-проект	Презентация, памятка
12	Геометрия орнаментов и узоров	Мини-проект, творческий	Презентация, плакат, стенгазета
13	Тротуарная плитка и паркет	Мини-проект, творческий	Эскиз, презентация, стенгазета
14	Загадки треугольника	Недельный, практико-ориентированный	Сборник заданий, набор карточек, сайт
15	Применение геометрических преобразований в задачах на построение	Долгосрочный, парный, практико-ориентированный, исследовательский	Сборник заданий, презентация, брошюра, сайт

2.3 Реализация метода проектов во внеурочной деятельности на примере проекта «Пифагор на ОГЭ»

Организация проектной деятельности осуществляется не только во время уроков, но и во время внеурочной деятельности. Внеурочная деятельность в школе может быть реализована, как факультативные занятия, кружки, элективные курсы и тому подобное. Использование метода проектов во время внеурочной деятельности предоставляет более широкие возможности для овладения различными математическими знаниями, развития творческих способностей и самостоятельной деятельности учащихся. В данном параграфе нами будет рассмотрена реализация проектной деятельности на примере проекта «Пифагор на ОГЭ», ориентированного на учащихся 8-9 класса. Осуществление данного проекта во время уроков невозможно, так как по календарно-тематическому планированию на изучение темы «Теорема Пифагора» в 8 классе выделяется 5 часов, а в 9 классе она вовсе не изучается.

Проект «Пифагор на ОГЭ» направлен на знакомство с различными способами доказательства теоремы Пифагора, её правильной формулировкой, а также в данном проекте приведены различный типы задач, встречающихся на экзамене по математике в 9 классе, для решения, которых необходимо воспользоваться теоремой Пифагора.

Как было сказано ранее, реализацию проектной деятельности целесообразно разделять на четыре основных этапа: планирование, реализация, презентация и оценка проектной деятельности. Рассмотрим методику работы над проектом на каждом из этих этапов.

1. Планирование. В первую очередь на данном этапе, осуществлялось знакомство учащихся с сущность проектной деятельности, этапами работы над проектом и критериями его оценивания. После чего учащимся 9 класса предлагалось выполнить проект «Пифагор на ОГЭ». Данная тема выбрана не случайно, так как в контрольно-измерительных материалах (далее – КИМ) по математике неоднократно встречаются задачи, решение которых связано с применением теоремы Пифагора.

Исходя из темы проекта, учащимся было предложено выполнить следующее проектное задание: «Теорема Пифагора – теорема, которая утверждает, что в любом прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов. Простое равенство, доказательство которого интересовало ученых многие годы».

После того как было проанализировано проектное задание, учащиеся попытались выявить проблемную ситуацию и кратко описать суть проблемы. Обсуждая проблему проекта и отвечая на наводящие вопросы учителя, учащимися были сформулированы цель и задачи проекта, а также определён срок выполнения проекта.

Класс: 9.

Тип проекта: групповой, творческий, исследовательский.

Цель проекта: изучить ряд доказательств теоремы Пифагора и показать ее значимость при подготовке к ОГЭ по математике.

Задачи проекта:

1) создать информационную модель проекта;

2) сформулировать теорему Пифагора, изучить историю ее возникновения и биографию самого Пифагора;

3) исследовать несколько способов доказательства теоремы;

4) выполнить подборку практических задач, решаемых с помощью теоремы Пифагора на ОГЭ.

5) создать сборник задач с подробным разбором для подготовки к экзамену по математике в 9 классе.

Продолжительность проекта: в течение трех недель.

Предметно-содержательная область: математика.

Для реализации цели и задач данного проекта, перед этапом реализации, учащиеся поделились на четыре подгруппы, учитывая свои способности и интересы:

– первая подгруппа занималась изучением истории возникновения теоремы и знакомилась с биографией самого Пифагора;

– вторая подгруппа исследовала различные способы доказательства теоремы;

– третья подгруппа осуществляла поиск и решение задач в контрольно-измерительных материалах по математике;

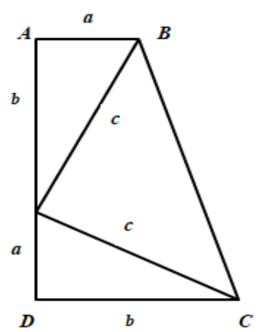
– четвертая подгруппа занималась сбором результатов работы каждой подгруппы и оформляла результат в единое целое.

В каждой подгруппе был составлен план выполнения поставленной задачи, а также сроки. Тем самым проявив самостоятельность и умение планировать свои действия в зависимости от задачи, которую необходимо выполнить.

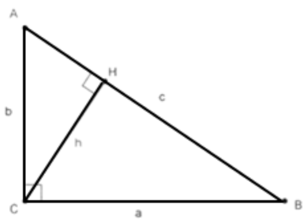
2. Реализация. На данном этапе учащиеся первой подгруппы приступили к сбору интересных фактов из жизни Пифагора, а также выяснили, что сам Пифагор не являлся первооткрывателем теоремы.

Вторая подгруппа для выполнения своей задачи на этапе реализации решила разделить обязанности между собой. Каждый из учащихся, входящих в эту подгруппу, рассматривал одно из доказательств теоремы Пифагора. Но так как различных доказательств теоремы Пифагора насчитывается не менее 400, посоветовавшись друг с другом и учителем, учащиеся выбрали несколько, на их взгляд самых интересных (Таблица 5).

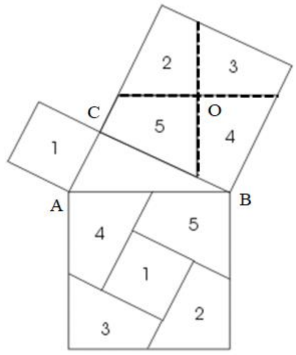
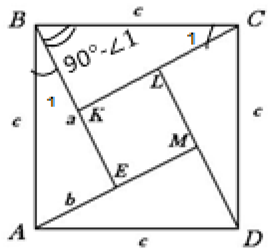
Таблица 5 – Способы доказательства теоремы Пифагора

Способ доказательства теоремы	Доказательство теоремы	Рисунок
1	*2*	*3*
Доказательство Д. А. Гарфилда	1. Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого (рисунок 3). Получим трапецию. 2. Рассмотрим получившуюся прямоугольную трапецию *ABCD* и найдем ее площадь по формуле (1): $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}(a+b)$ (1)	 Рисунок 3 – Трапеция *ABCD*

Продолжение таблицы 5

1	2	3
	3. Найдем площадь прямоугольной трапеции *ABCD*, как сумму площадей полученных прямоугольных треугольников: $$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot c = = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2.$$ 4. Приравняем данные выражения, получаем: $$\frac{a+b}{2}(a+b) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2;$$ $$\frac{1}{2}(a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2;$$ $$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a \cdot b + c^2;$$ $$a^2 + b^2 = c^2.$$	
Доказательство с использованием свойств подобия треугольников	1. Проведем высоту *CH* в прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* (рисунок 4). 2. Рассмотрим Δ ABC и Δ ACH: 1) $\angle A -$ общий; 2) $\angle C = \angle H = 90°$. Значит, Δ ABC ~ Δ ACH по 2 признаку подобия треугольников. Аналогично $\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBH$. 2. Пусть *BC* = *a*, *AC* = *b*, *AB* = *c*, тогда из подобия треугольников получаем: $$\frac{b}{c} = \frac{AH}{b} \to b^2 = c \cdot AH;$$ $$\frac{a}{c} = \frac{HB}{a} \to a^2 = c \cdot HB.$$ Сложим, правые и левые части: $$a^2 + b^2 = c \cdot HB + c \cdot AH;$$ $$a^2 + b^2 = c(HB + AH);$$ $$a^2 + b^2 = c \cdot AB;$$ $$a^2 + b^2 = c \cdot c;$$ $$a^2 + b^2 = c^2.$$	 Рисунок 4 – Δ *ABC*
Доказательство Перегаля («колесо с лопастями»)	Доказательство основано на разрезании квадратов, построенных на катетах, на фигуры, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе (рисунок 5):	

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*
	1. Построим квадраты на катетах прямоугольного треугольника *ABC*. 2. Точка *O* – центр квадрата, построенного на большем катете $\Delta\,ABC$. Через точку *O* проведем прямую параллельную гипотенузе треугольника и прямую, перпендикулярную ей (пунктирные линии). 3. Пронумеруем полученные многоугольники и разрежем их на части. 4. Построим квадрат на гипотенузе. 5. Полученные части многоугольников, укладываем на квадрат, построенный на гипотенузе. Получим, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.	 Рисунок 5 – Рисунок к доказательству Перегаля
Доказательство Бхаскары (старейшее доказательство)	1. Построим квадрат *ABCD*, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника $\Delta\,AEB$ (рисунок 6). $AB = c, BE = a, AE = b.$ 2. Опустим $CK \perp BE, DL \perp CK,$ $AM \perp DL.$ 3. Рассмотрим $\Delta\,AEB$ и $\Delta\,BKC$. Они равны по гипотенузе и острому углу: 1) *AB* = *BC* (по построению); 2) $\angle\,ABE = \angle\,BCK$ (Обозначим $\angle\,ABE = \angle\,1,\ \angle\,1 +$ $+\angle\,KBC = 90°$ – так как ABCD квадрат $\rightarrow \angle\,KBC = 90° - \angle\,1$. $\angle\,KBC + \angle\,BCK = 90°$ – по свойству острых углов прямоугольного треугольника $\rightarrow \angle$ BCK $= 90° - \angle$ KBC $=$ $= 90° - 90° + \angle\,1 = \angle\,1$). Аналогично, $\Delta\,AEB = \Delta\,CLD,\ \Delta\,AEB =$ $= \Delta\,DMA$. Значит, *KE* = *KL* = *LM* = *ME* = = *a*-*b*. 4. Найдем площадь квадрата *ABCD* по формулам: $$S = c \cdot c = c^2;$$ $$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a - b)^2.$$ 5. Приравнивая правые стороны равенств, получаем:	 Рисунок 6 – Квадрат *ABCD*

Продолжение таблицы 5

1	*2*	*3*
	$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a - b)^2;$ $c^2 = 2 \cdot a \cdot b + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2;$ $c^2 = a^2 + b^2.$	

Третья подгруппа для реализации своей задачи, совместно с учителем, провела анализ тем и заданий, представленных в контрольно-измерительных материалах ОГЭ. В ходе анализа был сделан вывод, что по большей части задачи, для решения которых необходимо применить теорему Пифагора, встречаются в следующих заданиях:

I часть.

1. Задание № 15. Треугольники, четырёхугольники, многоугольники и их элементы.

2. Задание № 16. Окружность, круг и их элементы.

II часть.

3. Задание № 23. Геометрическая задача на вычисление.

После выделения тем и номера заданий, учащиеся приступили к отбору и решению задач для тренажёра. Учащиеся увлеченно решали задачи, при возникновении затруднений обращались к учителю. В ходе работы на этапе реализации, получился тренажёр, включающий в себя задачи разного уровня сложности, направленные на отработку применения теоремы Пифагора для их решения.

Задание № 15:

Задача 1

В прямоугольном треугольнике *ABC*, с прямым углом *C*, катеты равны 75 и 100. Найдите высоту *CD*, проведенную к гипотенузе (рисунок 7).

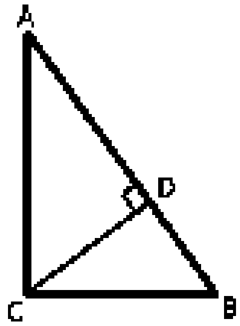


Рисунок 7 – Треугольник *ABC* к задаче 1

Решение.

1 способ: Так как треугольник *ABC* прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы *AB* данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = (100)^2 + (75)^2;$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625;$$

$$AB = 125.$$

Вычислим площадь прямоугольно треугольника, применяя следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 = 3750$$

и

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD\ .$$

В последнюю формулу подставим найденное ранее значение площади:

$$3750 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot CD \to CD = 60.$$

Ответ: 60.

2 способ: Так как треугольник *ABC* прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы *AB* данного треугольника:

$$\mathrm{AB}^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$\mathrm{AB}^2 = (100)^2 + (75)^2;$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625;$$

$$AB = 125.$$

Рассмотрим $\Delta\, ACD$ и Δ ACB:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle\, ADC = \angle\, ACD = 90°; \\ 2)\ \angle\, CAD - \text{общий}. \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow\quad \Delta\, ACD \sim \Delta\, ACB$ по первому признаку подобия треугольников.

Тогда получаем:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{CB} \rightarrow \frac{100}{125} = \frac{CD}{75} \rightarrow CD = 60.$$

Ответ: 60.

Задача 2

Дан треугольник ABC, угол C равен 90°, сторона AC равна 18 см, $\mathrm{tg}A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите сторону AB (рисунок 8).

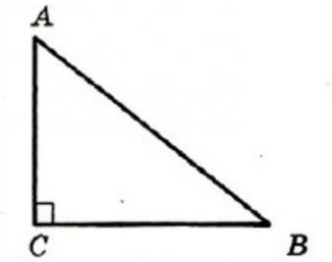


Рисунок 8 – Треугольник ABC к задаче 2

Решение.

По определению тангенса:

$$\mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} \rightarrow BC = \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot 18 = 12\sqrt{10}.$$

Треугольник ABC прямоугольный, применяя теорему Пифагора получим:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2;$$

$$AB^2 = 1440 + 324 = 1764;$$

$$AB = 42.$$

Ответ: 42.

Задание № 16:

Задача 1

Вокруг треугольника *ABC* описана окружность, центр окружности лежит на стороне *AB*. Диаметр окружности равен 13. Найдите *AC*, если *BC* = 5.

Решение.

Если центр окружности лежит на стороне треугольника, то угол, лежащий напротив этой стороны – прямой. Значит, угол *C* равен 90°, а треугольник *ABC* прямоугольный.

Применяя теорему Пифагора, найдем *AC*:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2;$$

$$169 = 25 + AC^2;$$

$$AC^2 = 144;$$

$$AC = 12.$$

Ответ:12.

Задание № 23:

Задача 1

Периметр прямоугольника *ABCD* равен 72, а диагональ *AC* равна 27. Найдите площадь *ABCD*.

Решение.

Предположим, что сторона прямоугольника равна x, тогда вторая сторона равна (36 – *x*).

Рассмотрим треугольник *ABC*, угол *B* равен 90°, применяя теорему Пифагора к данному треугольнику, получим:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2;$$

$$27^2 = x^2 + (36 - x)^2;$$

$$27^2 = x^2 + 36^2 - 72 \cdot x + x^2;$$

$$2x^2 - 72 \cdot x + 567 = 0;$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 5184 - 4 \cdot 2 \cdot 567 = 648;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{72 \pm \sqrt{648}}{4}.$$

Если $x = \frac{72+\sqrt{648}}{4}$, то другая сторона равна $36 - \frac{72+\sqrt{648}}{4} = \frac{72-\sqrt{648}}{4}$. Тогда площадь прямоугольника:

$$S = a \cdot b = \frac{72+\sqrt{648}}{4} \cdot \frac{72-\sqrt{648}}{4} = \frac{1}{16} \cdot (72^2 - 648) = 283{,}5.$$

Ответ: 283,5.

Задача 2

Дана трапеция *ABCD*, биссектрисы углов *A* и *B* пересекаются в точке *K* (рисунок 9). Найдите *AB*, если *AK*=30, *BK*=16.

Решение.

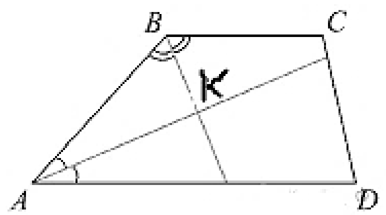


Рисунок 9 – Трапеция *ABCD*

Сумма односторонних углов трапеции *ABCD* равна 180°, значит, $\angle ABK + \angle BAK = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD) = 90°$.

Тогда, треугольник *ABK* прямоугольный, $\angle K = 90°$.По теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AK^2 + BK^2;$$

$$AB^2 = 30^2 + 16^2 = 1156 \rightarrow AB = 34.$$

Ответ:34.

Полный список задач представлен в Приложении Б.

Четвертая подгруппа на данном этапе помогала другим подгруппам, а также определялась с формой представления проекта. В ходе обсуждения со всеми участниками проекта и учителем, было принято решение представлять результаты в виде сборника заданий, созданного с помощью MS Word и презентации.

3. *Презентация.* На данном этапе учащиеся демонстрировали получившийся проект. Главная задача этого этапа заключалась в умение осуществить анализ проделанной работы. Учащимся необходимо вспомнить ход своих действий для решения поставленной задачи, выявить трудности, которые возникали в ходе выполнения работы, а также методы устранения этих трудностей.

4. *Оценка проектной деятельности.* В ходе этого этапа каждый учащийся оценивал результат своей деятельности в ходе выполнения работы над проектом, а также учитель подводил итоги и оценивал работу подгруппы. Исходя из этого, был сделан вывод, что все учащиеся в той или иной мере смогли овладеть навыками реализации проектной деятельности. Полный текст проекта «Пифагор на ОГЭ» представлен в Приложениях А, Б.

2.4 Методическое сопровождение проектной деятельности в обучении математике

В качестве методической поддержки был разработан сайт https://sites.google.com с описанием технологии использования метода проектов, примерными темами проектов для 7-9 классов, готовыми мини-проектами по геометрии. А также на данном сайте размещен готовый проект «Пифагор на ОГЭ» с поэтапным выполнением и подборка заданий для подготовки к ОГЭ, при решении которых необходимо воспользоваться теоремой Пифагора.

В верхней части сайта располагается меню, состоящее из вкладок «Главная страница», «Метод проектов», «Пифагор на ОГЭ», «Тема проектов», «Готовые мини-проектов» (рисунок 10).

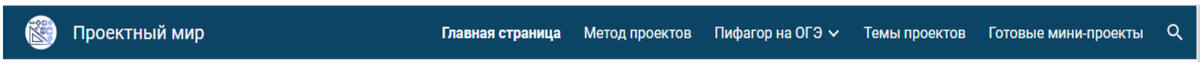


Рисунок 10 – Панель меню

В разделе «Метод проектов» находится теоретический материал о понятии метода проектов, классификации проектов, этапах работы над проектом, а также описывается внедрение метода проектов в образовательный процесс, актуальность использования данного метода на уроках математики в школе (рисунки 11.а-11.в).

Рисунок 11.а – Понятие метода проектов

Рисунок 11.б – Применение метода проектов на уроках математики

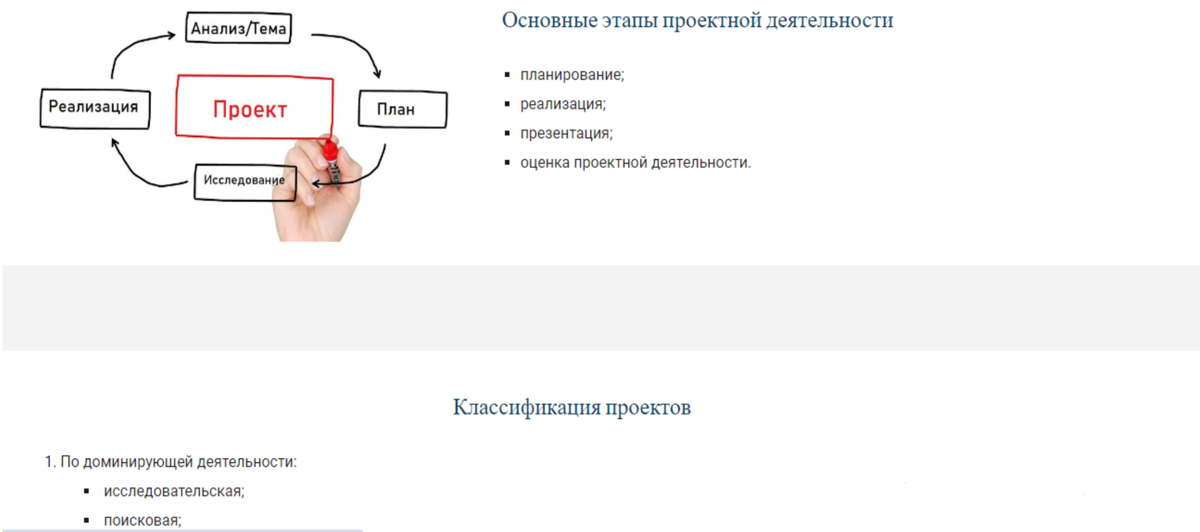


Рисунок 11.в – Этапы проектной деятельности и классификация проектов

Следующий раздел «Пифагор на ОГЭ» содержит поэтапную разработку проекта «Пифагор на ОГЭ», сам проект (рисунок 12.а), а также подборку заданий № 15, № 16, № 23 из материалов ОГЭ по математике (рисунок 12.б). Нажав на кнопку «открыть», можно перейти на страницу с подборками задач, для решения которых необходимо воспользоваться теоремой Пифагора, например «Задание № 15» (рисунок 12.в). Данная страница состоит из справочного материала и подборки задач с решением. Чтобы увидеть решение задачи, необходимо нажать на кнопку « Решение», например «Решение задачи 1» (рисунок 12.г).

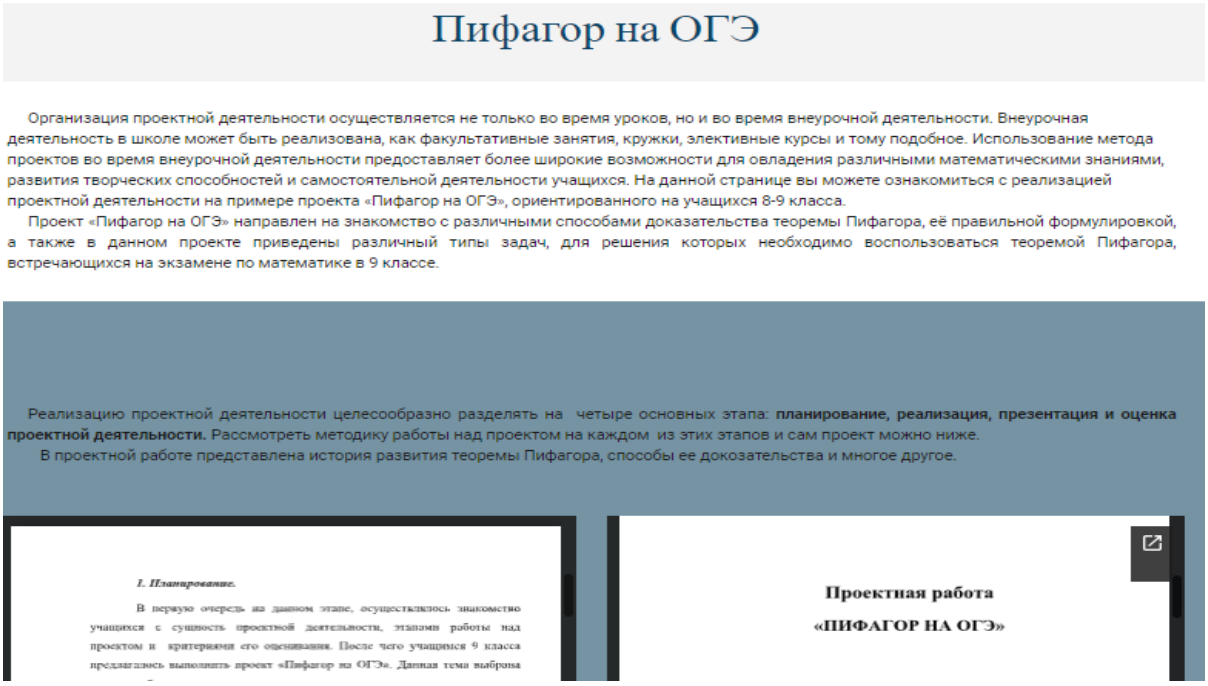


Рисунок 12.а – Проект «Пифагор на ОГЭ»

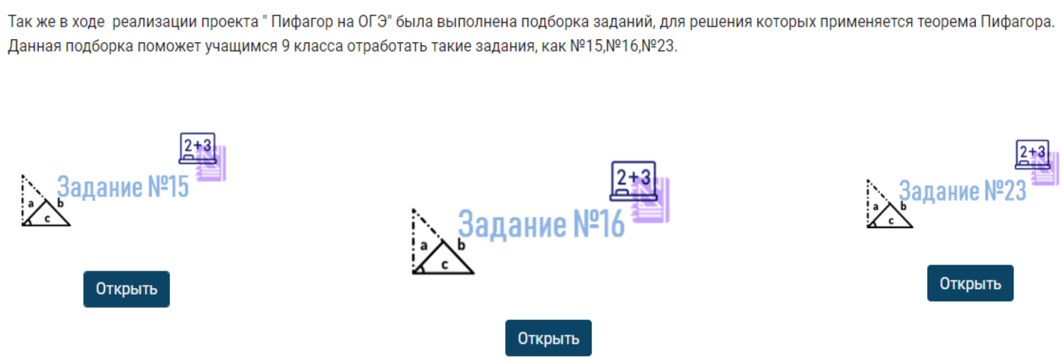


Рисунок 12.б – Подборка заданий ОГЭ

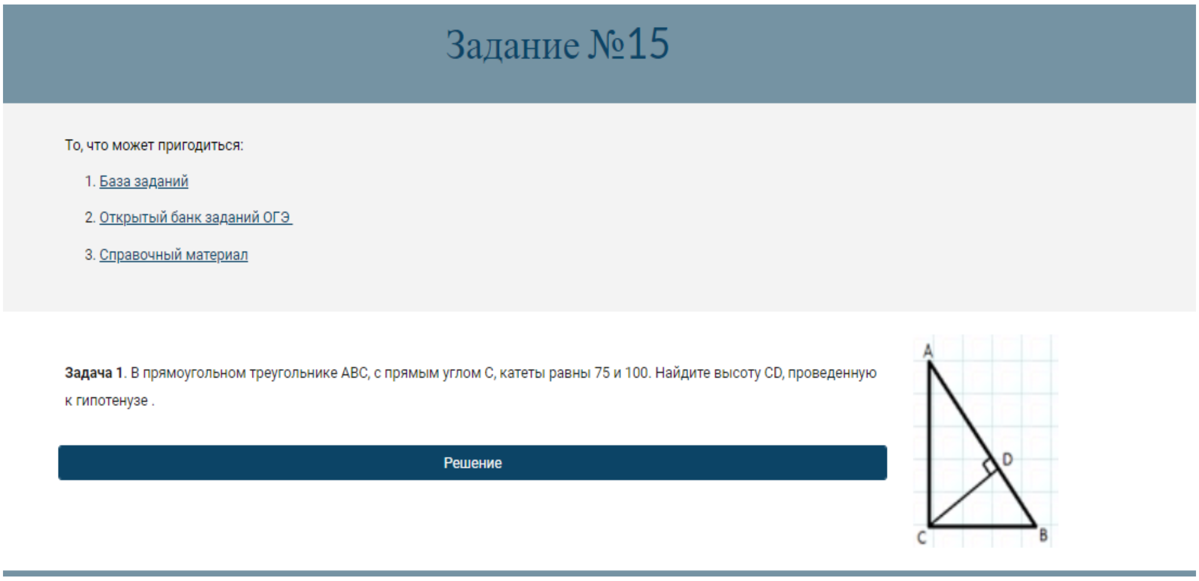
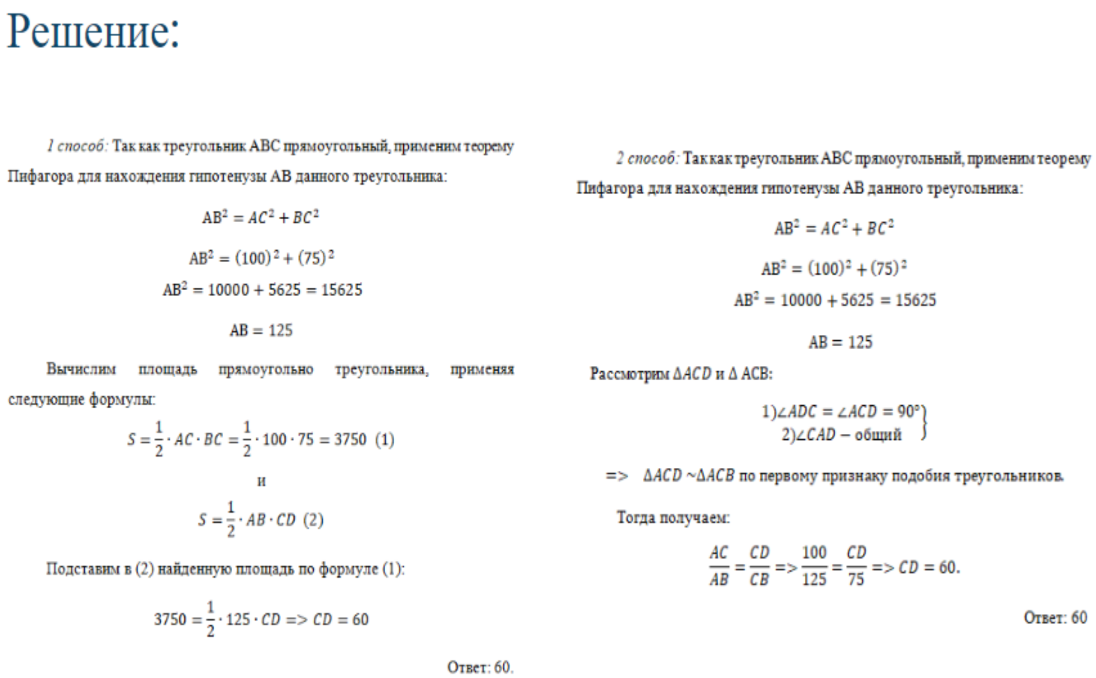


Рисунок 12.в – Страница с заданием № 15



Решение:

1 способ: Так как треугольник ABC прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы AB данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (100)^2 + (75)^2$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625$$

$$AB = 125$$

Вычислим площадь прямоугольно треугольника, применяя следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 = 3750 \quad (1)$$

и

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \quad (2)$$

Подставим в (2) найденную площадь по формуле (1):

$$3750 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot CD \Rightarrow CD = 60$$

Ответ: 60.

2 способ: Так как треугольник ABC прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы AB данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (100)^2 + (75)^2$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625$$

$$AB = 125$$

Рассмотрим ΔACD и Δ ACB:

$$\left.\begin{matrix} 1) \angle ADC = \angle ACD = 90^\circ \\ 2) \angle CAD - \text{общий} \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ $\Delta ACD \sim \Delta ACB$ по первому признаку подобия треугольников.

Тогда получаем:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{100}{125} = \frac{CD}{75} \Rightarrow CD = 60.$$

Ответ: 60

Рисунок 12.г – Решение задачи 1

Разделы «Темы проектов» и «Готовые мини-проекты» предназначены учителю, в них находятся примерная тематика проектов (рисунок 13) и разработанные проекты по геометрии (рисунок 14).

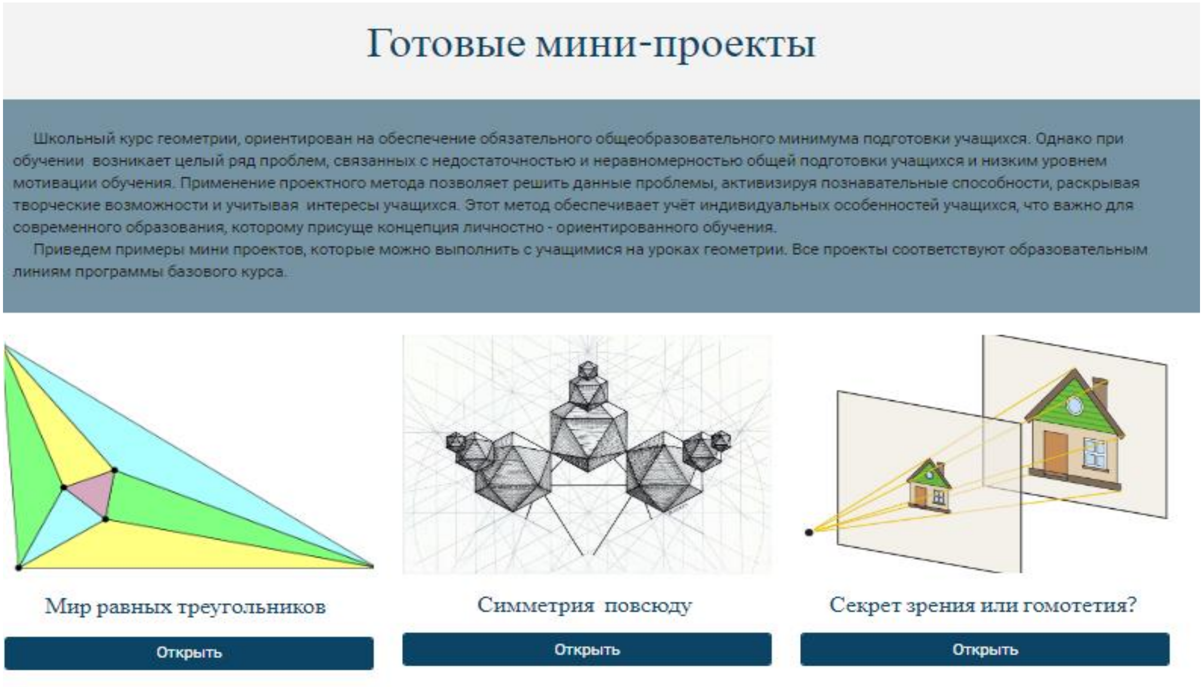
Проектный мир   Главная страница   Метод проектов   Пифагор на ОГЭ   Дополнительно

Примерная тематика проектов по УМК Л.С.Атанасяна

Новая таблица : 1

№	Тема проекта	Тип проекта	Возможный продукт
7 класс			
1	Необычные геометрические фигуры	Творческий, поисковый, мини-проект	Альбом, презентация, фильм, плакат
2	В мире треугольников	Творческий, исследовательский, мини-проект	Презентация
3	Биссектриса — знакомая и не очень	Исследовательский, краткосрочный	Презентация, сборник заданий

Рисунок 13 – Примерная тематика проектов по УМК Л.С. Атанасяна



Готовые мини-проекты

Школьный курс геометрии, ориентирован на обеспечение обязательного общеобразовательного минимума подготовки учащихся. Однако при обучении возникает целый ряд проблем, связанных с недостаточностью и неравномерностью общей подготовки учащихся и низким уровнем мотивации обучения. Применение проектного метода позволяет решить данные проблемы, активизируя познавательные способности, раскрывая творческие возможности и учитывая интересы учащихся. Этот метод обеспечивает учёт индивидуальных особенностей учащихся, что важно для современного образования, которому присуще концепция личностно - ориентированного обучения.

Приведем примеры мини проектов, которые можно выполнить с учащимися на уроках геометрии. Все проекты соответствуют образовательным линиям программы базового курса.

Мир равных треугольников — Открыть

Симметрия повсюду — Открыть

Секрет зрения или гомотетия? — Открыть

Рисунок 14 – Готовые мини-проекты

Нажав на кнопку открыть, можно перейти на страницу с разработанным проектом, например «Мир равных треугольников» (рисунок 15). На странице указаны типы проекта, цели и задачи проекта, продолжительность, предметно-содержательная область, предполагаемый продукт проектной деятельности и ход проекта.

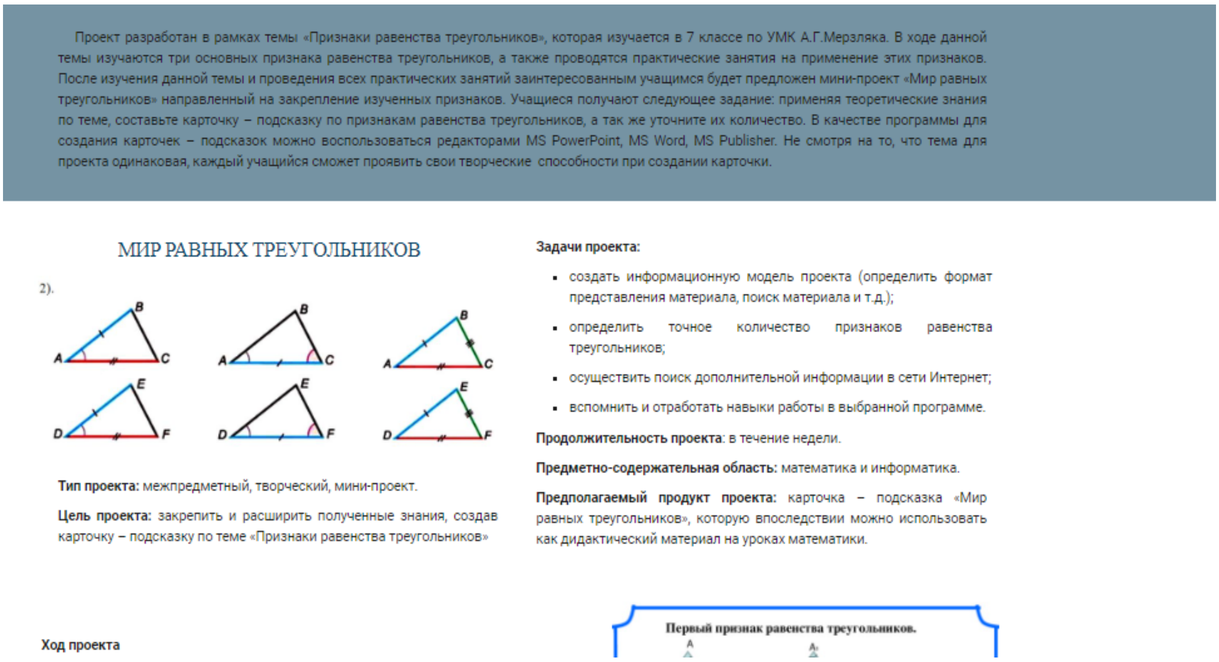


Рисунок 15 – Страница проекта «Мир равных треугольников»

Выводы по главе 2

В результате нашего исследования можно сделать вывод о том, что необходимость применения метода проектов на уроках математики обусловлена тенденциями в образовательной системе к более полноценному развитию личности. Метод проектов реализует принципы деятельностного и проблемного обучения, а также помогает в решении нетиповых задач. Данная технология является эффективной, так как значительно повышает уровень компьютерной грамотности, внутреннюю мотивацию учащихся, уровень самостоятельности школьников, помогает развить навыки самопрезентации.

Работа над проектом состоит из последовательно идущих этапов, в основе которых лежит проблемная ситуация, которую впоследствии и нужно решить учащимся. В современной педагогике нет единой классификации этапов учебного проекта, но если обобщить классификации различных авторов, то можно выделить основные этапы проекта: планирование, реализация, презентация и оценка проектной деятельности.

Метод проектов вовлекает ученика в деятельность, где целью является получение интересного результата работы над проектом. В данной главе предложена реализация метода проекта при изучении тем «Геометрические преобразования» и «Признаки равенства треугольников», а также приведена примерная тематика проектов по геометрии. Выбор темы проектов учитывает предпочтения и интересы учащихся, план школьной программы не только предмета математика, но и других предметов. Кроме этого во второй главе на примере проекта «Пифагор на ОГЭ» подробно рассмотрены этапы работы над проектом. Работая над этим проектом, учащиеся познакомились с историей появления теоремы Пифагора, с её правильной формулировкой. Частично учащиеся познакомились с различными способами доказательства теоремы, а так же выполнили подборку заданий для сборника задач, для решения которых требуется воспользоваться теоремой Пифагора.

Также в качестве методической поддержки был разработан сайт, которым могут воспользоваться как учащиеся, так и учитель. Данный сайт содержит информацию о методе проектов, об особенностях применения метода проектов на уроках математики, примерную тематику проектов для 7-9 классов, а так же готовые мини-проекты. Кроме того, на сайте содержится подборка заданий № 15, № 16, № 23 из ОГЭ по математике с решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения данной работы была обоснована актуальность проведенного исследования, заключающаяся, в применении нетрадиционной формы проведения уроков – метод проектов, который даёт возможность повысить интерес учащихся к изучению предмета математика, развить у учащихся неординарные творческие способности.

В рамках первой главы, был изучен теоретический материал. В результате анализа учебной литературы было установлено, что метод проектов возник еще во второй половине XIX века. Его основателем является Джон Дьюи. В России же метод проектов зародился благодаря С. Т. Шацкому, но в советское время не получил особого распространения в школах, а в 1931 году постановление ЦК ВКП (б) метод проектов был осужден и с тех пор не использовался в школах. В ходе исследования теоретического материала, мы выяснили, что в современной системе образования метод проектов активно возрождается и на сегодняшний день в мире существует много исследователей, которые занимаются вопросами проектного обучения. Поэтому нет единого взгляда на понятие «метод проектов» и классификацию проектов, но обобщив все определения можно сделать вывод, что метод проектов – это самостоятельное решение какой-либо проблемы с обязательной презентацией результатов своей работы.

Во второй главе мы рассмотрели методику применения проектной деятельности при обучении математики, выясняли основные этапы работы над проектом. И пришли к выводу, что применение метода проектов на уроках математики ведёт к усилению мотивации к изучению предмета, повышению уровня усвоения материала, а так же к развитию творческих способностей учащихся и решению нетипичных задач. Кроме этого, во втором параграфе мы рассмотрели реализацию метода проектов при изучении различных тем, на примере нескольких проектов. В результате выполнения, которых учащиеся смогут проявить свои творческие способности, углубить свои знания в различных сферах, интересующих их, а так же более заинтересованные учащиеся смогут познакомиться с интересными фактами мира математика. А так же разработали сайт с методическими рекомендациями по использованию метода проектов на уроках математики, который содержит так же задачи, встречающиеся в КИМах на ОГЭ по математике, для решения которых необходимо применить теорему Пифагора.

Таким образом, в данной выпускной квалификационной работе были решены все поставленные задачи. Была достигнута цель исследования и доказана гипотеза исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Бахтиярова, Е. М.** Метод проектов и индивидуальные программы в продуктивном обучении / Е. М. Бахтиярова // Школьные технологии. – 2001. – № 2. – С.108–115.

2. **Бим-Бад, Б. М.** Педагогический Энциклопедический Словарь / Главный редактор Б. М. Бим-Бад. – Москва: Большая Российская Энциклопедия, 2002. – 528 с. – ISBN 978-5-85270-230-2.

3. **Брыкова, О. В.** Проектная деятельность в учебном процессе / О. В. Брыкова, Т. В. Громова. – Москва: Чистые пруды, 2006. – 32 с.

4. **Горбунова, Н. В.** Методика организации работы над проектом / Н. В. Горбунова, Л. В. Кочкина // Образование в современной школе. – 2000. –№ 4. – С. 21–25.

5. **Горобец, Л. Н.** «Метод проектов» как педагогическая технология / Л. Н. Горобец // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология. – 2012. – № 2 – С.122–128.

6. **Гугкаева, И. Т.** Метод проектов как педагогическая технология / И. Т. Гугкаева // Сибирский педагогический журнал. – 2013. – № 2. – С.144-146.

7. **Килпатрик, У. Х.** Метод проектов. Применение целевой установки в педагогическом процессе // Специальное приложение к журналу «Лицейское и гимназическое образование». – 2003. – № 4 – С.6–8.

8. **Мерзляк, А. Г.** Геометрия: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2015. – 192 с. – ISBN 978-5-360-05508-2.

9. **Мерзляк, А. Г.** Геометрия: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва: Вентана-Граф, 2014. – 240 с. – ISBN 978-5-360-

05311-8.

10. Новые педагогические и информационные технологии в системеобразования : учебное пособие для студентов педагогических вузов и системы повышения квалификации педагогических кадров / Под редакцией Е. С. Полат. – Москва: Издательский центр «Академия», 2002 – 272 с. – ISBN 5-7695-0811-6.

11. **Ожегов, С. И.** Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова. – Москва: АЗЪ , 1997. – С.1524–1525. – ISBN 5-89285-003-0.

12. **Пахомова, Н. Ю.** Метод учебного проекта в образовательном учреждении: Пособие для учителей и студентов педагогических вузов. / Н. Ю. Пахомова – Москва: АРКТИ, 2005. – 112 с. – ISBN 5-89415-268-2.

13. **Полат, Е. С.** Современные и педагогические технологии в системе образования: учебное пособие для студентов высшего учебного заведений / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина. – Москва: Академия, 2010. – 368 с. – ISBN 978-5-7695- 7057-5.

14. **Ромашко, И. В.** Проектная деятельность на уроках математики / И. В. Ромашко // Образование в современной школе. – 2004. – № 3. – С. 46–49.

15. **Селевко, Г. К.** Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х томах. Том 1. – Москва: Народное образование, 2005. – 818 с. – ISBN 978-5-91447-198-6.

16. **Сиденко, А. С.** Метод проектов: история и практика применения / А. С. Сиденко // Завуч. – 2003. – № 6.

17. **Ступницкая, М. А.** Что такое учебный проект? / М. А. Ступницкая. – Москва: Первое сентября, 2010. – 40 с.

18. **Тарасова, И. П.** Метод проектов в образовательном учреждении // Профессиональное образование: приложение к журналу. – 2004. – № 12.

19. **Тимофеева, Н. В.** Целесообразность перехода к методам проектного обучения / Н. В. Тимофеева // Образование. Наука. Культура. – 2016. – № 1. – С.545–548.

20. **Хуторской, А. В.** Современная дидактика: учебник для вузов / А. В. Хуторской. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 544 с. – ISBN 5-318-00077-0.

21. **Шадриков, В. Д.** Индивидуализация содержания образования / В. Д. Шадриков // Школьные технологии. – 2000. – № 2. – С. 53–67.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Титульный лист проекта «Пифагор на ОГЭ»

Проектная работа

«ПИФАГОР НА ОГЭ»

2022 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Проект «Пифагор на ОГЭ»

Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них – это теорема Пифагора, а другое деление отрезка в среднем и крайнем отношении. Первое можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень»

Иоганн Кеплер

Введение

На уроках геометрии мы познакомились с одной из важнейших теорем геометрии для прямоугольного треугольника, известной с древних времен – теоремой Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Кратко познакомились с историей этой теоремы, рассмотрели одно из ее доказательств, также узнали, что существуют и другие способы доказательства.

Трудно найти человека, для которого имя Пифагора не ассоциировалось бы с его теоремой. Почти у каждого сохранились воспоминания о «пифагоровых штанах» – квадрате на гипотенузе, равновеликом двум квадратам на катетах.

Причина такой популярности теоремы Пифагора очевидна: простота, красота и широкая значимость. Однако теорема Пифагора проста, но не так очевидна. Это сочетание двух противоречивых начал и придает ей особую притягательную силу, делает ее красивой. Кроме этого, теорема Пифагора имеет огромное значение: она применяется в геометрии буквально на каждом шагу, и тот факт, что существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и так далее) свидетельствует о гигантском числе ее конкретных реализаций. Зная теорему Пифагора, можно находить ее новые применения и способы доказательств.

С одной стороны – теорема Пифагора изучается и доказывается в школьном курсе геометрии, а с другой стороны – школьного материала явно недостаточно для того, чтобы показать ее практическую значимость в различных, в том числе и современных сферах деятельности человека.

Цель работы: изучить ряд доказательств теоремы Пифагора и показать ее значимость при подготовке к ОГЭ по математике.

Задачи проекта:

1) создать информационную модель проекта;

2) сформулировать теорему Пифагора, изучить историю ее возникновения и биографию самого Пифагора;

3) исследовать несколько способов доказательства теоремы;

4) выполнить подборку практических задач, решаемых с помощью теоремы Пифагора на ОГЭ;

5) создать сборник задач с подробным разбором для подготовки к экзамену по математике в 9 классе.

1. Биография Пифагора

Историю жизни Пифагора трудно отделить от легенд, представляющих его в качестве совершенного мудреца и великого учёного, посвящённого во все таинства греков и варваров. Ещё Геродот называл его «величайшим эллинским мудрецом». Мы не можем знать достоверно историю Пифагора, поскольку самые ранние известные источники об учении Пифагора появились лишь 200 лет спустя после его смерти. Сам Пифагор не оставил сочинений, и все сведения о нём и его учении основываются на трудах его последователей, не всегда беспристрастных.

Пифагор родился в Сидоне примерно в 570 до нашей эры. С ранних лет он обнаружил необыкновенную одарённость. Родителями Пифагора были Мнесарх и Партенида с острова Самос. По одной из версий Мнесарх был камнерезом, по другой – он был богатым купцом из Тира, получившим самосское гражданство за раздачу хлеба в неурожайный год. Мать Пифагора Партенида происходила из знатного рода Анкея, основателя греческой колонии на Самосе.

Рождение ребёнка будто бы предсказала Пифия в Дельфах, потому Пифагор и получил своё имя, которое значит «тот, о ком объявила Пифия». В частности, Пифия сообщила Мнесарху, что Пифагор принесёт столько пользы и добра людям, сколько не приносил и не принесёт в будущем никто другой.

По словам античных авторов, Пифагор встретился чуть ли не со всеми известными мудрецами той эпохи, греками, персами, халдеями, египтянами, впитал в себя всё накопленное человечеством знание.

Античный философ Ямвлих пишет, что Пифагор в 18-летнем возрасте покинул родной остров и, объехав мудрецов на разных краях света, добрался до Египта, где пробыл 22 года, пока его не увёл в Вавилон в числе пленников персидский царь Камбис. Нахождение в плену принесло пользу пытливому уму начинающего математика, ему было чему поучиться. Ведь в те годы математика в Вавилоне была более развитой, чем в Египте. Наиболее поразительными были успехи алгебры. Вавилоняне изобрели и применяли при счёте позиционную систему счисления, умели решать линейные, квадратные и некоторые виды кубических уравнений. Двенадцать лет он провел за изучением математики, геометрии и магии. И, возможно, именно вавилонская геометрия причастна к доказательству соотношения сторон треугольника и истории открытия теоремы. У Пифагора было для этого достаточно полученных знаний и времени. Но, что это произошло в Вавилоне, документального подтверждения или опровержения тому нет.

Итак, спустя двенадцать лет, Пифагор, наконец, смог вернуться на Самос в 56-летнем возрасте, где соотечественники признали его мудрым человеком.

Ямвлих сообщает: «Его философия распространилась, вся Эллада стала восхищаться им, и лучшие и мудрейшие мужи приезжали к нему на Самос, желая слушать его учение. Сограждане, однако, принуждали его участвовать во всех посольствах и общественных делах. Пифагор чувствовал, как тяжело, подчиняясь законам отечества, одновременно заниматься философией, и видел, что все прежние философы прожили жизнь на чужбине. Обдумав всё это, отойдя от общественных дел и, как говорят некоторые, считая недостаточной невысокую оценку самосцами его учения, он уехал в Италию, считая своим отечеством страну, где больше способных к обучению людей».

Так Пифагор поселился в греческой колонии Кротоне в Южной Италии, где нашёл много последователей. Их привлекала не только мистическая философия, которую он убедительно излагал, но и предписываемый им образ жизни с элементами здорового аскетизма и строгой морали. Пифагор проповедовал нравственное облагораживание невежественного народа, достигнуть которого возможно там, где власть принадлежит касте мудрых и знающих людей, и которым народ повинуется в чём-то безоговорочно, как дети родителям, а в остальном сознательно, подчиняясь нравственному авторитету.

Пифагор умело использовал знания, полученные в странствиях по свету. Со временем ученый прекращает выступления в храмах и на улицах. Уже в своем доме Пифагор учил медицине, принципам политической деятельности, астрономии, математике, музыке, этике и многому другому. Из его школы вышли выдающиеся политические и государственные деятели, историки, математики и астрономы. Это был не только учитель, но и исследователь. Исследователями становились и его ученики. Пифагор развил теорию музыки и акустики, создав знаменитую «пифагорейскую гамму» и проведя основополагающие эксперименты по изучению музыкальных тонов: найденные соотношения он выразил на языке математики. В Школе Пифагора впервые высказана догадка о шарообразности Земли. Мысль о том, что движение небесных тел подчиняется определенным математическим соотношениям, идеи «гармонии мира» и «музыки сфер», впоследствии приведшие к революции в астрономии, впервые появились именно в Школе Пифагора. Пифагору традиция приписывает введение слов философия и философ.

Многое сделал ученый и в геометрии. Ему приписывают открытие и доказательство теоремы Пифагора, создание таблицы Пифагора. В школе Пифагора геометрия впервые оформляется в самостоятельную научную дисциплину. Именно Пифагор и его ученики первыми стали изучать геометрию систематически – как теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных рецептов по землемерию.

Прокл так оценивал вклад греческого ученого в геометрию: «Пифагор преобразовал геометрию, придав ей форму свободной науки, рассматривая ее принципы чисто абстрактным образом и исследуя теоремы с нематериальной, интеллектуальной точки зрения. Именно он нашел теорию иррациональных количеств и конструкцию космических тел».

Важнейшей научной заслугой Пифагора считается систематическое введение доказательства в математику, и, прежде всего, в геометрию. Строго говоря, только с этого момента математика и начинает существовать как наука, а не как собрание древнеегипетских и древневавилонских практических рецептов. С рождением же математики зарождается и наука вообще, ибо «ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства» (Леонардо да Винчи).

Заслугой пифагорейцев было выдвижение мысли о количественных закономерностях развития мира, что содействовало развитию математических, физических, астрономических и географических знаний. В основе вещей лежит число, учил Пифагор, познать мир – значит познать управляющие им числа. Изучая числа, пифагорейцы разработали числовые отношения, и нашли их во всех областях человеческой деятельности. Числа и пропорции изучались с тем, чтобы познать и описать душу человека, а познав, управлять процессом переселения душ с конечной целью отправить душу в некое высшее божественное состояние.

Пифагор утверждал, чтобы понять Бога, человек должен познать такие науки как алгебра и геометрия, знать астрономию и понимать музыку. Исследовательская работа сводилась к познанию мистической стороны чисел и философии. Следует отметить, что проповедованные в то время Пифагором принципы, имеют смысл и находят подтверждение и в настоящее время.

В современном мире Пифагор считается великим математиком и космологом древности, однако ранние свидетельства до III в. до нашей эры не упоминают о таких его заслугах. Таким образом, жизнь Пифагора для нас остается неизведанной доподлинно загадкой, его учение полно мистики, но не лишено смысла и актуальности даже в наши дни.

Источники сообщают, что Пифагор прожил 80 или 90 лет. Из этого следует дата смерти 490 до нашей эры или 480 до нашей эры.

2. История теоремы Пифагора

Для нас имя Пифагора связано, прежде всего, с теоремой Пифагора. В настоящее время известно, что эта теорема не была открыта Пифагором.

Однако одни полагают, что именно Пифагор первым дал ее полноценное доказательство, а другие отказывают ему и в этой заслуге. Связанная с именем Пифагора, теорема была известна задолго до рождения великого философа. Так в Египте еще пять тысячелетий назад при строительстве сооружений учитывалось соотношение сторон прямоугольного треугольника. А в вавилонских текстах упоминается о всё том же соотношении сторон прямоугольного треугольника за 1200 лет до рождения Пифагора. Может показаться странным, но исторических фактов доказательства теоремы самим Пифагором нет – ни в архивах, ни в каких-либо других источниках. Некоторые приписывают Пифагору доказательство, которое Евклид приводит в первой книге своих «Начал». С другой стороны, Прокл утверждает, что доказательство в "Началах" принадлежит самому Евклиду.

Возникает вопрос, почему же тогда история гласит, что возникновение этой теоремы связано с Пифагором? Ответ может быть только один – он доказал соотношение сторон в треугольнике. Он сделал то, что века назад не делали те, кто просто пользовался соотношением сторон и гипотенузы, установленным опытным путем. Легенда сообщает даже ближайшие обстоятельства, сопровождавшие открытие теоремы. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам – даже сто быков. Это, однако, противоречит сведениям о моральных и религиозных воззрениях Пифагора. В литературных источниках можно прочитать, что он «запрещал даже убивать животных, а тем более ими кормиться, ибо животные имеют душу, как и мы». В связи с этим более правдоподобной можно считать следующую запись: «… когда он открыл, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза имеет соответствие с катетами, он принес в жертву быка, сделанного из пшеничного теста».

Исторический обзор теоремы Пифагора начнем с древнего Китая**.** Здесь особое внимание привлекает математическая книга Чупей. В этом сочинении так говорится о прямоугольном треугольнике со сторонами 3, 4 и 5: «Если прямой угол разложить на составные части, то линия, соединяющая концы его сторон, будет 5, когда основание есть 3, а высота 4».

Кантор (крупнейший немецкий историк математики) обнаружил на хранящемся в Берлинском музее папирусе записанное египтянами примерно в 2300 году до нашей эры равенство $3^2+4^2=5^2$. По мнению Кантора, гарпедонапты, или «натягиватели веревок», строили прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.

Очень легко можно воспроизвести их способ построения. Возьмем веревку длиною в 12 м с узлами на каждом метре и вобьем колышки в землю, как на рисунке Б.1.

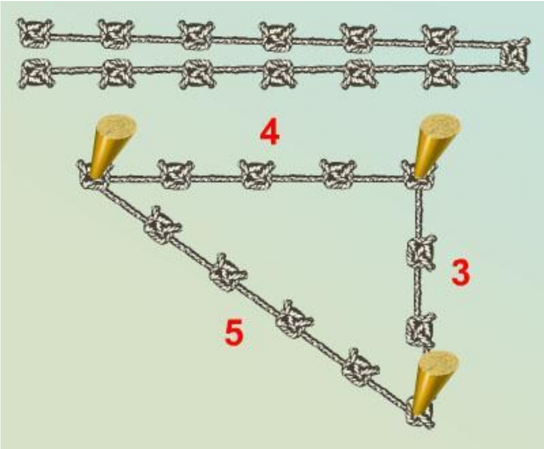


Рисунок Б.1 – Прямоугольный треугольник со сторонами 3,4,5

Прямой угол окажется заключенным между сторонами длиной в 3 и 4 метра.

Несколько больше было известно о теореме Пифагора вавилонянам. В одном тексте, относимом ко времени Хаммураби, то есть к 2000 году до нашей эры, приводится приближенное вычисление гипотенузы прямоугольного треугольника. Отсюда можно сделать вывод, что в

Двуречье умели производить вычисления с прямоугольными треугольниками, по крайней мере, в некоторых случаях.

Геометрия у индусов была тесно связана с культом. Весьма вероятно, что теорема о квадрате гипотенузы была известна в Индии уже около 8 века до н.э. Наряду с чисто ритуальными предписаниями, существуют и сочинения геометрически теологического характера, называемые Сульвасутры. В этих сочинениях, относящихся к 4 или 5 веку до н.э., мы встречаемся с построением прямого угла при помощи треугольника со сторонами 15, 36, 39.

В средние века теорема Пифагора определяла границу, если не наибольших возможных, то, по крайней мере, хороших математических знаний. Характерный чертеж теоремы Пифагора, который ныне иногда превращается школьниками, например, в облаченного в мантию профессора или человека в цилиндре, в те времена нередко употреблялся как символ математики (рисунок Б.2).

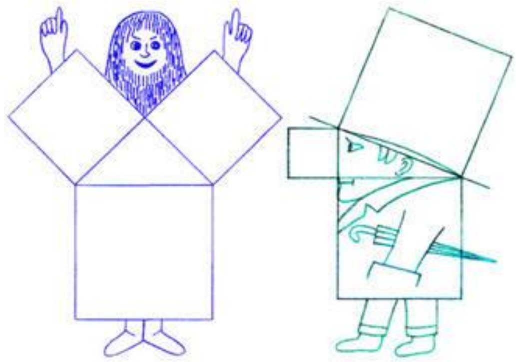


Рисунок Б.2 – Теорема Пифагора

В заключение приведём различные формулировки теоремы Пифагора в переводе с греческого, латинского и немецкого языков.

У Евклида эта теорема гласит (дословный перевод): «В прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах».

Латинский перевод арабского текста: «Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, образованный на стороне, натянутой над прямым углом, равен сумме двух квадратов, образованных на двух сторонах, заключающих прямой угол».

Перевод с немецкого (около 1400 года): «Итак, площадь квадрата, измеренного по длинной стороне, столь же велика, как у двух квадратов, которые измерены по двум сторонам его, примыкающим к прямому углу».

В первом русском переводе евклидовых «Начал», теорема Пифагора изложена так: «В прямоугольном треугольнике квадрат из стороны, противолежащей прямому углу, равен сумме квадратов из сторон, содержащих прямой угол».

Как видим, в разных странах и разных языках существуют различные варианты формулировки знакомой нам теоремы. Созданные в разное время и в разных языках, они отражают суть одной математической закономерности, доказательство которой также имеет множество вариантов.

3. Различные способы доказательства теоремы Пифагора

В средние века ученики считали доказательство теоремы слишком трудным делом. Слабые ученики заучивали теоремы наизусть, без понимания смысла доказательства. В связи с этим они получили прозвище "ослы", потому что теорема Пифагора была для них непреодолимым препятствием, как для осла мост. В средние века ученики придумали шутливый стих на предмет этой теоремы: «Пифагоровы штаны – на все стороны равны, чтобы это доказать, нужно снять и показать».

В наше время известно множество доказательств теоремы Пифагора. А сама теорема даже заслужила место в «Книге рекордов Гиннеса» как получившая наибольшее число доказательств. Американский автор Э. Лумис в книге «Пифагорово предложение», вышедшей в 1940 году, собрал 370 разных доказательств, включая одно, предложенное президентом США Джеймсом Абрамом Гарфилдом.

1. Доказательство Джеймса Абрахама Гарфилда (20-й президент США с марта по сентябрь 1881 года).

На рисунке Б.3 три прямоугольных треугольника составляют трапецию. Поэтому площадь данной фигуры можно находить либо по формуле площади прямоугольной трапеции, либо как сумму площадей трех треугольников.

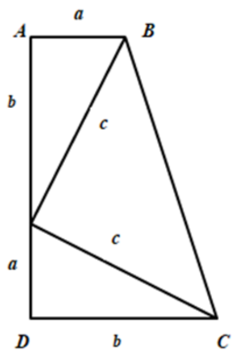


Рисунок Б.3 – Трапеция *ABCD*

Доказательство.

1. Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого. Получим трапецию.

2. Рассмотрим получившуюся прямоугольную трапецию *ABCD* и найдем ее площадь по формуле:

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}(a+b).$$

3. Найдем площадь прямоугольной трапеции *ABCD* , как сумму площадей полученных прямоугольных треугольников:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot c = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2.$$

4. Приравняем данные выражения, получаем:

$$\frac{a+b}{2}(a+b) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2;$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2) = a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c^2;$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a \cdot b + c^2;$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ч.т.д.

2. Доказательство с использованием свойств подобия треугольников.

1. Проведем высоту CH в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C (рисунок Б.4):

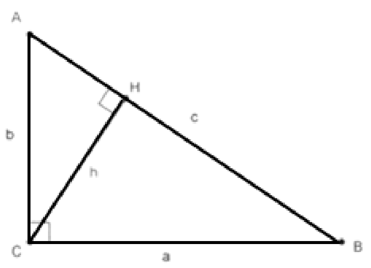


Рисунок Б.4 – Треугольник ABC

2. Рассмотрим $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, ACH$:

– $\angle\, A$ – общий;

– $\angle\, \mathrm{C} = \angle\, \mathrm{H} = 90°$.

Значит, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ACH$ по 2 признаку подобия треугольников. Аналогично $\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBH$.

3. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда из подобия треугольников получаем:

$$\frac{b}{c} = \frac{AH}{b} \rightarrow b^2 = c \cdot AH;$$

$$\frac{a}{c} = \frac{HB}{a} \rightarrow a^2 = c \cdot HB.$$

Сложим, правые и левые части:

$$a^2 + b^2 = c \cdot HB + c \cdot AH;$$

$$a^2 + b^2 = c(HB + AH);$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot AB;$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c;$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ч.т.д.

3. *Доказательство Перегаля.*

Доказательство методом разложения квадратов на равные части (рисунок Б.5):

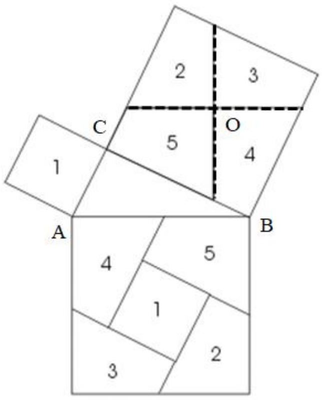


Рисунок Б.5 – Рисунок к доказательству Перегаля

Доказательство основано на разрезании квадратов, построенных на катетах, на фигуры, из которых можно сложить квадрат, построенный на гипотенузе:

1. Построим квадраты на катетах прямоугольного треугольника ABC.

2. Точка O – центр квадрата, построенного на большем катете $\Delta\, ABC$. Через т. O проведем прямую параллельную гипотенузе треугольника и прямую, перпендикулярную ей (пунктирные линии).

3. Пронумеруем полученные многоугольники и разрежем их на части.

4. Построим квадрат на гипотенузе. Полученные части многоугольников, укладываем на квадрат, построенный на гипотенузе. Получим, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Ч.т.д

4. *Доказательство Бхаскары (старейшее доказательство)*.

В своем трактате «Венец учения» (около 1150 года) крупнейший индийский математик и астроном Бхаскара приводит следующее доказательство теоремы Пифагора.

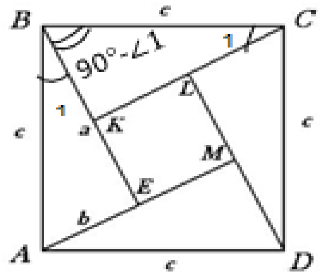


Рисунок Б.6 – Квадрат ABCD

1. Построим квадрат *ABCD*, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника *AEB* (рисунок Б.6). *AB* = *c*, *BE* = *a*, *AE* = *b*.

2. Опустим *CK* ⊥ *BE, DL*⊥*CK*, *AM*⊥*DL*.

3. Рассмотрим $\Delta\,AEB$ и $\Delta\,BKC$. Они равны по гипотенузе и острому углу:

– *AB* = *BC*(по построению);

– $\angle\,ABE = \angle\,BCK$

(Обозначим $\angle\,\mathrm{ABE} = \angle\,1$.

$\angle\,1 + \angle\,KBC = 90°$ – так как *ABCD* квадрат → $\angle\,KBC = 90° - \angle\,1$.

$\angle\,KBC + \angle\,BCK = 90°$ – по свойству острых углов прямоугольного треугольника → $\angle\,BCK = 90° - \angle\,KBC = 90° - 90° + \angle\,1 = \angle\,1$).

Аналогично, $\Delta\,AEB = \Delta\,CLD, \Delta\,AEB = \Delta\,DMA$. Значит, *KE* = *KL* = = *LM* = *ME* = *a*–*b*.

4. Найдем площадь квадрата *ABCD* по формулам:

$$S = c \cdot c = c^2;$$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a - b)^2.$$

5. Приравнивая правые стороны равенств, получаем:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a - b)^2;$$

$$c^2 = 2 \cdot a \cdot b + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2;$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ч.т.д.

4. Применение теоремы Пифагора в ОГЭ

Проанализировав задания ОГЭ, было выявлено, что по большей части задачи, для решения которых необходимо применить теорему Пифагора, встречаются в следующих заданиях:

I часть.

1. Задание № 15. Треугольники, четырёхугольники, многоугольники и их элементы.

2. Задание № 16. Окружность, круг и их элементы.

II часть.

3. Задание № 23. Геометрическая задача на вычисление.

Задание № 15:

Задача 1

В прямоугольном треугольнике *ABC*, с прямым углом *C*, катеты равны 75 и 100. Найдите высоту *CD*, проведенную к гипотенузе (рисунок Б.7) .

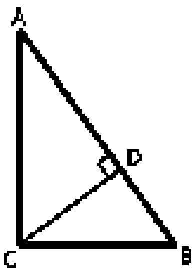


Рисунок Б.7 – Чертёж к задаче 1

Решение.

1 способ: Так как треугольник ABC прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы AB данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = (100)^2 + (75)^2;$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625;$$

$$AB = 125.$$

Вычислим площадь прямоугольно треугольника, применяя следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 75 = 3750$$

и

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$$

Подставим в формулу найденную площадь по предыдущей формуле:

$$3750 = \frac{1}{2} \cdot 125 \cdot CD \to CD = 60.$$

Ответ: 60.

2 способ: Так как треугольник ABC прямоугольный, применим теорему Пифагора для нахождения гипотенузы AB данного треугольника:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = (100)^2 + (75)^2;$$

$$AB^2 = 10000 + 5625 = 15625;$$

$$AB = 125.$$

Рассмотрим $\Delta\, ACD$ и Δ ACB:

$$\left.\begin{array}{r} 1)\ \angle ADC = \angle ACD = 90°; \\ 2)\ \angle CAD - \text{общий}. \end{array}\right\} \to$$

$\to$ $\Delta\, ACD \sim \Delta\, ACB$ по первому признаку подобия треугольников. Тогда получаем:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{CB} \to \frac{100}{125} = \frac{CD}{75} \to CD = 60.$$

Ответ: 60.

Задача 2

Катеты прямоугольного треугольника равны 35 и 120. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.

Задача 3

Дан треугольник ABC, угол C равен 90°, сторона AC равно 18 см, $tgA = \frac{2\sqrt{10}}{3}$. Найдите сторону AB (рисунок Б.8).

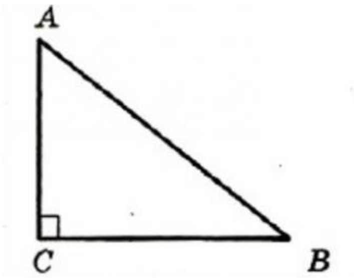


Рисунок Б.8 – Треугольник ABC

Решение.

По определению тангенса: $tgA = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \to \mathrm{BC} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \cdot 18 = 12\sqrt{10}.$

Треугольник ABC прямоугольный, применяя теорему Пифагора получим:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2;$$

$$AB^2 = 1440 + 324 = 1764;$$

$$AB = 42.$$

Ответ: 42.

Задача 4

Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Найдите гипотенузу этого треугольника.

Решение.

По теореме Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2;$$

$$c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 255 = 289 = 17^2;$$

$$\text{c} = 17.$$

Ответ: 17.

Задание 5

В треугольнике ABC $AC = 35$, $BC = 5\sqrt{15}$, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Решение.

Центр, описанной около прямоугольного треугольника окружности, лежит на середине гипотенузы.

Найдем гипотенузу AB, применив теорему Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

$$AB^2 = 35^2 + (5\sqrt{15})^2 = 1225 + 375 = 1600;$$

$$AB = 40.$$

Значит, радиус описанной окружности равен $R = \frac{AB}{2} = \frac{40}{2} = 20.$

Ответ: 20.

Задача 6

В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна $20\sqrt{3}$, а сторона AB равна 40. Найдите $\cos B$ (рисунок Б.9).

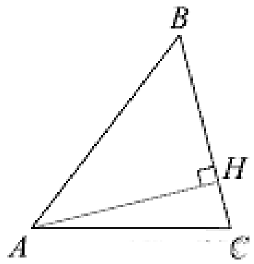


Рисунок Б.9 – Чертёж к задаче 6

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH, по теореме Пифагора, имеем:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 40^2 - \left(20\sqrt{3}\right)^2 = 1600 - 1200 = 400 \rightarrow BH = 20.$$

Найдем косинус угла B: $cos\, B = \frac{BH}{AB} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

Задача 7

В равнобедренном треугольнике ABC AC = BC. Найдите AC, если высота CH = 12, AB = 10.

Задача 8

Катеты прямоугольного треугольника равны $\sqrt{15}$ и 1. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Задача 9

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC = 35, а высота CH, опущенная на гипотенузу, равна $14\sqrt{6}$. Найдите $\sin\angle ABC$.

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH (рисунок 10). По теореме Пифагора:

$$AH^2 = AC^2 - CH^2 = 35^2 - \left(14\sqrt{6}\right)^2 = 1225 - 1176 = 49 \rightarrow AH = 7.$$

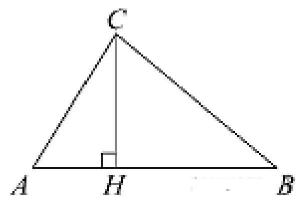


Рисунок Б.10 – Рисунок к задаче 9

По свойству высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, получаем:

$$CH^2 = AH \cdot HB \rightarrow HB = \frac{1176}{7} = 168.$$

AB = AH+HB = 7+168 = 175. Тогда, $sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{35}{175} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$

Ответ: 0,2.

Задание №16:

Задача 1

Вокруг треугольника ABC описана окружность, центр окружности лежит на стороне AB. Диаметр окружности равен 13. Найдите AC, если $BC = 5$.

Решение.

Если центр окружности лежит на стороне треугольника, то угол, лежащий напротив этой стороны – прямой. Значит, угол C равен 90°, а треугольник ABC прямоугольный.

Применяя теорему Пифагора, найдем AC:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2;$$

$$169 = 25 + AC^2;$$

$$AC^2 = 144;$$

$$AC = 12.$$

Ответ: 12.

Задача 2

Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см (рисунок Б.11).

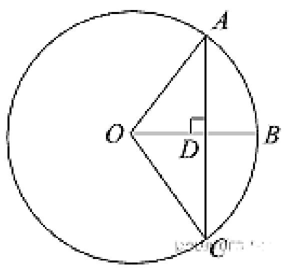


Рисунок Б.11 – Чертёж к задаче 2

Решение.

Найдем отрезок DO: $DO = OB – DB = 5 – 1 = 4$.

Рассмотрим треугольник AOD: $\angle D = 90°$, т.к. $OB \perp AC \rightarrow \Delta AOD$ – прямоугольный. По теореме Пифагора, получаем:

$$AD^2 = AO^2 - OD^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow AD = 3.$$

Рассмотрим треугольник AOC: $AO = CO$, т.к. радиусы окружности → Δ AOC – равнобедренный, тогда $CD = AD$ (высота, опущенная на основании равнобедренного треугольника, является медианой). Таким образом, $AC = 2{\cdot}AD = 2{\cdot}3 = 6$.

Ответ: 6.

Задача 3

К окружности с центром в точке O проведены касательная AB и секущая AO. Найдите радиус окружности, если $AB = 12$ см, $AO = 13$ см (рисунок Б.12).

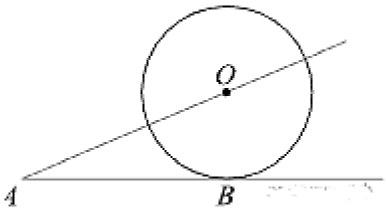


Рисунок Б.12 – Чертёж к задаче 3

Задача 4

Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности (рисунок Б.13).

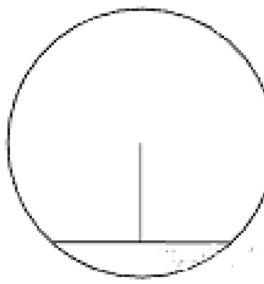


Рисунок Б.13 – Чертёж к задаче 4

Решение.

Достроим до треугольника AOB, основанием которого является хорда окружности (рисунок Б.14).

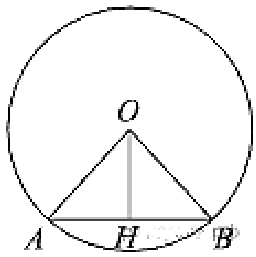


Рисунок Б.14 – Дополнительные построения к задаче 4

Рассмотрим треугольник AOB: $AO = OB$ (радиусы окружности), значит $\Delta\ AOB$ – равнобедренный, OH – высота, медиана и биссектриса → → $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{72}{2} = 36$.

Рассмотрим треугольник AOH: $\angle H = 90°$, $OH = 27$, $AH = 36$. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AH^2 + OH^2 = 36^2 + 27^2 = 1296 + 729 = 2025 = 45^2 \rightarrow AO = 45.$$

Тогда диаметр окружности равен: $D = 2 \cdot AO = 2 \cdot 45 = 90$.

Ответ: 90.

Задача 5

Радиус OB окружности с центром в точке O пересекает хорду AC в точке D и перпендикулярен ей. Найдите длину хорды AC, если $BD = 1$ см, а радиус окружности равен 5 см.

Задача 6

На отрезке AB выбрана точка C так, что $AC = 75$ и $BC = 10$. Построена окружность с центром A, проходящая через C. Найдите длину отрезка касательной, проведённой из точки B к этой окружности (рисунок Б.15).

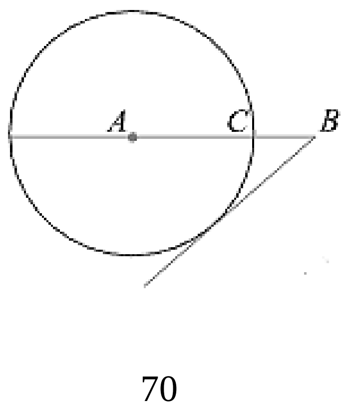


Рисунок Б.15 – Чертёж к задаче 6

Задача 7

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AC = 30$, $BC = 5\sqrt{13}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника (рисунок Б.16).

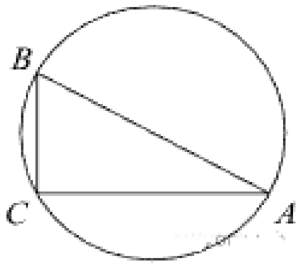


Рисунок Б.16 – Чертёж к задаче 7

Задача 8

Радиус вписанной в квадрат окружности равен $18\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата (рисунок Б.17).

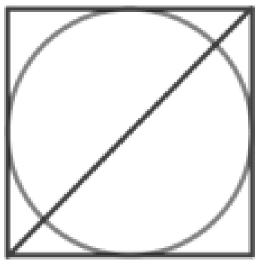


Рисунок Б.17 – Рисунок к задаче 8

Задача 9

Отрезок $AB = 40$ касается окружности радиуса 75 с центром O в точке B. Окружность пересекает отрезок AO в точке D. Найдите AD (рисунок Б.18).

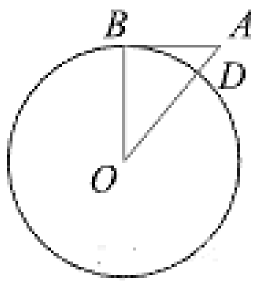


Рисунок Б.18 – Чертёж к задаче 9

Решение.

Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Значит треугольник *ABO* – прямоугольный. По теореме Пифагора, получаем:

$$AO^2 = BO^2 + AB^2 = 75^2 + 40^2 = 5625 + 1600 = 7225 = 85^2;$$

$$AO = 85.$$

Вычислим *OD*: *OD* = *AO*–*OD* = 85–75 = 10.

Ответ: 10.

Задание №23:

Задача 1

Периметр прямоугольника *ABCD* равен 72, а диагональ *AC* равна 27. Найдите площадь *ABCD*.

Решение.

Предположим, что сторона прямоугольника равна x, тогда вторая сторона равна (36–*x*).

Рассмотрим треугольник *ABC*, угол *B* равен 90°, применяя теорему Пифагора к данному треугольнику, получим:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2;$$

$$27^2 = x^2 + (36 - x)^2;$$

$$27^2 = x^2 + 36^2 - 72 \cdot x + x^2;$$

$$2x^2 - 72 \cdot x + 567 = 0;$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot b = 5184 - 4 \cdot 2 \cdot 567 = 648;$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{72 \pm \sqrt{648}}{4}.$$

Если $x = \frac{72+\sqrt{648}}{4}$, то другая сторона равна $36 - \frac{72+\sqrt{648}}{4} = \frac{72-\sqrt{648}}{4}$. Тогда площадь прямоугольника:

$$S = a \cdot b = \frac{72+\sqrt{648}}{4} \cdot \frac{72-\sqrt{648}}{4} = \frac{1}{16} \cdot (72^2 - 648) = 283{,}5.$$

Ответ: 283,5.

Задача 2

Периметр прямоугольника равен 56, а диагональ равна 27. Найдите площадь этого прямоугольника.

Задача 3

Дана трапеция *ABCD*, биссектрисы углов *A* и *B* пересекаются в точке *K*. Найдите *AB*, если *AK* = 30, *BK* = 16 (рисунок Б.19)

Решение.

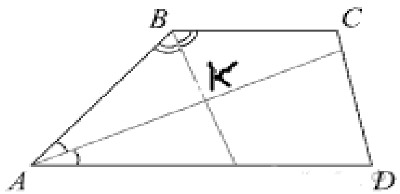


Рисунок Б.19 — Чертёж к задаче 3

Сумма односторонних углов трапеции *ABCD* равна 180°, значит, $\angle ABK + \angle BAK = \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC + \angle BAD) = 90°$.

Тогда, треугольник *ABK* прямоугольный, $\angle K = 90°$.По теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AK^2 + BK^2;$$

$$AB^2 = 30^2 + 16^2 = 1156 \to AB = 34.$$

Ответ: 34.

Задача 4

Биссектрисы углов *A* и *B* при боковой стороне *AB* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *F*. Найдите *AB*, если *AF* = 24, *BF* = 32.

Решение.

Построим чертёж (рисунок Б.20).

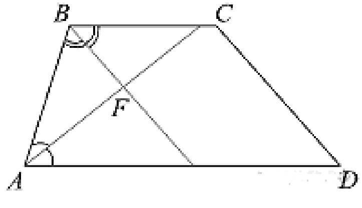


Рисунок Б.20 – Чертёж к задаче 4

Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°. Тогда, $2 \cdot \angle BAF + 2 \cdot \angle ABF = 180° \rightarrow \angle BAF + \angle ABF = 90°$.

Рассмотрим треугольник ABF: $\angle BAF + \angle ABF = 90°$,

значит $\angle BFA = 90°$ (сумма углов треугольника равна 180°). Таким образом, Δ ABF – прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600 = 40^2 \rightarrow AB = 40.$$

Ответ: 40.

Задача 5

Биссектрисы углов *A* и *B* при боковой стороне *AB* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *F*. Найдите *AB*, если *AF* = 16, *BF* = 12.

Задача 6

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 16 и 12, а средняя линия равна 10.

Решение.

Построим чертёж (рисунок Б.21). Пусть *AC* = 12, *BD* = 16. Проведём высоту *CH*. Выполним дополнительные построения: на прямой *AD* отложим отрезок *DE* = *BC* и проведем сторону *CE*, параллельную стороне *BD*.

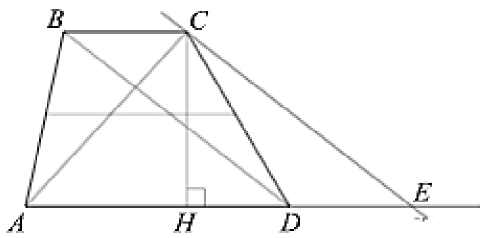


Рисунок Б.21 – Чертёж к задаче 6

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, то есть $\frac{BC+AD}{2} = 10 \rightarrow BC + AD = 20$.

Рассмотрим четырёхугольник *BCED*: *BD*||*CE* (по построению), *BC*||*DE* (*BC*||*AD* по условию, *DE* – продолжение *AD*, значит по определению четырёхугольник *BCED* – параллелограмм. Тогда *BD* = = *CE* = 16 по свойству параллелограмма.

В треугольнике *ACE* *AE* = *AD*+*DE* = *AD*+*BC* = 20, *AC* = 12, *CE* = 16. Предположим, Δ *ACE* – прямоугольный. Применим теорему Пифагора:

$$AE^2 = AC^2 + CE^2;$$

$$20^2 = 12^2 + 16^2;$$

$$400 = 144 + 256;$$

$$400 = 400.$$

Получили верное равенство, значит Δ *ACE* – прямоугольный, с прямым углом *C*. Найдем его площадь:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96.$$

Площадь трапеции находится по формуле: $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot CH = 10 \cdot CH$, где *CH* – высота трапеции. *CH* также является высотой в Δ *ACE*, найдем площадь треугольника по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot CH.$$

Подставим найденную ранее площадь треугольника в формулу выше и найдём *CH*: $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot CH = 96 \rightarrow CH = 9{,}6$. Тогда площадь трапеции равна $S = 10 \cdot CH = 10 \cdot 9{,}6 = 96$.

Ответ: 96.

Задача 7

Отрезки *AB* и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если AB=30, CD=40, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.

Решение.

Построим чертёж (рисунок Б.22).

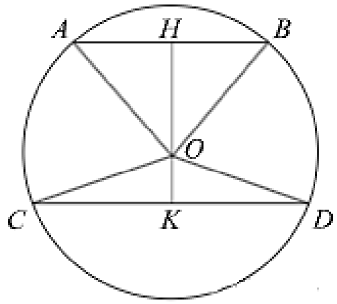


Рисунок Б.22 – Чертёж к задаче 8

Треугольник *AOB* – равнобедренный (*AO* = *OB* – как радиусы окружности), *OH* – расстояние от точки *O* до *AB*, то есть *OH*⊥*AB*, тогда по свойству высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, *OH* – высота, биссектриса и медиана. Значит, $AH = HB = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15$. Аналогично для треугольника *COD*: $CK = KD = \frac{CD}{2} = \frac{40}{2} = 20$.

Треугольник *AOH* – прямоугольный, так как *OH*⊥*AB*. Применяя теорему Пифагора, найдем *AO*:

$$AO^2 = AH^2 + OH^2;$$

$$AO^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625;$$

$$AO = 25.$$

AO = *OB* = *OC* = *OD* = 25, так как радиусы окружности.

Рассмотрим Δ *COK*: $\angle иCKO = 90°$ ($OK \perp CD$,так как расстояние от точки *O* до *CD*), *CK* = 20, *OC* = 25, значит Δ *COK* – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора $OK = \sqrt{OC^2 - CK^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{625 - 400} =$
$= \sqrt{225} = 15.$

Ответ: 15.

Задача 8

Окружность с центром на стороне *AC* треугольника *ABC* проходит через вершину *C* и касается прямой *AB* в точке *B*. Найдите *AC*, если диаметр окружности равен 8,4, а *AB* = 4.

Решение.

Построим чертёж (рисунок Б.23).

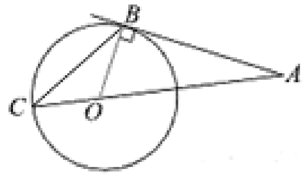


Рисунок Б.23 – Чертёж к задаче 8

O – центр окружности, радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Значит треугольник AOB – прямоугольный, тогда по теореме Пифагора, имеем:

$$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 4{,}2^2 = 16 + 17{,}64 = 33{,}64 \rightarrow OA = 5{,}8.$$

Следовательно, $AC = CO + OA = 4{,}2 + 5{,}8 = 10$.

Ответ: 10.

Задача 9

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 1$, $AC = 5$.

Заключение

Теорема Пифагора – одна из основополагающих теорем геометрии. Она применяется для решения огромного количества геометрических задач. Является примером простоты, красоты и широкой значимости.

Несмотря на то, что теорема носит имя Пифагора, ее знаменитое соотношение сторон в прямоугольном треугольнике было известно задолго до его рождения. С помощью верёвки разделенной узлами на 12 равных частей древние египтяне строили прямоугольный треугольник и прямой угол. Этот удобный и очень точный способ применяли землемеры для проведения на местности перпендикулярных линий. Для этого брали шнур и три колышка. Шнур располагали треугольником так, чтобы одна сторона состояла из трех частей, вторая – из четырех, и последняя – из пяти таких частей. Шнур при этом образует треугольник, в котором есть прямой угол.

Также найдены свидетельства о знании соотношения сторон в прямоугольном треугольнике в Древнем Китае, у древних индусов, в Вавилоне. И все это было задолго до жизни Пифагора. Однако эта теорема названа его именем, потому что Пифагор доказал соотношение сторон в треугольнике. Он сделал то, что века назад не делали те, кто просто пользовался соотношением катетов и гипотенузы, установленным опытным путем.

Со временем доказательств теоремы Пифагора все прибавлялось. На сегодняшний день их насчитывается более пятисот. Теорема даже занесена в Книгу рекордов Гиннеса, как имеющая наибольшее число доказательств.

В своей работе мы привели несколько способов доказательства теоремы Пифагора, не изучаемых в школе.

Сегодня теорема широко применяется в различных сферах деятельности, почти везде, где необходимы геометрические расчеты. Из-за этого многие ученые называют эту теорему самой главной в геометрии. В материал ОГЭ по математике встречается достаточное количество задач, для решения которых требуется применение теоремы Пифагора. А сборник, который мы создали в ходе работы, поможет качественно подготовиться к экзамену. Сборник содержит разного уровня сложности задания, а так же справочный материал.

Список использованных источников

1. **Волошников, А. В.** Пифагор: союз истины, добра и красоты / А. В. Волошников. – Москва: Просвещение, 1993. –224 с. – ISBN 5-09-003914-3.
2. **Еленьский, Щ.** Занимательная математика / Еленьский Щепан – Москва: Книга по Требованию, 2012. – 488 с. – ISBN 978-5-458-25452-6.
3. **Литцман, В.** Теорема Пифагора. / В. Литцман . – Москва: Вузовская книга, 2019. –115 с. – ISBN 978-5-9502-0854-6.