Министерство просвещения РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный
гуманитарно-педагогический университет»

Р.М. Нигматулин, М.Ю. Вагина

ЗАДАЧНИК ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно-практическое пособие

Челябинск
2023

УДК 519.1(076.1)
ББК 22.174я73
Н 60

Нигматулин, Р.М. Задачник по дискретной математике: учебно-практическое пособие / Р.М. Нигматулин, М.Ю. Вагина; Министерство просвещения РФ, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет. – Челябинск: Изд-во ЮУрГГПУ, 2023. – 135 с. – ISBN 978-5-907790-43-8. – Текст: непосредственный.

Пособие включает в себя задания по трем основным разделам дисциплины «Дискретная математика»: комбинаторике, рекуррентным соотношениям и теории графов. В каждой из трех частей пособия приводятся примеры с решениями, ответы и указания. Задачник предназначен для проведения практических занятий, организации самостоятельной работы студентов дневного и заочного отделений, а также может быть использован для осуществления текущего контроля.

Для студентов бакалавриата, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки, один из которых «Математика»).

ISBN 978-5-907790-43-8

Рецензенты: Карачик В.В., д-р. физ.-мат. наук, профессор ЮУрГУ
Давыдова Н.А., канд. пед. наук, доцент ЮУрГГПУ

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с методическими рекомендациями по подготовке кадров по программам педагогического бакалавриата («Ядро высшего педагогического образования»), с учетом рекомендуемого содержания дисциплины «Дискретная математика» в предметно-методическом модуле по профилю «Математика».

Задачник предназначен для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов дневного и заочного отделений направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (с двумя профилями подготовки, один из которых «Математика»).

Пособие состоит из трех частей: комбинаторика, рекуррентные соотношения, графы – и содержит более 400 заданий. В начале каждой части приводятся примеры задач с решениями, а в конце – ответы и указания к задачам.

В первой части задачника приводятся различные по уровню сложности и способам решения задания на основные формулы комбинаторики: число перестановок, число сочетаний и размещений (с повторениями и без них), бином Ньютона, полиномиальную формулу. Приводятся примеры использования онлайн-системы Wolfram Alpha для проверки решения задач на полиномиальную формулу.

Вторая часть содержит разнообразные по содержанию задания на рекуррентные соотношения. В условии большинства задач рекуррентное соотношение не задано, его нужно вывести и дополнить начальными условиями. Для проверки решения линейных рекуррентных соотношений приводятся примеры использования онлайн-системы Wolfram Alpha.

В третьей части пособия подобраны и составлены задания, охватывающие основные темы теории графов, включая алгоритмы Р. Прима и Д. Краскала поиска остовных (стягивающих) деревьев минимального веса, алгоритмы Э. Дейкстры и Р. Флойда поиска кратчайших путей, алгоритм Форда – Фалкерсона построения максимального потока и др.

Для подготовки задачника авторы использовали известные учебные пособия по дискретной математике [1–6, 8–17], а также интернет-ресурсы и задачи некоторых олимпиад школьников [7]. Кроме того, в издание было включено значительное количество новых задач, разработанных авторами (часть из них представлена в [18]). Полный список использованных источников приведен в конце пособия.

При разработке задачника учитывался многолетний опыт преподавания авторами дисциплины «Дискретная математика» на физико-математическом факультете ЮУрГГПУ и традиции, заложенные их научным руководителем – профессором доктором физико-математических наук Михаилом Марковичем Кипнисом.

ЧАСТЬ 1. КОМБИНАТОРИКА

Примеры решений задач

Пример 1. Прямоугольник пересекается 9 прямыми, параллельными одной его стороне, и 12 прямыми, параллельными другой (смежной с ней). Сколько всего получилось прямоугольников?

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это прямоугольники. Каждый прямоугольник получается как пересечение двух пар прямых, параллельных соответствующим сторонам данного прямоугольника (рис. 1). Тогда каждый прямоугольник можно составить в два действия: выбрать две прямые, параллельные одной стороне исходного прямоугольника, а затем выбрать еще две прямые, параллельные другой стороне.

Число способов для первого действия равно

$$a_1 = C_{11}^2 = \frac{11!}{2! \cdot 9!} = 55.$$

В этом случае нужно выбрать 2 прямых из 11 (так как имеются 2 стороны прямоугольника и 9 прямых, параллельных им), причем порядок выбора не важен.

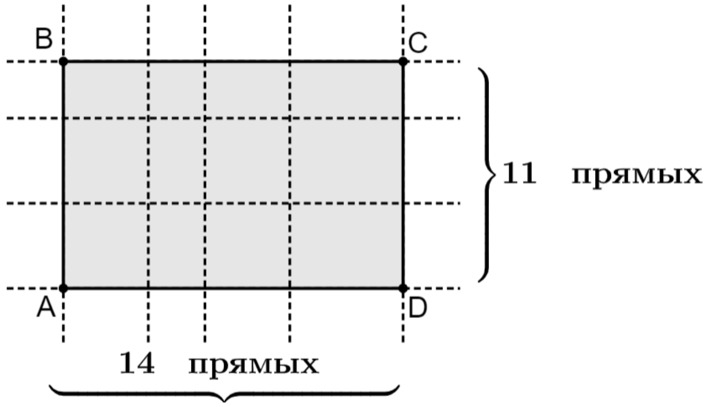


Рис. 1

Число способов для второго действия равно

$$a_2 = C_{14}^2 = \frac{14!}{2! \cdot 12!} = 91.$$

По аналогии в этом случае нужно выбрать 2 прямых из 14 (так как имеются 2 стороны прямоугольника и 12 прямых, параллельных им), причем порядок выбора не важен.

Тогда по правилу произведения общее количество прямоугольников равно произведению числа способов в первом и во втором действиях:

$$a_1 \cdot a_2 = 55 \cdot 91 = 5005.$$

Пример 2. В классе, в котором учатся Петя и Ваня, 31 человек. Сколькими способами можно набрать из учеников этого класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это команды из 11 человек, в которые Петя и Ваня не входят одновременно.

Заметим, что условию задачи удовлетворяют 2 вида команд: без Пети и Вани или только с одним из них.

Количество команд первого вида равно

$$\mathrm{C}_{29}^{11} = \frac{29!}{11! \cdot 18!} = 34\,597\,290.$$

В этом случае нужно выбрать 11 человек из 29 (так как следует исключить Петю и Ваню).

Каждую команду второго вида можно составить за 2 действия: сначала нужно выбрать только Петю или только Ваню, а затем еще 10 человек из 29 оставшихся.

Очевидно, что число способов первого действия равно $a_1 = 2$, а число способов второго действия равно

$$a_2 = C_{29}^{10} = \frac{29!}{10! \cdot 19!} = 20030010,$$

так как нужно выбрать 10 человек из 29 и выборка неупорядоченная.

Тогда по правилу произведения количество команд этого вида равно произведению числа способов в первом и во втором действиях:

$$a_1 \cdot a_2 = 2C_{29}^{10} = 2 \cdot 20030010 = 40060020.$$

Складывая количество команд первого и второго вида, получим общее число команд:

$$C_{29}^{11} + 2C_{29}^{10} = 34\,597\,290 + 40060020 = 74657310.$$

Заметим, что эту задачу можно решить другим способом. Подсчитаем количество всевозможных команд по 11 человек и количество команд, которые не удовлетворяют условию задачи (Петя и Ваня входят в команду вместе). Тогда, очевидно, что искомое количество команд равно разности

$$C_{31}^{11} - C_{29}^{9} = \frac{31!}{11! \cdot 20!} - \frac{29!}{9! \cdot 20!} = 84672315 - 10015005 = 74657310.$$

Пример 3. Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости каких-то троих из них так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Объектами, которые требуется подсчитать в задаче, являются последовательности из пяти компаний (или расписания посещений на 5 дней), удовлетворяющие условию задачи.

Чтобы составить последовательность (расписание), требуется знать количество различных троек друзей. Для этого нужно выбрать трех человек из шести, причем порядок выбора не важен. Тогда количество всех троек друзей равно

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Для составления расписания посещений на 5 дней требуется выбрать 5 троек друзей из имеющихся 20, причем нужно учитывать порядок выбора троек.

Получаем, что число всех расписаний равно

$$A_{20}^{5} = \frac{20!}{15!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 1\,860\,480.$$

Пример 4. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это расположения в ряд 9 шаров.

Случай 1. Чтобы черные шары не оказались рядом, сначала расположим в ряд белые, а затем черные шары, которые могут располагаться (по одному) между белыми или левее их, или правее их, как показано на рис. 2:

Рис. 2

Тогда имеется 6 мест для расположения черных шаров, из которых нужно выбрать 4 места, причем порядок выбора не важен.

Таким образом, число всех способов расположить шары в ряд равно

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

Случай 2. Если все шары различны, то количество всех рядов из 9 шаров можно получить за два действия.

В отличие от случая 1, расположение в ряд белых шаров – это перестановка из 5 элементов, т. к. все шары различаются. Значит, число способов выполнить первое действия равно

$$a_1 = P_5 = 5! = 120.$$

Во втором действии, раскладывая черные шары на те же 6 мест, нужно учитывать их порядок. Поэтому число способов выполнить второе действия равно

$$a_2 = A_6^4 = \frac{6!}{2!} = 360.$$

Тогда по правилу произведения количество всех расположений в ряд 9 шаров равно произведению числа способов в первом и во втором действиях:

$$a_1 \cdot a_2 = 120 \cdot 360 = 43200.$$

Пример 5. В математической олимпиаде участвует 30 студентов. Для награждения 15 финалистов выделено 3 экземпляра одной книги, 4 экземпляра – другой и 8 экземпляров – третьей. Сколькими способами могут быть распределены эти призы?

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это распределения 15 книг между финалистами. Каждый объект можно составить в два действия: первое действие – выбор 15 финалистов из 30 участников, а второе – распределение 15 книг между ними.

Число способов выполнить первое действие равно

$$a_1 = C_{30}^{15} = \frac{30!}{15! \cdot 15!} = 155117520,$$

так как порядок в выборке не важен.

Число способов выполнить второе действие равно

$$a_2 = P(3,4,8) = \frac{(3+4+8)!}{3!\,4!\,8!} = \frac{15!}{3!\,4!\,8!} = 225225,$$

так как распределение всех книг – это перестановка с повторениями из 15 элементов.

Тогда по правилу произведения количество всех распределений 15 книг между финалистами равно произведению

$$a_1 \cdot a_2 = C_{30}^{15} \cdot P(3,4,8) = 34936343442000.$$

Пример 6. Сколькими способами можно переставить буквы слова «расписание» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это расстановки 10 букв.

Чтобы гласные не оказались рядом, первым действием расположим в ряд согласные, а затем выберем места для гласных, которые могут располагаться (по одной) между согласными или левее их, или правее их.

Расположение в ряд согласных букв – это перестановка с повторениями из 5 элементов. Значит, число способов выполнить первое действия равно

$$a_1 = P(2,1,1,1) = \frac{(2+1+1+1)!}{2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Для расположения гласных букв нужно выбрать 4 места из 6, причем порядок выбора не важен. Значит, число способов выполнить второе действие равно

$$a_2 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15.$$

Расположение в ряд гласных букв на выбранных местах – это также перестановка с повторениями из 5 элементов. Тогда число способов выполнить третье действие равно

$$a_3 = P(2,2,1) = \frac{(2+2+1)!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30.$$

Тогда по правилу произведения количество всех расстановок 10 букв слова «расписания» равно

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3 = P(2,1,1,1)\cdot C_6^4\cdot P(2,2,1) = 60\cdot 15\cdot 30 = 27000.$$

Пример 7. Сколькими способами 4 друга могут разделить между собой 9 одинаковых яблок и 3 одинаковых груши, если у каждого должно быть хотя бы одно яблоко?

Решение. Объекты, которые требуется подсчитать в задаче, – это распределения всех 12 фруктов между друзьями.

Каждое распределение можно составить за два действия: сначала поделим 9 яблок между друзьями так, чтобы у каждого было хотя бы одно яблоко, а затем поделим между ними 3 груши.

Чтобы подсчитать количество способов первого действия, найдем число решений в натуральных числах уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$

где x_i – количество яблок у i-го друга, $i = 1, \dots, 4$. Тогда

$$a_1 = C_{9-1}^{4-1} = C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56.$$

Количество способов второго действия – это число решений в целых неотрицательных числах уравнения

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3,$$

где y_i – количество груш у i-го друга, $i = 1, \dots, 4$. Тогда

$$a_2 = C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20.$$

Тогда по правилу произведения количество распределений всех фруктов между друзьями равно

$$a_1 \cdot a_2 = 56 \cdot 20 = 1120.$$

Замечание. Задача о количестве решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

в натуральных или целых неотрицательных числах известна как задача Муавра, а метод ее решения часто называют «методом перегородок».

Пример 8. Найдите сумму коэффициентов при натуральных степенях x в разложении

$$\left(\frac{2}{x} - \sqrt[4]{x} - x^3\right)^5.$$

Решение. Используя полиномиальную формулу, запишем разложение в виде

$$\left(\frac{2}{x} - \sqrt[4]{x} - x^3\right)^5 =$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=5} \frac{5!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \cdot (2x^{-1})^{n_1} \cdot \left(-x^{\frac{1}{4}}\right)^{n_2} \cdot (-x^3)^{n_3} =$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=5} \frac{5!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_1!} \cdot (-1)^{n_2+n_3} \cdot 2^{n_1} \cdot x^{-n_1+\frac{n_2}{4}+3n_3}.$$

Натуральные степени x получаются при натуральных значениях выражения $\left(-n_1 + \dfrac{n_2}{4} + 3n_3\right)$. Так как $n_1 + n_2 + n_3 = 5$ и все переменные неотрицательные, то возможные варианты можно получить перебором. Учитывая, что n_2 кратно 4, последовательно увеличивая значения n_2 и n_1, составим таблицу:

n_2	n_1	n_3	$-n_1+\frac{n_2}{4}+3n_3$	Коэффициент в разложении
0	0	5	15	-1
0	1	4	11	10
0	2	3	7	-40
0	3	2	3	80
0	4	1	$-1 \notin \boldsymbol{N}$	–
0	5	0	$-5 \notin \boldsymbol{N}$	–
4	0	1	4	-5
4	1	0	$0 \notin \boldsymbol{N}$	–

Тогда сумма коэффициентов при натуральных степенях x в разложении $\left(\frac{2}{x}-\sqrt[4]{x}-x^3\right)^5$ равна: $-1+10-40+80-5=44$.

Замечание. Для проверки полное разложение можно получить, например, с помощью онлайн-калькулятора WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/), используя непосредственный ввод выражения $\left(\frac{2}{x}-\sqrt[4]{x}-x^3\right)^5$ (рис. 3) или команду Expand (рис. 4).

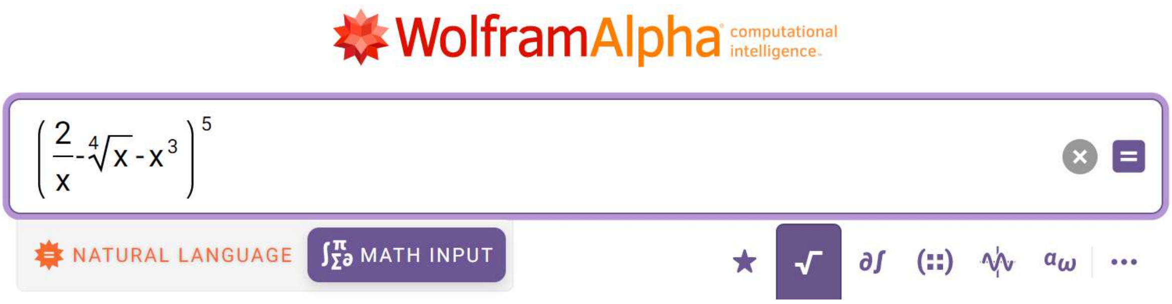


Рис. 3

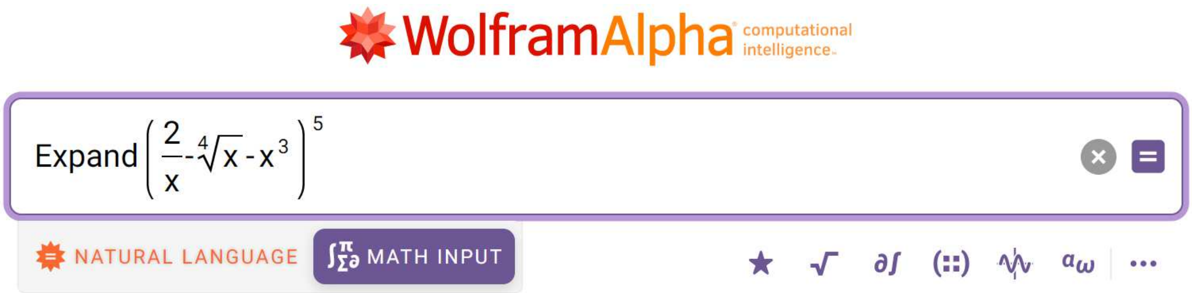


Рис. 4

Разложение $\left(\frac{2}{x}-\sqrt[4]{x}-x^3\right)^5$ в сумму рациональных степеней x выводится в блок Result (рис. 5).

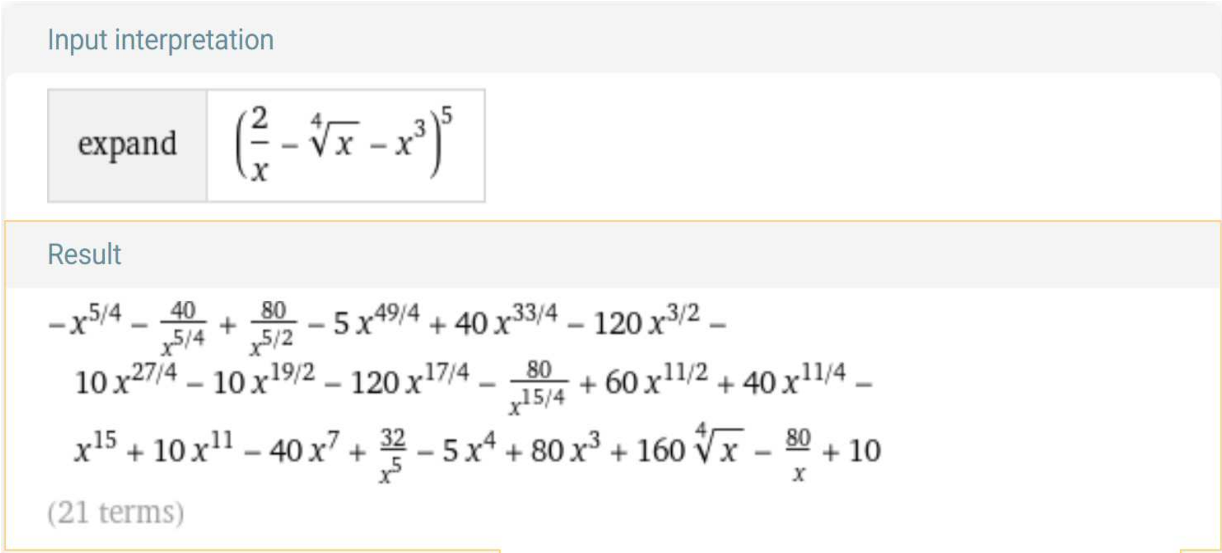


Рис. 5

Задачи

1.1. В книге 350 страниц. Сколько цифр понадобится для нумерации страниц книги?

1.2. Шифр сейфа состоит только из 6 цифр, которые должны набираться последовательно и могут повторяться. Чему в этом случае равно общее число всех возможных комбинаций шифра?

1.3. Сколько существует двузначных чисел, не содержащих цифр 0, 2, 5?

1.4. Сколько существует двузначных чисел, не содержащих цифр 1, 3, 6?

1.5. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, записывающихся только с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

1.6. Сколько нечетных и сколько четных четырехзначных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать только один раз?

1.7. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 386429, если: а) каждую цифру можно использовать не более одного раза; б) цифры в числе могут повторяться?

1.8. Сколько существует пятизначных чисел,

1) оканчивающихся двумя семерками?

2) начинающихся с двух одинаковых цифр?

3) в каждом из которых нет одинаковых цифр?

4) в каждом из которых соседние цифры различны?

5) делящихся на 4 и не содержащих цифр 0, 4, 6, 8?

6) в записи которых есть одинаковые цифры?

7) в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

1.9. Сколько различных автомобильных номеров для одного региона можно составить, если для использования на знаках разрешены 12 букв кириллицы, имеющие графические аналоги в латинском алфавите, и все 10 цифр?

1.10. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих 5 языков?

1.11. Сколько различных четырехзначных чисел, меньших 5000, можно составить из цифр 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться?

1.12. Сколько четырехзначных нечетных чисел, больших 6000, можно составить из цифр числа 9876210, если цифры в числе не должны повторяться?

1.13. Сколько различных четырехзначных нечетных чисел, меньших 4000, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 7, 8 при условии, что цифры в числе не повторяются?

1.14. Сколько различных пятизначных нечетных чисел, меньших 60000, можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 6, 7, 9 при условии, что цифры в числе не повторяются?

1.15. На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

1.16. Сколько диагоналей у выпуклого восьмиугольника? Сколько диагоналей у выпуклого n-угольника?

1.17. Сколько натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^4 \cdot 4^5$?

1.18. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ – различные простые числа. Сколько делителей имеет число $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ \dots \cdot \ p_n^{k_n}$, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – некоторые натуральные числа?

1.19. Сколько всего двузначных, трехзначных и четырехзначных чисел имеется в пятеричной системе счисления?

1.20. Сколько номеров, состоящих из трех букв, за которыми идут пять цифр, можно составить, использовав 32 буквы и 10 цифр?

1.21. Даны 6000 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 6000 (на каждой карточке написано только одно число, притом числа не повторяются). Требуется выбрать две карточки, для которых сумма написанных на них чисел делится на 100. Сколькими способами это можно сделать?

1.22. В сумме $32 + 33 + 34 + \ldots + 100$ нужно вычеркнуть несколько слагаемых так, чтобы получившаяся сумма стала равна 4455. Сколькими способами это можно сделать?

1.23. Сколько десятизначных чисел можно составить так, чтобы любые две соседние цифры отличались на единицу, и если в их десятичной записи можно использовать только цифры 1, 2 и 3?

1.24. Сколько различных квадратных трехчленов $ax^2 + bx + c$ можно составить, если коэффициентами могут быть числа -1, 0, 1? Сколько из них имеют действительные корни?

1.25. Сколько можно составить симметричных относительно главной диагонали матриц четвертого порядка с элементами 0 или 1?

1.26. При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифры и знаки препинания обозначаются точками « · » и тире « – ». При этом для одних букв используется только один знак (например, буква Е – это « · »), а для некоторых приходится использовать пять знаков (Э – это символы « · · – · · »). Почему нельзя обойтись меньшим числом знаков?

1.27. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

1.28. Сколькими способами можно поставить фигуры на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга: а) две ладьи; б) два короля; в) два слона; г) два коня; д) два ферзя?

1.29. Докажите тождество:

1) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n^3$;

2) $C_n^k = C_{n-1}^{n-k} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{n-k-2}$.

1.30. Найти n, если:

1) $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240A_{n+3}^{k+3}$;

2) $C_{n+3}^n - C_{n+2}^{n-1} = 15(n+1)$;

3) $C_{10}^n > 2C_{10}^{n+1}$;

4) $C_n^{n-2} < 60$;

5) $A_n^3 - C_n^3 = 10C_{n-1}^3$;

6) $2A_{n-6}^2 - C_{n-5}^{n-7} \leq 14$;

7) $C_6^2 C_{n-1}^3 + 5C_5^2 = 5C_{n-2}^2 C_n^{n-1}$;

8) $\dfrac{2P_{n+1} + 3P_n}{3P_{n+2} + 8P_{n+1}} = \dfrac{3A_{n+1}^3}{5A_{n+2}^4}$;

9) $\dfrac{3P_n + 2P_{n-1}}{2P_{n+2} + 4P_{n+1}} = \dfrac{4A_n^2}{3A_{n+2}^4}$;

10) $A_n^4 = 6(A_{n-1}^3 + C_{n-1}^3)$.

1.31. Сколько есть перестановок цифр $0, 1, 2, \dots, 9$, в которых между цифрами 0 и 1 стоят ровно 3 цифры?

1.32. Сколько существует перестановок из n различных элементов, в которых один данный элемент идет впереди другого данного элемента?

1.33. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два элемента стоят рядом?

1.34. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

1.35. Найдите сумму всех семизначных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \dots, 7$.

1.36. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 41 четыре числа так, чтобы их сумма была нечетной?

1.37. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 39 четыре числа так, чтобы их сумма была четной?

1.38. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, никакие две из которых не стоят рядом?

1.39. Имеется карточная колода из 52 карт. Каким числом способов можно раздать по 13 карт четырем игрокам?

1.40. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 8 карт так, чтобы среди них был хотя бы один король и только два туза?

1.41. Сколько существует восьмизначных чисел, у которых цифры расположены в порядке убывания?

1.42. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 6 синих и 7 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

1.43. Из 12 девушек и 8 юношей выбирают команду, состоящую из шести человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

1.44. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10?

1.45. Сколько существует прямоугольных параллелепипедов, не имеющих квадратных граней, длины ребер которых являются целыми числами от 1 до 10? Сколько из этих параллелепипедов имеют объем меньше 42?

1.46. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых есть хотя бы две единицы?

1.47. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

1.48. Сколько различных несократимых дробей (правильных и неправильных) можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два различных числа?

1.49. Карточка с шифром представляет собой таблицу 2×6 клеток. В первой строке записывают 6 из следующих букв латинского алфавита: A, B, C, D, E, F, G, H. Во второй строке 2 клетки закрашивают в красный цвет, 2 – в синий и еще 2 оставляют белыми. Сколько различных карточек с шифрами можно сделать?

1.50. Карточка с шифром представляет собой таблицу 3×5 клеток. В первой строке записывают две из следующих букв латинского алфавита: A, B, C, D, E – и три различные ненулевые цифры. Во второй строке три клетки закрашивают в красный цвет, а в третьей строке две клетки закрашивают в синий цвет. Сколько различных карточек с шифром можно сделать?

1.51. Требуется составить график ежедневной работы по три человека для 9 сотрудников предприятия так, чтобы тройки не повторялись. На какой максимальный период времени (в днях) можно составить такой график? Сколько дней за весь период отработает каждый сотрудник?

1.52. Для групповых сеансов психотерапии выбирают 3 женщин из 6 и 4 мужчин из 11, наблюдающихся у психолога. На какой максимальный период времени (в днях) можно составить график сеансов, если каждый день приходит только одна группа и группы (по составу) не повторяются? Сколько сеансов за этот период посетит каждый мужчина и каждая женщина?

1.53. Группе из 20 студентов выделили 3 билета в театр. Сколькими способами можно распределить эти билеты между студентами, если: а) все билеты в один и тот же театр; б) билеты в три разных театра?

1.54. Сколько существует разносторонних треугольников, длины сторон которых могут принимать значения 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10?

1.55. В шахматном кружке занимаются 3 девочки и 10 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из пяти человек, в которую обязательно должны входить хотя бы две девочки. Сколькими способами это можно сделать?

1.56. В шахматном кружке занимаются 3 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо сформировать команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

1.57. В лифт 16-этажного дома одновременно зашли 5 пассажиров. Сколькими способами двое из них могут выйти на одном этаже, а трое других – на разных?

1.58. В классе, в котором учатся Коля и Толя, 25 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса волейбольную команду (6 человек) так, чтобы Коля и Толя не входили в команду одновременно?

1.59. Сколько имеется 10-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается трижды, а 0 – четырежды?

1.60. У одного человека есть 7 книг по математике и 6 по физике, а у другого – 13 книг по истории. Сколькими способами они могут обменять 4 книги первого на 4 книги второго, если первый для обмена отдает книги и по математике и по физике?

1.61. Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

1.62. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

1.63. Имеется m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом? Рассмотреть два случая: 1) шары одного цвета неотличимы друг от друга; 2) все шары разные.

1.64. Из полной колоды карт (52 карты) извлекли 8 карт. Во скольких случаях среди них окажется хотя бы 2 бубновые карты и еще только 4 карты другой масти?

1.65. Найдите сумму трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3 и 4, если никакая цифра не должна появляться в записи дважды?

1.66. Сколько четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, делящихся на 4, можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5?

1.67. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если: 1) все путевки различны; 2) все путевки одинаковы?

1.68. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

1.69. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 4 места в каждом. Из 8 пассажиров трое желают сидеть по ходу поезда, двое – против, а остальным безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

1.70. В каюте имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть по движению теплохода, трое – против движения, остальным безразлично как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

1.71. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определите число точек пересечения диагоналей.

1.72. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

1.73. На прямой отметили 10 различных точек. Сколько при этом получилось отрезков?

1.74. На полке стоят p книг в черных переплетах и q книг в синих переплетах, причем все книги разные. Сколькими способами можно расставить книги так, чтобы книги в черных переплетах стояли рядом?

1.75. На окружности отметили 12 различных точек. Сколько при этом получилось дуг? Сколько дуг получится в этом случае для n различных точек?

1.76. В классе 12 учеников. Их нужно разбить на две группы (первую и вторую), состоящие из четного числа учеников. Сколькими способами это можно сделать?

1.77. В восточной игре «нарды» 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле или пустое, или занято несколькими белыми шашками, или занято нескольким черными шашками. Сколькими способами можно так поставить шашки?

1.78. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на черных клетках?

1.79. Сколько различных восьмизначных чисел, кратных 20 (последние две цифры образуют число, кратное 20), можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, если: а) каждую цифру можно использовать не более одного раза; б) допускается повторение цифр?

1.80. Сколько четырехзначных натуральных чисел с различными цифрами, содержащих цифру 3, можно составить с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

1.81. На окружности последовательно отмечены точки $A_1, \dots, A_{12}$. Сколько существует:

1) хорд с концами в отмеченных точках;

2) треугольников с вершинами в отмеченных точках;

3) выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках;

4) треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;

5) треугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5?

1.82. В слове «логарифм» буквы переставляются так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными. Сколько существует всего таких перестановок?

1.83. На плоскости даны 10 прямых, причем среди них нет параллельных и через каждую точку их пересечения проходят ровно 2 прямые. Сколько точек пересечения у этих 10 прямых?

1.84. Из группы в 16 человек нужно выделить бригадира и четырех членов бригады. Сколькими способами это можно сделать?

1.85. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке возрастания?

1.86. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке убывания?

1.87. Дан квадрат. Каждая его сторона разбита на n равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Сколько существует 1) прямоугольников, 2) квадратов, ограниченных проведенными линиями?

1.88. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует: а) треугольников, б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

1.89. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.90. В состав сборной команды по футболу включены 2 вратаря, 6 защитников, 7 полузащитников и 5 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?

1.91. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

1.92. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы среди них был: а) только один туз; б) хотя бы один туз; в) среди них был хотя бы один туз и только один король?

1.93. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

1.94. Сколько имеется 7-значных чисел, в десятичной записи которых 1 встречается трижды, а 0 – дважды?

1.95. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять две книги одного на две книги другого?

1.96. На школьном вечере присутствуют 15 девушек и 12 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

1.97. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

1.98. Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по 5, 7 и 3 человек в каждой?

1.99. Сколькими способами можно разбить 18 человек на три различающиеся команды по 7, 8 и 3 человека в каждой?

1.100. Сколькими способами можно разделить 15 человек на 3 команды по 5 человек в каждой, если: а) команды не различаются б) команды различаются?

1.101. Сколькими способами можно переставить буквы слова *эпиграф* так, чтобы гласные и согласные буквы были расположены в алфавитном порядке?

1.102. Хор состоит из 10 участников. Сколькими способами можно в течение трех дней выбирать по 6 участников так, чтобы каждый день были различные составы хора?

1.103. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные, а три – нечетные?

1.104. Сколькими способами можно рассадить за десятью партами 10 мальчиков и 10 девочек так, чтобы за каждой партой сидели: а) мальчик слева, а девочка справа; б) мальчик и девочка?

1.105. Сколькими способами можно упаковать 9 разных книг в 5 бандеролей, если 4 бандероли должны содержать по 2 книги?

1.106. 5 девушек и 3 юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

1.107. Для подарков ко дню 8 Марта молодой человек должен приобрести две броши и три браслета. В магазине ему предложили на выбор пять брошей и семь браслетов. Сколько способов выбора у молодого человека?

1.108. Восемь человек должны расположиться в двух комнатах, причем так, чтобы в каждой было не менее трех человек. Сколькими способами это можно сделать?

1.109. Сколькими способами можно рассадить за столом пять гостей, если стол накрыт на семь персон?

1.110. Десять команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу, лучшие из которых занимают 1-е, 2-е и 3-е места. Две команды, занявшие последние места, не будут участвовать в следующем первенстве. Сколько различных вариантов результата первенства может быть, если учитывать только положение первых трех и последних двух команд?

1.111. Ресторан системы фастфуд предлагает меню, состоящее из 10 рыбных и мясных блюд, 2 овощных гарниров, 4 напитков и 3 десертов. Сколько различных вариантов обеда может составить посетитель, если его обед будет состоять из гарнира, одного напитка и одного десерта?

1.112. Восемь девушек отправились в путешествие на двух лодках, в меньшей из которых могли поместиться не более 4, а в большей – не более 6. Сколькими различными способами они могут распределиться в разные лодки? (Распределения считаются различными, если хотя бы одна из девушек окажется в другой лодке.)

1.113. В театре 10 актеров и 8 актрис. Сколькими способами можно распределить между ними роли в пьесе, в которой 5 мужских и 3 женские роли?

1.114. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.115. Сколькими способами можно упаковать 10 различных книг в трех бандеролях соответственно по две, по три, по четыре книги в каждой бандероли?

1.116. Сколько всего многочленов 7-й степени вида $a \cdot x^7 + b \cdot x^k + + c$ $(k \in N)$ с попарно различными коэффициентами можно составить, если коэффициентами многочлена могут быть числа 1, 2, 3, 4, 5?

1.117. Сколькими способами можно переставлять буквы слова *огород* так, чтобы три буквы ***о*** не стояли рядом?

1.118. Сколько имеется 9-значных чисел, в десятичной записи которых 0 встречается трижды, а 1 – четырежды?

1.119. Сколько существует различных двоичных последовательностей, составленных из шести единиц и четырех нулей?

1.120. На полке стоят 6 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

1.121. Найти число ломаных, ведущих из точки $O(0,0)$ в точку $P(10,10)$. Вершины ломаных находятся в точках с целыми координатами, а каждое звено направлено либо вправо, либо вверх.

1.122. Найти число ломаных, ведущих из точки $A(2,1)$ в точку $C(7,8)$ и проходящих через точку $B(4,4)$. Вершины ломаных находятся в точках с целыми координатами, а каждое звено направлено либо вправо, либо вверх.

1.123. Замок хранилища в банке открывается одновременным поворотом двух разных ключей. Охрана хранилища состоит из 6 человек. Сколькими способами можно распределить эти два ключа между охранниками?

1.124. Сколько различных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слов:

1) параллелепипед,
2) эксцентриситет,
3) предприниматель,
4) достопримечательность,
5) одиннадцатиклассница,
6) последовательность,
7) злоумышленник?

1.125. Сколькими способами 12 одинаковых монет можно разложить по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один из кошельков не остался пустым?

1.126. Сколько различных перестановок можно получить из букв слов: 1) абракадабра; 2) математика; 3) университет?

1.127. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (король, ферзь, две ладьи, два слона и два коня) на первой линии шахматной доски (не соблюдая шахматные правила)?

1.128. В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем 8 открыток (не обязательно различных).

1.129. У мамы было 2 одинаковых яблока, 3 одинаковых груши и 4 одинаковых апельсина. Каждый день она давала ребенку по одному фрукту. Сколькими способами она могла это сделать?

1.130. Сколько разных браслетов можно сделать из 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

1.131. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 3 одинаковых апельсина, одну сливу и один мандарин?

1.132. Общество из n членов выбирает из своего состава одного представителя. Сколькими способами может произойти: а) тайное голосование (т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально); б) открытое голосование?

1.133. Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок. Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках, если: а) ведется поименный учет выхода пассажиров на каждой остановке; б) учитывается только количество вышедших на каждой остановке пассажиров?

1.134. Сколькими способами 4 черных шара, 5 белых и 6 синих шаров можно разложить в 8 различных ящиков?

1.135. Сколькими способами 8 красных шаров, 7 желтых шаров и 5 синих шаров можно разложить в 4 различных ящика, чтобы в каждом ящике были шары всех цветов?

1.136. В магазине продаются яблоки, груши, апельсины. Сколькими способами можно купить 4 фрукта?

1.137. Сколькими способами 5 человек могут разделить между собой 7 одинаковых яблок, 2 апельсина и один мандарин, если у каждого должно быть хотя бы одно яблоко?

1.138. Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна: а) 2; б) 8?

1.139. У Игоря есть все семь книг про Гарри Поттера. Сколькими способами Игорь может расставить эти семь томов на три различные книжные полки так, чтобы на каждой полке стояла хотя бы одна книга? (Расстановки, которые отличаются порядком книг на полке, считаются различными).

1.140. Сколько 9-значных чисел, делящихся на 5, можно составить путем перестановки цифр числа 377353752?

1.141. На олимпиаду пришло 8 студентов. Сколькими способами их можно распределить в 3 аудитории, чтобы в каждой аудитории находился хотя бы один студент?

1.142. Сколькими способами 7 красных шаров, 9 желтых шаров и 6 синих шаров можно разложить в 5 различных ящиков так, чтобы в каждом ящике были шары желтого и синего цветов?

1.143. Для проведения мероприятия деканат поручил $2m$ студентам выполнить $3n$ заданий $(3n > 2m)$. Сколькими способами можно распределить эти задания, если каждому студенту что-нибудь поручено и учитывается лишь количество заданий у студента?

1.144. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы:

1) в каждом ящике оказалось не менее двух шаров;

2) в каждом ящике оказалось не более 5 шаров;

3) оказалось не более двух пустых ящиков?

1.145. Сколькими способами в 6 различных коробок можно разложить 11 ручек, 10 карандашей и 8 фломастеров, если в каждой коробке должна быть хотя бы одна ручка и одна из коробок должна быть без фломастеров?

1.146. Сколькими способами можно разложить 16 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы оказалось не более трех пустых ящиков?

1.147. Сколькими способами 6 красных шаров, 9 белых шаров и 3 синих шара можно разложить в 5 различных ящиков, если в каждом ящике должен быть хотя бы один белый шар и только в двух ящиках не должно быть красных шаров?

1.148. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы: 1) в каждом ящике оказалось не менее двух шаров; 2) в каждом ящике оказалось не более 5 шаров; 3) оказалось не более двух пустых ящиков?

1.149. В кошельке находится достаточно большое количество 1-рублевых, 2-рублевых, 5-рублевых и 10-рублевых монет. Сколькими способами можно извлечь три монеты из кошелька?

1.150. На общем собрании присутствуют $50k$ акционеров. На пост председателя совета директоров выдвинуто $2k$ кандидатов. Сколькими способами может произойти тайное голосование, т.е. учитывается лишь число голосов, поданных за каждого кандидата, и не учитывается, кто за кого голосовал персонально (каждый кандидат автоматически голосует за себя)?

1.151. Для прохождения практики $5k$ студентов необходимо направить в $2m$ школ ($5k > 2m$). Сколькими способами можно распределить студентов по этим школам, если в каждую школу кто-нибудь направлен и учитывается лишь количество студентов в каждой школе?

1.152. Сколько всего пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры будут расположены в неубывающем порядке?

1.153. Написать формулу бинома Ньютона:

1) $(x+1)^5$;

2) $(a-b)^8$;

3) $(x-2y)^7$.

1.154. Найти коэффициент многочлена:

1) $(x+2)^{10}$ при x^3;

2) $(1-2x)^7$ при x^4;

3) $(1-x+x^2)^5$ при x^5;

4) $(1+2x-3x^2)^6$ при x^6;

5) $(2-x^4+x^7)^{15}$ при x^{17}.

1.155. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)^{15}$, содержащий a^5, не выписывая все члены разложения.

1.156. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5$;

2) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8$.

1.157. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

1) $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{20}$;

2) $(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2})^{100}$;

3) $(\sqrt[3]{6}+\sqrt[5]{18})^{60}$;

4) $(\sqrt[5]{12}+\sqrt[4]{6})^{64}$;

5) $(\sqrt[3]{12}+\sqrt[4]{18})^{80}$;

6) $(\sqrt[4]{6}+\sqrt[6]{12})^{72}$.

1.158. Вычислить сумму:

1) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k$;

2) $\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k$.

1.159. С помощью формулы бинома Ньютона доказать тождества:

1) $\sum_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n$;

2) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;

3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^k C_n^k = 1$.

1.160. Доказать, что значение выражения $5^n + 28n - 1$, где n – натуральное число, делится на 16.

1.161. Доказать, что значение выражения $4^n + 15n - 1$, где n – натуральное число, делится на 9.

1.162. Используя бином Ньютона, докажите, что значение выражения $7^n + 3^{2n}$, где n – нечетное натуральное число, делится на 16.

1.163. Найти номер члена разложения бинома, не содержащего x:

1) $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right)^{16}$;

2) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$.

1.164. Найти наибольший член разложения $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{12}$.

1.165. Найдите наименьший член разложения $(2-\sqrt{3})^{13}$.

1.166. Найти сумму биномиальных коэффициентов, если известно, что биномиальный коэффициент третьего члена равен 45.

1.167. При каком значении n восьмой член разложения выражения $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона не зависит от x?

1.168. В выражении $\left(x^4+\frac{1}{x}\right)^n$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Известно, что шестой член разложения имеет вид $56x^7$. Найдите n.

1.169. Найдите сумму коэффициентов при натуральных степенях переменных в разложении:

1) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}+x^4\right)^5$;

2) $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[5]{x}-x^3\right)^6$;

3) $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}+y-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^5$.

1.170. Найти коэффициент:

1) при xyz^2 после раскрытия скобок в выражении $(x-3y+z-2)^6$;

2) при x^2yz^3 после раскрытия скобок в выражении $(2x-y+z-3)^7$.

Ответы и указания

1.1. 942. **1.2.** 10^6. **1.5.** 360. **1.6.** 12 и 12. **1.7.** а) 120; б) 432. **1.9.** $12^3 \cdot 10^3$.

1.10. 20. **1.14.** 480. **1.15.** $\dfrac{10 \cdot 2^8}{2} = 1280$. **1.16.** 0; $\dfrac{n(n-3)}{2}$. **1.17.** 140.

1.19. 20; 100; 500. **1.23.** 64. **1.27.** 147 пар. **1.28.** а) $\dfrac{64 \cdot 49}{2} = 1568$;

б) $\dfrac{4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55}{2} = 1806$;

в) $\dfrac{28 \cdot 56 + 20 \cdot 54 + 12 \cdot 52 + 4 \cdot 50}{2} = 1736$;

г) $\dfrac{4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 15 \cdot 55}{2} = 1848$;

д) $\dfrac{28 \cdot 42 + 20 \cdot 40 + 12 \cdot 38 + 4 \cdot 36}{2} = 1288$.

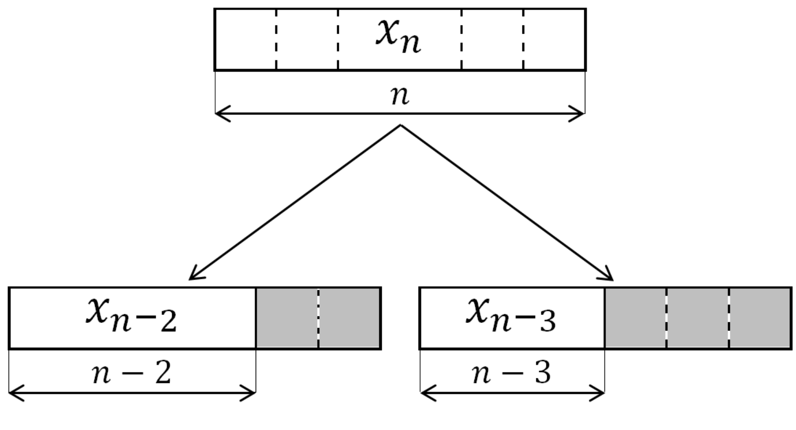
1.34. $n! - 2(n-1)!$. **1.35.** $28 \cdot 6! \cdot 1111111$. **1.38.** $C_8^5 = 56$. **1.39.** $\dfrac{52!}{(13!)^4}$. **1.41.** 45. **1.46.** 7623. **1.54.** $C_7^3 - 3$. **1.56.** 175. **1.57.** $C_5^2 \cdot 15 \cdot A_{15}^3$. **1.59.** $C_9^4 \cdot C_6^3 \cdot 8^3$. **1.79.** а) 1140; б) $14 \cdot 8^5$. **1.80.** 204. **1.84.** 21840. **1.85.** 84. **1.86.** 252. **1.90.** 14000. **1.93.** 23562. **1.94.** 9600. **1.97.** $C_4^3 \cdot 2^3 = 32$. **1.98.** 360360. **1.100.** а) 756756; б) 4540536. **1.103.** $9 \cdot 10 \cdot 5^5$. **1.104.** а) $(10!)^2$; б) $2^{10} \cdot (10!)^2$. **1.105.** 945. **1.110.** 15120. **1.118.** $C_8^3 \cdot C_6^4 \cdot 8^2$. **1.125.** 330. **1.134.** $330 \cdot 792 \cdot 1716$. **1.135.** 2800. **1.138.** а) 10; б) 11440. **1.154.** 2) 560. **1.156.** 1) 60; б) 15761. **1.163.** 1) 13. **1.169.** 1) 56; 2) −16; 3) 126. **1.170.** 1) −2160; 2) 3360.

ЧАСТЬ 2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Примеры решения задач

Пример 1. Дан клетчатый прямоугольник размером 1×15. Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размерами 1×2 и 1×3?

Решение. Обозначим x_n искомое число способов разрезания прямоугольника размером $1 \times n$. Любое разрезание такого прямоугольника заканчивается либо прямоугольником размером 1×2, либо прямоугольником размером 1×3. Эти случаи можно представить в виде следующей схемы:



Тогда общее число способов разрезания x_n будет удовлетворять рекуррентному соотношению

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-3}.$$

Это линейное рекуррентное соотношение третьего порядка. Непосредственным перебором находим начальные условия: для прямоугольника $1 \times n$ число способов разрезания $x_1 = 0$, для прямоугольника $2 \times n$ получаем $x_2 = 1$, а при $n = 3$ аналогично получаем $x_3 = 1$.

Последовательно вычисляя значения x_n $(n = 4, 5, 6 \dots, , 13, 15)$ находим значение x_{15}:

$$x_4 = x_2 + x_1 = 1 + 0 = 1, \qquad x_5 = x_3 + x_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$x_6 = x_4 + x_3 = 1 + 1 = 2, \qquad x_7 = x_5 + x_4 = 2 + 1 = 3,$$
$$x_8 = x_6 + x_5 = 2 + 2 = 4, \qquad x_9 = x_7 + x_6 = 3 + 2 = 5,$$
$$x_{10} = x_8 + x_7 = 4 + 3 = 7, \qquad x_{11} = x_9 + x_8 = 5 + 4 = 9,$$
$$x_{12} = x_{10} + x_9 = 7 + 5 = 12, \qquad x_{13} = x_{11} + x_{10} = 9 + 7 = 16$$

и сразу получаем ответ на вопрос задачи:

$$x_{15} = x_{13} + x_{12} = 16 + 12 = 28.$$

Приведем другой способ решения этой задачи с использованием комбинаторных формул (однако в общем случае для произвольного n применение комбинаторного подхода может оказаться затруднительным).

Найдем, какое количество прямоугольников размером 1×2 и 1×3 можно вырезать из клетчатого прямоугольника размером 1×15. Запишем все возможные случаи в таблицу:

№	Количество прямоугольников 1×3	Количество прямоугольников 1×2	Всего прямоугольников
1	5 $(5 \cdot 3 = 15$ клеток)	0	5
2	3 $(3 \cdot 3 = 9$ клеток)	3 $(3 \cdot 2 = 6$ клеток)	6
3	1 $(1 \cdot 3 = 3$ клетки)	6 $(6 \cdot 2 = 12$ клеток)	7

Тогда первый случай дает один способ разрезания только на прямоугольники размером 1×3. Во втором случае из 6 мест (количество мест в последовательности вырезаемых прямоугольников равно числу частей) 3 места выберем для прямоугольников размером 1×3 (остальные 3 места займут прямоугольники размером 1×2). Получим

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \text{ способов.}$$

В третьем случае, рассуждая аналогично при выборе мест, получим

$$C_7^1 = 7 \text{ способов.}$$

Складывая способы во всех трех случаях, получаем общее количество способов разрезания:

$$1 + 20 + 7 = 28.$$

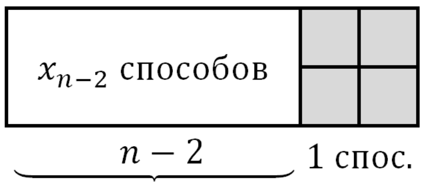
Пример 2. Имеется один вид плитки размером 2×2 и 6 видов (например, с разными узорами) плиток размером 2×3. Сколькими способами этими плитками можно замостить полосу размерами $2 \times n$ (плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на полосу и не перекрывались)?

Решение. Обозначим x_n число способов покрытия полосы размером $2 \times n$ заданными плитками.

Любое покрытие такой полосы заканчивается либо плиткой размером 2×2, либо плиткой размером 2×3.

Случай 1. Покрытие полосы заканчивается плиткой размером 2×2.

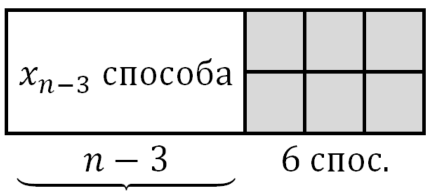
Последнюю плитку можно положить 1 способом (по условию имеется 1 вид такой плитки), а для полосы длиной $(n-2)$ существует x_{n-2} способов покрытия, как показано ниже на схеме:



Тогда общее число способов в этом случае равно $1 \cdot x_{n-2}$.

Случай 2. Покрытие полосы заканчивается плиткой размером 2×3.

Последнюю плитку можно положить 6 способами (по условию 6 видов такой плитки), а для полосы длиной $(n-3)$ существует x_{n-3} способа покрытия, как показано на следующей схеме:



Тогда общее число способов в этом случае по правилу произведения равно $6 \cdot x_{n-3}$.

Общее число способов получаем в виде линейного рекуррентного соотношения третьего порядка:

$$x_n = x_{n-2} + 6x_{n-3}.$$

Непосредственным перебором найдем начальные значения (начальные условия):

$$x_1 = 0 \text{ (для полосы размера } 2 \times 1\text{)},$$
$$x_2 = 1 \text{ (для полосы размера } 2 \times 2\text{)},$$
$$x_3 = 6 \text{ (для полосы размера } 2 \times 3\text{)}.$$

Заметим, что в этом примере $x_0 = 1$ (действительно, из рекуррентного соотношения получим, что $x_3 = x_1 + 6x_0 = 6$).

Чтобы получить формулу общего решения, найдем корни характеристического уравнения:

$$\lambda^3 - \lambda - 6 = 0.$$

Среди целых корней находим $\lambda_1 = 2$. Тогда, выделив множитель $(\lambda - 2)$, получим

$$\lambda^3 - \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 3).$$

Квадратное уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$ имеет два комплексно сопряженных корня:

$$\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i.$$

Находим модуль $|\lambda_2|$ и аргумент $\varphi = \arg \lambda_2$:

$$|\lambda_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}, \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{2}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot (C_2 \cdot \cos(n\varphi) + C_3 \cdot \sin(n\varphi)).$$

Преобразуем правую часть равенства, используя явное выражение для угла φ:

$$\cos(n\varphi) = \cos\left(n(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2})\right) = \cos\left(n \cdot \pi - n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2})\right) =$$
$$= (-1)^n \cdot \cos\,(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2}),$$
$$\sin(n\varphi) = \sin\left(n\left(\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)\right) = \sin\left(n \cdot \pi - n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2})\right) =$$
$$= -(-1)^n \cdot \sin\,(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2}).$$

Получаем формулу общего решения:

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot (-1)^n\left(C_2 \cos\,(n \operatorname{arctg}\sqrt{2}) - C_3 \sin\,(n \operatorname{arctg}\sqrt{2})\right) =$$
$$= C_1 \cdot 2^n + \left(-\sqrt{3}\right)^n \cdot \left(C_2 \cos\,(n \operatorname{arctg}\sqrt{2}) - C_3 \sin\,(n \operatorname{arctg}\sqrt{2})\right).$$

Для нахождения коэффициентов C_1, C_2, C_3 используем начальные условия и составим систему, предварительно вычислив $\cos\,(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2})$ и $\sin\,(n \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{2})$ для $n = 1,\ 2,\ 3$. Обозначим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}\ \left(\text{заметим, что } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$
$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{9},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Подставляя начальные условия и найденные значения косинусов и синусов в формулу общего решения для $n = 1,\ 2,\ 3$, получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 0 = 2C_1 + \left(-\sqrt{3}\right)^1 \cdot \left(C_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} - C_3 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right), \\ 1 = 4C_1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(C_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right) - C_3 \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right), \\ 6 = 8C_1 + \left(-\sqrt{3}\right)^3 \cdot \left(C_2 \cdot \left(-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\right) - C_3 \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{9}\right). \end{cases}$$

Упростив, получаем систему вида

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 + \sqrt{2}C_3 = 0, \\ 4C_1 - C_2 - 2\sqrt{2}C_3 = 1, \\ 8C_1 + 5C_2 + \sqrt{2}C_3 = 6. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C_1 = \dfrac{4}{11}$, $C_2 = \dfrac{7}{11}$, $C_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{22}$. Получаем решение задачи в виде формулы

$$x_n = \frac{4}{11} \cdot 2^n + \left(-\sqrt{3}\right)^n \left(\frac{7}{11}\cos\left(n \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{22}\sin\left(n \operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)\right).$$

Замечание. Проверку полученного решения можно выполнить с помощью онлайн-калькулятора для научных вычислений WolframAlpha (URL: https://www.wolframalpha.com/).

В строку ввода рекуррентное соотношение и начальные условия записываются на естественном математическом языке без специальных команд и функций (рис. 6). Для решения рекуррентных соотношений в WolframAlpha можно также использовать встроенную функцию RSolve.

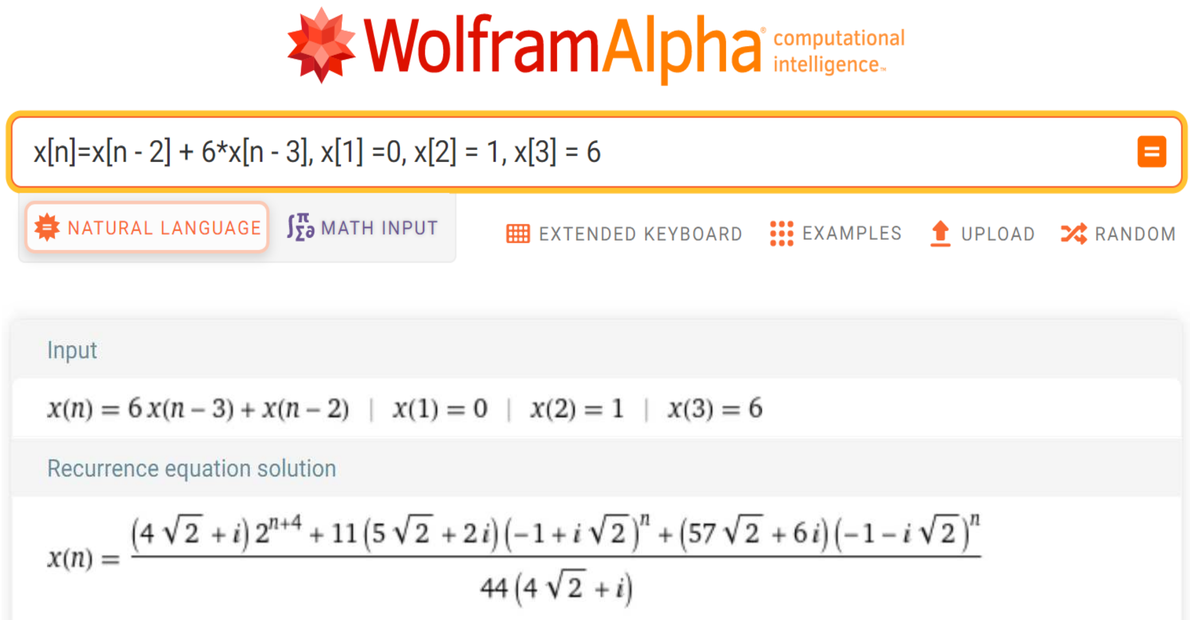


Рис. 6

Форма результата по виду может сильно отличаться от традиционной математической записи. Если скопировать полученный результат в строку запроса, то система WolframAlpha выдаст альтернативные формы ответа, среди которых можно увидеть и подходящие по виду (рис. 7, рис. 8).

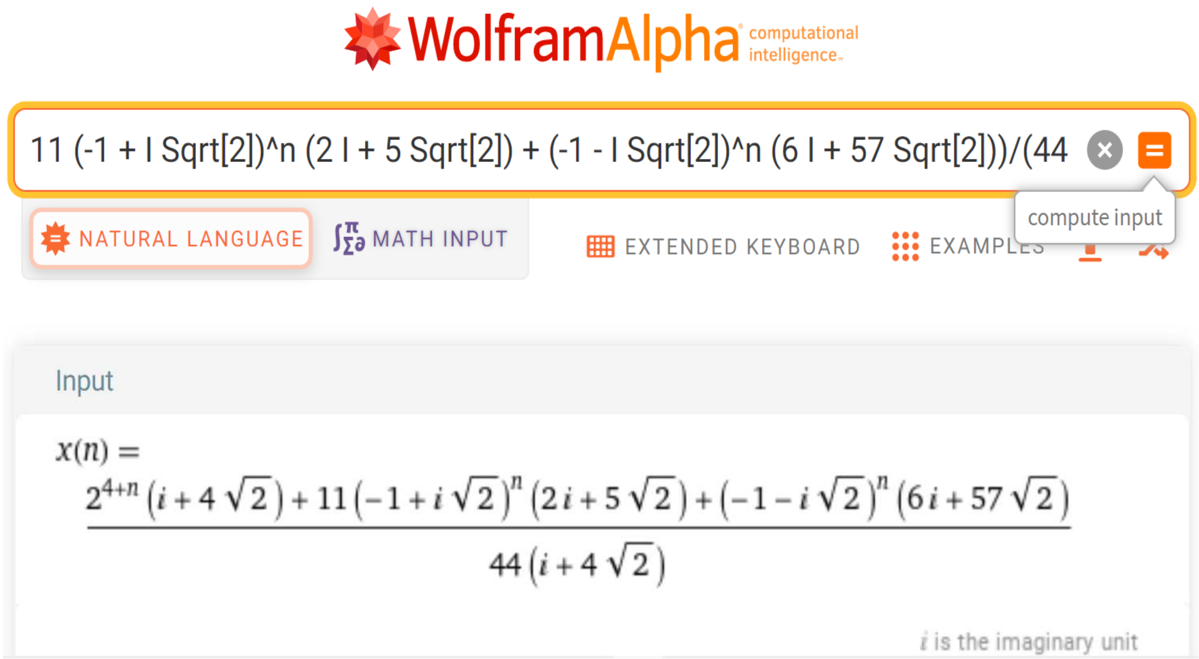


Рис. 7

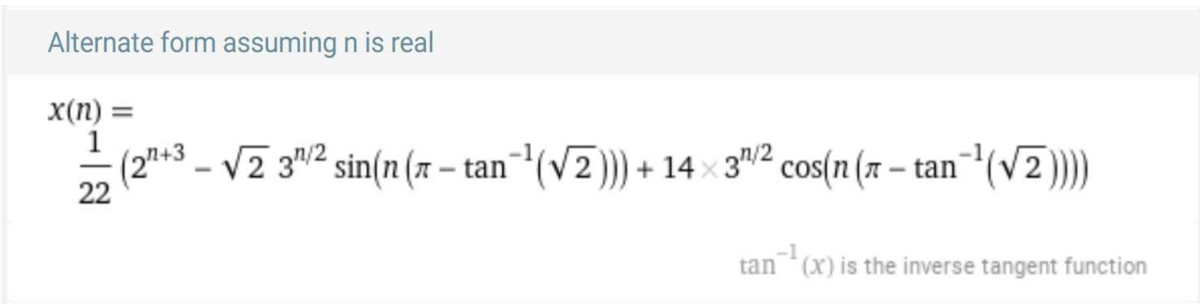


Рис. 8

Пример 3. Задача о замощении прямоугольника «доминошками» (прямоугольными плитками, состоящими из двух клеток)

Сколькими способами можно замостить прямоугольник размером $3 \times n$ клеток «доминошками»? Замощения, получающиеся друг из друга вращением полосы, считаются разными.

Пример замощения такими плитками прямоугольника размером 3×12 приведен на рис. 9.

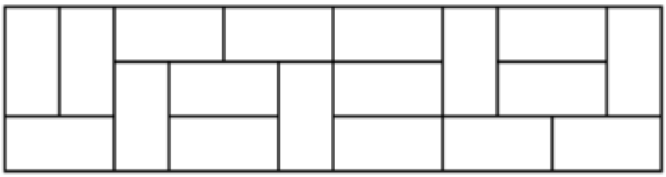
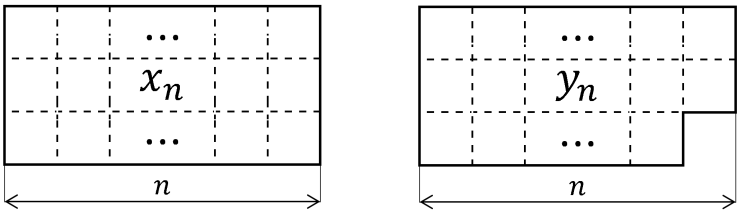


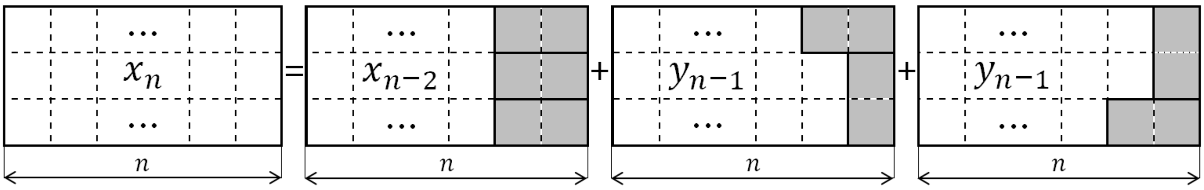
Рис. 9

Решение. Пусть P – прямоугольник, R – вспомогательная фигура – прямоугольник без одной клетки в правом нижнем углу.

Количество различных замощений прямоугольника P размером $3 \times n$ горизонтальными и вертикальными «доминошками» обозначим x_n. Количество различных замощений вспомогательной фигуры R размером $3 \times n$ обозначим через y_n, как показано на схеме:



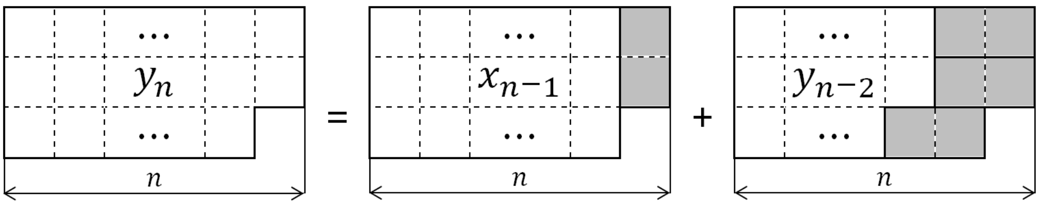
Перечислив все возможные расположения крайних правых «доминошек» в замощенном прямоугольнике P, получим, что количество замощений x_n равно сумме числа замощений для прямоугольника $3 \times (n-2)$, числа замощений для фигуры R размером $3 \times (n-1)$ и числа замощений для фигуры, симметричной R размером $3 \times (n-1)$. Представим эту зависимость в виде схемы:



Получаем, что число способов замощения прямоугольника P размером $3 \times n$ равно

$$x_n = x_{n-2} + 2y_{n-1}.$$

Рассуждая аналогично для вспомогательной фигуры R размером $3 \times n$, построим следующую схему:



Получим, что число различных замощений вспомогательной фигуры R размером $3 \times n$ можно представить в виде:

$$y_n = x_{n-1} + y_{n-2}.$$

Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-2} + 2y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-2} \end{cases}.$$

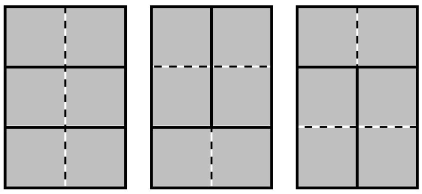
Из первого уравнения выразим y_n и y_{n-2}, подставим их во второе уравнение и получим

$$\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2} = x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - x_{n-3}}{2}.$$

Упрощая и сдвигая индекс на 1, получим линейное рекуррентное соотношение четвертого порядка

$$x_n = 4 \cdot x_{n-2} - x_{n-4}.$$

Найдем начальные условия. Для удобства начнем с $n = 0$. Заметим, что в этой задаче $x_0 = 1$. Очевидно, что для нечетных n площадь прямоугольника – нечетное число, и в этом случае его нельзя замостить «доминошками» (так как площадь каждой равна 2). Поэтому $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Для $n = 2$ перечислим все способы замощения:



Получим, что $x_2 = 3$.

Явное решение рекуррентного соотношения $x_n = 4x_{n-2} - x_{n-4}$ с начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 0,\ x_2 = 3, x_3 = 0$ дает формула

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2\sqrt{6}}\left(\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{n+1} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right).$$

Используя команды онлайн-калькулятора WolframAlpha, можно получить значения нескольких первых членов последовательности x_n (и убедиться, что эта формула дает целые неотрицательные значения при натуральных n). На рис. 10 показано использование команд $N[\blacksquare]$ и $Table[\blacksquare, (\blacksquare, \blacksquare)]$ для вычисления первых 10 членов последовательности с помощью явной формулы для x_n.

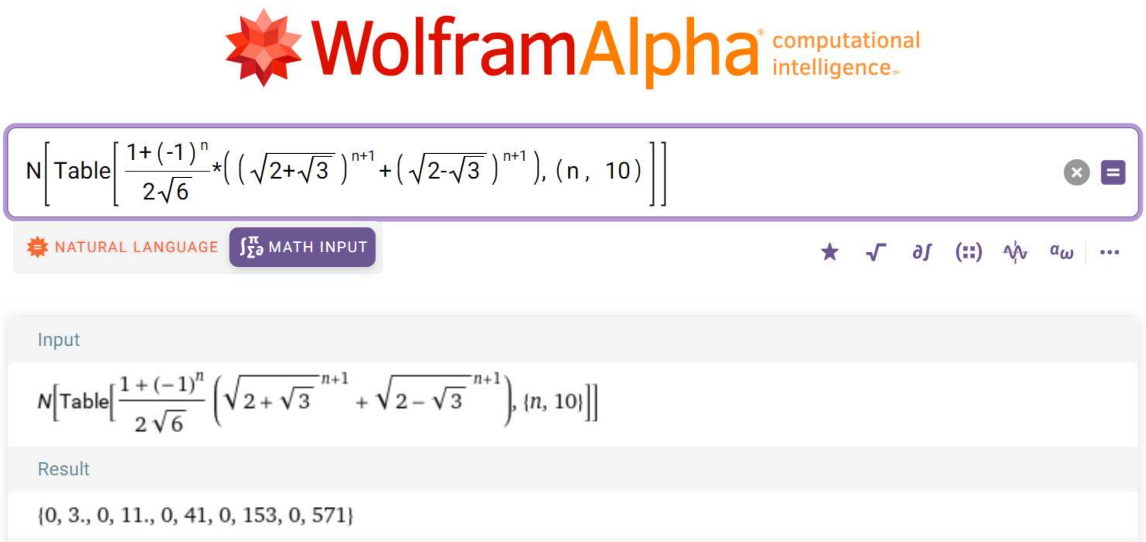


Рис. 10

Пример 4. Задача о числе буквенных последовательностей длины n в алфавите $\{a, b, c\}$.

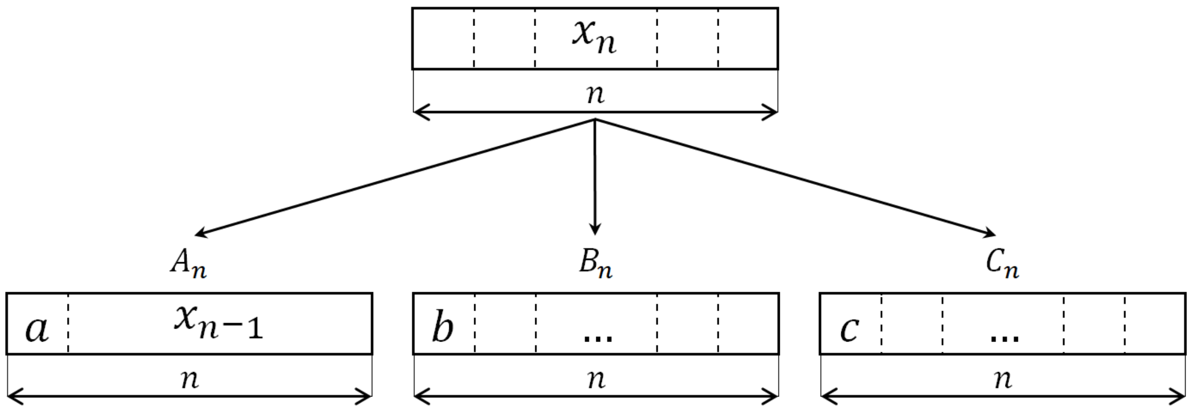
Составить рекуррентное соотношение для числа последовательностей длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, в которых есть рядом стоящие символы b и c. Дополнить соотношение начальными условиями.

Решение. Обозначим x_n число последовательностей, которые удовлетворяют условию задачи (такие последовательности будем называть правильными).

Разобьем множество всех правильных последовательностей длины n на три непересекающихся подмножества. Пусть A_n, B_n и C_n – количество правильных последовательностей длины n, начинающихся с букв a, b или c соответственно. Тогда, очевидно,

$$x_n = A_n + B_n + C_n.$$

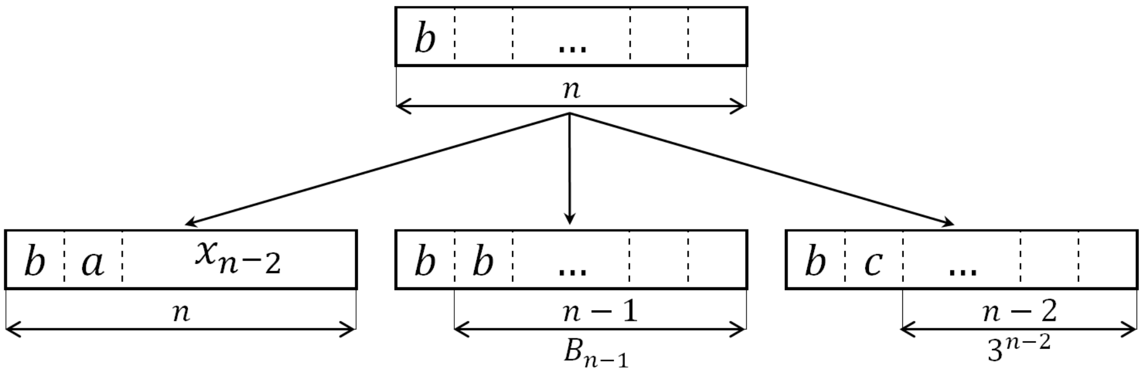
Все случаи, которые нужно рассмотреть, представим в виде схемы:



Если правильная последовательность длины n начинается символом a, то следом за ним располагается правильная последовательность длины $(n-1)$, поэтому

$$A_n = x_{n-1}.$$

Случай, когда первым символом правильной последовательности является символ b, распадается на три подслучая, показанные на следующей схеме:



В первом из них, когда на втором месте стоит символ a, слово заканчивается правильной последовательностью длины $(n-2)$ (количество таких последовательностей равно x_{n-2}).

Число правильных последовательностей, начинающихся на bb (второй подслучай), можно найти следующим образом.

Отделив первый символ b, получим последовательность, которая начинается на b и является правильной последовательностью длины $(n-1)$. Следовательно, число таких последовательностей равно B_{n-1}.

В третьем случае, когда на втором месте стоит символ c, в последовательности уже содержится пара bс и тогда всё слово может закончиться любой последовательностью длины $(n-2)$ (их количество составляет 3^{n-2} – число размещений с повторениями из 3 по $(n-2)$). Таким образом,

$$B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}.$$

Рассуждая аналогичным образом, получим, что число правильных последовательностей, начинающихся на c, совпадает с числом правильных последовательностей, начинающихся на b, т.е. $C_n = B_n$. Окончательно приходим к системе

$$\begin{cases} x_n = A_n + 2B_n, \\ A_n = x_{n-1}, \\ B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}, \end{cases}$$

которая после исключения из нее неизвестного A_n принимает вид

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2B_n, \\ B_n = x_{n-2} + B_{n-1} + 3^{n-2}. \end{cases}$$

Выразим из первого равенства системы неизвестное B_n:

$$B_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{2}.$$

Тогда

$$B_{n-1} = \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2}.$$

Подставив выражения для B_n и B_{n-1} во второе равенство системы, придем к линейному неоднородному рекуррентному соотношению

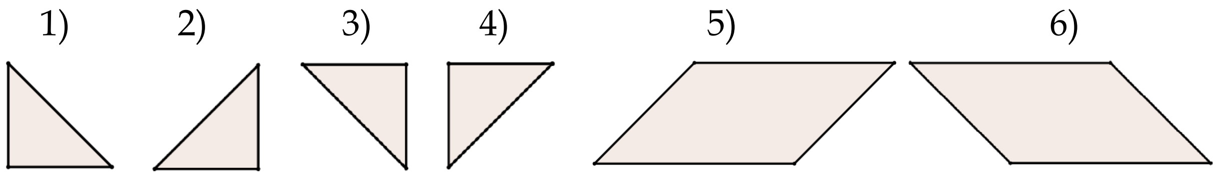
$$x_n - 2x_{n-1} - x_{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Непосредственным подсчетом несложно установить, что полученное соотношение необходимо дополнить начальными условиями $x_1 = 0, x_2 = 2$ (или $x_0 = x_1 = 0$).

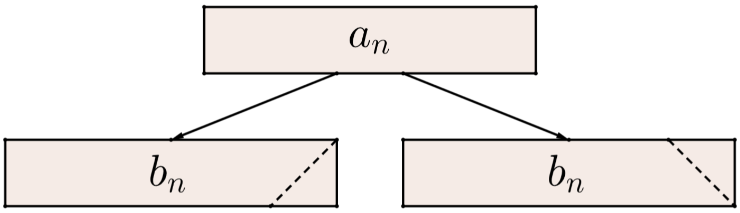
Явное решение полученного неоднородного рекуррентного соотношения с начальными условиями $x_1 = 0, x_2 = 2$ дает формула:

$$x_n = 3^n - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}.$$

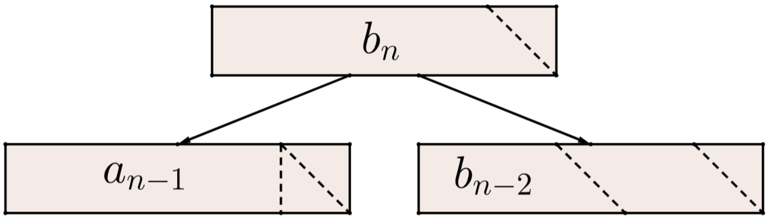
Пример 5. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины n, используя плитки высоты 1 следующих видов (плитки вращать нельзя):



Решение. Обозначим через a_n искомое число способов. Пусть b_n – число способов замощения прямоугольника того же размера со срезанным справа «уголком». Выразим зависимости между a_n и b_n в виде рекуррентных формул на основе следующей схемы:



Заметим, что последняя справа плитка в замощении – это фигура 2 или 3, значит, $a_n = 2b_n$. Далее рассмотрим случай для b_n с верхним срезанным уголком, как показано на схеме:



Тогда фигуре 3 в замощении предшествовала либо фигура 1, либо фигура 6. Тогда при $n \geq 3$ получаем рекуррентное соотношение для b_n в виде суммы:

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Таким образом, получили два рекуррентных соотношения:

$$a_n = 2b_n,$$
$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Выражая из первого равенства b_n и b_{n-2}, подставляя их во второе, получим рекуррентное соотношение для искомого числа способов a_n при $n \geq 3$:

$$\frac{a_n}{2} = a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} \Leftrightarrow a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} = 0.$$

Решение полученного линейного рекуррентного соотношения второго порядка с начальными условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ имеет вид:

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{\sqrt{2}}.$$

Пример 6. **Задача о числе беспорядков**

Перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$ называется беспорядком, если для любого i выполняется неравенство $a_i \neq i$ (т.е. ни один элемент не стоит на своем месте). Число всех беспорядков из n элементов обозначается D_n. Найти рекуррентное соотношение для D_n.

Решение. Рассмотрим беспорядок $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ для $n \geq 2$. На первое место элемент можно выбрать $(n-1)$ способами (любой из $2, 3, \dots, n$). Пусть на первое место выбран элемент $a_1 = k$ $(k \neq 1)$. Рассмотрим два случая (в зависимости от места расположения элемента 1):

1) элементы 1 и k поменяли местами (1 находится на k-ом месте). Тогда число беспорядков будет равно числу беспорядков из $(n-2)$ элементов (переставляются $(n-2)$ элемента, кроме 1 и k). Выбор k-ого места можно выполнить $(n-1)$ способом. В этом случае число беспорядков равно $(n-1) \cdot D_{n-2}$;

2) элемент 1 не находится на k-ом месте. Тогда число беспорядков будет равно числу беспорядков из $(n-1)$ элемента (беспорядки образуют элементы $1,\ 2, \dots, k-1,\ k+1,\ \dots,\ n,$ причем элемент 1 не стоит на

k-ом месте). Аналогично предыдущему случаю получаем $(n-1)$ способ выбора k-ого места. Таким образом, в этом случае число беспорядков равно $(n-1) \cdot D_{n-1}$.

Для числа беспорядков из n элементов получаем линейное рекуррентное соотношение второго порядка с переменными (зависящими от n) коэффициентами:

$$D_n = (n-1) \cdot D_{n-1} + (n-1) \cdot D_{n-2}$$

и с начальными условиями $D_1 = 0$, $D_2 = 1$.

Полученное рекуррентное соотношение можно преобразовать к неоднородному рекуррентному соотношению первого порядка:

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$$

с начальным условием $D_1 = 0$.

Явная формула для D_n имеет вид:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Заметим, что при достаточно больших n доля беспорядков среди всех перестановок из n элементов составляет примерно 37 %, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368.$$

Задачи

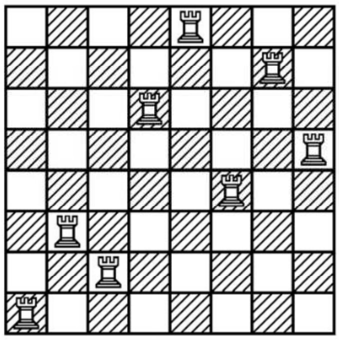
2.1. Отправка бандероли стоит 28 рублей, а на почте имеются марки по 4, 6 и 10 рублей. Сколькими разными способами можно наклеить на бандероль марки на нужную сумму?

2.2. В первом ряду театра 12 мест. Сколькими способами обладатели билетов на эти места могут разместиться на них так, чтобы каждый оказался на своем месте (согласно купленному билету) или на соседнем с ним?

2.3. Дан клетчатый прямоугольник размера 1×27. Сколькими способами его можно разрезать на клетчатые прямоугольники размера 1×2 и 1×5?

2.4. Садовник, привив черенок редкого растения, оставляет его расти два года, а затем ежегодно берет от него по 6 черенков. С каждым новым черенком он поступает аналогично. Сколько будет растений и черенков на n-ом году роста первоначального растения?

2.5. Сколькими способами на доске $n \times n$ клеток можно расположить n ладей симметрично относительно диагонали, проходящей через нижнее левое угловое поле так, чтобы они не били друг друга? Составьте рекуррентное соотношение, дополните его начальными условиями.



2.6. Сколькими способами отрезок длины n см можно разбить на части длиной 2 см или 5 см? Составьте рекуррентное соотношение, дополните его начальными условиями. Сколько способов получится для $n = 11;\ 12;\ 13$?

2.7. Составить рекуррентное соотношение для нахождения числа способов разбиения отрезка длины n на отрезки длины 1, 2 и 3 так, чтобы в разбиении не было трех рядом стоящих отрезков длины 1. Дополнить соотношение начальными условиями.

2.8. Сколько различных способов последовательной отправки трех видов документов объемом 1, 2 и 4 Mb существует, если общий объем документов должен быть равен 17 Mb?

2.9. Сколькими способами плитки размером 3×3 красного, зеленого, желтого, синего цветов и размером 3×4 серого цвета можно последовательно выложить в полосу размером $3 \times n$? Сколько способов получится для $n = 6;\ 7;\ 8$?

2.10. Найдите количество слов длины 10, состоящих только из букв «а» и «б» и не содержащих в записи двух букв «б» подряд.

2.11. Найти число замкнутых маршрутов длины n по сторонам равностороннего треугольника ABC со стороной 1 (начальная и конечная точка маршрута – вершина A).

2.12. Найдите количество n-значных чисел, состоящих из цифр $1, 2,\ 3$, в которых первая и последняя, а также любые две соседние цифры различны.

2.13. Как будет выглядеть формула n-го члена для рекуррентной последовательности k-го порядка, если

а) характеристическое уравнение имеет простые корни $x_1, \dots, x_k$, отличные от нуля;

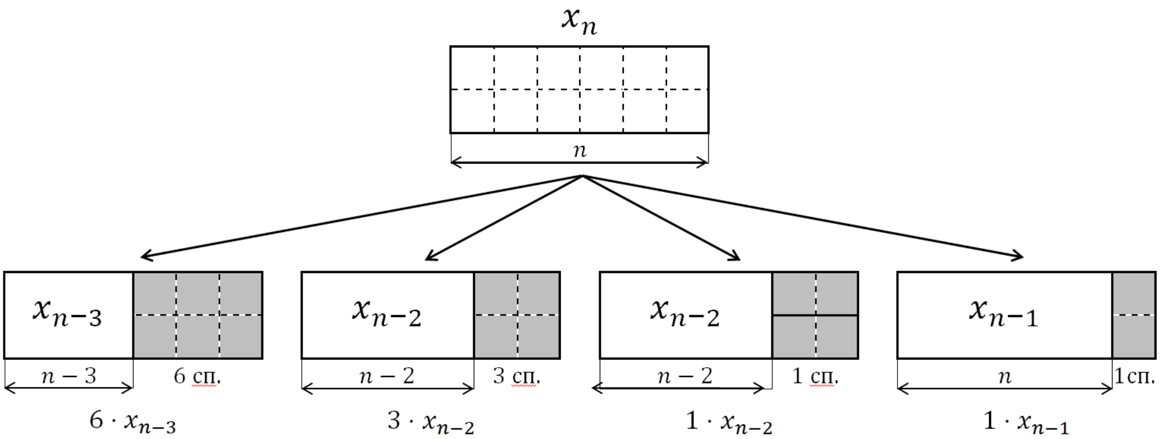
б) характеристическое уравнение имеет отличные от нуля корни $x_1, \dots, x_m$ с кратностью $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ соответственно?

2.14. Имеется 4 вида плитки размером 2×3, 3 вида плитки размером 2×2 и два вида плитки размером 2×1 (все плитки различаются между собой цветом). Сколькими способами этими плитками можно покрыть полосу размерами $2 \times n$ (плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на полосу и не перекрывались)?

2.15. Имеется 5 видов плиток размером 3×3 и 6 других видов плиток размером 3×4. Сколькими способами этими плитками можно замостить дорожку размерами $3 \times n$ (плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на дорожке и не перекрывались)?

2.16. Имеется шесть видов плиток размером 2×3, три вида плитки размером 2×2 и один вид плитки размером 2×1 (все плитки различаются цветом). Сколькими способами этими плитками можно замостить полосу размерами $2 \times n$ (плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на полосу и не перекрывались)?

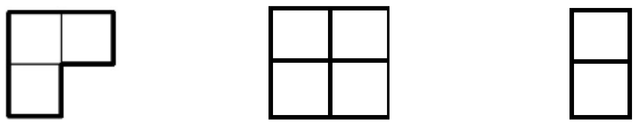
Указание. Рассмотреть случаи, представленные на схеме



2.17. Имеется дорожка ширины 2 ft и длины n ft. Ее нужно замостить разноцветными плитками размеров 2×1, 2×2, 2×3. Плитки размера 2×1 можно покрасить не более чем в 2 цвета, плитки размера 2×2 можно покрасить не более чем в 2 цвета (отличных от уже использованных), плитки размера 2×3 можно покрасить не более чем в 8 цветов (отличных от всех ранее использованных). Сколькими способами можно выполнить разноцветное покрытие (замощение) такой дорожки?

2.18. Лягушка прыгает по вершинам треугольника ABC, перемещаясь каждый раз в одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A за n прыжков?

2.19. Имеется 3 вида плитки:



Сколькими способами этими плитками можно замостить дорожку размерами $2 \times n$ (плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на дорожке и не перекрывались)?

2.20. Пусть $b_1 = 4$, $b_2 = 14$, $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n$. Обозначим через S_n площадь треугольника со сторонами $b_n - 1, b_n$, $b_n + 1$, а через r_n радиус вписанной в него окружности. Запишите рекуррентные формулы для S_n и r_n.

2.21. Приведите примеры различных линейных рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют числовые последовательности 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = n^3$?

2.22. Запишите линейное рекуррентное соотношение второго порядка, если известны два его линейно независимых решения:

1) $x_n^{(1)} = \dfrac{3n-1}{2^n}$ и $x_n^{(2)} = (-1)^n$;

2) $x_n^{(1)} = (-2)^n$ и $x_n^{(2)} = (2n-1) \cdot 2^n$.

2.23. Найдите какое-нибудь линейное рекуррентное соотношение третьего порядка, если известны два его линейно независимых решения: $x_n^{(1)} = (-1)^n$ и $x_n^{(2)} = n$.

2.24. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $x_n = 2x_{n-3} - x_{n-1}$;

2) $x_n = 2x_{n-2} - 2x_{n-1} - 3x_{n-3}$;

3) $x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = n2^{n+1}$.

2.25. Найти формулу n-го члена последовательности:

1) $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n,\ (n \geq 0)$;

2) $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0,\ (n \geq 0)$;

3) $a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},\ \ (n \geq 2)$.

2.26. Последовательность a_n задана рекуррентно:$a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Найдите a_{100}, если $a_1 = 3$, $a_2 = 7$.

2.27. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ при всех $n \geq 2$. Докажите, что все члены последовательности – целые числа.

2.28. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке? Какое количество конечных и бесконечных областей получится?

2.29. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

2.30. На плоскости проведено n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Какое а) минимальное, б) максимальное возможное число частей разбиения плоскости может ограничивать одна окружность?

2.31. Квадрат разделен на 9 равных квадратов. На первом шаге 2 квадрата закрашивают и еще 2 других квадрата аналогичным образом делят на 9 квадратов. На втором шаге 4 квадрата закрашивают и еще 2 аналогичным образом делят на 9 квадратов. На третьем шаге 6 квадратов закрашивают и еще 2 аналогичным образом делят на 9 квадратов и т.д. Сколько незакрашенных квадратов будет после 10 шага?

2.32. На доске записаны в ряд сто чисел, отличных от нуля. Известно, что каждое число, кроме первого и последнего, является произведением двух соседних с ним чисел. Первое число – это 7. Какое число последнее?

2.33. Сколько слов длины 5 можно составить из букв a, b и c так, чтобы буквы a и b не стояли рядом?

2.34. Составить рекуррентное соотношение для числа цепочек длины n в алфавите $\{a, b, c\}$, которые:

1) не содержат подцепочку abc;
2) содержат подцепочку abc.

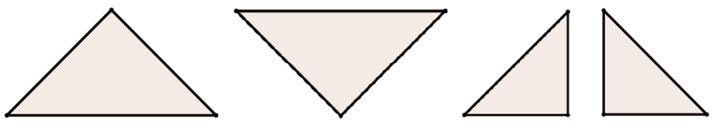
Дополнить соотношение начальными условиями.

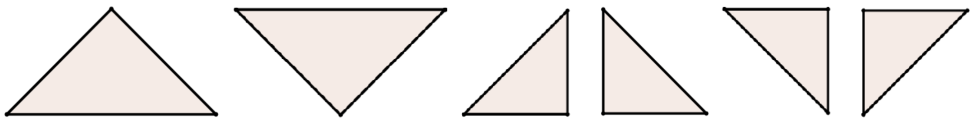
2.35. Найти число последовательностей из 0, 1 и 2 длины n, в каждой из которых присутствует хотя бы одна единица, а число двоек четно.

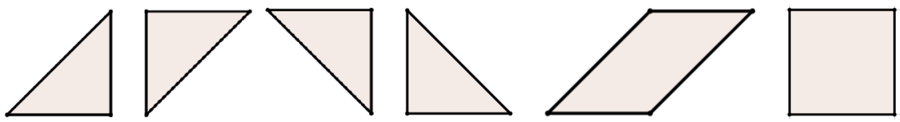
2.36. Предположим, что в аквариуме находится 6 литров воды. Каждую неделю один литр испаряется и в аквариум добавляют два литра воды, предварительно вылив один литр. Известно, что в одном литре воды находится 0,01 г соли, а наличие в аквариуме 0,1 г соли является критическим для его обитателей. При испарении соль остается. Спрашивается, может ли количество соли в аквариуме достигать критического уровня?

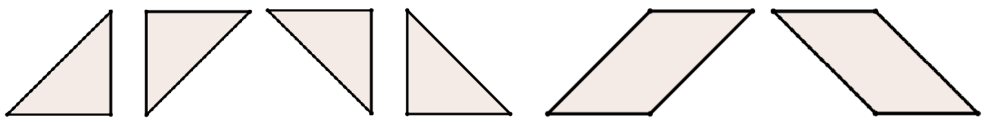
2.37. Найти a_n, если $a_n = -(a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{n-16})$ и $a_1 = \cdots = a_{16} = 1$.

2.38. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины n, используя плитки высоты 1 следующих видов (плитки вращать нельзя):

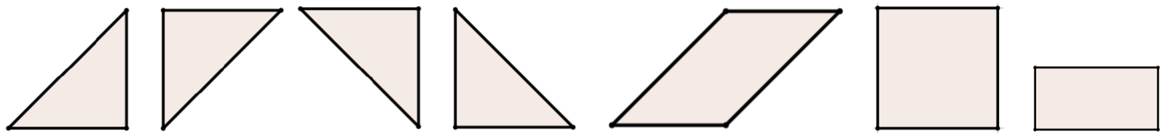
1) 

2) 

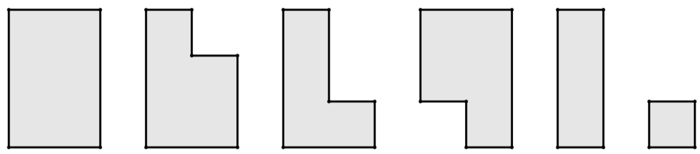
3) 

4) 

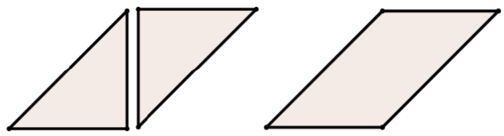
2.39. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 2 и длины n, используя плитки следующих видов (плитки вращать нельзя):



2.40. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 3 и длины n, используя плитки следующих видов (плитки вращать нельзя):



2.41. Сколькими способами можно замостить прямоугольник высоты 1 и длины n, используя плитки высоты 1 при условии, что число треугольных плиток равно числу четырехугольных плиток (плитки вращать нельзя):



2.42. Найти количество n-разрядных десятичных чисел, в которых нет двух стоящих рядом четных цифр.

2.43. Найти количество n-разрядных десятичных чисел, в которых после цифры 2 не стоит цифра 5.

2.44. Сколькими способами можно разложить 10 различных шаров по 6 неразличимым ящикам так, чтобы ни один из ящиков не оказался пустым?

2.45. Полосу длиной 127 дм и шириной 1 дм разрезали на полосы такой же ширины и длиной 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 дм (каждый последующий кусок имеет длину больше суммы всех предыдущих). Сколькими способами можно сшить из этих кусков три различные по длине полосы шириной 1 дм?

Ответы и указания

2.2. $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{12} = 233$. **2.4.** $\frac{3^n - (-2)^n}{5}$; **2.5.** $x_n = x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. **2.6.** $x_n = x_{n-2} + x_{n-5}$, $x_{11} = 4$, $x_{12} = 4$, $x_{13} = 5$. **2.7.** $x_n = x_{n-2} + 2x_{n-3} + 2x_{n-4} + x_{n-5}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 6$, $x_5 = 10$. **2.8.** $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-4}$, $x_{17} = 8651$. **2.10.** $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_1 = 2, x_2 = 3, x_{10} = 144$. **2.11.** $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ или $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. **2.12.** $2^n + 2 \cdot (-1)^n$. **2.14.** $x_n = 2x_{n-1} + 7x_{n-2} + 4x_{n-3}, x_1 = 2, x_2 = 11, x_3 = 40$, $x_n = \frac{16}{25} \cdot 4^n + \frac{9}{25}(-1)^n + \frac{1}{5}n(-1)^n$. **2.15.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0, x_3 = 5$, $x_4 = 6$, $x_n = 5x_{n-3} + 6x_{n-4}$; $x_n = \frac{8}{27} \cdot 2^n + \frac{1}{9}(-1)^n + \left(-\sqrt{3}\right)^n \left(\frac{16}{27}\cos(n\varphi) + \frac{10\sqrt{11}}{297}\sin(n\varphi)\right)$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{11}$. **2.16.** $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 15$, $x_n = x_{n-1} + 4x_{n-2} + 6x_{n-3}, x_n = \frac{9}{17} \cdot 4^n + \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{8}{17}\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) - \frac{2}{17}\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)\right)$. **2.17.** $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, $x_3 = 40$,

$x_n = 2x_{n-1} + 6x_{n-2} + 8x_{n-3}$, $x_n = \frac{8}{13}\cdot 4^n + (\sqrt{2})^n \cdot \left(\frac{5}{13}\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) - \frac{1}{13}\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)\right)$. **2.18.** $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $x_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$. **2.19.** $x_1 = 1$, $x_2 = 3, x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$. **2.20.** $r_{n+2} - 4r_{n+1} + r_n = 0, S_{n+2} - 14S_{n+1} + S_n = 0$. **2.22.** 1) $x_n = \frac{1-n}{2n}x_{n-1} + \frac{1+n}{2n}x_{n-2}$; 2) $x_n = \frac{2}{n}x_{n-1} + \frac{4(n+1)}{n}x_{n-2}$. **2.23.** $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} - x_{n-3}$; **2.24.** 1) $x_n = C_1 + C_2\cos\left(\frac{3\pi n}{4}\right) + C_3\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$; 2) $x_n = C_1(-3)^n + C_2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + C_3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$. **2.25.** 1) $a_n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right)$; 2) $a_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$; 3) $a_n = 1 + 2^n$. **2.26.** -3. **2.28.** $x_n - x_{n-1} = n$, $x_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$, бесконечных областей: $2n$, конечных областей: $\frac{n(n-3)}{2} + 1$. **2.29.** $x_n = n(n-1) + 2$. **2.30.** а) $x_n = n$, б) $x_n = (n-1)^2 + 1$. **2.31.** $x_n = x_{n-1} - 2n + 16, x_{10} = 59$. **2.33.** $x_5 = 99$, $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 7, x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$. **2.44.** 22827. *Указание.* Сведите решение задачи к нахождению числа Стирлинга второго рода $S(10,6)$. **2.45.** 301. *Указание.* Сведите решение задачи к нахождению числа Стирлинга второго рода $S(7,3)$.

ЧАСТЬ 3. ГРАФЫ

Примеры решений задач

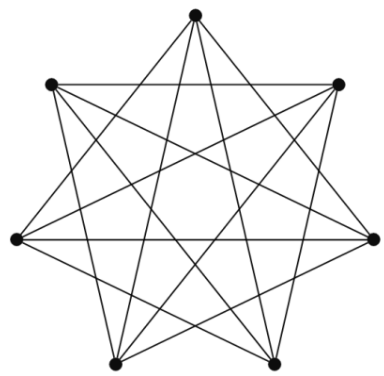
Пример 1. Постройте граф, удовлетворяющий следующим условиям:

1) из каждой вершины выходит ровно 4 ребра;

2) в графе нет четырех вершин, каждые две из которых были бы соединены между собой;

3) граф нельзя покрасить в три цвета «правильно», то есть так, чтобы любые две вершины одного цвета не были соединены.

Решение. Данный граф представляет собой дополнение цикла на семи вершинах. В цикле на семи вершинах среди любых четырех вершин есть две соседних, значит, дополняющий его граф удовлетворяет условию 2).



При раскраске такого графа в три цвета какие-то три вершины обязательно окажутся одного цвета. Цикл на семи вершинах не содержит треугольников, значит, в этом цикле какие-то две из этих трех вершин не будут соединены. Следовательно, они будут соединены в дополняющем графе, и значит, никакая раскраска не является «правильной».

Этот пример минимальный, потому что граф на 5 вершинах, степень каждой из которых равна 4, – это полный граф и он не удовлетворяет условию 2).

Граф на 6 вершинах, которые имеют степень 4, единственен. Для каждой вершины есть ровно одна, с которой та не соединена. Каждую пару таких вершин мы красим в один цвет, и получаем правильную раскраску в три цвета, следовательно, этот граф не удовлетворяет условию 3.

Пример 2. Ежедневно каждый из 1000 жителей поселка делится узнанными накануне новостями со всеми своими знакомыми. Любая новость рано или поздно становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если им сообщить какую-то новость одновременно, то через 10 дней ее будут знать все жители поселка.

Решение. Каждый житель поселка – вершина графа. Знакомство между жителями – ребро этого графа. Условие «любая новость рано или поздно становится известной всем жителям поселка» означает, что граф связный. Известно, что если связный граф не является деревом, то можно удалить одно из его ребер, входящих в цикл, не нарушая связность графа. Таким образом, удалив при необходимости часть ребер, можно от любого связного графа перейти к его остовному дереву. (Остовное дерево определено неоднозначно, однако, какое именно остовное дерево будем рассматривать, несущественно.) Итак, рассмотрим 1000-вершинное дерево. Из условия следует, что любые два жителя соединены некоторой цепью. Рассмотрим самую длинную цепь $A_1 - A_2 - \cdots - A_k - Y$. Если $k \leq 19$, то новость, сообщенная A_{10}, через 10 дней станет известна всем жителям поселка. Если $k \leq 20$, отделим жителей $X - A_1 - \cdots - A_{10}$ и всех, кто связан с ними, не через A_{11} (их не меньше 11). Оставшаяся группа жителей попрежнему образует дерево.

Повторяя уже описанную процедуру 89 раз (на каждом шагу выделяя своего A_{10}), мы либо на каком-то шагу исчерпаем всех жителей, либо останется не более $1000 - 89 \cdot 11 = 21$, из которых выберем еще одного, как описано выше. (То, что в связном графе с 1000 вершинами не всегда можно выделить 89 вершин так, чтобы любая вершина графа была удалена от одной из них не более чем на 10, следует из того, что этого нельзя сделать уже для дерева с 991 вершиной, устроенного следующим образом: из корня исходят 90 отрезков, на каждом из которых находятся еще 10 вершин).

Пример 3. Найти кратчайшие пути от первой вершины ко всем остальным в нагруженном орграфе, используя алгоритм Дейкстры.

Решение

Введем обозначения:

$d_k(v_i)$ – метка, полученная на k-ом шаге для вершины v_i;

$d_k^*(v)$ – постоянная метка, полученная на k-ом шаге для ны v.

Тогда получим следующие формулы:

$$d_{k+1}(v_i) = \min(d_k(v_i), \quad d_k^*(v) \ + \mu(v, v_i)),$$

$$\mu(v, v_i) = \begin{cases} \text{вес (длина) дуги из } v \text{ в } v_i, \\ \infty, \text{если такой дуги нет.} \end{cases}$$

1 шаг:

по умолчанию началом пути является вершина v_1 и

$$d_1(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

2 шаг:

$d_2(v_2) = \min\big(d_1(v_2), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_2)\big) = \min(\infty, 0 + 31) = 31,$

$d_2(v_3) = \min\big(d_1(v_3), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_3)\big) = \min(\infty, 0 + 88) = 88,$

$d_2(v_4) = \min\big(d_1(v_4), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_4)\big) = \min(\infty, 0 + 59) = 59,$

$d_2(v_5) = \min\big(d_1(v_5), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_5)\big) = \min(\infty, 0 + 97) = 97,$

$d_2(v_6) = \min\big(d_1(v_6), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_6)\big) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty,$

$d_2(v_7) = \min\big(d_1(v_7), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_7)\big) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty,$

$d_2(v_8) = \min\big(d_1(v_8), d_1^*(v_1) + \mu(v_1, v_8)\big) = \min(\infty, 0 + \infty) = \infty.$

Постоянная метка у вершины v_2 : $d_2^*(v_2) = 31$.

3 шаг:

$d_3(v_3) = \min\big(d_2(v_3), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_3)\big) = \min(88, 31 + \infty) = 88,$

$d_3(v_4) = \min\big(d_2(v_4), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_4)\big) = \min(59, 31 + 14) = 45,$

$d_3(v_5) = \min\big(d_2(v_5), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_5)\big) = \min(97, 31 + \infty) = 97,$

$d_3(v_6) = \min\big(d_2(v_6), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_6)\big) = \min(\infty, 31 + 87) = 118,$

$d_3(v_7) = \min\big(d_2(v_7), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_7)\big) = \min(\infty, 31 + \infty) = \infty,$

$d_3(v_8) = \min\big(d_2(v_8), d_2^*(v_2) + \mu(v_2, v_8)\big) = \min(\infty, 31 + \infty) = \infty.$

Постоянная метка у вершины v_4 : $d_3^*(v_4) = 45$.

4 шаг:

$d_4(v_3) = \min\big(d_3(v_3), d_3^*(v_4) + \mu(v_4, v_3)\big) = \min(88, 45 + 29) = 74,$

$d_4(v_5) = \min\big(d_3(v_5), d_3^*(v_4) + \mu(v_4, v_5)\big) = \min(97, 45 + \infty) = 97,$

$d_4(v_6) = \min\big(d_3(v_6), d_3^*(v_4) + \mu(v_4, v_6)\big) = \min(118, 45 + \infty) = 118,$

$d_4(v_7) = \min\big(d_3(v_7), d_3^*(v_4) + \mu(v_4, v_7)\big) = \min(\infty, 45 + 61) = 106,$

$d_4(v_8) = \min\big(d_3(v_8), d_3^*(v_4) + \mu(v_4, v_8)\big) = \min(\infty, 45 + 92) = 137.$

Постоянная метка у вершины v_3 : $d_4^*(v_3) = 74$.

Продолжая вычисления, получим, что за 8 шагов каждая вершина графа получит постоянную метку, и длины всех кратчайших путей будут найдены.

Все пошаговые вычисления можно записать в виде таблицы:

Шаги	Метки для вершин							
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
1	0^*	□	□	□	□	□	□	□
2	–	31^*	88	59	97	□	□	□
3	–	–	88	45^*	97	118	□	□
4	–	–	74^*	–	97	118	106	137
5	–	–	–	–	91^*	118	106	137
6	–	–	–	–	–	117	106^*	137
7	–	–	–	–	–	117^*	–	137
8	–	–	–	–	–	–	–	128^*

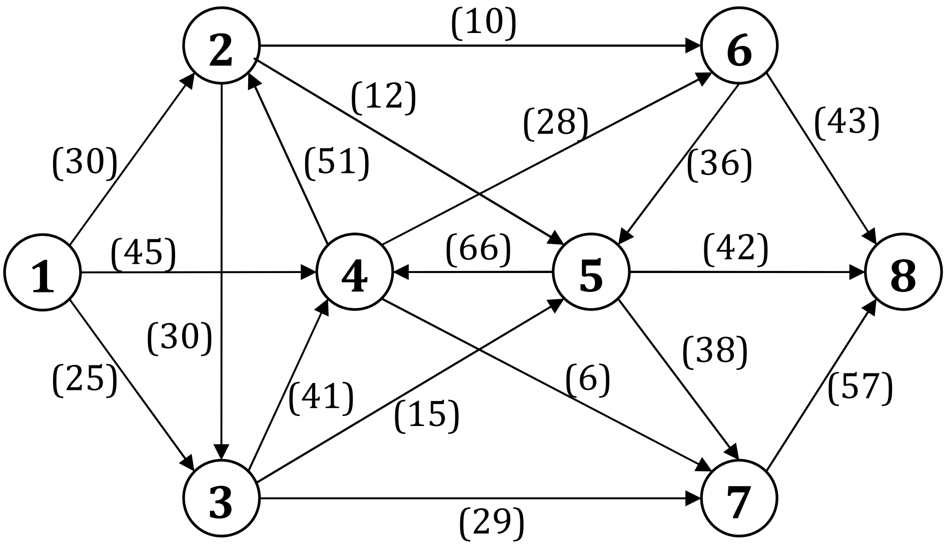
Схему кратчайших путей (в виде ориентированного дерева) можно построить, добавляя по одному ребру в пустой граф с 8 вершинами на каждом шаге алгоритма Дейкстры. Другой способ построения – двигаясь в таблице по постоянным меткам от последней к первой, находить «вершину-предшественницу».

В этой задаче можно построить два различных дерева.

Первый вариант дерева кратчайших путей можно представить в виде схемы:

Второй вариант дерева кратчайших путей (содержит дугу (v_3, v_7) вместо дуги (v_4, v_7)) представлен на схеме:

Пример 4. Построить полный поток в данной сети. С помощью алгоритма Форда – Фалкерсона (расстановки меток) проверить поток на максимальность, в случае необходимости достроить поток до максимального. Построить минимальный разрез.



Решение

1. Построим полный поток, последовательно перебирая пути из источника в сток:

1) $P_1: \ 1 \underset{0}{\overset{(30)}{\to}} 2 \underset{0}{\overset{(10)}{\to}} 6 \underset{0}{\overset{(43)}{\to}} 8,$

$\varphi_1 = \min(30 - 0;\ 10 - 0;\ 43 - 0) = 10;$

2) $P_2: \ 1 \underset{0}{\overset{(25)}{\to}} 3 \underset{0}{\overset{(41)}{\to}} 4 \underset{0}{\overset{(51)}{\to}} 2 \underset{0}{\overset{(12)}{\to}} 5 \underset{0}{\overset{(38)}{\to}} 7 \underset{0}{\overset{(57)}{\to}} 8,$

$\varphi_2 = \min(25 - 0;\ 41 - 0;\ 51 - 0; 12 - 0; 38 - 0; 57 - 0) = 12;$

3) $P_3 :\ 1 \xrightarrow[0]{(45)} 4 \xrightarrow[0]{(28)} 6 \xrightarrow[0]{(36)} 5 \xrightarrow[12]{(38)} 7 \xrightarrow[12]{(57)} 8,$

$\varphi_3 = \min(45 - 0;\ 28 - 0;\ 36 - 0; 38 - 12; 57 - 12) = 26;$

4) $P_4 :\ 1 \xrightarrow[10]{(30)} 2 \xrightarrow[0]{(30)} 3 \xrightarrow[12]{(41)} 4 \xrightarrow[26]{(28)} 6 \xrightarrow[10]{(43)} 8,$

$\varphi_4 = \min(30 - 10;\ 30 - 0;\ 41 - 12; 28 - 26; 43 - 10) = 2\,;$

5) $P_5 :\ 1 \xrightarrow[12]{(25)} 3 \xrightarrow[0]{(15)} 5 \xrightarrow[0]{(66)} 4 \xrightarrow[0]{(6)} 7 \xrightarrow[38]{(57)} 8,$

$\varphi_5 = \min(25 - 12;\ 15 - 0;\ 66 - 0; 6 - 0; 57 - 38) = 6;$

6) $P_6 :\ 1 \xrightarrow[18]{(25)} 3 \xrightarrow[6]{(15)} 5 \xrightarrow[0]{(42)} 8,$

$\varphi_6 = \min(25 - 18;\ 15 - 6;\ 42 - 0) = 7;$

7) $P_7 :\ 1 \xrightarrow[12]{(30)} 2 \xrightarrow[2]{(30)} 3 \xrightarrow[0]{(29)} 7 \xrightarrow[44]{(57)} 8,$

$\varphi_7 = \min(30 - 12;\ 30 - 2;\ 29 - 0; 57 - 44) = 13;$

8) $P_8 :\ 1 \xrightarrow[25]{(30)} 2 \xrightarrow[15]{(30)} 3 \xrightarrow[13]{(15)} 5 \xrightarrow[19]{(42)} 8,$

$\varphi_8 = \min(30 - 25;\ 30 - 15;\ 15 - 13; 42 - 19) = 2.$

Построенный поток полный, так как каждый маршрут из источника в сток содержит насыщенную дугу (рис. 11).

Таким образом, величина полного потока равна

$$\Phi = 10 + 12 + 26 + 2 + 6 + 7 + 13 + 2 = 78.$$

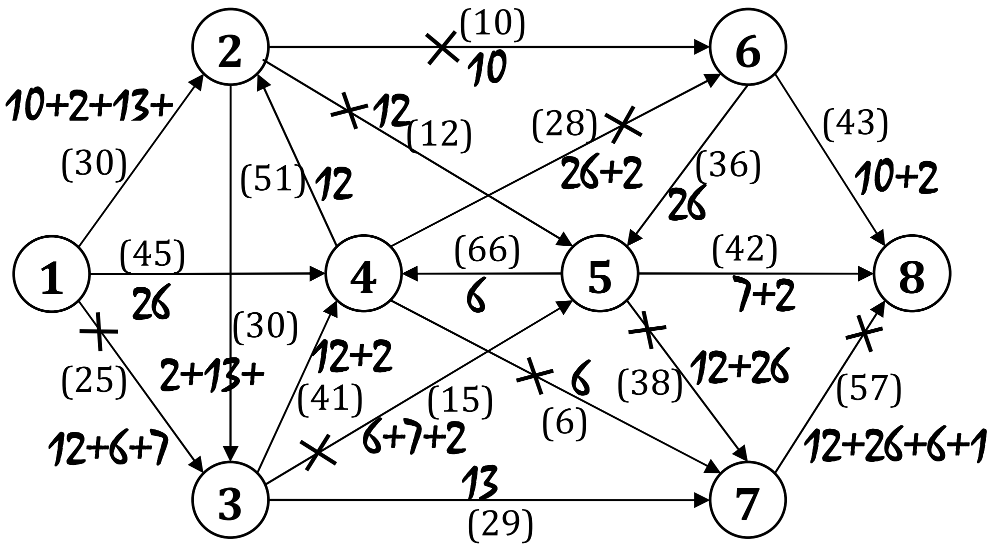


Рис. 11

2. Проверка потока на максимальность и увеличение потока.

Первая расстановка меток представлена в таблице:

	1	2	3
v_1 [0]	v_2 [1, +3] v_3 [x] v_4 [1, +19]	v_3 [2, +13] v_5 [4, –6] v_6 [x] v_7 [x]	v_6 [5, –26] v_7 [3, +16] v_8 [5, +33]

Сток v_8 получил метку, следовательно, построенный полный поток с величиной $\Phi = 78$ не максимальный.

Ищем маршрут из v_1 в v_8 только по вершинам с метками. Это маршрут $v_1 - v_4 - v_5 - v_8$ (рис. 12). Изменив потоки по дугам этого маршрута, увеличим величину полного потока на 6 (рис. 12).

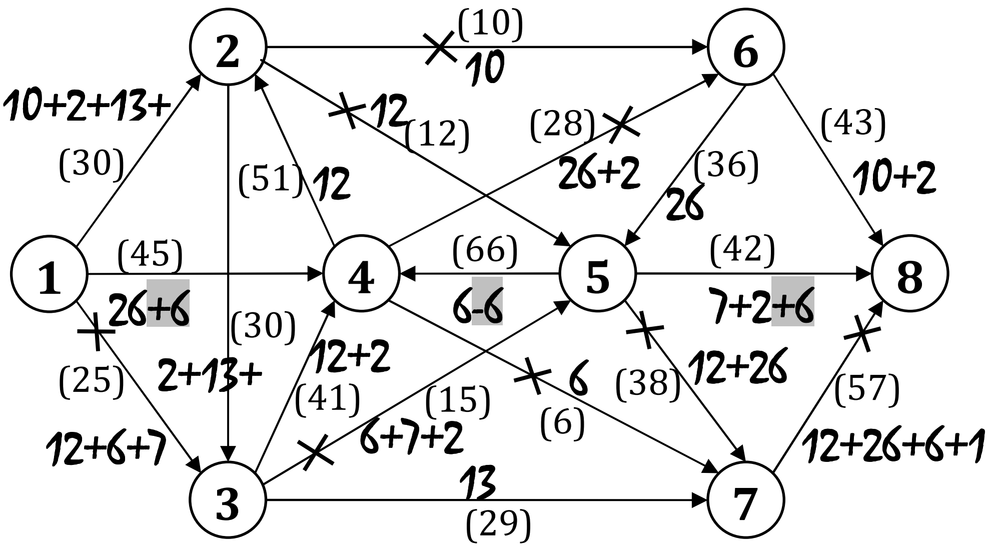


Рис. 12

Величина нового полного потока Ф = 78 + 6 = 84.

Вторая расстановка меток представлена в таблице:

	1	2	3	4	5
v_1 $\boxed{0}$	v_2 $\boxed{1, +3}$ v_3 $\boxed{x}$ v_4 $\boxed{1, +13}$	v_3 $\boxed{2, +13}$ v_5 $\boxed{x}$ v_6 $\boxed{x}$ v_7 $\boxed{x}$	v_5 $\boxed{x}$ v_6 $\boxed{x}$ v_7 $\boxed{3, +16}$	v_5 $\boxed{7, -38}$ v_6 $\boxed{x}$ v_8 $\boxed{x}$	v_6 $\boxed{5, -26}$ v_8 $\boxed{5, +27}$

Сток v_8 получил метку, следовательно, построенный полный поток с величиной Ф = 84 не максимальный.

Находим маршрут из v_1 в v_8 только по вершинам с метками: $v_1 - v_2 - v_3 - v_7 - v_5 - v_8$ (рис. 13). Изменив потоки по дугам этого маршрута, увеличим величину полного потока на 3 (рис. 13).

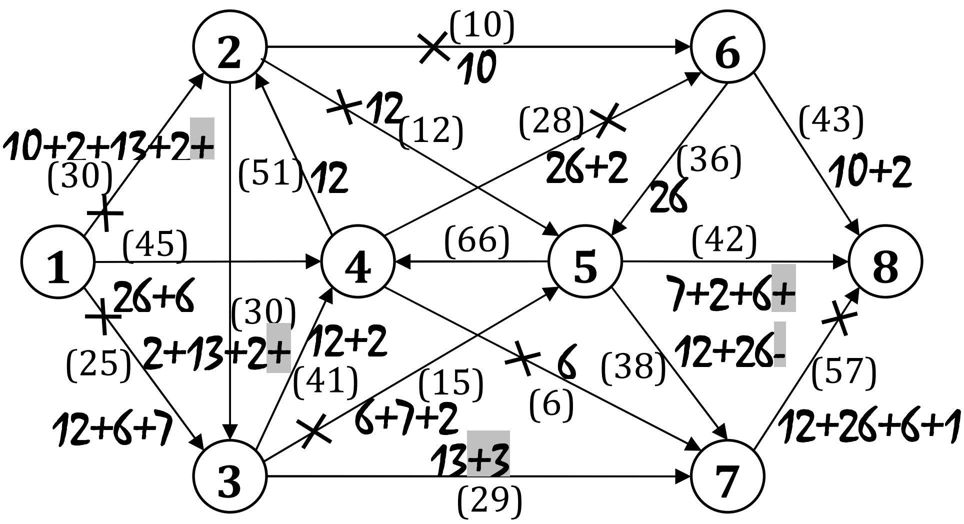


Рис. 13

Величина нового полного потока Ф = 84 + 3 = 87.

Третья расстановка меток представлена в таблице:

	1	2	3	4	5
v_1 0	v_2 x v_3 x v_4 1, +13	v_2 4, +39 v_3 4, –14 v_5 x v_6 x v_7 x	v_5 x v_6 x v_7 3, +13	v_5 7, –35 v_6 x v_8 x	v_6 5, –26 v_8 5, +24

Сток v_8 получил метку, следовательно, построенный поток Ф = 87 – не максимальный.

Находим маршрут из v_1 в v_8 только по вершинам с метками: $v_1 - v_4 - v_3 - v_7 - v_5 - v_8$ (рис. 14). Изменив потоки по дугам этого маршрута, увеличим величину полного потока на 13 (рис. 14).

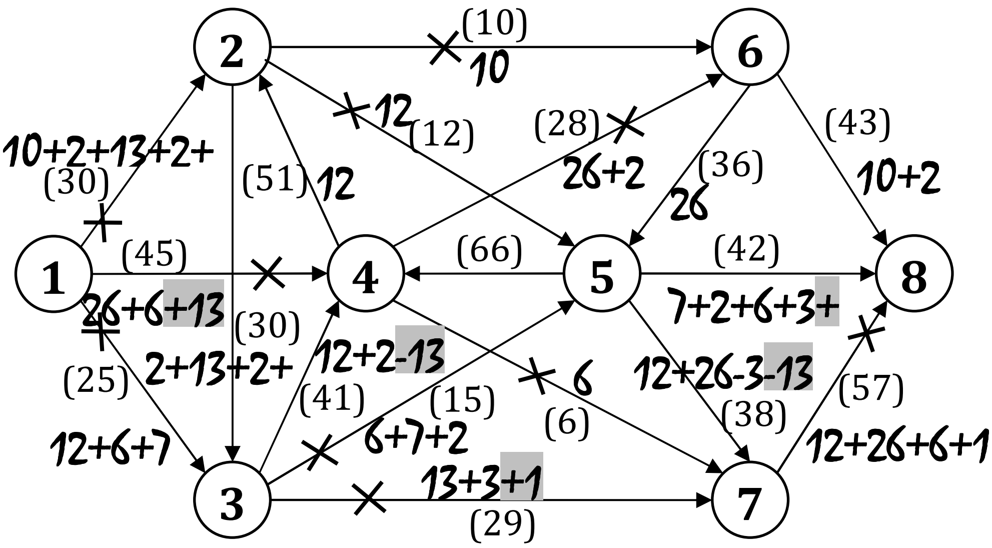


Рис. 14

Величина нового полного потока $\Phi = 87 + 13 = 100$.

Четвертая расстановка меток представлена в таблице:

	1
v_1 $\boxed{0}$	v_2 $\boxed{x}$ v_3 $\boxed{x}$ v_4 $\boxed{x}$

Сток v_8 не получит метку, следовательно, построенный полный поток с величиной $\Phi = 100$ является максимальным.

3. Построение минимального разреза.

Минимальный разрез состоит из насыщенных дуг, выходящих из вершин, получивших метку в вершины, не получившие метку. Минимальный разрез образуют дуги: (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4). Пропускная способность разреза равна сумме пропускных способностей его дуг: $30 + 25 + 45 = 100$.

По теореме Форда – Фалкерсона: если величина построенного потока равна пропускной способности некоторого разреза, то разрез является минимальным, а поток – максимальным.

Задачи

Основные понятия.

Матрицы графов. Изоморфность графов

3.1. Покажите, что следующие объекты можно рассматривать как графы:

а) вершины и ребра многогранника;

б) дружеские отношения в группе студентов;

в) страны на карте.

3.2. Можно ли провести футбольный турнир восьми команд так, чтобы каждая команда провела: а) по 4 встречи, б) по 5 встреч?

3.3. Найдется ли граф с пятью вершинами, у которого одна вершина изолированная, а другая – степени 4?

3.4. Найдется ли граф с пятью вершинами, степени которых все различны между собой?

3.5. Могут ли степени вершины в простом графе быть равны:

1) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;

2) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

3) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2.

3.6. Сумма степеней всех вершин некоторого связного графа равна 20. К этому графу добавили три ребра (число вершин не меняли). Чему равна сумма степеней всех вершин нового графа? Сколько в нем ребер? Какое наименьшее и какое наибольшее число вершин может быть в исходном графе?

3.7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

3.8. Нарисуйте граф с пятью вершинами, у которого ровно две вершины имеют одинаковую степень.

3.9. Можно ли 15 компьютеров соединить в сеть так, чтобы каждый из них был связан только с 11 другими?

3.10. Утверждают, что в одной компании из пяти человек каждый знаком с двумя и только с двумя другими. Возможна ли такая компания?

3.11. В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

3.12. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

3.13. Полный граф имеет 105 ребер. Найдите число его вершин.

3.14. Из полного графа K_{20} несколько вершин удалили. В оставшемся подграфе стало 66 ребер. Сколько вершин удалено? Сколько ребер удалено?

3.15. Степень вершины полного графа равна 7. Из графа удалили несколько ребер так, что степень каждой вершины получившегося графа стала равной 5. Сколько ребер удалили? Сколько ребер осталось?

3.16. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно: а) 100 дорог; 2) 111 дорог?

3.17. О некой компании известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

3.18. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и два черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

3.19. Нарисуйте граф с семью вершинами и шестью ребрами, не имеющий ни одного цикла.

3.20. В турнире по олимпийской системе («проигравший выбывает») участвует n человек. Сколько встреч будет проведено?

3.21. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

3.22. Найдите какие-нибудь остовные деревья для графов K_5, $K_{3,3}$ и в графе Петерсона.

3.23. В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не более восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

3.24. В олимпиаде участвовали 16 школьников, которым было предложено решить 16 задач. Каждый из 16 школьников решил по четыре задачи, и каждая задача была решена четырьмя школьниками. Докажите, что можно организовать разбор задач так, чтобы каждый представил одну решенную им задачу, и чтобы все задачи были разобраны.

3.25. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.

3.26. В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?

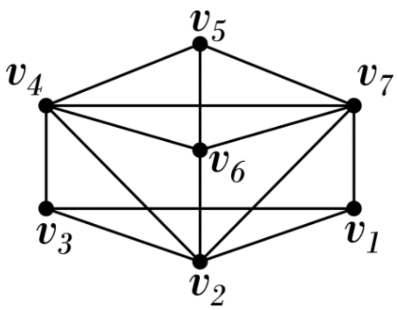
3.27. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

3.28. Сколько ребер в однородном (регулярном) графе G, если в нем число вершин $n = 7$ и степень графа $\deg G = 6$?

3.29. Найдите число вершин n и степень $\deg G$ однородного (регулярного) графа G, если он содержит 19 ребер.

3.30. Какое наименьшее количество ребер нужно удалить из графа, изображенного на рисунке, чтобы он стал однородным (регулярным)?

а)

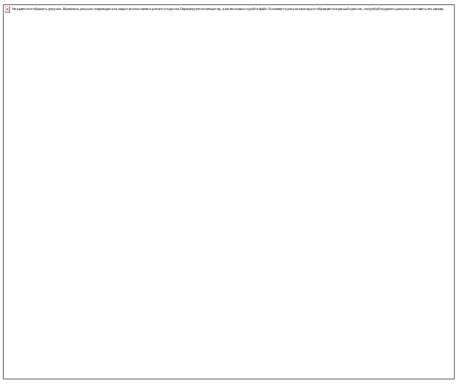


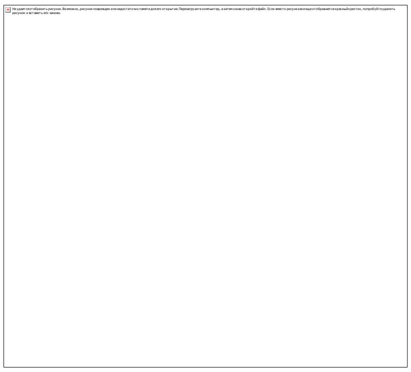
б)

в)

г)

д) *е)*





3.31. В полном двудольном графе степень каждой вершины множества V_1 равна 6, степень каждой вершины множества V_2 равна 8. Сколько ребер в графе?

3.32. В полном двудольном графе 49 вершин. Найдите $|V_1|$ и $|V_2|$, если $|V_1| > 1$ и $|V_2| > 1$.

3.33. В полном двудольном графе содержится 119 ребер. Найдите число вершин $|V_1|$ и $|V_2|$ в каждой доле, если известно, что $|V_2| > 15$, $|V_1| > 1$.

3.34. В связном двудольном графе $|V_1| = 7$, $|V_2| = 10$. Сколько ребер содержит граф, если при удалении любого ребра граф становится несвязным?

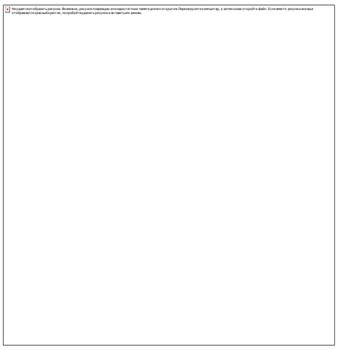
3.35. Сколько ребер содержит полный трехдольный граф, если $|V_1| = 3$, $|V_2| = 4$, $|V_3| = 5$, где V_1, V_2 и V_3 – множества вершин его трех долей.

3.36. Полный трехдольный граф содержит 52 ребра. Найдите $|V_1|$, $|V_2|$, $|V_3|$, если $|V_1| < |V_3| < |V_2|$, $|V_1| \cdot |V_3| = 10$, $|V_1| + |V_3| = 7$, V_1, V_2 и V_3 – множества вершин трех его долей.

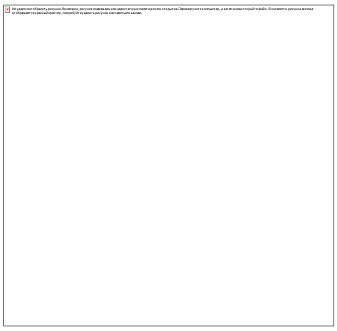
3.37. Какое число висячих вершин может иметь дерево с 1) 10 вершинами, 2) n вершинами?

3.38. Постройте матрицы смежности, инцидентности и Кирхгофа для графов:

а)

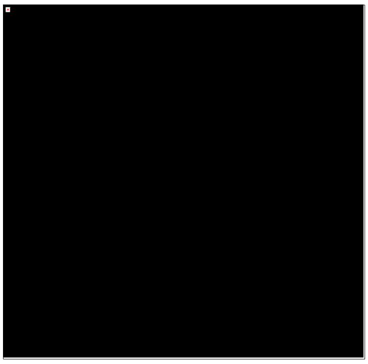


б)

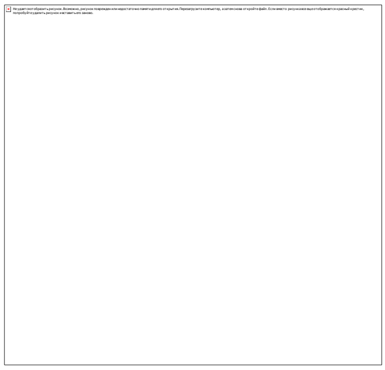


в)

г)



д)



3.39. Дана матрица смежности графа G:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Не изображая граф, ответьте на следующие вопросы. Какова степень пятой вершины? Назовите смежные с ней вершины. Существует ли путь из вершины 2 в вершину 8?

3.40. Изобразите граф по соответствующей ему матрице смежности:

а)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

г)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.41. Изобразите граф по соответствующей ему матрице инцидентности:

а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.42. Изобразите граф по соответствующей ему матрице Кирхгофа:

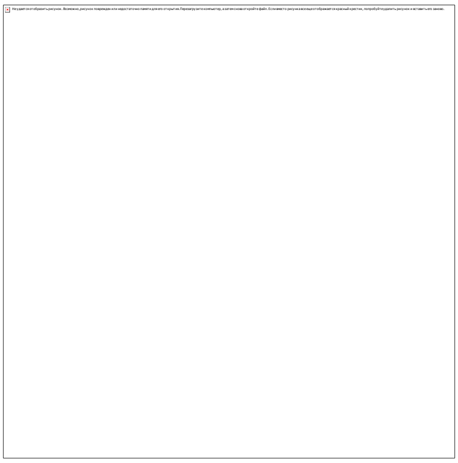
$$а)\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$б)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

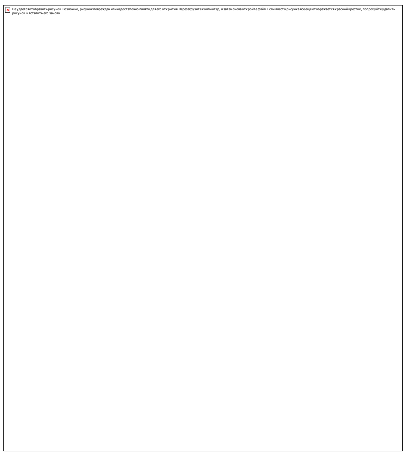
$$в)\quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.43. Постройте матрицы смежности и инцидентности ориентированного графа:

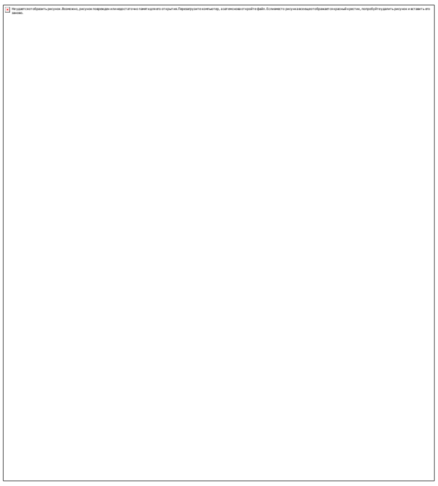
а)



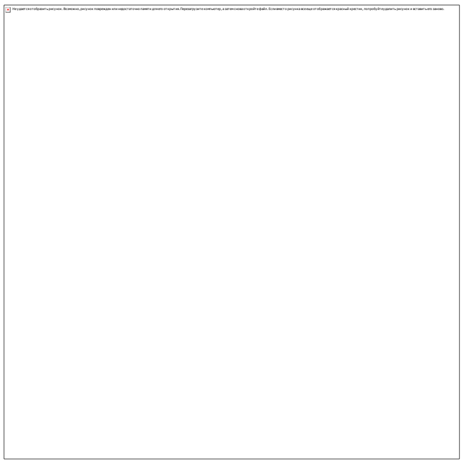
б)



в)



г)



3.44. Изобразите все связные неизоморфные графы с 4 вершинами.

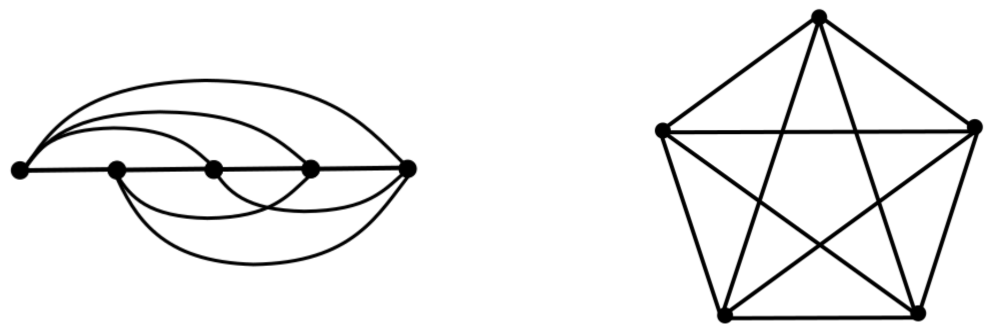
3.45. Сколько существует попарно неизоморфных графов без петель и кратных ребер, имеющих 6 вершин и 11 ребер?

3.46. Перечислите все неизоморфные деревья с 1) 6, 2) 7 вершинами.

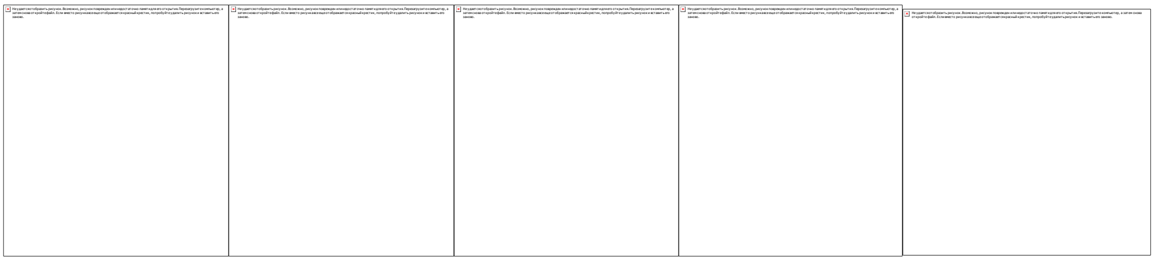
3.47. Сколько существует попарно неизоморфных простых графов с 10 вершинами и 1) 44, 2) 43 ребрами?

3.48. Определите, сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов без петель и кратных ребер со следующим набором степеней вершин: 2, 2, 3, 3, 3, 5.

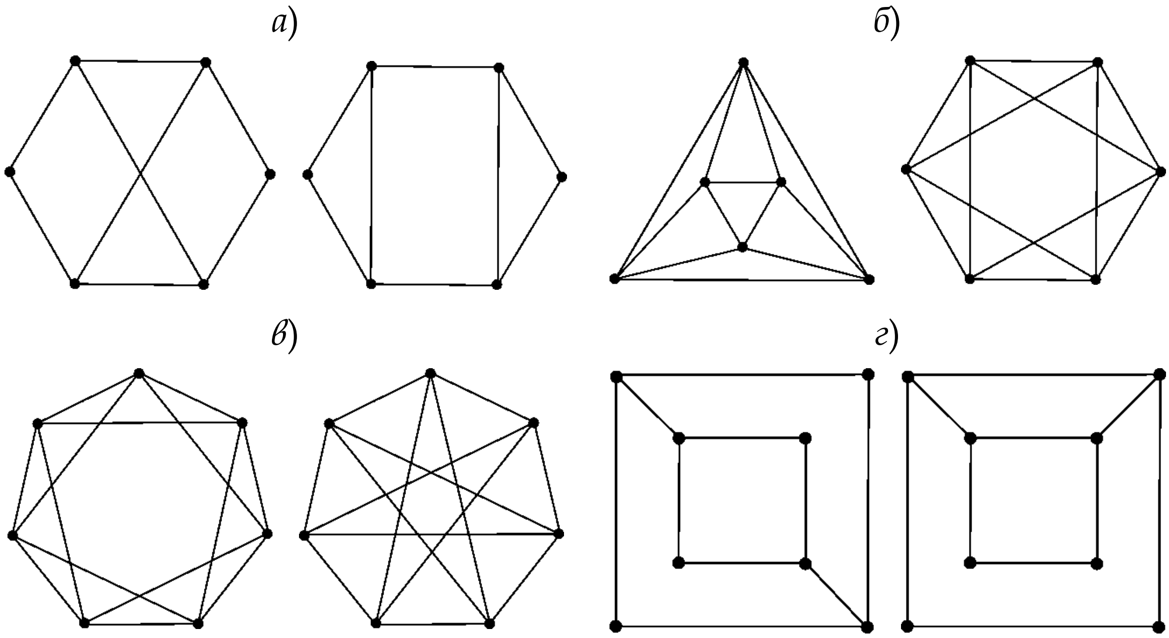
3.49. Докажите, что графы, изображенные на рисунке, являются изоморфными.



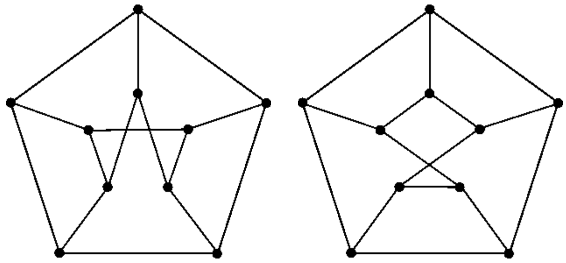
3.50. Определите, сколько имеется попарно неизоморфных графов среди изображенных на рисунке.



3.51. Определите, изоморфны ли графы в парах, представленных на рисунке.



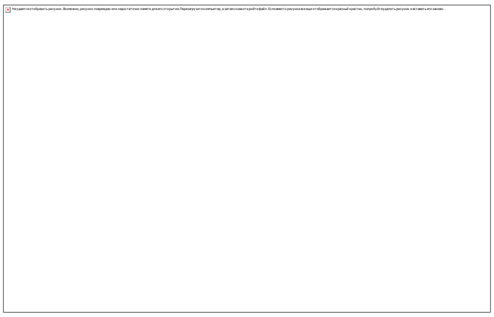
г)



Маршруты, цепи, циклы.

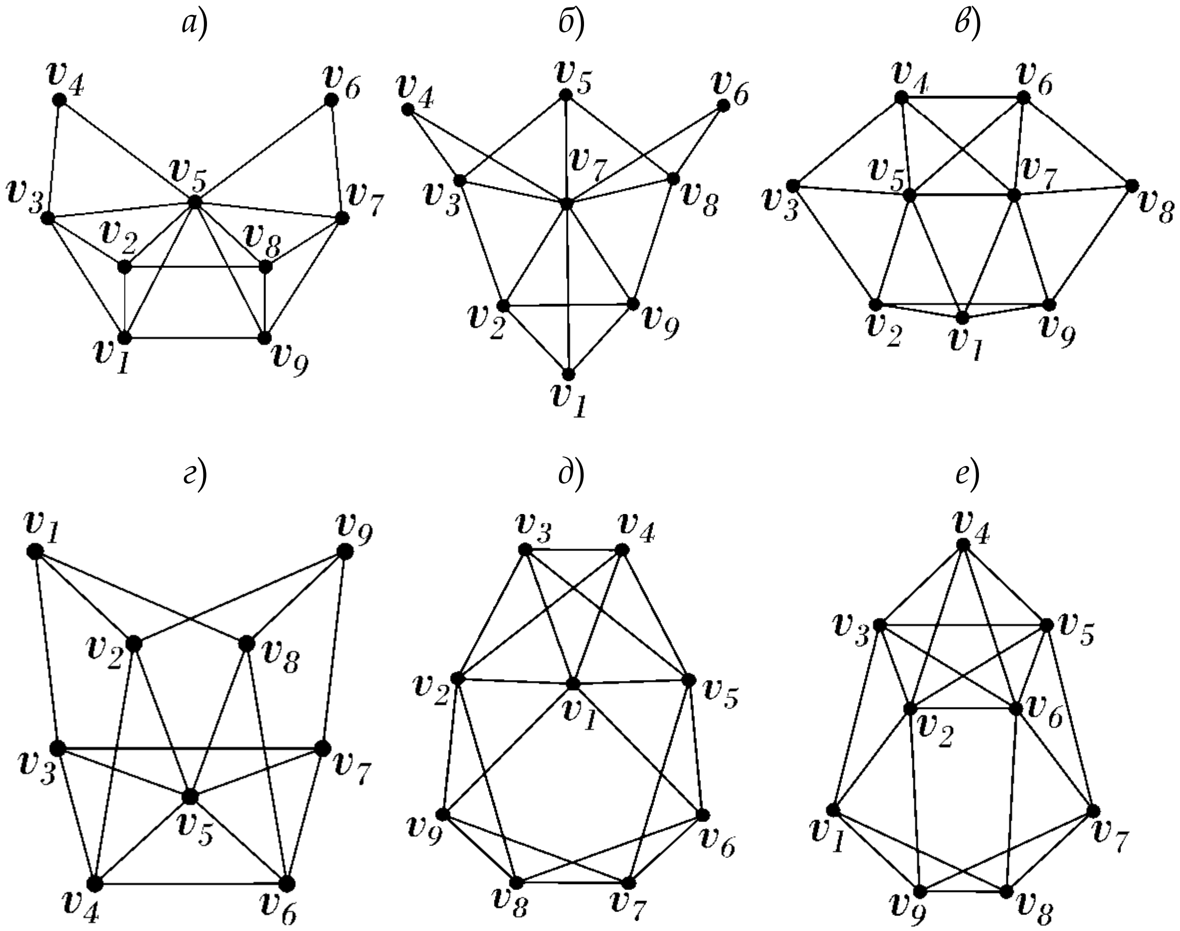
Эйлеровы и гамильтоновы графы

3.52. Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги и не проводя по одной линии дважды, нарисовать правильный пятиугольник с диагоналями?

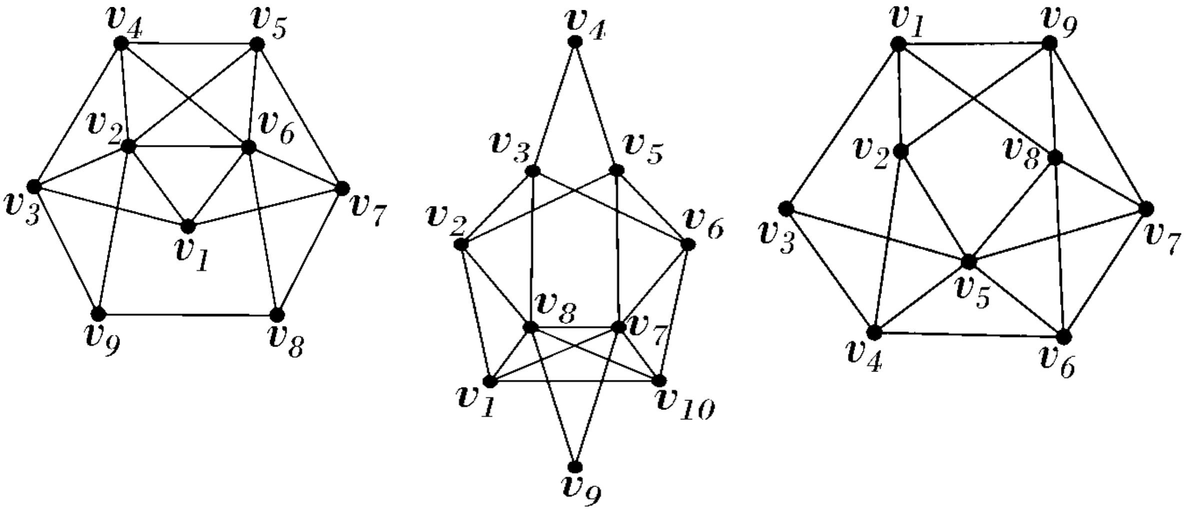


3.53. Перечислите все простые цепи, идущие из вершины v_1 в вершину v_7 через вершину v_5. На сколько увеличится количество таких цепей, если в граф добавить ребро (v_1, v_5)?

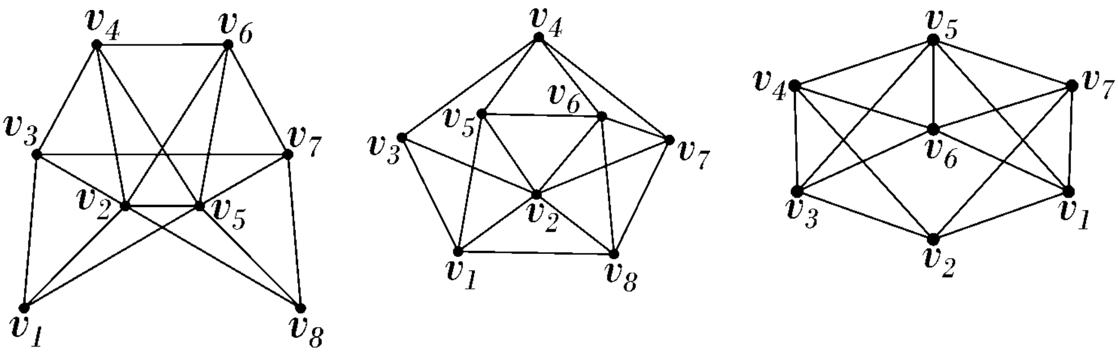
3.54. Определите, является ли граф эйлеровым или полуэйлеровым. Постройте соответственно эйлеров цикл или эйлерову цепь.


а)
v4 v6 v5 v3 v7 v2 v8 v1 v9
б)
v5 v4 v6 v7 v3 v8 v2 v9 v1
в)
v4 v6 v5 v7 v3 v8 v2 v1 v9
г)
v1 v9 v2 v8 v3 v7 v5 v4 v6
д)
v3 v4 v2 v1 v5 v9 v6 v8 v7
е)
v4 v3 v5 v2 v6 v1 v7 v9 v8

ж) *з)* *и)*



к) *л)* *м)*



3.55. Для каких чисел m, n граф G является эйлеровым:

1) $К_n$ – полный граф с n вершинами;

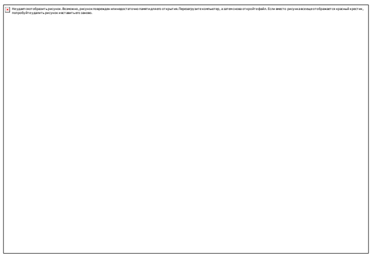
2) K_{mn} – полный двудольный граф с n и m вершинами в долях;

3) W_n – колесо с n вершинами?

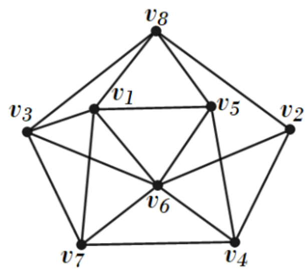
3.56. 1) Можно ли удалить в графе ровно два ребра так, чтобы граф стал эйлеровым?

2) Можно ли добавить в граф ровно два ребра (не кратных) так, чтобы граф стал эйлеровым?

а)



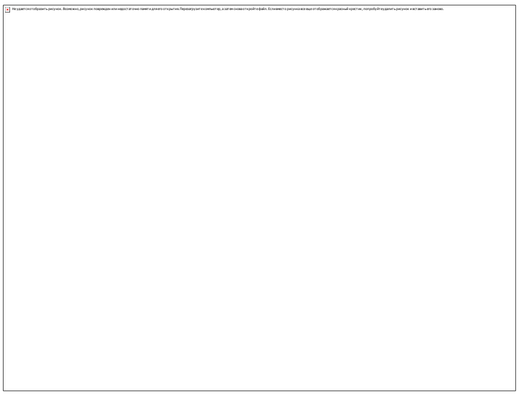
б)



3.57. 1) Какое наименьшее число ребер нужно удалить из графа, чтобы граф стал: а) полуэйлеровым, б) эйлеровым?

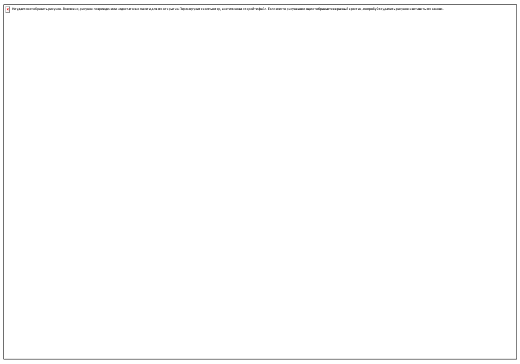
2) Какое наименьшее число ребер (не кратных) нужно добавить в граф, чтобы граф стал: а) полуэйлеровым, б) эйлеровым?

а)

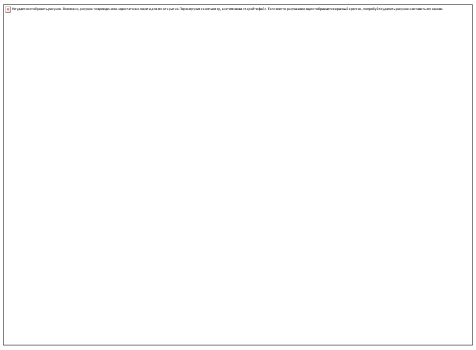


б)

в)



г)



д)

е)

ж)

з)

3.58. В полном графе с n вершинами эйлеров цикл содержит 171 ребро. Найдите n.

3.59. В однородном графе с n вершинами эйлеров цикл содержит 182 ребра. Найдите n.

3.60. Изобразите все неизоморфные эйлеровы графы с 8 вершинами, в которых:

1) ровно одна вершина наибольшей степени 4;

2) ровно две вершины наибольшей степени 4.

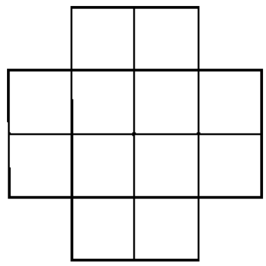
3.61. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

3.62. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.

3.63. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

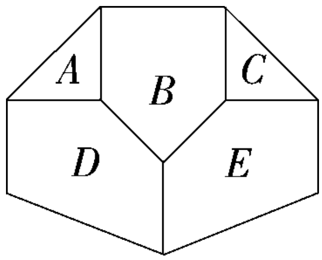
3.64. Дан кусок проволоки 120 см. Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы изготовить каркас куба с ребром 10 см?

3.65. Муха забралась в банку из-под сахара. Банка имеет форму куба. Сможет ли муха последовательно обойти все 12 ребер куба, не проходя дважды по одному ребру? Подпрыгивания и перелеты с места в решении не рассматривать.



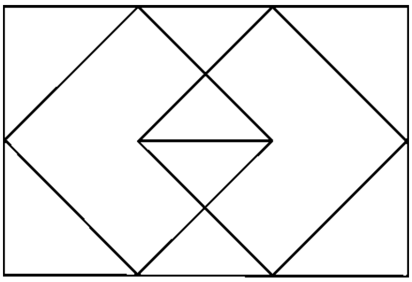
3.66. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4×4 убрать угловые клетки. Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках только по одному разу?

3.67. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей заборами. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор только 1 раз?

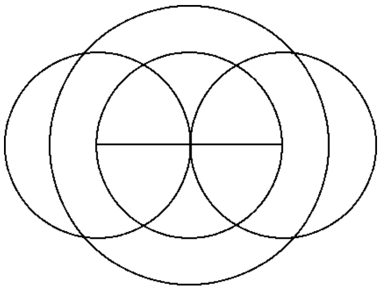


3.68. Можно ли, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды по одной и той же линии, вычертить представленные ниже фигуры:

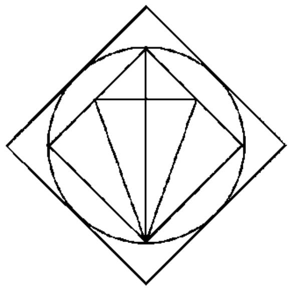
а)



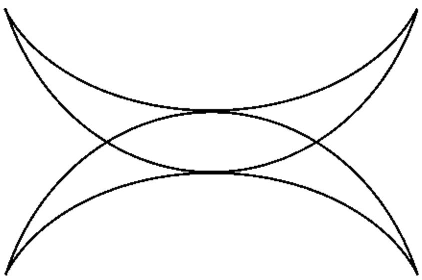
б)



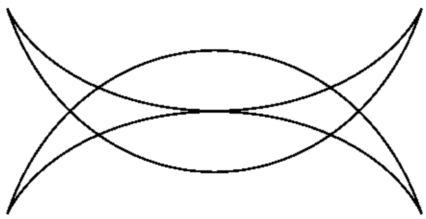
в)



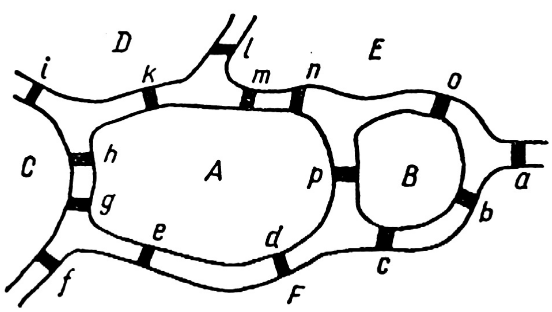
г)



д)

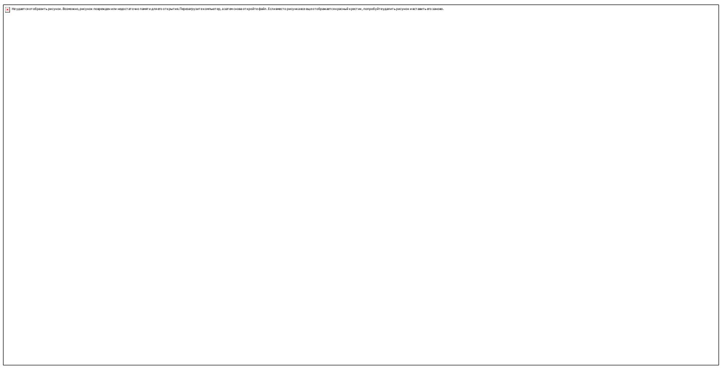


3.69. Можно ли совершить прогулку по городу, план которого показан на рисунке, пройдя только



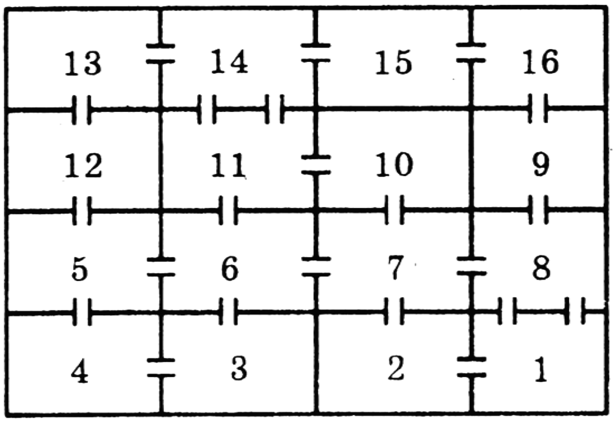
один раз по каждому из пятнадцати мостов? Возвращаться в начальную точку пути необязательно. Если такой обход существует, найдите его, указав мосты в той последовательности, в которой вы их проходите. Если же такого обхода не может существовать, объясните, почему.

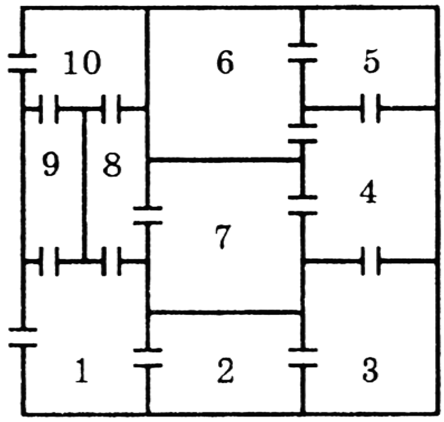
3.70. Найдите в графе гамильтонову цепь, начало которой – вершина v_6, а конец – вершина v_8.



3.71. На рисунках *а* и *б* изображены планы двух подвалов, состоящих из комнат. Можно ли пройти через все двери всех комнат, запирая каждый раз ту дверь, через которую вы проходите? С какой комнаты надо начинать движение?

а) *б*)

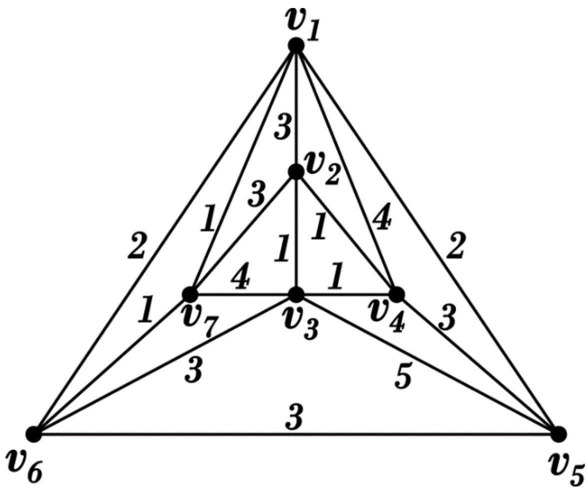




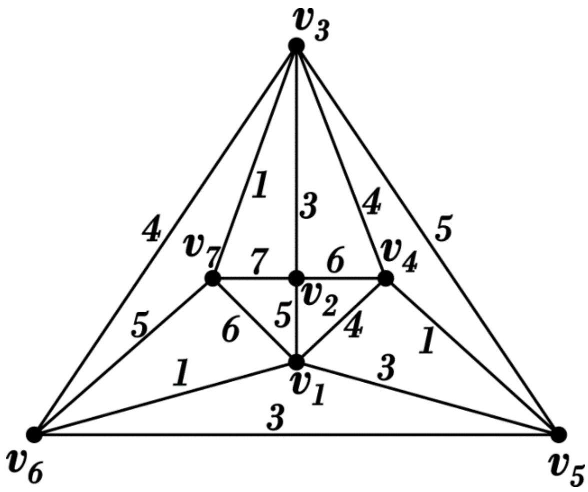
Алгоритмы Прима и Краскала

3.72. Найдите минимальное остовное дерево в графе с помощью алгоритмов Прима и Краскала.

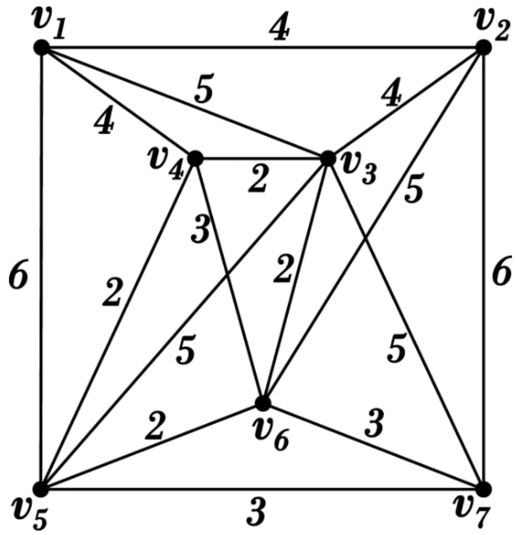
а)



б)

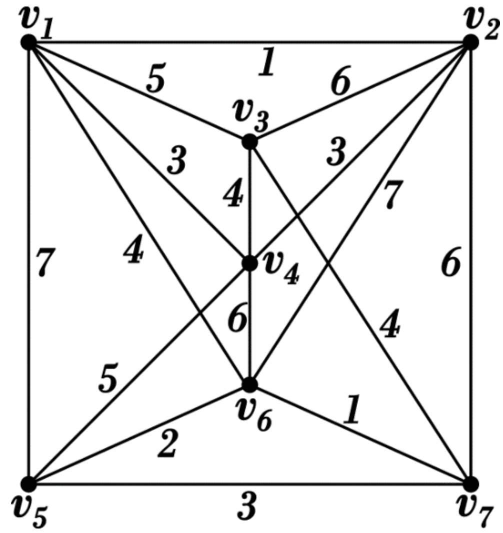


в)



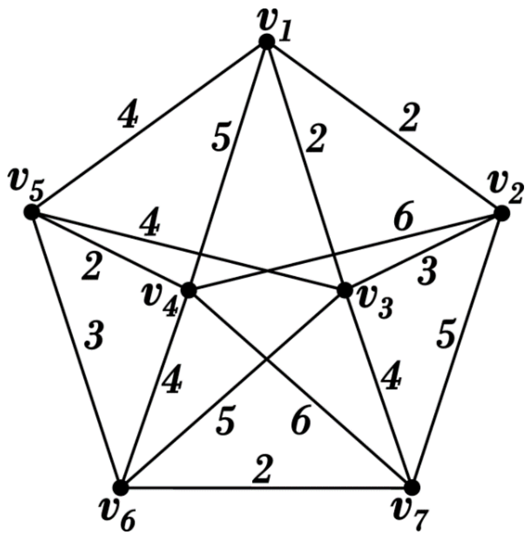
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
4
5
4
4
2
6
6
3
2
2
5
5
5
2
3
3

г)



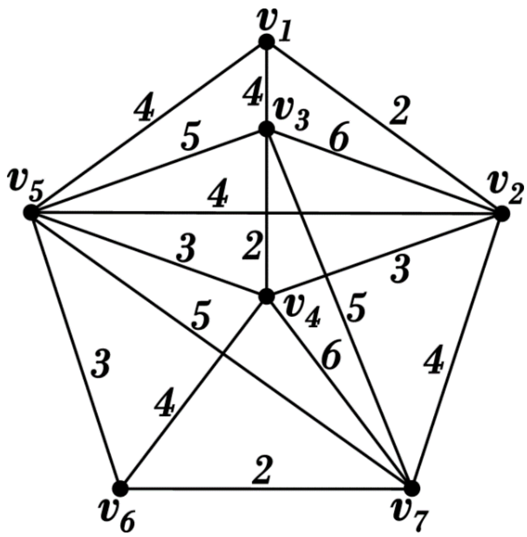
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
1
5
6
3
3
4
7
7
4
6
6
4
5
2
1
3

д)



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
4
5
2
2
4
6
2
3
3
5
4
4
5
6
2

е)



v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
4
4
2
5
6
4
3
2
3
5
5
6
3
4
4
2

3.73. Найдите минимальное остовное дерево для графа, заданного следующей матрицей весов (бесконечность означает отсутствие ребра).

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & \infty & 3 & 5 \\ 2 & \infty & 8 & \infty & 7 \\ \infty & 8 & \infty & 10 & 1 \\ 3 & \infty & 10 & \infty & 12 \\ 5 & 7 & 1 & 12 & \infty \end{pmatrix}$$

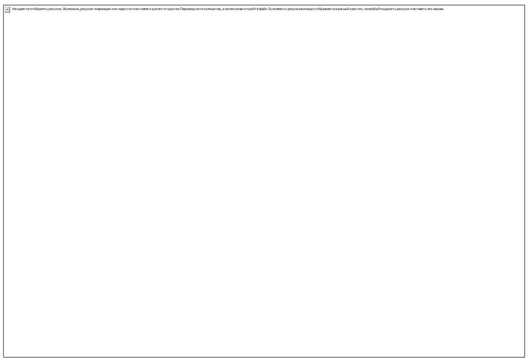
3.74. Найдите минимальное остовное дерево по матрице весов ребер с помощью алгоритма Прима (бесконечность означает отсутствие ребра).

$$\begin{pmatrix} \infty & 2 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 3 & 3 & \infty & 1 \\ 4 & 2 & \infty & 3 & \infty & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & \infty & \infty & 1 & 3 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & 3 & 1 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

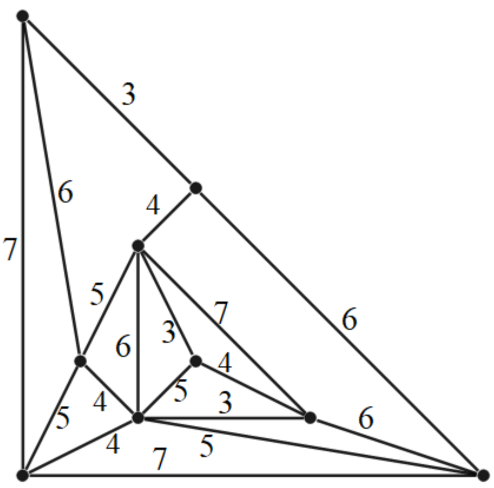
3.75. Найдите минимальное остовное дерево по матрице весов ребер с помощью алгоритма Краскала (бесконечность означает отсутствие ребра).

$$\begin{pmatrix}
\infty & 4 & 3 & 2 & 3 & 2 & \infty & 1 \\
4 & \infty & 1 & \infty & 1 & 5 & 3 & 4 \\
3 & 1 & \infty & 3 & 2 & 3 & 5 & \infty \\
2 & \infty & 3 & \infty & 4 & 2 & \infty & 2 \\
3 & 1 & 2 & 4 & \infty & \infty & 3 & 4 \\
2 & 5 & 3 & 2 & \infty & \infty & 2 & 3 \\
\infty & 3 & 5 & \infty & 3 & 2 & \infty & 2 \\
1 & 4 & \infty & 2 & 4 & 3 & 2 & \infty
\end{pmatrix}$$

3.76. Постройте два различных (неизоморфных) остовных дерева минимального веса, используя алгоритмы Прима или Краскала.



3.77. На строительном участке нужно создать сеть линий электропередачи, соединяющую все объекты. Их решили проводить вдоль дорог, схема которых изображена на рисунке. Объектам строительства со-

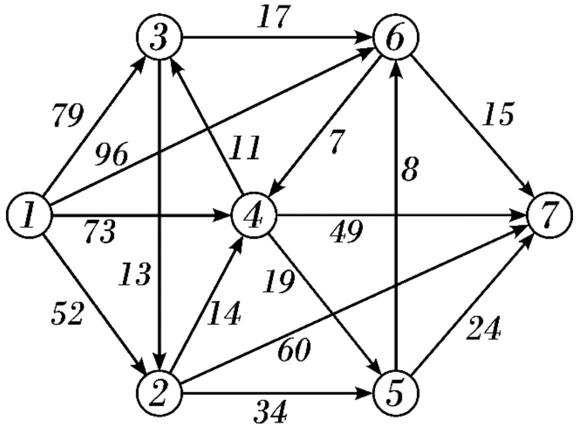


ответствуют вершины графа, участкам дорог – ребра графа. Длина участка дороги – это вес соответствующего ребра. Каким образом провести линии электропередачи, чтобы их общая длина была минимальная?

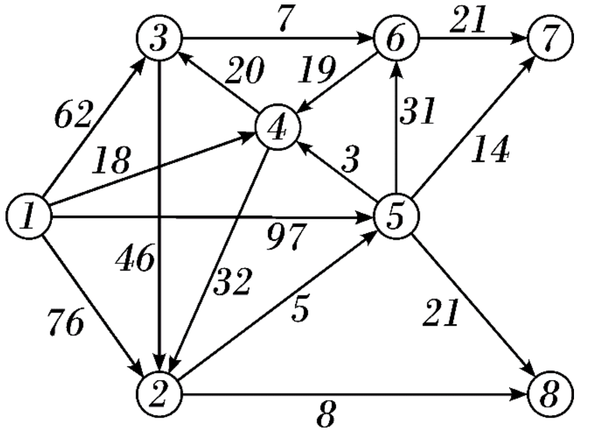
Алгоритм Дейкстры и Флойда. Сетевые графы

3.78. Найдите кратчайшие пути от первой вершины ко всем остальным вершинам графа, используя алгоритм Дейкстры. Построить дерево кратчайших путей.

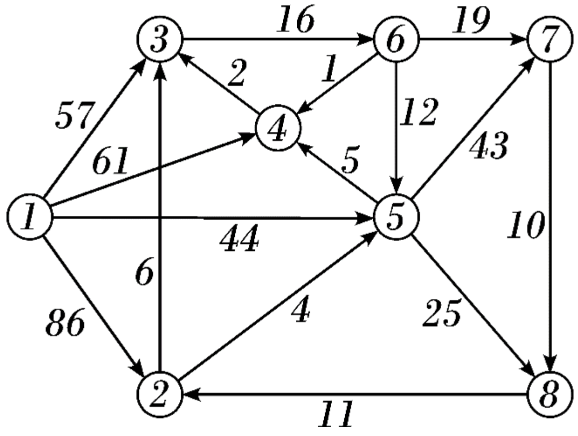
а)



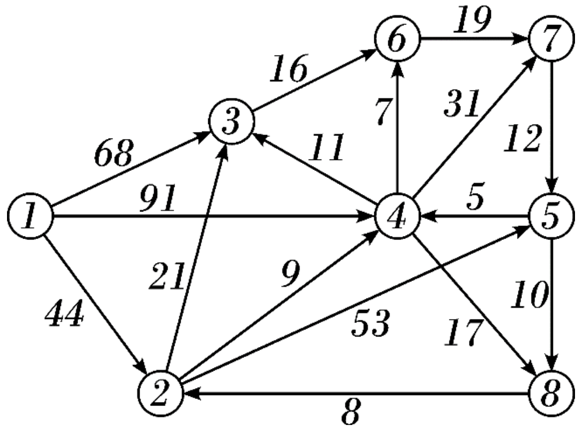
б)



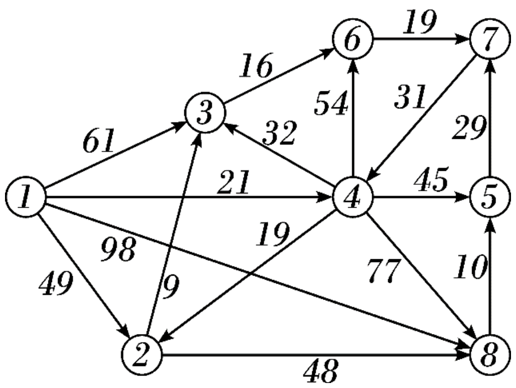
в)



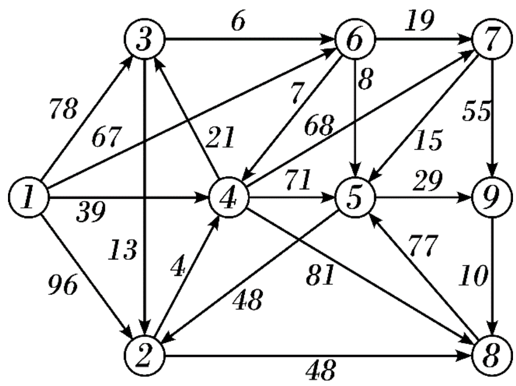
г)



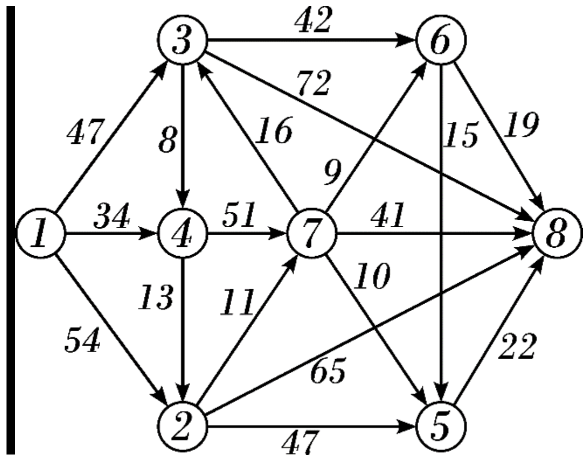
д)



е)



3.79. Найдите кратчайшие пути в орграфе от первой вершины к восьмой, используя алгоритм Дейкстры. Постройте дерево кратчайших путей.

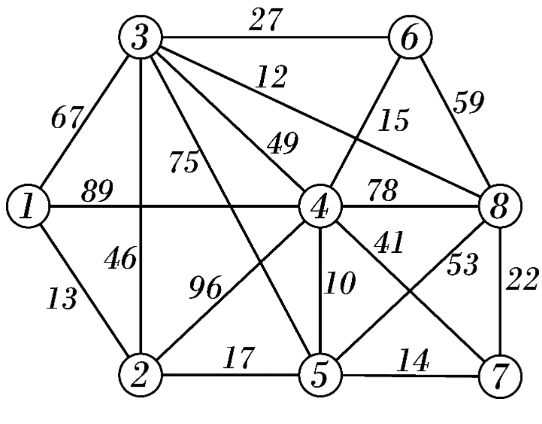


3.80. На рисунке показана транспортная сеть, соединяющая восемь городов, и расстояния между ними. Движение по каждой дороге возможно в двух встречных направлениях. Найдите кратчайшие маршруты между следующими городами, используя алгоритм Дейкстры:

1) между городами 1 и 8;

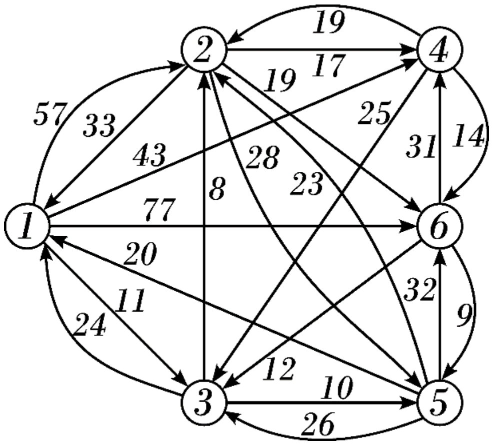
3) между городами 8 и 4;

4) между городами 7 и 3.

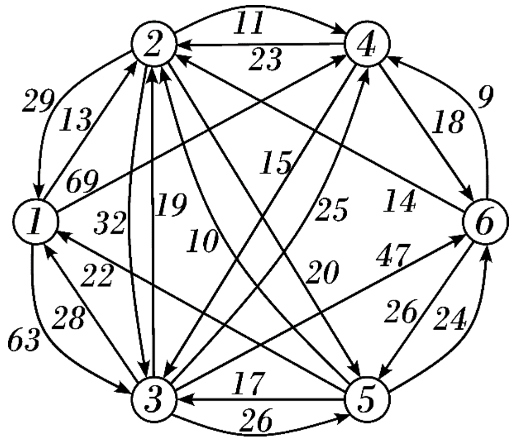


3.81. Найдите все кратчайшие пути в орграфе, используя алгоритм Флойда.

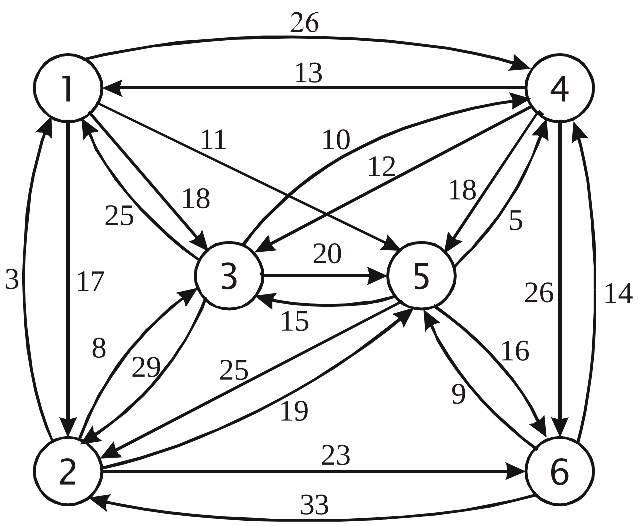
а)



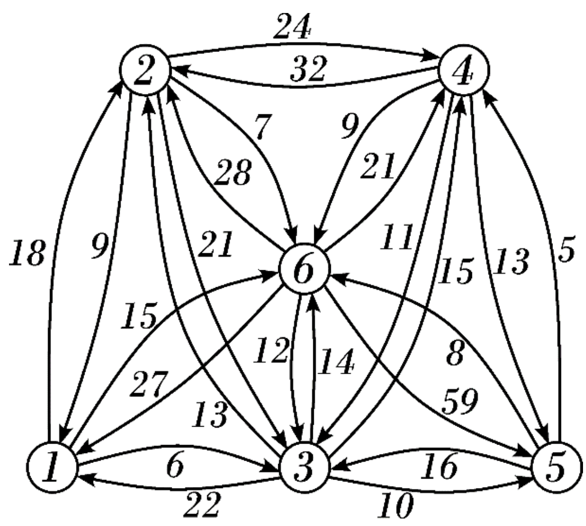
б)



в)

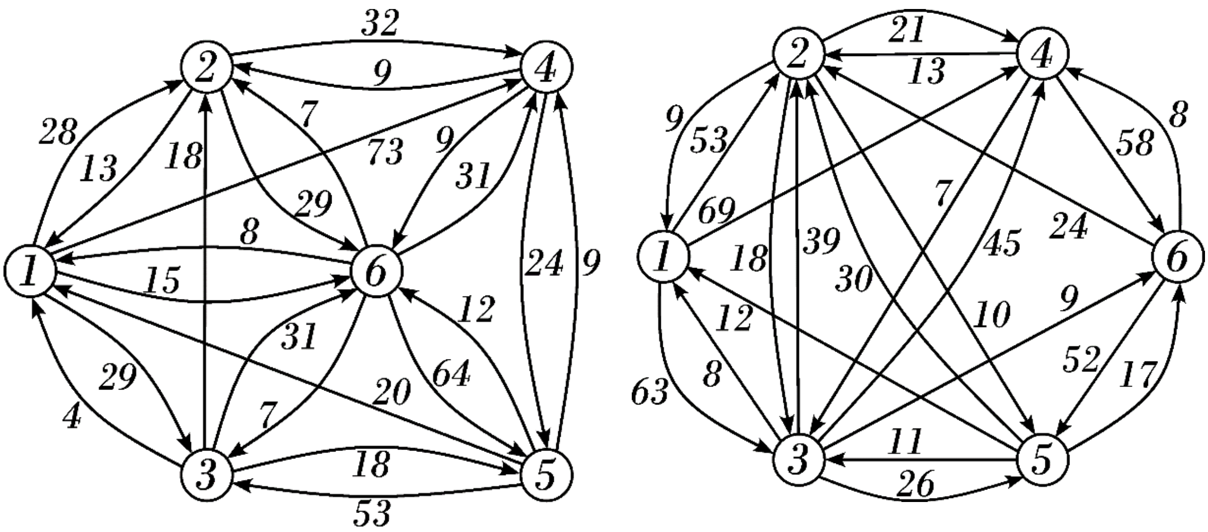


г)



д)

е)

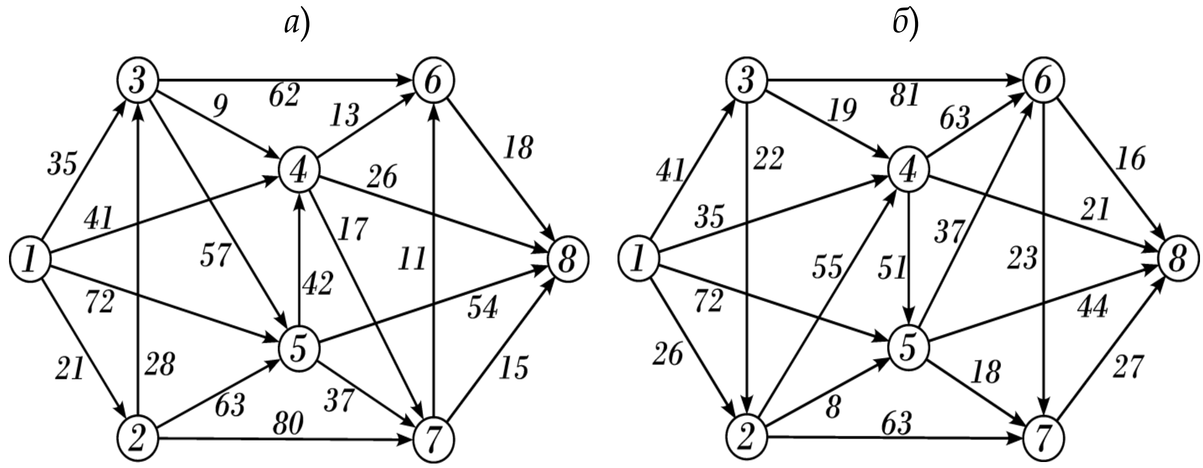


3.82. Постройте сетевой график и найти критический путь по данным в таблице:

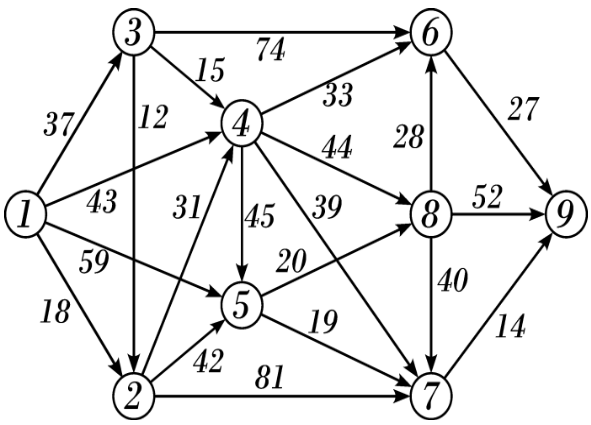
Работа	Предшествующие работы	Продолжительность
a_1	–	26
a_2	–	9
a_3	a_1	11
a_4	a_2	14
a_5	a_1	23
a_6	a_2	16
a_7	–	25
a_8	a_1	18
a_9	a_3, a_4	20

a_{10}	a_1	13
a_{11}	a_3, a_4	10
a_{12}	a_5, a_6, a_7	26
a_{13}	a_8, a_9	10
a_{14}	a_{10}, a_{11}, a_{12}	21

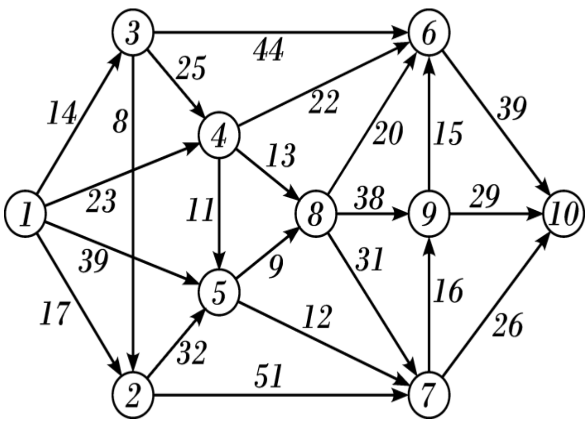
3.83. Найдите критический путь в сетевом графике. Исходное событие – вершина 1, завершающее событие – вершина с наибольшим номером. Вес дуги – время выполнения работы в часах.



в)



г)



3.84. Построить сетевой график, найти критический путь, вычислить наиболее ранние и наиболее поздние сроки наступления событий, резервы времени всех работ по данным в таблице:

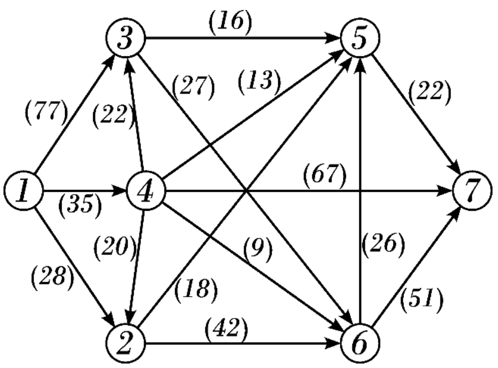
Работа	Предшествующие работы	Продолжительность
a_1	–	10
a_2	–	21
a_3	–	14
a_4	a_3	9
a_5	a_1	15
a_6	a_2	11
a_7	a_1	20

a_8	a_2	29
a_9	a_2	22
a_{10}	a_7, a_8	12
a_{11}	a_4, a_5, a_6	16
a_{12}	a_7, a_8	23
a_{13}	a_4, a_5, a_6	13
a_{14}	a_7, a_8	19
a_{15}	a_{11}, a_{12}	27
a_{16}	a_9, a_{10}	8
a_{17}	a_{13}, a_{14}	24

Потоки в сетях. Алгоритм Форда – Фалкерсона

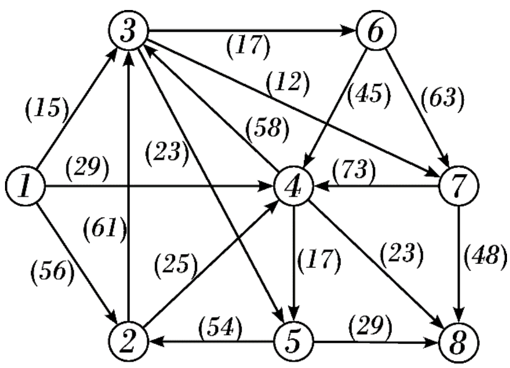
3.85. Найдите максимальный поток и минимальный разрез в транспортной сети, используя алгоритм Форда – Фалкерсона.

а)

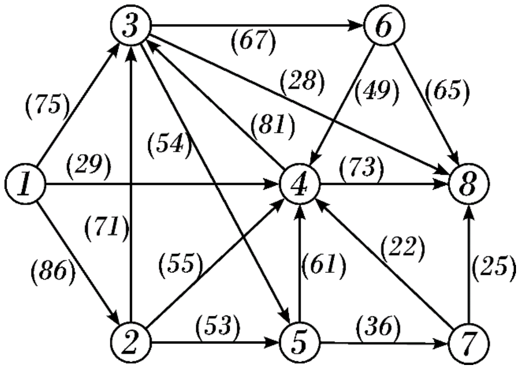


в)

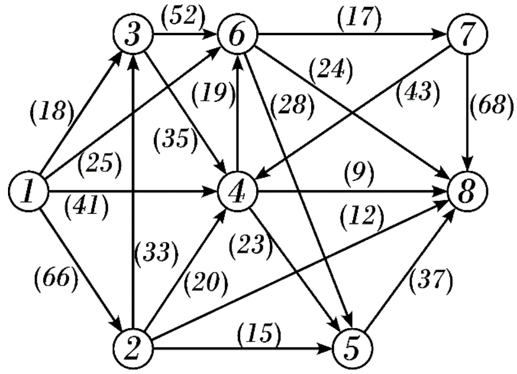
б)



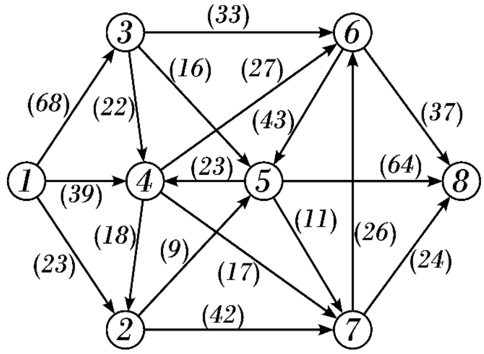
г)

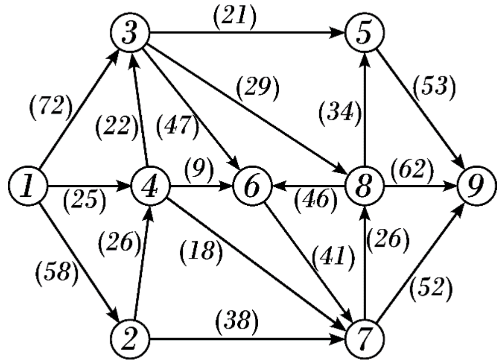


д)

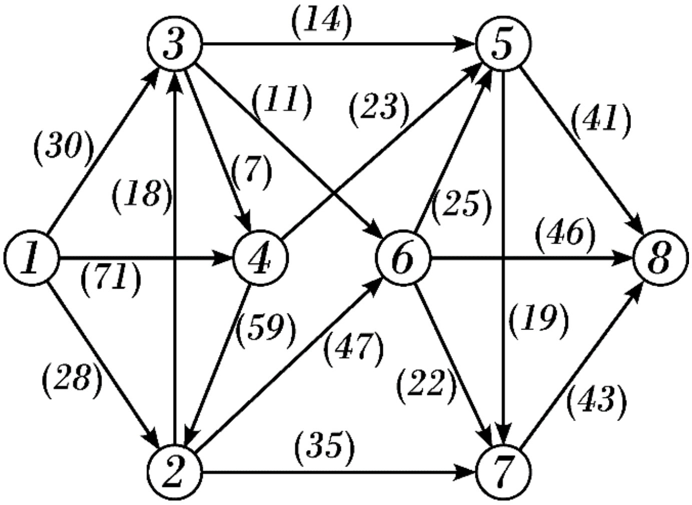


е)





3.86. На рисунке представлена схема нефтепровода, соединяющего месторождение (пункт 1) с нефтехранилищем (пункт 8). Остальные пункты в схеме обозначают распределительные станции, регулирующие движение потоков по участкам трубопровода. Для каждого участка в схеме указана его пропускная способность. Какой максимальный поток нефти может проходить из месторождения в нефтехранилище для наиболее эффективной работы нефтепровода?



Раскраска графов. Хроматическое число графа

3.87. Определите хроматические числа графов платоновых тел.

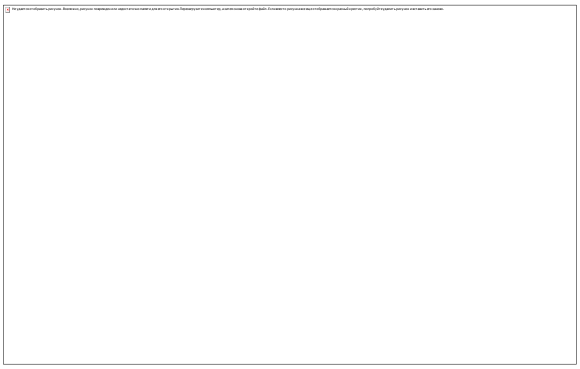
3.88. Приведите пример двух графов с совпадающими степенными множествами (степенными последовательностями) и различными хроматическими числами.

3.89. Приведите пример графа, не имеющего треугольников (т.е. подграфов K_3), у которого хроматическое число равно 5.

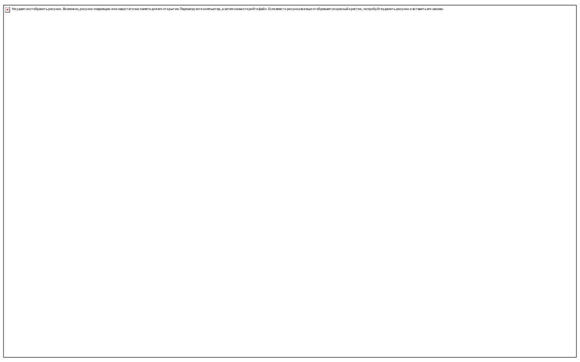
3.90. Докажите, что для раскраски карты, полученной при пересечении прямых и окружностей на плоскости, достаточно двух цветов.

3.91. Найдите хроматическое число графа:

а)

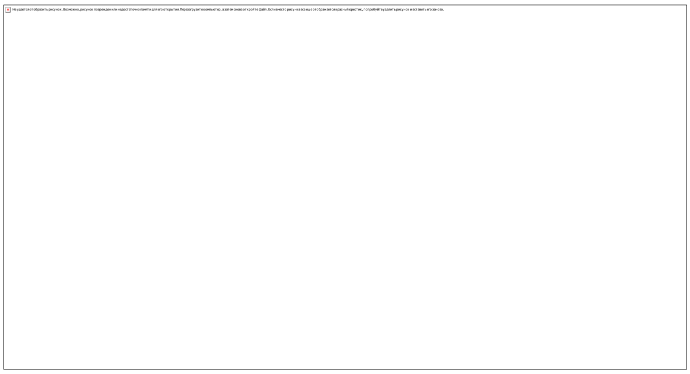


б)



в)

г)



д)

е)

3.92. Какое наименьшее число ребер надо удалить из графа $G = (V, E)$, чтобы получившийся граф можно было раскрасить в k цветов, если:

1) $G = K_4,\ k = 2$;

2) $G = K_5,\ k = 3$;

3) $G = K_6,\ k = 4$.

3.93. Изобразите дерево на 8 вершинах, для которого:

1) добавление ребра увеличит хроматическое число графа на один;

2) добавление ребра не изменит хроматическое число графа.

3.94. Можно ли добавить в дерево с 6 вершинами 4 ребра так, чтобы хроматическое число графа не изменилось?

3.95. Постройте правильную раскраску карты районов города Челябинска. Какое наименьшее число цветов для этого потребуется?

3.96. **Задача о составлении расписания.** Требуется прочитать 9 лекций в один день студентам нескольких специальностей. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно, например, их читает один и тот же лектор, или есть студенты, которые должны посещать разные лекции, или для проведения лекций нужна одна и та же аудитория и т.д. Достаточно ли 4 часов для прочтения всех лекций? Является ли это время минимальным для составления расписания?

В таблице «+» отмечены лекции, которые не могут читаться одновременно.

	Сопротивление материалов	Теоретическая механика	Системный анализ	Компьютерное моделирование	Инженерная графика	Начертательная геометрия	Право	Экономика	Иностранный язык
Сопротивление материалов		+	+			+		+	
Теоретическая механика	+			+	+		+		+
Системный анализ	+			+		+	+	+	
Компьютерное моделирование		+	+		+			+	+
Инженерная графика		+		+		+	+		
Начертательная геометрия	+		+		+				+
Право		+	+		+			+	+
Экономика	+		+	+			+		
Иностранный язык		+		+		+	+		

3.97. Нужно прочитать несколько лекций $D_1, D_2, \dots, D_n$ нескольким группам студентов $G_1, G_2, \dots, G_k$. Некоторые из лекций не могут читаться одновременно (например, их читает один преподаватель или требуется одна и та же аудитория). Каждая лекция читается один раз (возможно для нескольких групп). Требуется составить расписание так, чтобы чтение всех лекций заняло минимально возможное время (единица времени – одна пара).

В каждой строке таблицы для группы G_i знаком «+» отмечены дисциплины, которые должна посетить эта группа.

а)

Группы	Дисциплины								
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
G_1		+		+					+
G_2						+	+	+	
G_3	+		+		+			+	
G_4		+			+		+		
G_5				+	+	+			

б)

Группы	Дисциплины									
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
G_1		+		+					+	
G_2						+	+	+		+
G_3	+		+		+			+		
G_4		+			+		+			+
G_5					+	+				+
G_6				+			+	+	+	

в)

Группы	Дисциплины										
	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
G_1			+			+					+
G_2			+		+		+		+		
G_3		+		+				+		+	
G_4	+		+				+				+
G_5						+		+		+	
G_6	+	+			+			+			
G_7				+					+		+

3.98. **Задача о распределении оборудования (механизмов).** На предприятии планируется выполнить 10 работ: $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Для выполнения этих работ необходимы механизмы $b_1, b_2, \dots, b_7$. Использование механизмов для проведения каждой из работ определяется следующей таблицей:

Механизмы	Работы									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
b_1			+			+			+	
b_2	+							+		+
b_3		+			+		+			
b_4	+			+		+				+
b_5		+					+		+	
b_6				+			+	+		+
b_7	+		+		+				+	

Ни один из механизмов не может быть занят одновременно на двух работах. Все работы выполняются за одно и тоже время – 1 час. Как распределить механизмы, чтобы суммарное время выполнения всех работ было наименьшим?

3.99. На предприятии планируется выполнить n работ $a_1, a_2, \dots, a_n$. Для выполнения этих работ необходимы механизмы $b_1, b_2, \dots, b_m$. Ни один из механизмов не может быть занят одновременно на двух работах. Все работы выполняются за одно и тоже время t_0. Найдите наименьшее время для выполнения всех работ. Составьте расписание выполнения всех работ по убыванию количества работ.

Использование механизмов для проведения каждой из работ указано в таблице.

а)

Механизмы	Работы								
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
b_1	+			+				+	+
b_2		+			+		+		
b_3			+			+	+		
b_4	+			+				+	
b_5		+		+		+			
b_6			+		+				+

б)

Механизмы	Работы									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
b_1	+					+			+	+
b_2		+		+	+			+		
b_3			+	+				+		
b_4					+		+			
b_5			+					+		+
b_6	+						+	+		
b_7	+			+		+			+	

в)

Механизмы	Работы										
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
b_1	+					+			+	+	
b_2		+		+	+			+			
b_3			+	+				+			
b_4	+				+		+				+
b_5	+		+							+	
b_6		+					+	+			
b_7				+		+			+		+
b_8		+			+		+			+	

3.100. **Задача о распределении грузов по контейнерам.** Имеется несколько грузов, которые нужно распределить в наименьшее число контейнеров (каждый контейнер может вмещать почти все грузы). В таблице знаком «×» отмечены те пары грузов, которые нельзя помещать в один контейнер.

1) Найдите наименьшее число контейнеров, которое требуется для размещения всех грузов.

2) Составьте два различных способа распределения грузов по контейнерам (способы отличаются числом грузов в некоторых контейнерах).

а)

Грузы	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
A1		×		×	×			×
A2	×		×			×		
A3		×			×		×	
A4	×					×		×
A5	×		×				×	
A6		×		×				
A7			×		×			×
A8	×			×			×	

б)

Грузы	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A1		×					×		×	
A2	×					×				×
A3						×	×			
A4					×		×		×	×
A5				×				×	×	
A6		×	×					×		×
A7	×		×	×					×	
A8					×	×				
A9	×			×	×		×			
A10		×		×		×				

в)

Грузы	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A11	A11	A12
A1		×			×			×				
A2	×		×		×			×	×			×
A3		×		×			×			×	×	
A4			×			×				×		×
A5	×	×					×		×			
A6				×				×			×	×
A7			×		×				×	×		
A8	×	×				×					×	×
A9		×			×		×			×		
A10			×	×			×		×		×	×
A11			×			×		×		×		
A12		×		×		×		×		×		

Ответы и указания

3.2. а) да; б) да. **3.4.** нет. **3.6.** 26; 13; наименьшее $n = 5$, наибольшее $n = 11$. **3.9.** нет. **3.12. Решение.** Рассмотрим одну из команд, обозначив ее через А. За 8 туров она сыграла с восемью командами, а с девятью – не сыграла. Если среди этих девяти есть две команды В и С, не сыгравшие между собой, то А, В и С образуют искомую тройку. В противном случае эти 9 команд сыграли между собой полный круговой турнир. Для этого потребовалось $9 \cdot 8 : 2 = 36$ матчей. Однако в каждом туре они смогли сыграть между собой не более четырех матчей, поэтому за 8 туров таких матчей могло быть не более 32. Противоречие. **3.13.** 15. **3.15.** 8; 20. **3.17.** 7. **3.20.** $n - 1$. **3.21.** 30000. **3.23. Решение.** Пусть в командах «синих» и «красных» по n игроков. Поставим в соответствие каждому игроку вершину графа и соединим ребрами вершины, соответствующие проведенным играм. Так как каждая пара игроков разных команд играла между собой, то получится полный двудольный граф $K_{n,n}$. Этот граф имеет n^2 ребер. Если встречу между двумя игроками выиграл «синий» игрок, то соответствующее ребро окрасим синим цветом, если «красный» – то красным. Обозначим через x число красных ребер, тогда синих будет $4x$. Всех ребер в графе n^2. Поэтому $4x + x = n^2$, $5x = n^2$. Отсюда $n = 5$. В каждой команде было по пять игроков. **3.27. Решение.** Будем считать отмеченные точки и вершины квадрата вершинами, а соединяющие их отрезки и стороны квадрата –

ребрами плоского графа. Для каждого куска, на которые этот граф разбивает плоскость, подсчитаем число ограничивающих его ребер, и все полученные числа сложим. Поскольку каждое ребро разделяет два куска, то в итоге получим удвоенное число ребер. Так как все куски, кроме внешнего – треугольники, а внешний кусок ограничен четырьмя ребрами, то $3(F-1)+4=2E$, то есть $E=3(F-1):2+2$. Заметим, что число вершин нашего графа равно 24 и подставим количества вершин и ребер в формулу Эйлера ($V-E+F=2$): $24-(½\,(F-1)+2)+F=2$. Отсюда $F=43$. Таким образом, квадрат разбился на 42 треугольника. **3.29.** $n=19$, $\deg G=2$. **3.30.** б) 1; е) 3. **3.33.** $|V_2|=17$, $|V_1|=7$. **3.35.** 47. **3.37.** 1) 9; 2) $n-1$. **3.51.** а) нет; б) да; в) да; г) нет; д) нет. **3.56.** 1) а) нет; б) да; 2) а) да; б) нет. **3.58.** 19. **3.59.** 182, 91, 26 (для каждого n приведите пример графа). **3.61. Решение.** Если закрыта дорога AB, то нам достаточно доказать, что и после этого можно добраться из A в B. Если это не так, то в компоненте связности, содержащей A, все вершины, кроме A, – четные. Но наличие ровно одной нечетной вершины противоречит тому, что число вершин нечетной степени четно. **3.62. Решение.** Рассмотрим произвольную компоненту связности этого графа. Она не является деревом, так как в ней нет висячей вершины (степень каждой вершины равна 3). Следовательно, она содержит хотя бы один цикл. **3.64.** 3. **3.67.** да. **3.72.** б) $E(T)=\{(v_1,v_5),(v_1,v_6),(v_4,v_5),(v_2,v_3),(v_3,v_6),(v_3,v_7)\}$, $\mu=13$;

г) $E(T)=\{(v_1,v_2),(v_1,v_6),(v_2,v_4),(v_3,v_4),(v_5,v_6),(v_6,v_7)\}$, $\mu=15$;
е) $E(T)=\{(v_1,v_2),(v_2,v_4),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_6),(v_6,v_7)\}$, $\mu=15$.
3.78. б) $d^*(v_2)=50$, $d^*(v_3)=38$, $d^*(v_4)=18$, $d^*(v_5)=55$, $d^*(v_6)=45$, $d^*(v_7)=66$, $d^*(v_8)=58$, пути: $v_1\to v_4\to v_2\to v_5$, $v_1\to v_4\to v_2\to v_8$, $v_1\to v_4\to v_3\to v_6\to v_7$; е) $d^*(v_2)=73$, $d^*(v_3)=60$, $d^*(v_4)=39$, $d^*(v_5)=74$, $d^*(v_6)=66$, $d^*(v_7)=85$, $d^*(v_8)=113$, $d^*(v_9)=103$, пути: $v_1\to v_4\to v_3\to v_6\to v_7$, $v_1\to v_4\to v_3\to v_2$, $v_1\to v_4\to v_3\to v_6\to v_5\to v_9\to v_8$. **3.85.** б) минимальный разрез: $\{(v_3,v_6),(v_3,v_7),(v_4,v_8),(v_5,v_8)\}$, $\Phi_{max}=81$; б) $\Phi_{max}=128$, минимальный разрез: $\{(v_3,v_5),(v_3,v_8),(v_7,v_8),(v_7,v_9)\}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андерсон, Д.А. Дискретная математика и комбинаторика / Д.А. Андерсон. – Москва: Вильямс, 2004. – 960 с. – ISBN 5-8459-0498-6.
2. Белоусов, А.И. Элементы комбинаторики / А.И. Белоусов, П.А. Власов. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 53 с.
3. Березина, Л.Ю. Графы и их применение / Л.Ю. Березина. – Москва: Просвещение, 1979. – 143 с.
4. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – Москва: ФИМА, 2006. – 400 с. – ISBN 5-89492-014-0.
5. Гаврилов, Г.П. Задачи и упражнения по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 416 с. – ISBN 5-92221-0477-2.
6. Галкин, Е.В. Нестандартные задачи по математике: Задачи логического характера / Е.В. Галкин. – Москва: Просвещение, 1996. – 160 с. – ISBN 5-09-007092-X.
7. ЗАДАЧИ problems.ru: [сайт]. – URL: https://problems.ru/ (дата обращения: 15.05.2023).
8. Клековкин, Г.А. Введение в перечислительную комбинаторику / Г.А. Клековкин. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 228 с. – ISBN 978-5-8114-4386-4.
9. Корнилов, П.А. Элементы дискретной математики: учеб. пособие / П.А. Корнилов, Н.И. Никулина, О.Г. Семенова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2005. – 91 с.

10. Мельников, О.И. Занимательные задачи по теории графов / О.И. Мельников. – Минск: ТеатраСистемс, 2001. – 144 с. – ISBN 985-6577-91-8.
11. Мельников, О.И. Теория графов в занимательных задачах / О.И. Мельников. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2009. – 232 с. – ISBN 978-5-397-00033-8.
12. Набебин, А.А. Сборник заданий по дискретной математике / А.А. Набебин. – Москва: Научный мир, 2009. – 280 с. – ISBN 978-5-91522-072-9.
13. Чашкин, А.В. Дискретная математика: учебник для учреждений высш. проф. образования / А.В. Чашкин. – Москва: Академия, 2012. – 352 с. – ISBN 978-5-7695-7949-3.
14. Шапорев, С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С.Д. Шапорев. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с. – ISBN 5-94157-703-6.
15. Шевелев, Ю.П. Дискретная математика. Ч. 2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов / Ю.П. Шевелев. – Томск: Том. гос. ун-т систем упр. и радиоэлектроники, 2003. – 130 с.
16. Шевелев, Ю.П. Сборник задач по дискретной математике (для практических занятий в группах) / Ю.П. Шевелев, Л.А. Писаренко, М.Ю. Шевелев. – Санкт Петербург: Лань, 2022. – 528 с. – ISBN 978-5-8114-1359-1.
17. Эвнин, А.Ю. Задачник по дискретной математике / А.Ю. Эвнин. – Москва: УРСС, 2014. – 264 с. – ISBN 978-5-397-04200-0.

18. Nigmatulin, R. Using a universal combinatorial problem to teach higher-order linear recurrence relations. International / R. Nigmatulin, M. Vaguina // Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2022. – Vol. 53. – No 2. – P. 491–502. – DOI: 10.1080/0020739X.2020. 1861350.

Учебное издание

Нигматулин Равиль Михайлович
Вагина Мария Юрьевна

ЗАДАЧНИК ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебно-практическое пособие

ISBN 978-5-907790-43-8

Рукопись рекомендована РИС ЮУрГГПУ
Протокол № 28, пункт 33, от 09.06.2023 г.

Редактор О.В. Боярская
Технический редактор А.Г. Петрова

Издательство ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69

Подписано в печать
Объем 2,5 уч.-изд. л. (усл. п. л.)
Формат 60×84/16 Тираж 100 экз.

Заказ ***

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69