МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и геометрии

512(07)

Н199

Ю.А. Назырова, В.И. Осмоловский

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Челябинск

Издательство ЮУрГУ

2004

УДК 512.642 (075.8)+515(075.8)

Назырова Ю.А. Векторная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / Ю.А. Назырова, В.И. Осмоловский. – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 57 с. : ил.

Учебное пособие содержит теоретический материал, упражнения для самостоятельного решения и типовой расчет. Учебное пособие предназначено для аудиторной и домашней самостоятельной работы студентов факультета сервиса и легкой промышленности и механико-технологического факультета. В учебном пособии даны образцы выполнения всех типовых заданий.

Ил.8, табл.8.

Одобрено учебно-методической комиссией механико-математического факультета.

Рецензенты: А. Б. Самаров, Л. А. Логинова.

ISBN 5-696-03167-6

1.ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

В этом параграфе будет введено понятие вектора, определены операции сложения векторов и умножения вектора на число (которые часто объединяют термином *линейные операции над векторами*) и приведены свойства этих операций.

1.1. Скалярные и векторные величины, виды векторов по точке приложения

Величины бывают векторными и скалярными. Примерами скалярных величин являются длина, температура, работа, масса, в результате измерения которых получается число. Сила, скорость, напряженность электрического поля — это векторные величины. Основное отличие векторных и скалярных величин состоит в том, что векторные величины, кроме числовой характеристики, имеют еще и направление.

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B будем обозначать через $\overrightarrow{AB}$. Расстояние между точками A и B будем называть *длиной* (или *модулем*) *направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ и обозначать его через $|\overrightarrow{AB}|$. Допускается случай, когда $A = B$, тогда отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{O}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным к* $\overrightarrow{AB}$.

Два, ненулевых направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными*, если выполнено одно из следующих двух условий:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых и точки B и D расположены по одну сторону от прямой AC;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой и луч, образуемый одним из этих отрезков, содержит луч, образуемый другим отрезком.

Ненулевые коллинеарные направленные отрезки, не являющиеся сонаправленными, называются *антинаправленными* или *противонаправленными*. Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и антинаправленным любому направленному отрезку. Коллинеарность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обозначается так: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

Направленные отрезки называются *равными*, если они сонаправленны и имеют одинаковую длину.

Вектором называется совокупность всех равных направленных отрезков.

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, будет называться *представителем вектора*. Для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A.

Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A*.

1.2. Коллинеарность и компланарность векторов

Два вектора называются *коллинеарными* ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) (*сонаправленными* ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$), *противоположнонаправленными* ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), если их представители коллинеарны (сонаправленны, антинаправленны). *Длиной* (или *модулем*) *вектора* ($|\vec{a}|$) называется длина его представителя.

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является представителем вектора $\vec{a}$, то вектор, представителем которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, представителем которого является нулевой направленный отрезок, называется *нуль-вектором* (или *нулевым вектором*} и $\vec{0}$.

1.3. Сложение векторов и умножение вектора на число

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку О, отложим от нее вектор $\vec{a}$, получим точку *A*. От точки *A* отложим вектор $\vec{b}$, получим точку *B*. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ есть представитель вектора, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Сумма будет обозначаться через $\vec{a} + \vec{b}$.

Используя операцию сложения, можно определить *разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, полагая $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется такой вектор $t\vec{a}$, для которого

1. $|t\vec{a}| = |t|\cdot|\vec{a}|$;

2. если $t \geq 0$, то $t\vec{a}$ сонаправлен с $\vec{a}$;

3. если $t < 0$, то $t\vec{a}$ противоположно направлен с $\vec{a}$

Приведем *критерии коллинеарности векторов*:

вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

При решении некоторых задач бывает полезным следующее замечание:

Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то вектор $\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}$ *имеет длину* 1 и *сонаправлен* с $\vec{x}$.

Переход от ненулевого векторах $\vec{x}$ к вектору $\frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}$ называют *нормированием вектора* $\vec{x}$. Вектор единичной длины называют *единичным* или *нормированным*.

1.4. Разложение вектора по базису

Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_k$ называются *компланарными*, если существуют представители этих векторов, лежащие в одной плоскости.

Базисом пространства называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Базис, состоящий из векторов $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, и $\vec{b}_3$, будем обозначать через $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

Следующее утверждение является теоремой о разложении по трем некомпланарным векторам.

Теорема: *Всякий вектор* $\vec{a}$ *пространства можно, и притом единственным образом, разложить по базису* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ *пространства, т.е. представить в виде*

$$\vec{a} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + t_3\vec{b}_3, \tag{1}$$

где t_1, t_2, t_3 – *действительные числа*.

Коэффициенты t_1, t_2, t_3 данного разложения $\vec{a} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + t_3\vec{b}_3$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, причем t_1 – *первая координата*, t_2 – *вторая*, а t_3 – *третья*.

Так как вектор$\vec{a}$ имеет в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ координаты t_1, t_2, t_3 записываются в виде $\vec{a} = (t_1, t_2, t_3)$.

Координаты суммы векторов есть сумма одноименных координат слагаемых, а координаты произведения вектора на число есть произведение координат вектора на это число. Иными словами,

если векторы $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *имеют в одном и том же базисе координаты* (x_1, x_2, x_3) *и* (y_1, y_2, y_3) *соответственно, а* t *– произвольное число, то вектор* $\vec{x} + \vec{y}$ *имеет в том же базисе координаты* $(x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$**,** *а вектор* $t\vec{x}$ **–** *координаты* (tx_1, tx_2, tx_3).

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

2.1. Определение и свойства скалярного произведения

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы. *Углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между представителями этих векторов, отложенными от одной точки. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Угол между нуль-вектором и любым другим вектором не определен. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\vec{a}, \vec{b})$. Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет обозначаться через $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается также через $(\vec{a}, \vec{b})$. Из определения скалярного произведения вытекает следующая формула для вычисления косинуса угла между ненулевыми векторами, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем:

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (2)$$

Отметим ряд свойств скалярного произведения. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные векторы, а t – произвольное число, то:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*)

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*).

3. $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = t \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (*скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения*).

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причем $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$.

5. $\vec{a} \perp \vec{b}$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Свойство 5 называют *критерием ортогональности векторов*.

Скалярное произведение $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* $\vec{a}$. Поскольку $(\widehat{\vec{a}; \vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, т.е.

скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

2.2. Вычисление скалярного произведения в координатах

Предположим, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$) координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно.

В случае ортонормированного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3.$$

В частности,

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$$

Аналоги этих формул для векторов на плоскости очевидны. Если векторы на плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированием базисе ($\vec{c}_1, \vec{c}_2$) этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = t_1 s_1 + t_2 s_2 \text{ и } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t_1^2 + t_2^2.$$

3. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

В этом параграфе будут изучены две новые по сравнению со школьным курсом операции над векторами, указанные в названии.

3.1. Определение и свойства векторного произведения

Начнем с определения ориентации тройки векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\vec{u}, \vec{V}, \vec{W}\}$ называется ***правой***, если с конца вектора $\vec{W}$ оворот от $\vec{u}$ к $\vec{V}$ а наименьший угол выглядит происходящим против часовой стрелки, и ***левой*** – противном случае. Правую тройку векторов называют также ***положительно ориентированной***, а левую – ***отрицательно ориентированной***.

Перестановка двух соседних векторов меняет ориентацию тройки, а циклическая перестановка не меняет. (Циклическая перестановка – это переход от тройки $\{\vec{u}, \vec{V}, \vec{W}\}$ к тройке $\{\vec{V}, \vec{W}, \vec{u}\}$ или к тройке $\{\vec{u}, \vec{V}, \vec{W}\}$.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}^\wedge\vec{b})$.
2. Вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ –правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нуль-вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Рассмотрим для примера ортонормированный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ изображенный на рис. 3.1. Представим себе, что векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ расположены в плоскости листа, а вектор $\vec{e}_1$ направлен "к нам".

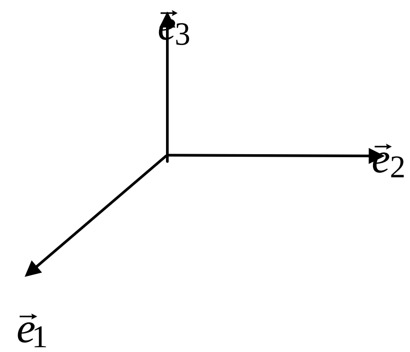


Рис.3.1

Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \text{ и } \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

Сформулируем основные свойства векторного произведения. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные векторы, а t – произвольное число, то:

1. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$;
2. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то модуль векторного произведения этих векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

3. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$v (векторное произведение ***антикоммутативно***).

4. $[t\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, t\vec{b}] = t[\vec{a}, \vec{b}]$ (скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения).

5. $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ (векторное произведение ***дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу***).

5. $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$ (векторное произведение ***дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу***).

Свойство 1 дает еще один ***критерий коллинеарности векторов.***

Свойство 2 часто называют ***геометрическим смыслом векторного произведения***.

В самом деле, пусть *ABCD* – параллелограмм, построенный на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах (при этом $\vec{a} = AB$, а $\vec{b} = AD$), S – площадь этого параллелограмма, *h* – длина его высоты, опущенной из точки *D*, а α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.2). Тогда

$$S = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|. \qquad (3)$$

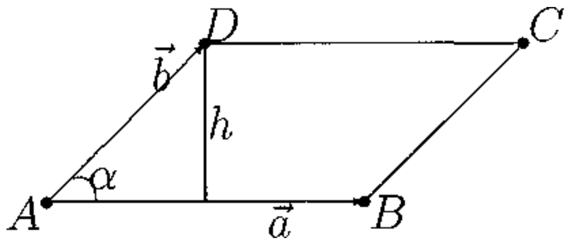


Рис.3.2

Выражение (3) является ***физический смысл векторного произведения.***

3.2. Вычисление векторного произведения в координатах

Пусть $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ – некоторый базис пространства, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно.

$$\begin{array}{c} \vec{i} \quad\;\; \vec{j} \quad\;\; \vec{k} \\ \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \end{array}$$

В отличие от предыдущих операций смешанное произведение имеет три аргумента.

3.3. Определение и свойства смешанного произведения

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обозначается через $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ или ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). Таким образом,

$$\vec{a}\ \ \vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b}, \vec{c}).$$

Укажем ряд свойств смешанного произведения, из которых первое, наиболее важное, назовем теоремой.

<u>Теорема.</u> Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны. Смешанное произведение некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если тройка ($\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$) правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

Первое утверждение теоремы ***<u>называют</u>***, критерием компланарности векторов, а ***второе –*** геометрическим смыслом смешанного произведения. ***<u>При решении некоторых задач</u>*** бывает удобна следующая более компактная формулировка последнего свойства: *объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.*

<u>Отметим</u>, что из теоремы вытекает следующий факт*: тройка векторов является правой* (*левой) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше нуля* (*соответственно меньше нуля*).

При решении некоторых задач бывает полезно следующее наблюдение, вытекающее из первого утверждения теоремы: *если два из трех векторов коллинеарны (в частности, равны), то их смешанное произведение равно 0.*

Упорядоченные тройки ($\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$) и ($\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$) имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот dice параллелепипед. Следовательно, смешанные произведения $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ и $\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$.

Пусть векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ образуют правый ортонормированный базис пространства, а $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $(y_1,\ y_2,\ y_3)$, $(z_1,\ z_2,\ z_3)$ – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ найти их смеанное произведение:

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

4. СИСТЕМА КООРДИНАТ. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

4.1. Понятие системы координат

Система координат в пространстве (на плоскости) называется **совокупность базиса пространства** (соответственно базиса плоскости) **и точки** (принадлежащей этой плоскости).

Точка, входящая в систему координат называется **началом системы координат**.

Система координат в пространстве $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ называется прямоугольной декартовой, **если базис** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ – **правый ортонормированный. Система координат на плоскости** $\{O; \vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ называется прямоугольной декартовой, **если базис** $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ – **ортонормированный.**

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

4.2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно.

Предположим, что даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что точка C делит отрезок AB в отношении t, если

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}.$$

Расписывая равенство $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{CB}$ в координатах, имеем

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1), \\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2), \\ c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3) / \end{cases}$$

Из этих равенств получаем, что

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases}$$

Отметим один важный частный случай. Предположим, что C – середина отрезка AB. Это означает, что она делит этот отрезок в отношении 1. Получаем, что точка C имеет координаты

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right).$$

Иными словами, координаты середины отрезка есть полусумма (среднее арифметическое) координат его начала и конца.

Пример. Найти координаты точки Т, являющейся точкой пересечения медиан треугольника с вершинами $P\ (p_1,\ p_2,\ p_3)$, $Q\ (q_1, q_2, q_3)$ и $R\ (r_1, r_2, r_3)$.

Обозначим через S точку пересечения медианы PT и стороны QR (рис. 4.1), а через (s_1, s_2, s_3) – координаты этой точки. В силу сказанного выше $s_1 = \dfrac{q_1+r_1}{2}$, $s_2 = \dfrac{q_2+r_2}{2}$, $s_3 = \dfrac{q_3+r_3}{2}$. Известно, что точка пересечения медиан отсекает от медианы $\dfrac{2}{3}$ ее длины (если считать от вершины треугольника). Это означает, что точка T делит отрезок PS в отношении 2. Следовательно

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{p_1+2s_1}{1+2} = \dfrac{p_1+q_1+r_1}{3}, \\ t_2 = \dfrac{p_2+2s_2}{1+2} = \dfrac{p_2+q_2+r_2}{3}, \\ t_3 = \dfrac{p_3+2s_3}{1+2} = \dfrac{p_3+q_3+r_3}{3}. \end{cases}$$

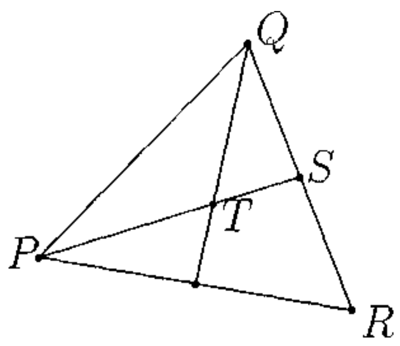


Рис. 4.1

5. ЗАДАЧИ

Во всех задачах этого параграфа, в которых явно не оговорено противное, координаты векторов даны в правом ортонормированном базисе, а координаты точек – в прямоугольной декартовой системе координат.

5.1. Примеры решения задач

Пример №1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ = (11, – 2, 11) в базисе $\vec{a}$ = (1, – 2, – 1), $\vec{b}$ = (3, 0, 5), $\vec{c}$ =(0, –2, 2).

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ через (x_1, x_2, x_3). Это означает, что выполнено векторное равенство

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}\,.$$

Приравнивая последовательно первые, вторые и третьи координаты векторов, стоящих в левой и правой частях этого равенства, получаем систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 11, \\ -2x_1 - 2x_3 &= -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

Решим эту систему по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 28, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 11 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 56,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 84, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -28.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 3$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -1$.

Ответ: (2,3,-1).

Пример №2. Даны векторы $\vec{a}$ = (1, 2, –1), $\vec{b}$ = (1, 1, 2) и $\vec{c}$ = (1, –1, 0). Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{2}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, компланарный векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и образующий острый угол с положительным направлением оси Oz.

Решение. Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ через (x_1, x_2, x_3). Из условий $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{2}$ и $\vec{d} \perp \vec{a}$ вытекают равенства $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$ и $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ соответственно, а из компланарности векторов $\vec{d}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – равенство

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель из левой части последнего равенства по первой строке, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения второе, получаем $x_1 - x_3 = 0$ т.е. $x_1 = x_3$. Из второго уравнения вытекает теперь, что $x_2 = 0$. Учитывая первое уравнение, получаем, что $x_1 = \pm 1$. Итак, наша система имеет два решения: $\vec{d}_1$ = (1, 0, 1) и $\vec{d}_2$ = (– 1, 0, –1). До сих пор мы не использовали условие о том, что вектор $\vec{d}$ образует острый угол с положительным направлением оси Oz. Это означает, что если z – произвольный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси Oz, то угол ($\vec{d}\,^\wedge\vec{z}$) – острый, т.е. $\vec{d}\vec{z}$ > 0. Ясно, что в качестве $\vec{z}$ можно взять вектор $\vec{z}_0$ = (0,0,1). Поскольку $\vec{d}_1\vec{z}_0$= 1, а $\vec{d}_2\vec{z}_0$ = —1, получаем, что $\vec{d}$ = (1,0, 1).

Ответ: $\vec{d}$ = (1, 0, 1).

Пример №3. Дан тетраэдр $ABCD$ с вершинами A (3, – 2, 1), B (4, – 3, 0), C (5, – 1, 1) и D (4, – 4, 2). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

Решение. Положим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Ясно, что $\vec{b}$ = (1, – 1, – 1), $\vec{c}$ = (2, 1, 0) и $\vec{d}$ = (1, –2, 1). Обозначим через h длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D, через V объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а через S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ясно, что $V = S{\cdot}h$. $V = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$. Далее, $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Найдем сначала вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, обозначив через $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ тот ортонормированный базис, в котором даны координаты всех векторов. Имеем

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1, -2, 3).$$

Следовательно, $S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ и $h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

Ответ: $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$.

5.2. Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Известно что $\overrightarrow{AB}$ = (2, 6, – 4), $\overrightarrow{AC}$ = (4, 2, – 2). Найти координаты векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, и $\overrightarrow{CF}$.

2. На плоскости даны векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Найти координаты вектора $\vec{s}$ в базисе ($\vec{p}$, $\vec{q}$):

а) $\vec{p}$ = (1, 2), $\vec{q}$ = (–3, 1), $\vec{s}$ = (–7, 7);

б) $\vec{p}$ = (3, – 2), $\vec{q}$ = (2, 2), $\vec{s}$ = (1, 6);

в) $\vec{p}$ = (1, – 1), $\vec{q}$ = (7, 5), $\vec{s}$ = (5, 7).

3. В пространстве даны векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$. Найти координаты вектора $\vec{s}$ в базисе ($\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$):

а) $\vec{p}$ = (3, – 2, 1), $\vec{q}$ = (– 1, 1, – 2), $\vec{r}$ = (2, 1, – 3), $\vec{s}$ = (11, – 6, 5);

б) $\vec{p}$ = (2, 1, 0), $\vec{q}$ = (1, – 1, 2), $\vec{r}$ = (2, 2, – 1), $\vec{s}$ = (3, 7, – 7);

в) $\vec{p}$ = (1, 1, – 2), $\vec{q}$ = (2, 1, 0), $\vec{r}$ = (– 3, 1, 2), $\vec{s}$ = (8, 2, – 4)/

4. Определить середины сторон треугольника с вершинами в точках A(1, –3), B(3, – 5) и C(– 5, 7).

5. Точки (2, – 1), (– 1, 4) (– 2, 2) являются серединами сторон треугольника. Определить его вершины.

6. Даны точки A(3, – 1) и B(2, 1). Определить координаты:

а) точки M, симметричной точке A относительно точки B;

б) точки N, симметричной точке B относительно точки A.

7. Даны три вершины параллелограмма A (3, – 5), B (5, – 3) и C (–1, 3). Определить четвертую вершину D, противоположную вершине B.

8. Даны вершины треугольника A(2, – 5), B(1, – 2), C(4, 7). Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине B со стороной AC.

9. Даны вершины треугольника A(3, – 5), B(– 3, 3), C(– 1, –2). Определить длину биссектрисы внутреннего угла при вершине A.

10. Известны координаты трех вершин трапеции A(– 4, – 5, 6), B(2, 1, 3), C(0, 0, 0). Найти четвертую вершину D и точку пересечения диагоналей, если длина основания CD равна 18.

11. Точка M пересечения медиан треугольника лежит на оси абсцисс, две его вершины – точки A(2, – 3) и B(– 5, 1), третья вершина C лежит на оси ординат. Определить координаты точек M и C.

12. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}|$ = 3, $|\vec{b}|$ = 4. Вычислить:

а) ($\vec{a}$, $\vec{b}$); б) ($\vec{a}$ $\vec{a}$); в) ($\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$);

г) ($3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$); г) ($3\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} + 2\vec{b}$).

13. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$ вычислить:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$; б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$; в) $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}, \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})$.

14. Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении параметра t векторы $\vec{a} + t\vec{b}$, и $\vec{a} - t\vec{b}$ будут ортогональны.

15. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Найти угол между векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

16. Даны векторы $\vec{a}(4, -2, -4)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$. Вычислить:

а) $(\vec{a}, \vec{b})$; б) $\sqrt{(\vec{a}\vec{a})}$; в) $\sqrt{(\vec{b}\vec{b})}$; г) $(2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b})$;

д) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

17. Даны вершины треугольника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$. Определить его внутренний угол при вершине B.

18. Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a} = (3, 2, 2)$ и $\vec{b} = (18, -22, -5)$ и образует с осью Oy тупой угол. Найти координаты вектора $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}| = 14$.

19. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$, $\vec{c} = (2, -1, 1)$. Найти вектор $\vec{x}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и такой, что $\vec{x}\,\vec{c} = -6$.

20. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a}\,\vec{b} = 12$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

21. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Вычислить $\vec{a}\,\vec{b}$.

22. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:

а) $\left|[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]\right|$; б) $\left|[3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}]\right|$.

23. Даны векторы $\vec{a} = (3, -1, -2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Вычислить:

а) $[\vec{a}\vec{b}]$; б) $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; в) $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$.

24. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

25. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$. Вычислить длину высоты, опущенной из точки B на сторону AC.

26. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

27. Даны векторы $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Вычислить

а) $[[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}]$; б) $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

28. Даны векторы $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$, $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

29. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3,2,-1)$ и $D(4, 1, 3)$.

30. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ и D(– 5, –4, 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

31. Даны векторы $\vec{a}$ = (11, 10, 2) и $\vec{b}$ = (4, 0, 3). Найти вектор с длины 1, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы тройка ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) имела положительную ориентацию.

32. Даны векторы $\vec{a}$ = (1, 1, 1) и $\vec{b}$ = (1, 0, 0). Найти вектор с длины 1, ортогональный вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\frac{\pi}{3}$ и направленный так, чтобы тройка ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) была правой.

33. Даны векторы $\vec{a}$ = (0, 1, 1) и $\vec{b}$ = (1, 1, 0). Найти вектор с длины 1, ортогональный вектору $\vec{a}$, образующий с вектором $\vec{b}$ угол $\frac{\pi}{4}$ и направленный так, чтобы тройка ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) имела положительную ориентацию.

34. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, 3)$ и 5(9, – 7, – 2), разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

35. Определить координаты концов отрезка, который точками (2,2) и (1,5) разделен на три равные части.

36. Даны вершины треугольника $A(1, -1, -3)$, 5(2, 1, –2) и С(–4, 7, 5) Вычислить длину биссектрисы внутреннего угла при вершине B.

5.3. Ответы

1. $\overrightarrow{AD}$ = (3, 4, – 3), $\overrightarrow{BE}$ = (0, – 5, 3), $\overrightarrow{CF}$ = (–3, 1, 0).
2.
3. а) (2, 3); б) (– 1; 2); в) (– 2, 1).
4. (2, – 3, 1).
5. (2, – 4), (– 2, 2), (– 1, 1).
6. M (1, 3); б) N (4, –3).
7. D (– 3, 1).
8. $(\frac{5}{2}, -2)$.
9. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.
10. $\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \overrightarrow{AL} = \frac{|\vec{b}|\cdot\vec{a}+|\vec{a}|\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$.
11. $M(-1, 0)$, $C(0, 2)$.
12. а) – 6; б) 9; в)13; г)– 61; д) 73.
13. а) – 62; 6) 162; в) 373.

14. . t = ± 0,6.

15. $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

6. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Изучение прямой на плоскости основано на понятиях координатного и параметрических уравнений прямой. Предварительно мы ознакомимся с этими понятиями для произвольной линии.

6.1. Координатное и параметрические уравнения линии

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется ***координатным уравнением линии l***, если точка на плоскости лежит на l тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, называется ***геометрическим образом этого уравнения***.

Приведем пример. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. В качестве линии l рассмотрим окружность радиуса r с центром в точке $C(a, b)$. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости. Ясно, что $M \in l$ тогда и только тогда, когда $|CM| = r$, т.е.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

Получили уравнение окружности l.

В приведенном примере по данной линии найдено ее координатное уравнение. Рассмотрим пример обратной задачи, когда по уравнению определяется его геометрический образ. Рассмотрим уравнение $x^2+y^2-2x+4y=0$. Преобразуем его левую часть, используя метод выделения полного квадрата. Имеем

$$(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4=0$$

или $(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Следовательно, исходное уравнение определяет окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точке (1, 2). J

Перейдем к понятию параметрических уравнений линии. Предположим по-прежнему, что в плоскости зафиксирована некоторая система координат. Рассмотрим некоторую линию l. Представим ее себе как траекторию движения точки $M(x, y)$. Поскольку эта точка движется, ее координаты с течением времени меняются, т.е. являются функциями времени. Пусть координата x есть функция, а координата y — функция $g(t)$. Тогда система уравнений

$$\left\{\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t). \end{aligned}\right\}$$

называется ***системой параметрических уравнении*** (или просто **параметрическими уравнениями**) линии l. При этом несущественно, понимается ли t как время или как произвольный параметр, принимающий в качестве значений действительные числа (мы начали с интерпретации t как времени исключительно для большей наглядности). Переменная t называется параметром. Область изменения t может не совпадать с множеством всех действительных чисел , а ограничиваться некоторым его промежутком.

В качестве примера составим параметрические уравнения окружности радиуса r с центром в начале координат (в прямоугольной декартовой системе координат). В качестве параметра возьмем угол, образуемый радиусом-вектором текущей точки $M(x,\ y)$ на окружности и положительным направлением оси абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 6.1). Тогда

$$\begin{Bmatrix} x = r\cos t, \\ y = r\sin t. \end{Bmatrix}$$

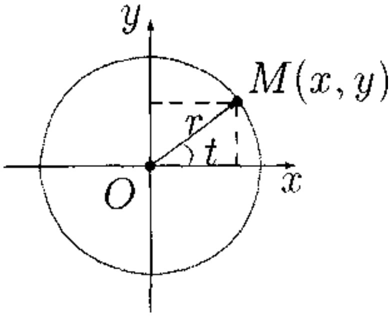


Рис. 6.1.

Итак, по заданной линии l мы составили ее параметрические уравнения.

Приведем пример решения обратной задачи. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{Bmatrix} x = 1 - t, \\ y = 2 + t. \end{Bmatrix}$$

прямая $y = -x + 3$.

Способ перехода от параметрических уравнений к координатному называется ***исключением параметра***. От координатного уравнения можно перейти к параметрическим с помощью ***введения параметра***.

Всякое решение исходного координатного уравнения является решением и системы параметрических уравнений.

6.2. Координатное и параметрические уравнения прямой

Уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

называется ***уравнением первого порядка с двумя неизвестными***, если $A^2 + B^2 \neq 0$.

Последнее неравенство означает, что коэффициенты A и B не могут быть одновременно равны нулю.

Теорема. Пусть на плоскости задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка с двумя неизвестными, и, обратно, всякое уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет прямую.

Уравнение первого порядка, задающее прямую, называется ее ***координатным уравнением***. Наряду с этим термином в том же смысле часто употребляют термин ***общее уравнение прямой***.

Установлен следующий полезный факт: если прямая l задается уравнением $Ax+By+C=0$, то вектор $(-B, A)$ коллинеарен l.

Если $B\neq 0$, то уравнение $Ax+By+C=0$ можно переписать в виде

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Положим $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$y=kx+b.$$

Это уравнение называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом***. Именно это уравнение прямой рассматривается в школьном курсе математики. Подчеркнем, что уравнение с угловым коэффициентом существует не для всех прямых, а только для прямых, не параллельных оси ординат.

Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0,\, y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой. Система уравнений

$$\begin{cases} x=x_0+rt, \\ y=y_0+st, \end{cases}$$

называется ***системой параметрических уравнений первого типа*** (или просто ***параметрическими уравнениями первого типа***), если $r^2+s^2\neq 0$.

Прежде чем переходить к примерам, укажем еще два вида уравнений прямой. Предположим, что мы знаем две различные точки, принадлежащие прямой: $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0,\, y_1-y_0)$ коллинеарен прямо и отличен от нуль-вектора. Подставляя его координаты в каноническое уравнение прямой, получаем следующее уравнение, которое называется ***уравнением прямой по двум точкам***:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}.$$

Пример №1. Пусть прямая l задана координатным уравнением $2x-y+3=0$. Найдем ее параметрические уравнения. Для этого необходимо знать координаты хотя бы одной точки прямой и координаты ее направляющего вектора. Координаты любой точки, принадлежащей прямой, являются решением уравнения $2x-y+3=0$. Приравнивая, например, x к 1, получаем y = 5. Таким образом, годится точка $M_0(1,5)$. В силу сделанного выше замечания в качестве направляющего вектора можно взять вектор (1,2). Следовательно, параметрическое уравнение данной прямой можно записать в виде

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5 + 2t \end{cases}$$

Отметим, что мы могли бы найти направляющий вектор прямой l и по-другому. А именно, найдем еще одну точку на этой прямой. Полагая в уравнении $2x - y + 3 = 0$, например, y = 1; получаем x = – 1. Следовательно, точка M_1(– 1, 1) принадлежит прямой. Ясно, что вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ = (– 2, – 4) будет направляющим вектором нашей прямой. Поэтому система параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = 1 - 4t, \end{cases}$$

также задает прямую l. Ту же задачу можно решить и формально, не прибегая к геометрическим образам (т.е. не упоминая о точке, принадлежащей прямой, и о ее направляющем векторе). А именно, положим x = t. Тогда из уравнения $2x - y + 3 = 0$ имеем $2t - y + 3 = 0$, т.е. $y = 2t + 3$. Следовательно, параметрические уравнения прямой l можно записать в виде

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

Этот формальный способ решения задачи называется методом введения параметра. Отметим, что мы получили три разных ответа, но все они правильные – мы нашли три различных вида параметрических уравнений одной и той же прямой. Таким образом, параметрические уравнения прямой определены неоднозначно (как, впрочем, и ее координатное уравнение).

Пример №2. Пусть прямая l задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

Найдем ее координатное уравнение. Ясно, что точка (1,2) принадлежит прямой, а вектор (– 2, 3) является ее направляющим вектором. Поэтому можно сразу написать каноническое уравнение прямой l:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3}.$$

После преобразований имеем 3(x – 1) + 2(y – 2) = 0 или 3 x + 2y — 7 = 0. Эту задачу также можно решить формально, не прибегая к геометрическим образам. Умножим уравнение x = 1 – 2t на 3, а уравнение y = 2 + 3t на 2 и сложим полученные уравнения. Получим 3x + 2y = 7 или 3x + 2y – 7 = 0. Такой метод решения называется ***методом исключения параметра***.

6.3. Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим следующий вопрос: как по уравнениям двух прямых определить взаимное расположение этих прямых, т.е. выяснить, будут ли они параллельны, пересекаться или совпадать? Ответ на него дает

Теорема. Пусть прямая l_1 имеет уравнение $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая l_2 – уравнение $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

1. l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$;

2. l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;

3. l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

6.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая l задана координатным уравнением $Ax + By + C = 0$, а $M(x', y')$ – некоторая точка плоскости. Обозначим через $M_0(x_0', y_0')$ ортогональную проекцию точки M на l (рис. 6.2).

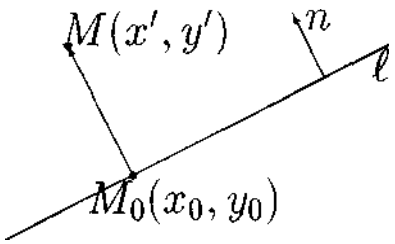


Рис.6.2

Поскольку система координат – прямоугольная декартова, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен к l. Поскольку вектор $\overrightarrow{M_oM}$ также перпендикулярен к l, получаем, что $\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n}$. Следовательно, $\cos(\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{n}) = \pm 1$ м потому $(\overrightarrow{M_oM}, \vec{n}) = \pm \left|\overrightarrow{M_oM}\right| |\vec{n}|$.

Обозначим расстояние от М до l через $d(M, l)$.

$$d(M,l) = \frac{|Ax' + By' + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Это и есть искомая формула расстояния от точки до прямой.

6.5. Угол между прямыми

По-прежнему будем предполагать, что система координат, заданная на плоскости, является прямоугольной декартовой. Запишем формулу для нахождения угла между двумя прямыми на плоскости.

Предположим, что на плоскости есть две прямые, заданные каноническими уравнениями, – прямые

$$l_1 : \frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{r_1} \text{ и } l_2 : \frac{x - x_2}{q_2} = \frac{y - y_2}{r_2}.$$

Будем считать, что угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами.

Тогда получаем, что если α – угол между прямыми l_1 и l_2, то

$$\cos\alpha = \frac{q_1 q_2 + r_1 r_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2}}.$$

Абсолютно аналогично находится угол между двумя прямыми в случаях, когда обе они заданы параметрическими уравнениями или одна задана каноническим уравнением, а другая параметрическими уравнениями.

Предположим теперь, что прямые l_1 и l_2 заданы координатными уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ соответственно.

Тогда получаем, что угол между прямыми l_1 и l_2 можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если α и β – два различных угла между двумя фиксированными прямыми, то β = π – α. Получаем $\cos\alpha = -\cos(\pi - \alpha)$, косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен.

Пример. Пусть даны прямые

$$l_1 : 3x - 4y = 7 \text{ и } l_2 : \frac{x + 6}{1} = \frac{y - 17}{1},$$

и требуется найти тупой угол между ними. Координатное уравнение прямой l_2 имеет вид $x - y + 23 = 0$. Имеем $\cos\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$. Угол α оказался острым. Следовательно, если β – тупой угол между заданными прямыми, то $\cos\beta = -\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

7 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сейчас приступаем к рассмотрению кривых, задаваемых уравнениями второго порядка.

На протяжении всей этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

Уравнением второго порядка порядка ***с двумя неизвестными*** называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Последнее условие означает, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Кривой второго порядка называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют некоторому уравнению второго порядка с двумя неизвестными.

Примерами кривых второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола.

7.1. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a, $b > 0$ и $a > b$. Это уравнение называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Ясно, что в случае $a = b$ эллипс является окружностью с центром в начале координат радиуса a.

Далее, если точка $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 7.1) удовлетворяет уравнению эллипса, т.е. выполняется равенство $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, то и точки $M'(-x_0, y_0)$ и $M''(x_0, -y_0)$ удовлетворяют уравнению эллипса. Это означает, что эллипс симметричен как относительно оси абсцисс, так и относительно оси ординат.

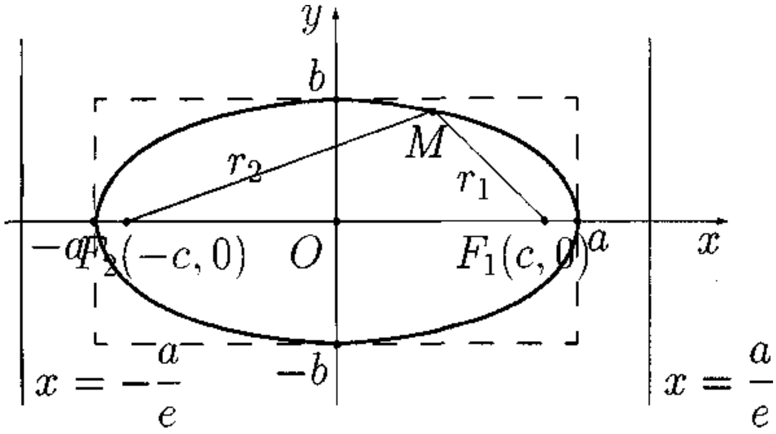


Рис. 7.1

Точки с координатами (a, 0), (– a, 0), (b, 0) и (–b, 0) называются ***вершинами эллипса***, величина a – ***большой полуосью эллипса***, а величина b – его ***малой полуосью***. Введем новую величину с следующим образом: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ясно, что $0 \le c < a$. Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются ***фокусами эллипса***. Фокус F_1 мы иногда будем называть ***правым***, а фокус F_2 – ***левым***. Отметим, что если $a = b$ (т.е. если эллипс является окружностью), то обе полуоси равны радиусу окружности, $c = 0$ и $F_1 = F_2$ – центр окружности (совпадающий с началом координат). Если точка М принадлежит эллипсу, то расстояния $|F_1M|$ и $|F_2M|$ называются ***фокальными радиусами*** и обозначаются r_1 и r_2 (если $a = b$, то $r_1 = r_2 = a$ – ***радиус окружности.*** Величина $e = \frac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом эллипса.*** Так как $0 \le c < a$, то $0 \le e < 1$. Эксцентриситет можно рассматривать как меру вытянутости эллипса, его "удаленности" от окружности.

Теорема. Точка M принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда сумма расстояний от M до фокусов равна $2a$.

Прямые с уравнениями $x = \frac{a}{e}$ и $x = -\frac{a}{e}$ – называются ***директрисами эллипса*** (если эллипс является окружностью, т.е. если $e = 0$, то он не имеет директрис). Поскольку абсцисса любой точки эллипса по модулю не превосходит a и $e < 1$, то директрисы не пересекают эллипса (рис. 7.1). Директрису $x = \frac{a}{e}$ – будем называть ***правой*** или ***соответствующей фокусу,*** F_1 а директрису $x = -\frac{a}{e}$ – ***левой*** или ***соответствующей фокусу*** F_2.

Следующее утверждение называют ***директориальным свойством эллипса***.

Теорема. Точка M принадлежит эллипсу (не являющемуся окружностью) тогда и только тогда, когда отношение расстояния от точки M до фокуса к расстоянию от M до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету эллипса.

7.2. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

где a, $b > 0$. Это уравнение называется **каноническим уравнением гиперболы**.

Изучим форму гиперболы. Как и в случае эллипса гипербола симметрична относительно обеих осей координат. Рассмотрим прямую с уравнением $y=\frac{b}{a}\cdot x$.

Гипербола распадается на две части, одна из которых лежит в правой полуплоскости, а другая – в левой полуплоскости. Эти части называются соответственно правой ветвью и левой ветвью гиперболы. Отметим еще, что, в силу симметрии относительно осей координат, асимптотой гиперболы является не только прямая $y=\frac{b}{a}\cdot x$, но также и прямая $y=-\frac{b}{a}\cdot x$ (рис.7.2).

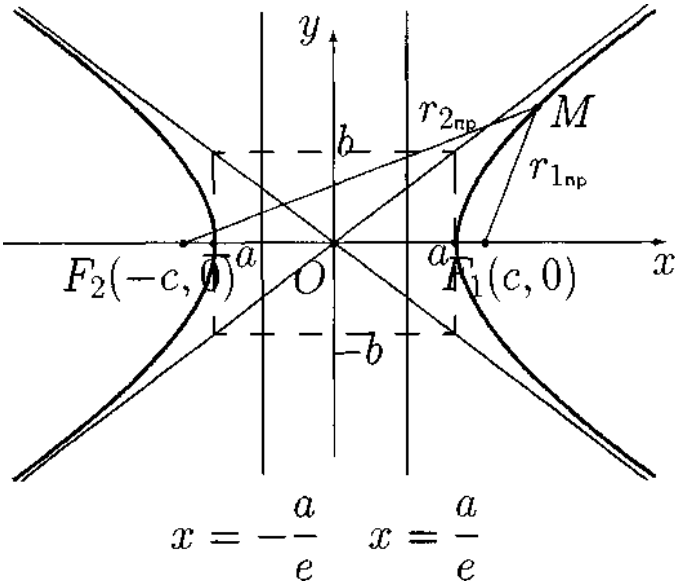


Рис.7.2

Точки с координатами (a, 0) и ($-a$, 0) называются вершинами гиперболы, величина a – действительной полуосью гиперболы, а величина b – ее мнимой полуосью. Введем новую величину с правилом: $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Ясно, что $c > a$ (в отличие от эллипса). Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$ называются ***фокусами гиперболы***; фокус F_1 называется ***правым***, а фокус F_2 – ***левым***.

Величина $e=\frac{c}{a}$, как и в случае эллипса, называется ***эксцентриситетом гиперболы***. Легко понять, что для гиперболы всегда выполнено неравенство $e > 1$ (что отличается от случая эллипса).

Следующее утверждение часто называют фокальным свойством гиперболы. Оно дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая была гиперболой. Это условие нередко принимают за определение гиперболы.

Теорема. Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда модуль разности расстояний от М до фокусов равен 2a.

Как и в случае эллипса, прямые $x = \pm\frac{a}{e}$ называются д***иректрисами гиперболы***. Они не пересекают гиперболы, поскольку $\left|\frac{a}{e}\right| < a$ (рис. 7.3) Директрису $x = \frac{a}{e}$ будем называть ***правой или по фокусу*** F_1, а директрису $x = -\frac{a}{e}$ – левой или соответствующей фокусу F_2.

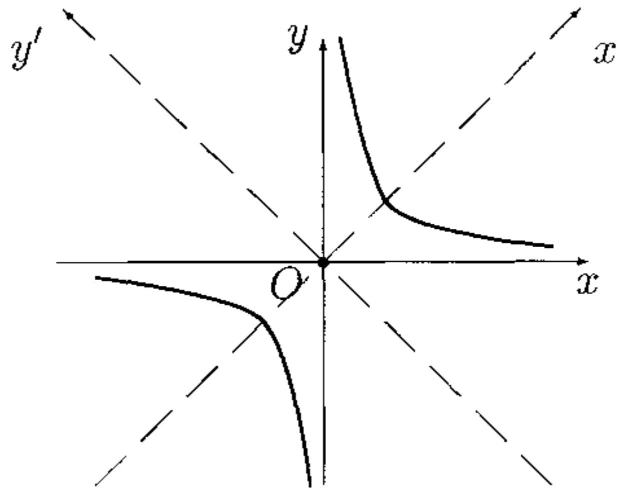


Рис.7.3

Справедливо следующее утверждение, которое называют ***директориальным свойством гиперболы*** и которое аналогично соответствующему свойству эллипса.

Теорема. Точка M принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояния от точки M до фокуса к расстоянию от М до соответствующей этому фокусу директрисы равно эксцентриситету гиперболы.

7.3. Парабола

Параболой называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют уравнению

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Это уравнение называется ***каноническим уравнением параболы.***

Точка O (0, 0) (начало координат) называется ***вершиной параболы***, а точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – ее фокусом. Прямая с уравнением $x = -\frac{p}{2}$ называются ***директрисой параболы,*** а число p (равное ***расстоянию от фокуса до директрисы***) – ***ее параметром.***

Следующее утверждение дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая: была параболой. Это условие нередко принимают за определение параболы.

Теорема. Точка М принадлежит параболе тогда и только тогда, когда она равноудалена от фокуса параболы и от ее директрисы.

7.4. Определение кривой второго порядка

Уравнение второго порядка с двумя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Последнее условие означает, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12} и a_{22} отличен от нуля.

Кривой второго порядка называется множество всех точек на плоскости, координаты которых в подходящей системе координат удовлетворяют некоторому уравнению второго порядка с двумя неизвестными.

Примерами кривых второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола. Кроме этих трех кривых существуют лишь несколько «вырожденных» кривых второго порядка.

По определению кривой второго порядка, она задается уравнением второго порядка в некоторой системе координат.

Теорема. *Для всякой кривой второго порядка существует система координат, в которой уравнение этой кривой имеет один из следующих видов*:

$$Ax^2 + By^2 + C = 0, \text{ где } A \neq 0, B \neq 0,$$

$$Dy^2 + 2Ex + F = 0, \text{ где } D \neq 0.$$

Теорема. *Всякая кривая второго порядка является или эллипсом, или гиперболой, или параболой, или парой прямых* (*пересекающихся, параллельных или совпавших*), *или точкой, или пустым множеством.*

7.5.Задачи для самостоятельного решения

1. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса, заданного уравнением:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $25x^2 + 9y^2 = 225$.

2. Эксцентриситет эллипса е = $\frac{1}{3}$, центр совпадает с началом координат, один из фокусов имеет координаты (– 2,0). Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной 2, до директрисы, соответствующей данному фокусу.

3. Эксцентриситет эллипса е = $\frac{1}{2}$, центр совпадает с началом координат, одна из директрис определяется уравнением x – 16 = 0. Вычислить расстояние от точки эллипса с абсциссой, равной – 4, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

4. Найти полуоси, координаты вершин и фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот и директрис гиперболы, заданной уравнением:

а) $x^2 - 4y^2 = 20$; б) $16x^2 - 9y^2 = -144$.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если даны:

а) точки $M_1(6, -2)$ и $M_2(-8, \sqrt{11})$, принадлежащие гиперболе;

б) точка $M(-5, 3)$, принадлежащая гиперболе, и эксцентриситет $e = \sqrt{2}$;

в) точка $M(6, 2)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения асимптот $y = \pm\frac{1}{2}x$;

г) точка $M(4, 0)$, принадлежащая гиперболе, и уравнения директрис $x = \pm\frac{16}{5}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm 2x$ и уравнения директрис $x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

6. Гипербола задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти:

а) расстояние от фокуса гиперболы до ее асимптоты;

б) произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух асимптот.

7. Составить уравнение гиперболы, если известны:

а) эксцентриситет $e = \frac{5}{4}$, фокус $F(5, 0)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $x = \frac{16}{5}$;

б) эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F(2, -3)$ и уравнение соответствующей ему директрисы $3x - y + 3 = 0$.

8. Найти параметр, координаты вершины и фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением:

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $y^2 = 4 - 6x$; в) $x^2 = 6y + 2$; г) $x^2 = 2 - y$.

9. Составить уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F(-7, 0)$ и уравнение директрисы $x - 7 = 0$;

б) фокус $F(4, 3)$ и уравнение директрисы $y + 1 = 0$;

в) фокус $F(2, -1)$ уравнение директрисы $x - y - 1 = 0$.

7.6. Ответы

1. а) $a = 3$, $b = 2$, вершины $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 2)$, фокусы $(\pm\sqrt{5}, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, директрисы $x = \pm\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

б) $a = 5$, $b = 3$, вершины $(\pm 3, 0)$, $(0, \pm 5)$, фокусы $(0, \pm 4)$, $e = \dfrac{4}{5}$, директрисы $y = \pm\dfrac{25}{4}$.

2. 20.
3. 10.
4. а) $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{5}$, вершины $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$, фокусы $(\pm 5, 0)$, $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{2}$, директрисы $x = \pm 4$;

б) $a = 4$, $b = 3$, вершины $(0, \pm 4)$, фокусы $(0, \pm 5)$, $e = \dfrac{5}{4}$, асимптоты $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, директрисы $y = \pm\dfrac{16}{5}$.

5. а) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; г) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; д) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

6. а) b; б) $\dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

7. а) $9x^2 - 16y^2 = 144$; б) $7x^2 - 6xy - y^2 + 26x - 18y - 17 = 0$.

8. а) $p = 2$, вершина $(2, 0)$, фокус $(3, 0)$, директриса $x - 1 = 0$;

б) $p = 3$, вершина $(\frac{2}{3}, 0)$, фокус $(-\frac{5}{6}, 0)$, директриса $6x - 13 = 0$;

в) $p = 3$, вершина $(0, -\frac{1}{3})$, фокус $(0, \frac{7}{6})$, директриса $6y + 11 = 0$;

г) $p = \frac{1}{2}$ вершина (0, 2), фокус $(0, \frac{3}{2})$, директриса $2y - 5 = 0$.

9. а) $y^2 = -28x$;

б) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$;

в) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

8 Аналитическая геометрия в пространстве

8.1 Уравнения поверхности и линии

В прямоугольной системе координат $OXYZ$ уравнение $F(x; y; z) = 0$ (или уравнение $z = f(x; y)$ является *уравнением поверхности*, если ему удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой поверхности. Если $F(x; y; z)$ – это многочлен n-й степени, то поверхность называется алгебраической n-го порядка. Например, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ – алгебраическая поверхность второго порядка – сфера. В частном случае поверхность может состоять из одной точки, например, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Такому уравнению удовлетворяет единственная точка (0; 0; 0). *Линия в пространстве* задается как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

Такая система должна иметь бесконечно много решений.

8.2. Различные виды уравнений плоскости

Плоскость – это поверхность, задаваемая алгебраическим уравнением первой степени. Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C, D – действительные числа, но A, B, C не равны нулю одновременно, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости (перпендикулярный плоскости). Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$ с нормальным вектором $\vec{n}$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1\ (x_1; y_1; z_1)$, $M_2\ (x_2; y_2; z_2)$ и $M_3\ (x_3; y_3; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если плоскость отсекает на осях координат OX, OY и OZ соответственно отрезки a, b и c, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 1;\ 1)$ и $M_2(2;\ 3;\ 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$.

Решение

Находим координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (1;2;3)$ и нормального вектора данной плоскости $\vec{n} = (2;\ -7;\ 5)$. Нормальный вектор $\vec{n}_1$ искомой плоскости перпендикулярен этим векторам, поэтому

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -7 & 5 \end{vmatrix} = (31;\ 1;\ -11).$$

Используем уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 с нормальным вектором $\vec{n}_1$:

$$31(x - 1) + y - 1 - 11(z - 1) = 0 \text{ или } 31x + y - 11z - 21 = 0.$$

Задачу можно решить и вторым способом, если использовать условие компланарности трех векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$. $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$, где $M(x;\ y;\ z)$ - произвольная точка искомой плоскости.

8.3. Взаимное расположение двух плоскостей

Заданы две плоскости общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Если эти плоскости пересекаются, то их нормальные векторы неколлинеарны и линейный угол двугранного угла равен углу между этими векторами:

$$\cos(\vec{n}_1;\ \vec{n}_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости перпендикулярны, то

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$$

Если плоскости параллельны, их нормальные векторы коллинеарны, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Если плоскости совпадают, то

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

8.4. Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $P(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости, задаваемой уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, можно найти по формуле

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8.5. Различные виды уравнений прямой линии в пространстве

Общие уравнения прямой, как линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_3z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Нормальные векторы этих плоскостей не коллинеарны.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка на прямой, $\vec{S} = (m; n; p)$ – направляющий вектор прямой, $t \in R$.

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

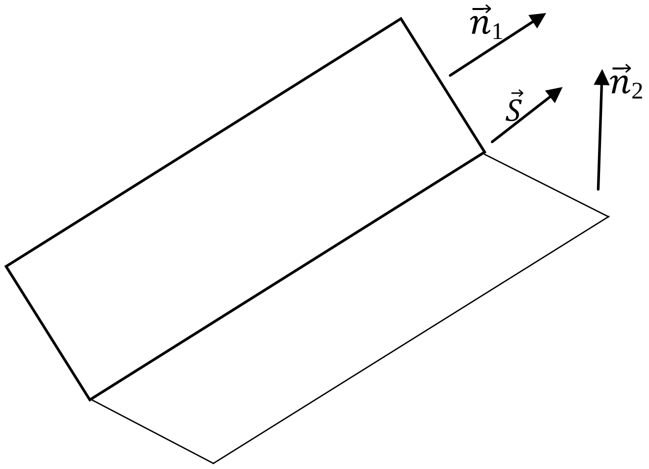
Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1\ (x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Задача. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку
$M_0(2; 0; -3)$ параллельно прямой:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$$

Решение. Находим направляющий вектор данной прямой – это векторное произведение нормальных векторов пересекающихся плоскостей (рис. 7).



$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (-11;\ 17;\ 13).$$

Рис.7

Составляем канонические уравнения искомой прямой по данной точке M_0 и вектору $\vec{s}$, который будет направляющим и для искомой прямой, так как она параллельна данной прямой.

$$\frac{x-2}{-11} = \frac{y}{17} = \frac{z+3}{13}.$$

8.6 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тем самым заданы направляющие векторы этих прямых $\vec{s}_1 = (m_1;\ n_1;\ p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2;\ n_2;\ p_2)$, точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ на первой прямой и точка $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ на второй прямой.

Если данные прямые пересекаются, то координаты направляющих векторов не пропорциональны, а векторы $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ и $|\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарные, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Угол φ между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

В случае перпендикулярности прямых

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Если данные прямые скрещиваются, то $\Delta \neq 0$.

Если данные прямые параллельны, то координаты направляющих векторов пропорциональны

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \Delta_3 = 0.$$

Если данные прямые совпадают, то

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \frac{m_1}{x_2 - x_1} = \frac{n_1}{y_2 - y_1} = \frac{p_1}{z_2 - z_1}.$$

8.7. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ вычисляется по формуле $\mathrm{d} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$, где $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0;\, y_1 - y_0;\, z_1 - z_0)$, $\vec{s} = (m;\, n;\, p)$.

Задача. Найти расстояние от точки $M_1(1;\, 2;\, 3)$ до прямой $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x + z = 3. \end{cases}$

Решение. Прямая задана общими уравнениями, поэтому нужно предварительно найти точку M_0 на этой прямой и ее направляющий вектор $\vec{s}$. Зададим одну координату точки M_0, например, $x = 0$ и найдем другие координаты из системы уравнений $\begin{cases} y - z = 1, \\ z = 3. \end{cases}$ Значит, $\vec{\mathrm{M}}_0(0;\ 4;\ 3)$. Направляющий вектор $\vec{s}$ находим так же, как в предыдущей задаче:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1;\, -3;\, -2).$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (1;\, -2;\, 0)$.

$$\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (4;\, 2;\, -1).$$

$$\left|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}.$$

$$\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

$$\mathrm{d} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{21}{14}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

8.8. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Скрещивающиеся прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

$\vec{s}_1 = (m_1;\, n_1;\, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2;\, n_2;\, p_2)$, $M_1 = (x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2 = (x_2;\, y_2;\, z_2)$. Расстояние между такими прямыми вычисляется по формуле

$$\mathrm{d} = \frac{|\vec{s}_1\vec{s}_2\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{n}|},$$

где $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$.

Задача. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{4}$ и $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

Решение. По условию $\vec{s}_1 = (1;\, 2;\, 4)$, $\vec{s}_2 = (3;\, 1;\, 2)$, $M_1(1;\, 2;\, -3)$, $M_2(-2;\, 3;\, 1)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3;\, 1;\, 4)$. Находим смешанное произведение:

$$\vec{s}_1\vec{s}_2\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 + 12 + 12 - 24 - 2 = -10 \neq 0,$$

значит, прямые действительно скрещиваются.

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0;\, 10;\, -5).$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{0^2+10^2+(-5)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Подставляя в формулу, получаем

$$\mathrm{d} = \frac{|-10|}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

8.9. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая задана уравнением $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ с направляющим вектором $\vec{s} = (m;\, n;\, p)$, а плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A;\, B;\, C)$.

Если прямая пересекает плоскость, то углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость:

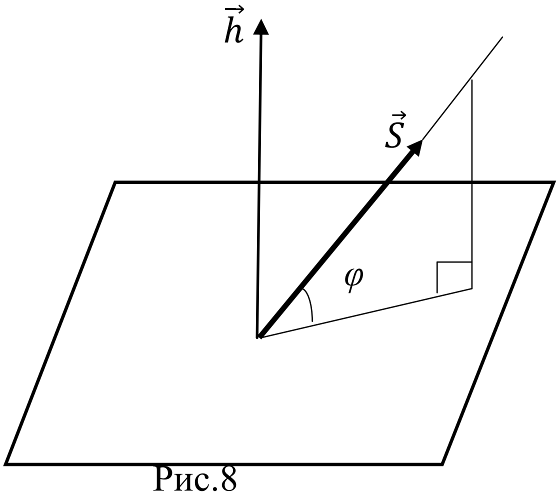


Рис.8

$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

В случае перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ (рис.8)

Если прямая параллельна плоскости, то $Am + Bn + Cp = 0$, но точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ прямой не принадлежит плоскости, т.е.

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0.$$

Если прямая принадлежит плоскости, то $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

Задача. Найти координаты точки пересечения прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ и плоскости $2x + 3y + 3z - 8 = 0$.

Решение. По условию $\vec{s} = (3; -1; 2)$, n (2; 3; 3).
Так как $Am + Bn + Cp = 2 \cdot 3 + 3(-1) + 3 \cdot 2 = 9 \neq 0$, то прямая пересекает плоскость. Переходим к параметрическим уравнениям прямой $\frac{x+2}{3} = \text{t}$,

$x = 3\text{t} - 2$; $\frac{y-2}{-1} = t$, $y = -t + 2$, $\frac{z+1}{2} = t$, $t = 2t - 1$. Подставляем полученные выражения в уравнение плоскости и находим значение t, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости:

$$2(3t - 2) + 3(-t + 2) + 3(2t - 1) - 8 = 0,\ 9t = 9,\ t = 1.$$

Тогда x = 3·1 – 2 = 1, y = –1 + 2 = 1, z = 2·1 – 1 = 1. Точка пересечения имеет координаты (1; 1; 1).

8.10. Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B(3;4;10) перпендикулярно к отрезку AB, если A(–7; 2; – 1).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (4; –7; 1) параллельно плоскости $3x - 7y + 5z - 12 = 0$.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A(8; –3; 1), B(4; 7; 2) перпендикулярно к плоскости $3x + 5y - 7z - 21 = 0$. °
4. Найти расстояние от точки A (1; 2; 3) до плоскости $2x - 2y + z - 3 = 0$.
5. Составить уравнения прямой, проходящей через точки A (3; –2; 1) и B(5;4;5).

6. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0. \end{cases}$

7. Прямая задана общими уравнениями $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$ Составить ее канонические уравнения.

8. Найти точку N, симметричную точке $M(1; 1; 1)$ относительно плоскости $x + y - 2z - 6 = 0$.

9. Найти координаты точки пересечения прямой $\begin{cases} y = -2x + 9, \\ z = 9x - 43 \end{cases}$ и плоскости $3x - 4y + 7z - 33 = 0$.

10. Найти угол между прямой $\begin{cases} 3x - 2y = 24, \\ 3x - z = -4 \end{cases}$ и плоскостью $6x + 15y - 10z + 31 = 0$.

Ответы.

1. $10x + 2y + 11z - 148 = 0$.
2. $3x - 7y + 5z - 66 = 0$.
3. $3x + y + 2z - 23 = 0$
4. 2/3
5. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{3}$.
6. $\cos\varphi = 4/21$
7. $\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$
8. $N(3; 3; -3)$
9. $(5; -1; 2)$
10. $\cos\varphi = 3/133$

9. Типовой расчет по векторной алгебре

Задача 1. По заданным координатам точек A, B и C, векторам $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ найти: а) модуль вектора $\vec{a}$; б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

№ варианта	Условия задачи
1	2
1	$A(4; 6; 3)$, $B(-5; 2; 6)$, $C(4; -4; -3)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
2	$A(4; 3; -2)$, $B(-3; -1; 4)$, $C(2; 2; 1)$, $\vec{a} = -5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
3	$A(-2; -2; 4)$, $B(1; 3; -2)$, $C(4; -4; -3)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
4	$A(2; 4; 3)$, $B(3; 1; -4)$, $C(-1; 2; 2)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
5	$A(2; 4; 5)$, $B(1; -2; 3)$, $C(-1; -2; 4)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$
6	$A(-1; -2; 4)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(1; 4; 2)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$

1	2
7	$A(1; 3; 2)$, $B(–2; 4; –1)$, $C(1; 3; –2)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
8	$A(2; –4; 3)$, $B(–3; –2; 4)$, $C(0; 0; –2)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} – 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
9	$A(3; 4; –4)$, $B(–2; 1; 2)$, $C(2; –3; 1)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
10	$A(0; 2; 5)$, $B(2; –3; 4)$, $C(3; 2; –5)$, $\vec{a} = –3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
11	$A(–2; –3; –4)$, $B(2; –4; 0)$, $C(1; 4; 5)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} – 8\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
12	$A(–2; –3; –2)$, $B(1; 4; 2)$, $C(1; –3; 3)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} – 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
13	$A(5; 6; 1)$, $B(–2; 4; –1)$, $C(3; –3; 3)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} – 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
14	$A(10; 6; 3)$, $B(–2; 4; 5)$, $C(3; –4; –6)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{AC} – 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
15	$A(3; 2; 4)$, $B(–2; 1; 3)$, $C(2; –2; –1)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} – 3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
16	$A(–2; 3; –4)$, $B(3; –1; 2)$, $C(4; 2; 4)$, $\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
17	$A(4; 5; 3)$, $B(–4; 2; 3)$, $C(5; –6; –2)$, $\vec{a} = 9\overrightarrow{AB} – 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
18	$A(2; 4; 6)$, $B(–3; 5; 1)$, $C(4; –5; –4)$, $\vec{a} = –6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$
19	$A(–4; –2; –5)$, $B(3; 7; 2)$, $C(4; 6; –3)$, $\vec{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
20	$A(5; 4; 4)$, $B(–5; 2; 3)$, $C(4; 2; –5)$, $\vec{a} = 11\overrightarrow{AC} – 6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$
21	$A(3; 4; 6)$, $B(–4; 6; 4)$, $C(5; –2; –3)$, $\vec{a} = –7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
22	$A(–5; –2; –6)$, $B(3; 4; 5)$, $C(2; –5; 4)$, $\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} – 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
23	$A(3; 4; 1)$, $B(5; –2; 6)$, $C(4; 2; –7)$, $\vec{a} = –7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$
24	$A(4; 3; 2)$, $B(–4; –3; 5)$, $C(6; 4; –3)$, $\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} – 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$
25	$A(–5; 4; 3)$, $B(4; 5; 2)$, $C(2; 7; –4)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$
26	$A(6; 4; 5)$, $B(–7; 1; 8)$, $C(2; –2; –7)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} – 2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$
27	$A(6; 5; –4)$, $B(–5; –2; 2)$, $C(3; 3; 2)$, $\vec{a} = 6\overrightarrow{AB} – 3\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$
28	$A(–3; –5; 6)$, $B(3; 5; –4)$, $C(2; 6; 4)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} – 5\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$

Задача 2. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

№ варианта	Условия задачи
1	2
1	$\vec{a}$ = (5; 4; 1), $\vec{b}$ = (–3; 5; 2), $\vec{c}$ = (2; –1; 3), $\vec{d}$ = (7; 23; 4)
2	$\vec{a}$ = (2; –1; 4), $\vec{b}$ = (–3; 0; –2), $\vec{c}$ = (4; 5; –3), $\vec{d}$ = (0; 11; –14)
3	$\vec{a}$ = (–1; 1; 2), $\vec{b}$ = (2; –3; –5), $\vec{c}$ = (–6; 3; –1), $\vec{d}$ = (28; –19; –7)
4	$\vec{a}$ = (1; 3; 4), $\vec{b}$ = (–2; 5; 0), $\vec{c}$ = (3; –2; –4), $\vec{d}$ = (13; –5; –4)
5	$\vec{a}$ = (1; –1; 1), $\vec{b}$ = (–5; –3; 1), $\vec{c}$ = (2; –1; 0), $\vec{d}$ = (–15; –10; 5)
6	$\vec{a}$ = (3; 1; 2), $\vec{b}$ = (–7; –2; –4), $\vec{c}$ = (–4; 0; 3), $\vec{d}$ = (16; 6; 15)
7	$\vec{a}$ = (–3; 0; 1), $\vec{b}$ = (2; 7; –3), $\vec{c}$ = (–4; 3; 5), $\vec{d}$ = (–16; 33; 13)
8	$\vec{a}$ = (5; 1; 2), $\vec{b}$ = (–2; 1; –3), $\vec{c}$ = (4; –3; 5), $\vec{d}$ = (15; –15; 24)
9	$\vec{a}$ = (0; 2; 3), $\vec{b}$ = (4; –3; –2), $\vec{c}$ = (–5; –4; 0), $\vec{d}$ = (–19; –5; –4)
10	$\vec{a}$ = (3; –1; 2), $\vec{b}$ = (–2; 3; 1), $\vec{c}$ = (4; –5; –3), $\vec{d}$ = (–3; 2; –3)
11	$\vec{a}$ = (5; 3; 1), $\vec{b}$ = (–1; 2; –3), $\vec{c}$ = (3; –4; 2), $\vec{d}$ = (–9; 34; –20)
12	$\vec{a}$ = (3; 1; –3), $\vec{b}$ = (–2; 4; 1), $\vec{c}$ = (1; –2; 5), $\vec{d}$ = (1; 12; –20)
13	$\vec{a}$ = (6; 1; –3), $\vec{b}$ = (–3; 2; 1), $\vec{c}$ = (–1; –3; 4), $\vec{d}$ = (15; 6; –17)
14	$\vec{a}$ = (4; 2; 3), $\vec{b}$ = (–3; 1; –8), $\vec{c}$ = (2; –4; 5), $\vec{d}$ = (–12; 14; –31)
15	$\vec{a}$ = (–2; 1; 3), $\vec{b}$ = (3; –6; 2), $\vec{c}$ = (–5; –3; –1), $\vec{d}$ = (31; –6; 22)
16	$\vec{a}$ = (1; 3; 6), $\vec{b}$ = (–3; 4; –5), $\vec{c}$ = (1; –7; 2), $\vec{d}$ = (–2; 17; 5)
17	$\vec{a}$ = (7; 2; 1), $\vec{b}$ = (5; 1; –2), $\vec{c}$ = (–3; 4; 5), $\vec{d}$ = (26; 11; 1)
18	$\vec{a}$ = (3; 5; 4), $\vec{b}$ = (–2; 7; –5), $\vec{c}$ = (6; –2; 1), $\vec{d}$ = (6; –9; 22)
19	$\vec{a}$ = (5; 3; 2), $\vec{b}$ = (2; –5; 1), $\vec{c}$ = (–7; 4; –3), $\vec{d}$ = (36; 1; 15)
20	$\vec{a}$ = (11; 1; 2), $\vec{b}$ = (–3; 3; 4), $\vec{c}$ = (–4; –2; 7), $\vec{d}$ = (–5; 11; –15)
21	$\vec{a}$ = (9; 5; 3), $\vec{b}$ = (–3; 2; 1), $\vec{c}$ = (4; –7; 4), $\vec{d}$ = (–10; –13; 8)

1	2
22	$\vec{a}$ = (7; 2; 1), $\vec{b}$ = (3; –5; 6), $\vec{c}$ = (–4; 3; –4), $\vec{d}$ = (–1; 18; –16)
23	$\vec{a}$ = (1; 2; 3), $\vec{b}$ = (–5; 3; –1), $\vec{c}$ = (–6; 4; 5), $\vec{d}$ = (–4; 11; 20)
24	$\vec{a}$ = (–2; 5; 1), $\vec{b}$ = (3; 2; –7), $\vec{c}$ = (4; –3; 2), $\vec{d}$ = (–4; 22; –13)
25	$\vec{a}$ = (3; 1; 2), $\vec{b}$ = (–4; 4; –1), $\vec{c}$ = (2; 3; 4), $\vec{d}$ = (14; 14; 20)
26	$\vec{a}$ = (3; –1; 2), $\vec{b}$ = (–2; 4; 1), $\vec{c}$ = (4; –5; –1), $\vec{d}$ = (–5; 11; 1)
27	$\vec{a}$ = (4; 5; 1), $\vec{b}$ = (1; 3; 1), $\vec{c}$ = (–3; –6; 7), $\vec{d}$ = (19; 33; 0)
28	$\vec{a}$ = (1; –3; 1), $\vec{b}$ = (–2; –4; 3), $\vec{c}$ = (0; –2; 3), $\vec{d}$ = (–8; –10; 13)

Задача 3. Задание для нечетных номеров вариантов: для пирамиды с вершинами в точках *A*, *B*, *C* и *D* найти: а) площадь указанной грани;
б) объем пирамиды.

Задание для четных номеров вариантов: три силы $\vec{P}$, $\vec{Q}$ и $\vec{R}$ приложены в точке *A*. Найти: а) работу равнодействующей этих сил, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку *B*;
б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки *B*.

№ варианта	Условия задачи
1	2
1	*A* (3; 4; 5), *B* (1; 2; 1), *C* (–2; –3; 6), *D* (3; –6; –3), а) *ACD*
2	$\vec{P}$ = (9; –3; 4), $\vec{Q}$ = (5; 6; –2), $\vec{R}$ = (–4; –2; 7), *A*(–5; 4; –2), *B*(4; 6; –5)
3	*A* (1; 3; 1), *B* (–1; 4; 6), *C* (–2; –3; 4), *D* (3; 4; –4), а) *ACD*
4	$\vec{P}$ = (5; –2; 3), $\vec{Q}$ = (4; 5; –3), $\vec{R}$ = (–1; –3; 6), *A*(7; 1; –5), *B*(2; –3; –6)
5	*A* (–5; –3; –4), *B* (1; 4; 6), *C* (3; 2; –2), *D* (8; –2; 4), а) *ACD*
6	$\vec{P}$ = (3; –5; 4), $\vec{Q}$ = (5; 6; –3), $\vec{R}$ = (–7; –1; 8), *A*(–3; 5; 9), *B*(5; 6; –3)
7	*A* (–4; 6; 3), *B* (3; –5; 1), *C* (2; 6; –4), *D* (2; 4; –5), а) *ACD*

1	2
8	$\vec{P}$ = (–10; 6; 5), $\vec{Q}$ = (4; –9; 7), $\vec{R}$ = (5; 3; –3), *A*(4; –5; 9), *B*(4; 7; –5)
9	*A* (3; –2; 6), *B* (–6; –2; 3), *C* (1; 1; –4), *D* (4; 6; –7), а) *ABD*
10	$\vec{P}$ = (5; –3; 1), $\vec{Q}$ = (4; 2; –6), $\vec{R}$ = (–5; –3; 7), *A*(–5; 3; 7), *B*(3; 8; –5)
11	*A* (3; –5; –2), *B* (–4; 2; 3), *C* (1; 5; 7), *D* (–2; –4; 5), а) *ACD*
12	$\vec{P}$ = (–5; 8; 4), $\vec{Q}$ = (6; –7; 3), $\vec{R}$ = (3; 1; –5), *A*(2; –4; 7), *B*(0; 7; 4)
13	*A* (7; 4; 9), *B* (1; –2; –3), *C* (–5; –3; 0), *D* (1; –3; 4), а) *ABD*
14	$\vec{P}$ = (7; –5; 2), $\vec{Q}$ = (3; 4; –8), $\vec{R}$ = (–2; –4; 3), *A*(–3; 2; 0), *B*(6; 4; –3)
15	*A* (5; 2; 4), *B* (–3; 5; –7), *C* (1; –5; 8), *D* (9; –3; 5), а) *ABD*
16	$\vec{P}$ = (3; –4; 2), $\vec{Q}$ = (2; 3; –5), $\vec{R}$ = (–3; –2; 4), *A*(5; 3; –7), *B*(4; –1; –4)
17	*A* (5; 3; 6), *B* (–3; –4; 4), *C* (5; —6; 8), *D* (4; 0; –3), а) *BCD*
18	$\vec{P}$ = (4; –2; –5), $\vec{Q}$ = (5; 1; –3), $\vec{R}$ = (–6; 2; 5), *A*(–5; 4; –2), *B*(4; 6; –5)
19	*A*(–7; –6; –5), *B*(5; 1; –3), *C*(8; –4; 0), *D*(3; 4; –7), а) *BCD*
20	$\vec{P}$ = (7; 3; –4), $\vec{Q}$ = (9; –4; 2), $\vec{R}$ = (–6; 1; 4), *A*(–7; 2; 5), *B*(4; –2; 11)
21	*A* (5; 2; 7), *B* (7; –6; –9), *C* (–7; –6; 3), *D* (1; –5; 2), а) *ABD*
22	$\vec{P}$ = (9; –4; 4), $\vec{Q}$ = (–4; 6; –3), $\vec{R}$ = (3; 4; 2), *A*(–5; 4; –2), *B*(4; 6; –5)
23	*A* (–6; –3; –5), *B* (5; 1; 7), *C* (3; 5; –1), *D* (4; –2; 9), а) *ACD*
24	$\vec{P}$ = (6; –4; 5), $\vec{Q}$ = (–4; 7; 8), $\vec{R}$ = (5; 1; –3), *A*(–5; –4; 2), *B*(7; –3; 6)
25	*A* (–8; 2; 7), *B* (3; –5; 9), *C* (2; 4; –6), *D* (4; 6; –5), а) *ACD*

1	2
26	$\vec{P}$ = (5; 5; –6), $\vec{Q}$ = (7; –6; 6), $\vec{R}$ = (–4; 3; 4), *A*(–9; 4; 7), *B*(8; –1; 7)
27	*A* (–9; –7; 4), *B* (–4; 3; –1), *C* (5; –4; 2), *D* (3; 4; 4), а) *BCD*
28	$\vec{P}$ = (7; –6; 2), $\vec{Q}$ = (–6; 2; –1), $\vec{R}$ = (1; 6; 4), *A*(3; –6; 7), *B*(6; –2; 7)

Задача 4.

№ варианта	Тест задачи
1	2
1	Найти длину вектора $\vec{m} + 2\vec{n}$, если $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\left\lvert\vec{b}\right\rvert = 2$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$
2	Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\lvert\vec{b}\rvert = 5$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$
3	Определить значение k, при котором векторы $3\vec{p} + k\vec{q}$ и $\vec{p} - 2\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, если $\lvert\vec{p}\rvert = \lvert\vec{q}\rvert = 2$, $(\widehat{\vec{p};\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$
4	Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы
5	Найти проекцию вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{2}$; $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{\pi}{4}$
6	Найти длину вектора $\lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 4$, $\lvert\vec{b}\rvert = 12$, $\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = 15$
7	Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 8$, $\lvert\vec{b}\rvert = 15$, $\vec{a} + \vec{b} = 96$
8	Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert = 5$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 45°$
9	Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = 30°$, $\lvert\vec{a}\rvert = 6$, $\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{c}\rvert = 3$
10	Найти длину вектора $\vec{p} + 2\vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\lvert\vec{a}\rvert = 2$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$
11	Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2$, $\lvert\vec{b}\rvert = 4$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{5}{4}\pi$
12	Найти проекцию вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ на вектор $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert = 1$, $(\widehat{\vec{a};\vec{b}}) = \frac{2}{3}\pi$

1	2
13	Найти длину вектора $\vec{m} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2\sqrt{2}$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = \frac{\pi}{4}$
14	Найти косинус угла между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2$, $\lvert\vec{b}\rvert = 1$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 60°$
15	Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert = 5$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 45°$
16	Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, если $\lvert\vec{m}\rvert = \lvert\vec{n}\rvert = 2$, $\widehat{(\vec{m};\vec{n})} = 30°$
17	Найти угол, который образуют векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\lvert\vec{m}\rvert = \lvert\vec{n}\rvert = 1$
18	Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах a = 2p – q и b = p + q, если $\lvert\vec{p}\rvert = 2$, $\lvert\vec{q}\rvert = 1$, $\widehat{(\vec{p};\vec{q})} = 60°$
19	Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 3$, $\lvert\vec{b}\rvert = 2$, $\lvert\vec{c}\rvert = 5$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\widehat{(\vec{a};\vec{c})} = \widehat{(\vec{b};\vec{c})} = 60°$
20	Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $\lvert\vec{p}\rvert = 2\sqrt{2}$ $\lvert\vec{q}\rvert = 3$ и $\widehat{(\vec{p};\vec{q})} = \widehat{(\vec{b};\vec{c})} = 45°$
21	При каком значении k векторы $3\vec{p} + k\vec{q}$ и $\vec{p} - 2\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, если $\lvert\vec{p}\rvert = 7\sqrt{2}$ $\lvert\vec{q}\rvert = 4$, $\widehat{(\vec{p};\vec{q})} = 45°$
22	Найти угол между векторами $\vec{m} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{n} = 2\vec{p} - \vec{q}$, если $\lvert\vec{p}\rvert = 1$, $\lvert\vec{q}\rvert = 2$, $\widehat{(\vec{p};\vec{q})} = 60°$
23	Найти угол, который образуют векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если векторы $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, $\lvert\vec{p}\rvert = 3$, $\lvert\vec{q}\rvert = 2$
24	Найти $\lvert\vec{a} - \vec{b}\rvert$, $\lvert\vec{a}\rvert = 13$, $\lvert\vec{b}\rvert = 19$, $\lvert\vec{a} + \vec{b}\rvert = 24$
25	Найти $\lvert\vec{a} - 3\vec{b}\rvert$, если $\lvert\vec{a}\rvert = 2\sqrt{2}$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 45°$
26	Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} + 3\vec{q}$ и 3p + q, если $\lvert\vec{p}\rvert = \lvert\vec{q}\rvert = 1$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 45°$
27	Найти проекцию вектора $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $\lvert\vec{a}\rvert = \lvert\vec{b}\rvert = 1$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 60°$
28	Найти длину вектора $\vec{p} + \vec{q}$, если $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\lvert\vec{a}\rvert = 1$, $\lvert\vec{b}\rvert = 3$, $\widehat{(\vec{a};\vec{b})} = 120°$

10 Типовой расчет по аналитической геометрии

Задача 1

№ варианта	Тест задачи
1	2
1	Найти точку, симметричную точке $P(-5;\ 13)$ относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$
2	Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + 2p - 7 = 0$, а также одна из его вершин $A(2;\ -3)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника
3	Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(-4;\ -5)$ и уравнения двух высот $5x + 3y - 4 = 0$ и $3x + 8y + 13 = 0$
4	Найти проекцию точки $P(-6;\ 4)$ на прямую $4x - 5y + 3 = 0$
5	Даны две вершины $A(3;\ -1)$ и $B(5;\ 7)$ треугольника ABC и точка $M(4;\ -1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника
6	В треугольнике известна вершина $C(4;\ -1)$, уравнение одной из высот $2x - 3y + 12 = 0$ и уравнение одной из медиан $2x + 3y = 0$. Составить уравнения сторон этого треугольника
7	Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y + 15 = 0$ и $2x + y - 5 = 0$ и точка пересечения диагоналей $O(1{,}5;\ 4{,}5)$. Составить уравнения двух других сторон
8	В треугольнике известны вершины $A(2;\ 1)$, $B(-1;\ 1)$, $C(3;\ -2)$. Составить уравнение высоты, проведенной из вершины A
9	Даны вершины треугольника: $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -8)$ и $C(-6;\ -2)$. Составить уравнения медиан треугольника
10	Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x + y - 1 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $O(3;\ 3)$. Составить уравнения двух других сторон
11	На прямой $3x + 2y - 5 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $(-1;\ -1)$ и $(3;\ 3)$
12	Даны вершины треугольника $A(0;\ 5)$, $B(1;\ -2)$, $C(-6;\ 5)$. Составить уравнения серединных перпендикуляров к его сторонам
13	Даны две вершины треугольника $A(-4;\ 3)$ и $B(4;\ -1)$ и точка пересечения высот $M(3;3)$. Найти координаты вершины C
14	Найти проекцию точки $P(-8;\ 12)$ на прямую, проходящую через точки $A(2;\ -3)$ и $B(-5;\ 1)$

1	2
15	Найти точку, симметричную точке $A(2;\ 1)$ относительно прямой $12x + 16y + 35 = 0$
16	В треугольнике ABC известны координаты двух вершин $A(2;\ –2)$ и $B(3;\ –1)$, а также точка пересечения медиан $E(1;0)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины C
17	Составить уравнения сторон треугольника ABC, если даны две вершины треугольника $A(–3;\ 3)$ и $B(5;\ –1)$ и точка пересечения высот $M(4;\ 3)$
18	В треугольнике известны две вершины $A(–4;\ 4)$ и $B(4;\ –12)$ и точка $K(4;\ 2)$ пересечения высот. Найти координаты третьей вершины
19	Составить уравнения сторон треугольника, если известны координаты одной его вершины (0; 2) и уравнения двух его высот: $x + y = 4$, $y = 2x$
20	Даны уравнения $x + 2y – 3 = 0$ $x + y – 2 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $5x + 6y – 15 = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны
21	В треугольнике ABC известны координаты вершин $A(3;\ –7)$, $B(2;\ –5)$, $C(5;\ –1)$. Составить уравнение средней линии, параллельной стороне
22	Известны середины сторон треугольника $M_1(1;\ 1)$, $M_2(3;\ 1)$ и $M_3(2;\ –1)$. Составить уравнения сторон треугольника
23	Даны стороны треугольника $2x + 3y + 12 = 0$, $7x – 13y + 89 = 0$ и $11x – 7y + 19 = 0$. Найти координаты центра тяжести треугольника
24	Составить уравнения сторон треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(–2;\ 1)$, $B(6;\ 3)$ и точка пересечения его высот $M(5;\ 1)$
25	Даны две вершины треугольника $M_1(–10;\ 2)$ и $M_2(6;\ 4)$, точка пересечения его высот (5; 2). Найти координаты третьей вершины M_3
26	В параллелограмме $ABCD$ известны уравнения сторон $y – x + 2 = 0$ и $5y – x – 6 = 0$ и координаты точки пересечения диагоналей $E(0;\ 0)$. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма
27	Даны уравнения сторон треугольника $x – 2y + 3 = 0$ (AB); $5x + y – 7 = 0$ (BC); $2x + 3y – 21 = 0$ (AC). Найти координаты точки, симметричной вершине B относительно основания AC
28	Даны координаты вершин треугольника $A(–4;\ –4)$, $B(–3;\ 1)$, $C\ (4;\ 5)$. Составить уравнение высоты BK

Задача 2. Составить уравнение плоскости, проходящей так, как указано в условии задачи для каждого варианта.

№ варианта	Условия прохождения плоскости
1	2
1	Через середину отрезка M_1M_2, перпендикулярно к нему, если $M_1(1; 5; 6)$, $M_2(–1; 7; 10)$
2	Через точку A (2; –3; 5) параллельно плоскости XOY
3	Через точку $A(2; 5; –1)$ и через ось OX
4	Через точки $A(2; 5; –1)$, $B(–3; 1; 3)$ параллельно оси OY
5	Через точку A (3; 4; 0) и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$
6	Через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$
7	Через точку $M(6; –10; 1)$ и отсекает на оси OX отрезок $a = –3$, на оси OZ – отрезок $c = 2$
8	Через точку $A(2; 3; –4)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (4; 1; –1)$ и $\vec{b} = (2; –1; 2)$
9	Через точки $A(1; 1; 0)$, $B(2; –1; –1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z – 7 = 0$
10	Через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x – 3y + z – 1 = 0$ и $x – y + 5z + 3 = 0$
11	Через точки $A(3; –1; 2)$, $B(2; 1; 4)$ параллельно вектору $\vec{a} = (5; –2; –1)$
12	Через начало координат перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5; –2; 3)$, $B(1; –3; 5)$
13	Через точку $M(1; –1; 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2; 3; –4)$, $M_2(–1; 2; –3)$
14	Через точку A(3; –4; 1) параллельно координатной плоскости XOZ
15	Через ось OY и точку $M(3; –5; 2)$
16	Через точки $M(1; 2; 3)$ и $N(–3; 4; –5)$ параллельно оси OZ
17	Через точку $M(2; 3; –1)$ и прямую $x = t – 3$, $y = 2t + 5$, $z = –3t + 1$
18	Через точку M (2; –3; –4) и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой длины

1	2
19	Через точки $A(2; 3; –1)$, $B(1; 1; 4)$ перпендикулярно к плоскости $x – 4y + 3z + 2 = 0$
20	Через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y – z + 7 = 0$ и $3x – y + 2z –3 = 0$
21	Через точки $M(2; 3; –5)$ и $N(–1; 1; –6)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4; 4; 3)$
22	Через точку $M(2; 2; –2)$ параллельно плоскости $x – 2y + z = 0$
23	Через точку $M(–1; –1; 2)$ перпендикулярно к плоскости $x – 2y + z – 4 = 0$ и $x + 2y – 2z + 4 = 0$
24	Через точки $M_1(–1; –2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ перпендикулярно к плоскости $x + 2y + 2z – 4 = 0$
25	Через точки $M_1(1; –1; 2)$ и $M_2(1; 1; 4)$ и $M_3(1; 1;4)$
26	Через точку $A(2; 3; 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$
27	Через точку $P(3; –6; 2)$, которая является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость
28	Через точку $B(7; –4; 4)$ перпендикулярно к отрезку AB, где $A(1; 3; –2)$

Задача 3

№ варианта	Текст задачи
1	2
1	Найти проекцию точки $P(2; –1; 3)$ на прямую $x = 3t$, $y = 5t – 7$, $z = 2t + 2$
2	Найти угол между прямой $\begin{cases}2x-3y-3z+18=0,\\ x-2y+z-6=0\end{cases}$ и плоскостью $x – 9y + 5z – 17 = 0$
3	Найти угол между прямыми $\begin{cases}3x-4y-2z=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x=4-t,\\ y=2+3t,\\ z=1-t.\end{cases}$
4	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; –3; 1)$ параллельно прямой $\begin{cases}x+3y-z-4=0,\\ 2x-y+z-5=0.\end{cases}$
5	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; –3; 3)$ и образующей с осями координат OX, OY и OZ углы, соответственно равные 60°, 45°, 120°

1	2
6	Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$
7	Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$
8	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; -5; 3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$
9	Найти точку, симметричную точке $M(1; 1; 1)$ относительно плоскости $x + y - 2z - 6 = 0$
10	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $N(5; -1; -3)$ и параллельно прямой $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$
11	Найти точку пересечения прямых $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}$ и $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}$
12	Найти угол между прямыми $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0 \end{cases}$
13	Вычислить расстояние между параллельными прямыми $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ и $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$
14	Даны точки $A(1; 1;1)$, $B(2; 3;3)$ и $C(3; 3; 2)$. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$
15	Найти проекцию точки $A(3; 2; 4)$ на плоскость $2x + y + 3z - 6 = 0$
16	Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; 3; 0)$ параллельно прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$
17	Найти проекцию прямой $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$
18	Найти точку, симметричную точке $A(4; 3; 01)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$
19	Найти расстояние точки $A(7; 9; 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$
20	Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$
21	Найти точку, симметричную точке $M(4; -3; 1)$ относительно плоскости $x + 2y - z - 3 = 0$

1	2
22	Найти расстояние от точки $A(2; 3; -1)$ до прямой $\begin{cases} 2x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x - 2y + 2z + 17 = 0 \end{cases}$
23	Найти точку, симметричную точке $P(2; -5; 7)$ относительно прямой, проходящей через точки
24	Найти угол между прямыми $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$
25	Найти проекцию точки $A(5; 2; -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$
26	Составить уравнение прямой, перпендикулярной к прямым $\begin{cases} x - 3z + 1 = 0, \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ 7x - z + 2 = 0 \end{cases}$ и пересекающей эти прямые
27	Через точку $A(-1; 0; 4)$ провести прямую (составить уравнения), параллельную плоскости $3x - 4y + z - 10 = 0$ так, чтобы она пересекла прямую $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$
28	Найти координаты точки пересечения прямой $\begin{cases} 2x + y - 9 = 0, \\ -9x + z + 43 = 0 \end{cases}$ и плоскости $3x - 4y + 7z - 33 = 0$

Задача 4. Составить уравнение и построить линию, каждая точка M которой удовлетворяет указанным условиям.

№ варианта	Условие задачи
1	2
1	Расстояние точки M от прямой $x = -6$ в два раза больше, чем от точки $A(1; 3)$
2	Точка M равноудалена от точки $A(3; 2)$ и от прямой $y = -4$
3	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(3; 0)$ и до данной прямой $x = 12$ равно 0,5
4	Расстояние точки M от прямой $y = -2$ в три раза больше, чем от точки $A(5; 0)$
5	Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4; 0)$ и $B(-2; 2)$ равно 28
6	Расстояние точки M до точки $A(2; 1)$ равно расстоянию до прямой $y = -3$
7	Отношение расстояний точки до данной точки $A(10; 0)$ и до данной прямой $x = 6{,}4$ равно 1,25

1	2
8	Расстояние точки M до точки $A(1; 0)$ в пять раз меньше, чем до прямой $x = 8$
9	Точка M равноудалена от точки $A(–3; –1)$ и от прямой $y = 3$
10	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(4; 0)$ и до данной прямой $x = 1$ равно 2
11	Точка M находится от точки $A(4; 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(–2; –1)$
12	Расстояние точки M до точки $A(–2; 5)$ равно расстоянию до прямой $y = 1$
13	Расстояние точки M до прямой $x = –5$ в три раза больше, чем до точки $A(6; 1)$
14	Отношение расстояний точки M до точек $A(–3; 5)$ и $B(4; 2)$ равно 1/3
15	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(8; 0)$ и до данной прямой $x = 4{,}5$ равно 4/3
16	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(0; –6)$ и до данной прямой $y = –8/3$ равно 1,5
17	Расстояние точки M до прямой $y = 7$ в пять раз больше, чем до точки $A(4; –3)$
18	Точка M равноудалена от точки $A(4; –2)$ и от прямой $y = 4$
19	Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(–5; –1)$ и $B(3; 2)$ равна 40,5
20	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(–6; 0)$ и до данной прямой $x = –8/3$ равно 1,5
21	Расстояние точки M до точки $A(2; 1)$ в три раза больше, чем до прямой $x = –5$
22	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(0; 4)$ и до данной прямой $y = 1$ равно 2
23	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(12; 0)$ и до данной прямой $x = 16/3$ равно 1,5
24	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(2; 0)$ и до данной прямой $x = 8$ равно 0,5
25	Расстояние точки M до точки $A(4; –2)$ в два раза меньше, чем до точки $B(1; 6)$
26	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(–4; 0)$ и до данной прямой $x = –9$ равно 2/3
27	Отношение расстояний точки M до данной точки $A(4; 0)$ и до данной прямой $x = 16$ равно 0,5
28	Расстояние точки M до точки $A(3; 2)$ в три раза больше, чем до точки $B(–1; 0)$