Н.А. ДЕГТЯРЕВА

ПРАКТИКУМ ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ И МОДЕЛЯМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Челябинск, 2019

УДК 330.115(076)(021)

ББК 65в641я73

Д 26

Дегтярева, Н.А. Практикум по экономико-математическим методам и моделям [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2019. – 97 с.

Учебное пособие представляет собой практикум по учебной дисциплине «Экономико-математические методы и модели» для студентов высших учебных заведений.

В учебном пособии дано применение основных базовых математических методов и моделей, используемых в экономике. Рассмотрены типовые задачи и предложены задачи для самостоятельного решения по следующим темам: построение экономико-математических моделей (ЭММ), графический и симплексный методы решения задач оптимизации, решение двойственных задач, решение игр с седловыми точками и решение антагонистических задач теории игр, решение задач потребительского выбора, решение задач максимизации прибыли предприятия.

Практикум будет полезен при выполнении самостоятельной работы, индивидуальных домашних заданий, при подготовке к контрольной работе, к тестированию, зачету, экзамену.

Учебное пособие позволяет эффективно использовать его в качестве практикума не только для студентов, обучающихся на очной форме обучения, но и для студентов заочной и очно-заочной форм обучения.

Рецензенты: Е. Н. Белов, канд. ф-м наук, доц.
А. С. Кутузов, канд. ф-м наук, доц.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение дисциплины «Экономико-математические методы и модели» включает методы овладения навыками построения экономико-математических моделей, знание подходов и методов решений оптимальных задач.

Экономико-математическая модель - математическое описание исследуемого экономического процесса (объекта). Экономико-математическое моделирование - это описание знаковыми математическими средствами социально-экономических систем. Процесс экономико-математического моделирования включает в себя три структурных элемента: объект исследования; субъект (исследователь); модель, опосредующую отношения между познающим субъектом и познаваемым объектом.

Основная задача моделирования различного рода процессов и систем с целью исследования объектов, прогнозирования их поведения или поиска наилучших условий функционирования сводится к расчету анализируемых показателей по математической модели при тех или иных значениях (или функциях) входных величин.

Практическими задачами экономико-математического моделирования являются: анализ экономических объектов и процессов; экономическое прогнозирование, предвидение развития экономических процессов; выработка управленческих решений на всех уровнях хозяйственной иерархии.

Предлагаемый практикум ориентирован на получение знаний и практических навыков при изучении дисциплины. Задания для самостоятельной работы преследуют цель выработать у студентов навыки практической работы с моделями для принятия обоснованных управленческих решений.

Раздел 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Тема 1. Построение экономико-математических моделей задач линейного программирования

1.1. Методические указания

В общем, виде **математическая постановка задачи математического программирования** состоит в определении экстремального значения функции цели:

$$F(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min) \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, 2, ...l, \\ \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge) 0, i = l+1, l+2, ..., m \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \qquad (3)$$

где F (X) = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - целевая функция;

ограничения (2) – *функциональные (специальные) ограничения*;

ограничения (3) - *общие ограничения.*

Совокупность соотношений, содержащих целевую функцию и ограничения на ее аргументы, называется **математической моделью экономической задачи оптимизации**.

Для составления экономико-математической модели задачи математического (оптимального) программирования *необходимо:*

1) выбрать и обозначить переменные задачи;

2) задать целевую функцию в соответствии с целью задачи;

3) составить систему ограничений с учетом имеющихся в условии задачи показателей.

Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования.

Линейное программирование – это область математического программирования, являющегося разделом математики, в котором изучаются методы исследования и нахождения экстремальных (максимальных и минимальных) значений некоторой *линейной функции*, на аргументы которой наложены *линейные ограничения.*

Различают **три основные формы** задачи линейного программирования (ЗЛП).

1. Общая форма задачи линейного программирования:

Найти переменные задачи X = ($x_1, x_2, ..., x_n,$ *), которые объясняют экстремум целевой функции (линейной формы):*

$$F(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

и удовлетворяют системе ограничений:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, ..., k \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le (\ge) b_i, i = k+1, ..., m \end{cases}$$

и условию неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$

где a_{ij}, b_i, c_j $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ - заданные постоянные величины.

2. Стандартная форма задачи линейного программирования:

Стандартной задачей линейного программирования называют задачу, в которой требуется максимизировать (минимизировать) линейную функцию:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\ge) b_i, \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

Особенностью данной формы является то, что в ней *система как функциональных, так и прямых ограничений состоит из одних неравенств,* а целевая функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму.

3. Каноническая форма задачи линейного программирования:

Каноническая задача линейного программирования имеет вид*:*

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n\,;\, b_i \geq 0\,,\, i = \overline{1, m}$$

Она отличается от других задач тем, что её *система ограничений* является *системой уравнений* и все переменные неотрицательные, а целевая функция максимизируется.

Переход от стандартной формы записи к канонической.

При необходимости перехода от неравенства к уравнению вводят дополнительные неотрицательные переменные. Дополнительные переменные вводят в целевую функцию с коэффициентом, равным нулю.

В неравенства (системы ограничений) вида «$\leq$» дополнительные неотрицательные переменные вводят со знаком «+»; если неравенства вида «$\geq$» дополнительные неотрицательные переменные вводят со знаком «-».

1.2. <u>Решение типовых задач</u>

Рассмотрим некоторые примеры составления математических моделей экономических задач.

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используются четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, даны в табл. 1:

Таблица 1

Вид ресурса	Запасы ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции.	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Прибыль (выручка), получаемая от реализации единицы продукции P_1 и P_2, соответственно равна 2 и 3 ден. ед.

Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от её реализации будет максимальной.

Решение: Составим экономико-математическую модель, т.е. сформулируем задачу математически.

Обозначим x_1, x_2 - число единиц продукции P_1 и P_2 соответственно, запланированных к производству.

Для их изготовления потребуется:

$(1x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса S_1, $(2x_1 + 1x_2)$ единиц ресурса S_2,

$(1x_2)$ единиц ресурса S_3, $(3x_1)$ единиц ресурса S_4.

Так как потребление ресурсов S_1, S_2, S_3 и S_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \qquad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \qquad \le 21, \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ (2)

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ ден.ед. от реализации продукции P_1 и $3x_2$ ден.ед. от реализации продукции P_2, т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2$$

Цель производства получить максимум прибыли.

Итак, **ЭММ задачи**: *найти такой план выпуска продукции* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе ограничений и условию неотрицательности, при котором функция цели принимает максимальное значение.*

2.Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

Имеется два вида корма *1* и *2*, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в табл.2:

Таблица 2

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг. корма.	
		1	***2***
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма *1* и *2* вида соответственно равна 4 и 6 ден. ед.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленной нормы.

Решение: Составим ЭММ задачи.

Обозначим: x_1, x_2 - (кг) количество кормов *1* и *2 вида*, входящих в дневной рацион.

Тогда этот рацион будет включать:

$(3x_1 + 1x_2)$ единиц питательного вещества S_1,

$(1x_1 + 2x_2)$ единиц питательного вещества S_2,

$(1x_1 + 6x_2)$ единиц питательного вещества S_3.

Так как содержание питательных веществ S_1, S_2 и S_3 в рационе должно быть не менее, соответственно 9, 8 и 12 единиц, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases} \qquad (1)$$

Кроме того, по условию задачи переменные $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (2)

Общая стоимость рациона составит (ден.ед.):

$$Z = 4x_1 + 6x_2 \quad (3)$$

Итак, **ЭММ задачи**: *составить дневной рацион* $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе ограничений (1) и условию неотрицательности (2), при котором функция цели(3) принимает минимальное значение.*

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задание: ***Построить экономико-математическую модель задачи оптимизации.***

1. Для кормления коров используются концентрированные и грубые корма. Один кг концентрата содержит 1 кормовую единицу и 0,08 протеина. Один кг грубых кормов содержит 0,25 кормовых единиц и 0,04 протеина. Суточный рацион одной коровы должен содержать не менее 10 кормовых единиц и не менее 1,2 единиц протеина. Определить оптимальный вариант суточного рациона кормления при условии, чтобы стоимость рациона была минимальной, если 1 кг концентрата стоит 5 ден. ед., а 1 кг грубых кормов – 2 ден.ед. Построить экономико-математическую модель задачи.

2. Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества *A* и не менее 12 единиц питательного вещества *B*. Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы.

Питательное вещество	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
A	2	1
B	2	4
Цена 1 кг корма, тыс.руб.	0,2	0,3

Построить экономико-математическую модель задачи.

3. Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный — 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный — 4 ден. ед. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость? Построить экономико-математическую модель задачи.

4. На имеющихся у фермера 400 га земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои — 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей, — 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои — 6 ден. ед. Однако согласно этому договору фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.

Фермеру хотелось бы знать, сколько гектаров нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

Построить экономико-математическую модель задачи.

5. Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных *(E)* работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта — *A* и *B*. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн соответственно. Расходы продуктов *A* и *B* на 1 т соответствующих красок приведены в таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т		Максимально возможный запас, т
	Краска E	Краска I	
A	1	2	6
B	2	1	8

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску *I* никогда не превышает спроса на краску *E* более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску *I* никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны 3000 ден. ед. для краски *E* и 2000 ден. ед. для краски *I*. Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Построить экономико-математическую модель задачи.

6. Финансовый консультант фирмы «ABC» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долл.) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».

Анализируются акции «Дикси - Е» и «Дикси - В». Цецы на акции: «Дикси - Е» — 5 долл. за акцию; «Дикси - В» — 3 долл. за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук. По оценкам «ABC», прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: «Дикси - Е» - 1,1 долл.; «Дикси - В» - 0,9 долл.

Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

Построить экономико-математическую модель задачи.

Тема 2. Графический метод решения задач линейного программирования

2.1. Методические указания

Графический метод используется для решения задач с двумя переменными следующего вида: *найти решение* $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, *которое доставляет оптимальное значение целевой функции:*

$$F = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to \max\ (\min)$$

и удовлетворяющей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le (\ge)\ b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le (\ge)\ b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 \le (\ge)\ b_m, \end{cases}$$

и условиям неотрицательности переменных:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,.$$

Алгоритм графического метода решения задач линейного программирования с двумя переменными

1. Построить область допустимых решений системы ограничений задачи.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача *не имеет решения* в виду несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить нормаль линий уровня $\overline{n} = (c_1, c_2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня переместить до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум - в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача *не имеет решения* в виду неограниченности целевой функции.

6. Если задача линейного программирования *имеет оптимальное решение*, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорной прямой.

Если целевая функция задачи достигает экстремума в двух угловых точках, то задача *имеет бесконечное множество решений*. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек.

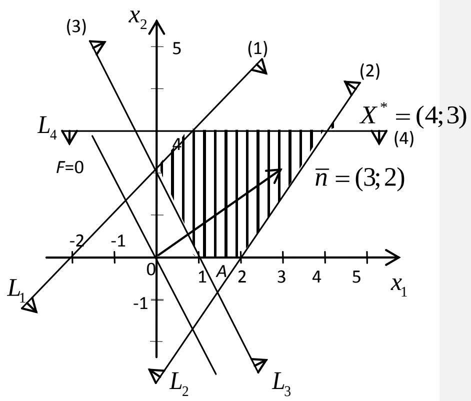
7. Найти координаты точки экстремума X^* (эта точка называется точкой оптимума) и значение целевой функции в ней. Записать ответ.

2.2. Решение типовых задач

1. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \ge 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \le 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \ge 0, & (3) \\ x_2 \le 3, & (4) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. & \end{cases}$$



Решение:

Строим область допустимых решений задачи. Нумеруем ограничения задачи. В прямоугольной декартовой системе координат строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1). Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство. Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки $O\,(0;0)$ в первое ограничение $1\cdot 0-1\cdot 0+2\geq 0$. Получаем строгое неравенство $2>0$. Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений. Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O. Аналогично строим прямые $3x_1-2x_2-6=0 \quad (L_2)$, $2x_1+x_2-2=0 \quad (L_3)$, $x_2=3 \quad (L_4)$ и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности; полученную область допустимых решений отметим на рис. штриховкой.

Строим нормаль линий уровня $\overline{n}=(3;2)$ и одну из этих линий, например $3x_1+2x_2=0$. Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня перемещаем в направлении нормали до опорной прямой. Эта прямая проходит через точку X^* пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Определяем координаты точки $X^*=L_2\cap L_4$. Решая систему

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-6=0, \\ \qquad x_2=3, \end{cases}$$

получаем $X^*=(4;3)$. Вычисляем $Z(X^*)=3\cdot 4+2\cdot 3=18$.

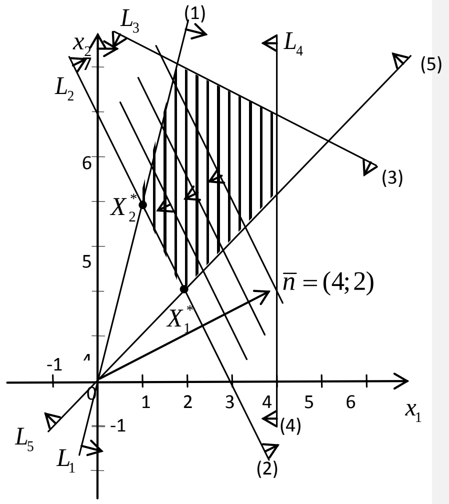
Ответ: $\max Z(X)=18$ при $X^*=(4;3)$.

2. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \le 16, & (3) \\ x_1 \le 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \le 0. & (5) \end{cases}$$

Решение:



Строим область допустимых решений, нормаль линий уровня $\bar{n} = (4;2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью (рис.). Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению нормали $\bar{n}$, так как решается задача на отыскание минимума функции. Нормаль линий уровня $\bar{n} = (4;2)$ и нормаль $\bar{n}_2 = (2;1)$ граничной прямой L_2, в направлении которой перемещаются линии уровня, параллельны, так как их координаты пропорциональны $(4:2 = 2:1)$. Следовательно, опорная прямая совпадает с граничной прямой L_2 области допустимых решений и проходит через две угловые точки этой области X_1^* и X_2^*. Задача имеет бесконечное множество оптимальных решений, являющихся точками отрезка $[X_1^*; X_2^*]$. Эти точки $X_1^* = L_2 \cap L_5,\ X_2^* = L_1 \cap L_2$, находим, решая соответствующие системы уравнений:

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ \underline{x_1 - x_2 = 0} & (L_5) \end{cases} \qquad +\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ \underline{2x_1 + x_2 = 6} & (L_2) \end{cases}$$

$$3x_1 \quad = 6; \qquad\qquad 6x_1 \quad = 6;$$

$$x_1^* = 2;\ x_2^* = 2; \qquad\qquad x_1^* = 1;\ x_2^* = 4;$$

$$X_1^* = (2;2); \qquad\qquad X_2^* = (1;4).$$

Вычисляем $Z(X_1^*) = Z(X_2^*) = 4\cdot 1 + 2\cdot 4 = 12.$

Ответ: $\min Z(X) = 12$ при $X^* = (1-t)X_1^* + tX_2^*,\ 0 \le t \le 1.$

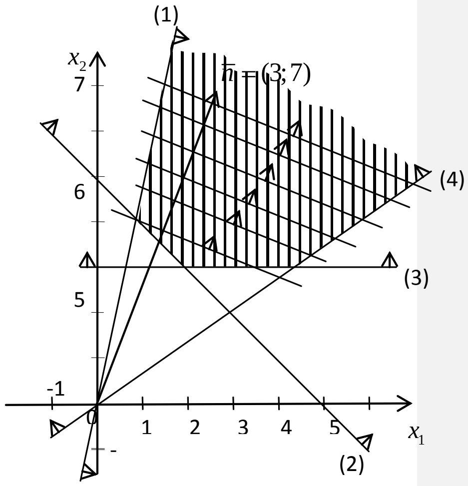
3. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(X) = 3x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \ge 0, & (1) \\ x_1 + x_2 \ge 5, & (2) \\ x_2 \ge 3, & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0. & (4) \end{cases}$$

Решение:

Строим область допустимых решений, нормаль $\overline{n} = (3;7)$ и одну из линий уровня (рис.).



В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении нормали. Ввиду того что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня уходит в бесконечность. Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

Ответ: $Z(x) \to +\infty.$, решений нет.

4. Решить задачу линейного программирования графическим методом:

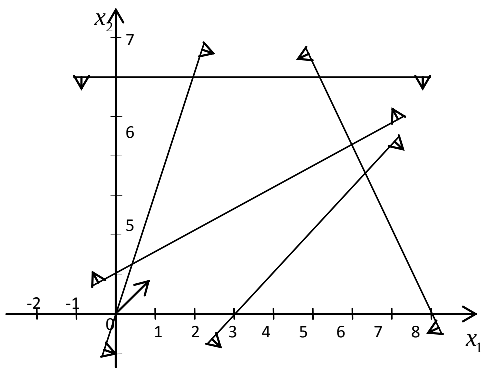
$$Z(X) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0, & (1) \\ x_2 \le 6, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \le 16, & (3) \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, & (4) \\ x_1 - x_2 \ge 3. & (5) \end{cases}$$

Решение:

Строим прямые линии, соответствующие неравенствам системы ограничений и находим полуплоскости, являющиеся областями решений этих неравенств (рис.).

Область допустимых решений задачи является пустым множеством. Задача не имеет решения, ввиду несовместности системы ограничений.

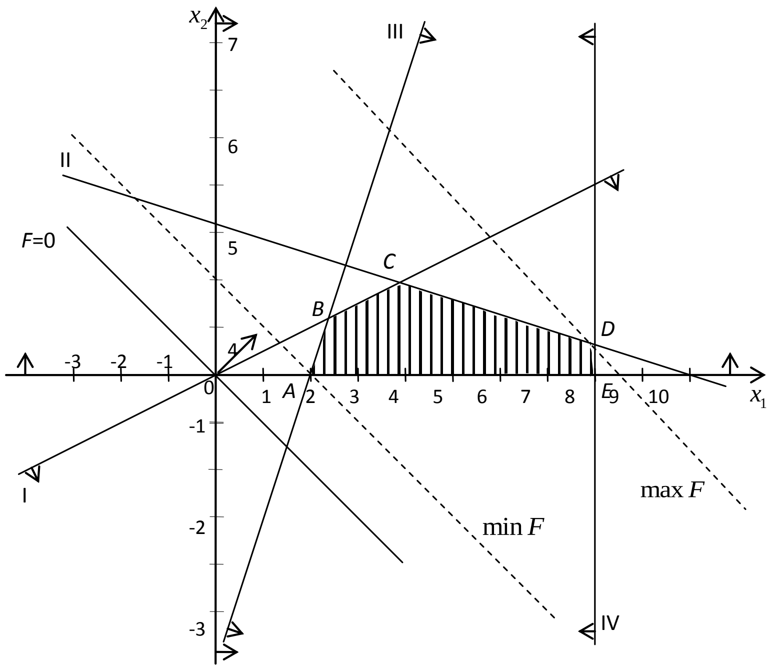


Ответ: Система ограничений несовместна. Решений нет.

5. Найти $\max F = x_1 + x_2$ графическим методом при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:



I. $x_1 - 2x_2 \geq 0,$

а) $x_1 - 2x_2 = 0,$

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$

$0 - 2x_2 = 0,$

$(0;0), \ (2;1);$

б) $x_1 - 2x_2 > 0,$

К.т. $(2;0),$

$2 - 2 \cdot 0 > 0,$

$2 > 0,$ И.

II. $x_1 + 3x_2 \leq 10,$

а) $x_1 + 3x_2 = 10,$

$(1;3),$

$(4;2);$

б) $x_1 + 3x_2 < 10,$

К.т. $(2;0),$

$2 + 0 < 10,$

$2 < 10,$ И.

III. $3x_1 - x_2 \geq 6,$

а) $3x_1 - x_2 = 6,$

$(2;0),$

$(3;3);$

б) $3x_1 - x_2 > 6,$

К.т. $(3;0),$

$9 - 0 > 6,$

$9 > 6,$ И.

IV. $x_1 \leq 8,$

а) $x_1 = 8,$

$(8;0);$

б) $x_1 < 8.$

V. $x_1 \ge 0,$ VI. $x_2 \ge 0,$

правее оси Ox_2; выше оси Ox_1.

ABCDE – область допустимых решений,

$x_1 + x_2 = 0$ - линия уровня, $\vec{n} = (1;1)$ - нормальный вектор.

Найдем координаты точек *D* и *A*:

а) $D(x_1; x_2)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 10, \\ x_1 = 8, \end{cases}$$

$3x_2 = 10 - 8,$

$x_2 = \frac{2}{3},$

$D(8; \frac{2}{3})$ max,

$\max F(X) = 8 + \frac{2}{3} = 8\frac{2}{3};$

б) $A(2;0)$ min,

$\min F(X) = 2 + 0 = 2.$

Ответ: $\max F = 8\frac{2}{3}$ при оптимальном решении $D(8; \frac{2}{3})$;

$\min F = 2$ при оптимальном решении $A(2;0)$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задание: ***Найти максимум и минимум функции F(x) при заданных ограничениях графическим методом***

1. $F(x) = 10x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 4x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2. $F(x) = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

3. $F(x) = 4x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

4. $F(x) = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

5. $F(x) = 5x_1 + 10x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 1, 2x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

6. $F(x) = 3x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 \ge -12 \\ -4x_1 + 8x_2 \le 20 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Тема 3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

3.1. <u>Методические указания</u>

Симплексный метод основывается на следующем:

- область допустимых решений задачи линейного программирования является выпуклым множеством с конечным числом угловых точек, т.е. многогранником или многоугольным множеством;
- оптимальным решением задачи линейного программирования является одна из угловых точек области допустимых решений;
- угловые точки область допустимых решений алгебраически представляют некоторые базисные (опорные) решения системы ограничений задачи.

Для осуществления основной цели симплекс – метода - последовательного улучшения решения – используют **три основных элемента**:

1. Найти начальное допустимое (опорное, базисное) решение;

2. Определить критерий завершения процесса решения задачи, позволяющий своевременно прекратить перебор решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии решения;

3. Осуществить переход от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции ближе к оптимальному.

Алгоритм симплексного метода

1. В системе ограничений (уравнений или неравенств) переносят свободные члены в правые части. Если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножают на (-1).

2. Если система ограничений задачи задана системой неравенств, то вводят добавочные неотрицательные переменные и тем самым сводят систему неравенств к эквивалентной системе уравнений, т.е. ***сводят задачу к канонической***.

3. В качестве основных можно взять добавочные переменные. После этого выражают основные переменные через неосновные, система уравнений приводится к системе допустимого вида. Из полученной системы ***находят соответствующее базисное решение***, при условии, что *неосновные переменные равны нулю.*

Если найденное базисное решение окажется *допустимым*, то переходят к п.5; если же оно окажется *недопустимым,* то выполняют п.4. алгоритма.

4. От полученного недопустимого базисного решения переходят к допустимому базисному решению (см. алгоритм получения первоначального допустимого базисного решения) или устанавливают, что система ограничений данной задачи противоречива.

5. Получив допустимое базисное решение, выражают через неосновные переменные этого решения и функцию цели. ***Если в функции цели, выраженной через неосновные переменные, отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально*** – *критерий оптимальности на отыскание максимума линейной функции цели.* ***Если в функции цели, выраженной через неосновные переменные, отсутствуют отрицательные коэффициенты при неосновных переменных, то решение оптимально*** – *критерий оптимальности на отыскание минимума линейной функции цели.* Если критерий оптимальности выполнен, то полученное базисное решение служит оптимальным, т.е. решение окончено.

6. Если при нахождении максимума (минимума) функции цели в ее выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то ***переходят к новому базисному решению.***

Из неосновых переменных, входящих в функцию цели с положительными (отрицательными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (наибольший по абсолютной величине отрицательный) коэффициент, и переводят ее в основные.

7. Чтобы решить *какую из основных переменных следует перевести в неосновные*, находят абсолютные величины отношений свободных членов уравнений к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, причем только из тех уравнений, в которых эти коэффициенты отрицательны. Для уравнений, в которых указанные коэффициенты положительны или равны нулю (переменная, переводимая в основные, в них отсутствует), эти отношения считают равными ∞***. Из*** найденных ***оценочных отношений выбирают наименьшее*** *и тем самым решают, какая из основных переменных перейдет в неосновные*. Соответствующее уравнение выделяют и называют ***разрешающим.***

8. Выражают новые неосновные переменные и функцию цели через новые неосновные переменные, *начиная с разрешающего уравнения.*

9. Повторяют п.6 – 8 алгоритма до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности. После этого выписывают компоненты **оптимального решения X^*** и находят **оптимум функции цели** ($F_{max}(X^*)$ или $F_{min}(X^*)$).

10. Если допустимое базисное решение дает оптимум функции цели (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, ***то полученное оптимальное решение не единственное.***

11. Если в выражении функции цели имеется неосновная переменная с положительным коэффициентом в случае ее максимизации (с отрицательным – в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит с положительными коэффициентами или отсутствует, то функция цели не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае ее максимальное (минимальное) значение записывают в виде $\mathbf{F_{max}(X^*) =+ \infty}$, $\mathbf{(F_{min}(X^*) = - \infty)}$, а ***решений задача не имеет.***

3.2. <u>Решение типовых задач</u>

Задача 1: Решить симплексным методом задачу об использовании ресурсов: $F(X) = 2x_1+3x_2 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \le 18 \\ 2x_1+x_2 \le 16 \\ x_2 \le 5 \\ 3x_1 \le 21 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 = 11 \\ 2x_1+x_2+x_4 =16 \\ x_2+x_5 =5 \\ 3x_1+x_6 =21 \end{cases}$$

причем $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0$

В качестве основных переменных на первом шаге следует выбрать (если возможно) такие *k*-переменных, каждая из которых входит только в одно из *m*-уравнений системы ограничений канонического вида, при этом нет таких уравнений системы, в которые не входит не одна из этих переменных (*чаще всего это дополнительные переменные*).

Шаг 1: *Основные переменные:* x_3, x_4, x_5, x_6. *Неосновные переменные*: x_1, x_2.

Выразим основные переменные через неосновные, получим систему допустимого вида на первом шаге:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2, \\ \boxed{x_5 = 5 - x_2} \\ x_6 = 21 - 3x_1 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на первом шаге: $X_1 = (0,0,18,16,5,21)$

Выразим линейную функцию цели, через неосновные (т.е. x_1 *и* x_2) переменные: $F(X) = 2x_1+3x_2$.

При решении X_1значение функции цели равно: $F(X_1) = 2\cdot0+3\cdot0 = 0$

Проверим, выполняется критерий оптимальности на нахождение максимума функции цели? Нет, критерий оптимальности не выполнился, т.к. в функции цели $F(X) = 2x_1+3x_2$ есть переменные с положительным коэффициентом.

В данной задаче для увеличения F можно переводить в основные переменные x_1, либо x_2, так как обе эти переменные входят в выражение F со знаком «+». Будем выбирать переменную, имеющую *больший* коэффициент, т.е. x_2.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_2, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_2: $x_2 = \min\{6;16;\mathbf{5};\infty\} = 5$, следовательно третье уравнение разрешающее.

Переменная x_5 обращается в ноль и переходит в неосновные на место x_2, т.е. $x_2 \leftrightarrow x_5$,

Шаг 2: *Основные переменные:* x_2,x_3,x_4,x_6 . *Неосновные переменные*: x_1,x_5.

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_1 *и* x_5), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения***:

$$\begin{cases} x_2 = 5-x_5 \\ x_3 = 18-x_1-3(5-x_5) = \boxed{3-x_1+3x_5} \\ x_4 = 16-2x_1-5+x_5 = 11-2x_1+x_5 \\ x_6 = 21-3x_1 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на втором шаге: $X_2 = (0,5,3,11,0,21)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_1 и x_5) переменные: $F(X) = 2x_1+3x_2 = 2x_1+3(5-x_5) = 2x_1+15-3x_5 = 15+2x_1-3x_5$.

Критерий оптимальности на максимум не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменная с положительным коэффициентом (x_1).

При решении X_2 значение функции цели равно: $F(X_2)=15+2\cdot0-3\cdot0 =15$

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_1, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_1: $\boldsymbol{x_1} = \min\{\infty;\mathbf{3};5½;7\} = 3$, второе уравнение разрешающее, т.е. $x_1 \leftrightarrow x_3$.

Шаг 3: *Основные переменные:* x_1,x_2,x_4,x_6 . *Неосновные переменные*: x_3,x_5

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_3 и x_5), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения*:**

$$\begin{cases} x_1 = 3+3x_5-x_3 \\ x_2 = 5-x_5 \\ x_4 = 11-2(3+3x_5-x_3)+x_5 = 11-6+2x_3-6x_5+x_5 = \boxed{5+2x_3-5x_5} \\ x_6 = 21-3(3+3x_5-x_3) = 21-9+3x_3-9x_5 = 12+3x_3-9x_5 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на третьем шаге: $X_3 = (3,5,0,5,0,12)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_3 и x_5) переменные:

$F(X) = 15+2x_1-3x_5 = 15+2(3+3x_5-x_3)-3x_5 = 15+6-2x_3+6x_5-3x_5 = 21-2x_3+\mathbf{3x_5}$

При решении X_3 значение функции цели равно:

$F(X_3) = 21 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 21$.

Критерий оптимальности на максимум не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменная с положительным коэффициентом (x_5),

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_1, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_5:

$\boldsymbol{x_5} = \min\{\infty;5;\mathbf{1};12/9\}=1$, третье уравнение разрешающее, $x_5 \leftrightarrow x_4$.

Шаг 4: *Основные переменные:* x_1,x_2,x_5,x_6 *Неосновные переменные*: x_3,x_4.

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_3 и x_4), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения*****:**

$$\begin{cases} x_5 = 1+2/5x_3-1/5x_4 \\ x_1 = 3-x_3+3(1+2/5x_3-1/5x_4) = 3-x_3+3+6/5x-3/5x_4 = 6+1/5x_3-3/5x_4 \\ x_6 = 12+3x_3-9(1+2/5x_3-1/5x_4) = 3-3/5x_3+9/5x_4 \\ x_2 = 4-2/5x_3+1/5x_4 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на четвертом шаге: $X_4 = (6,4,0,0,1,3)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_3 и x_4) переменные:

$F(X) = 21-2x_3+3x_5 = 21-2x_3+3(1+2/5x_3-1/5x_4) = 21-2x_3+3+6/5x_3-3/5x_4 =$

$= 24-4/5x_3-3/5x_4.$

При решении X_4 значение функции цели равно:

$F(X_4) = 24-4/5\cdot 0-3/5\cdot 0 = 24$

Критерий оптимальности на максимум выполнился, т.к. в полученной функции цели нет переменных с положительным коэффициентом.

Ответ: $\max F(X^*) = 24$, при оптимальном решении $X^* = (6,4,0,0,1,3)$.

Задача 2: Решить симплексным методом задачу линейного программирования: $F(X) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 6 \end{cases}$$

причем $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

Шаг 1. *Основные переменные*: x_3, x_4 *Неосновные переменные*: x_1, x_2

Выразим основные переменные через неосновные, получим систему допустимого вида на первом шаге:

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 - x_2 \\ x_4 = -6 + \mathbf{2x_1} + x_2 \end{cases}$$

причем $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получили недопустимое решение (т.к. $x_4 \le 0$), на первом шаге: $X_1 = (0,0,2,-6)$

Не всегда на первом шаге получается допустимое решение.

Линейную функцию на недопустимом решении не рассматривают. В системе допустимого вида выберем то уравнение, которое содержит отрицательный свободный член, т.е. второе (если таких уравнений несколько выбираем любое из них, но лучше выбрать уравнение, содержащее наименьший отрицательный свободный член).

Переменную x_4 необходимо увеличить, это возможно сделать за счет увеличения любой из неосновных переменных, входящих во второе уравнение с положительным коэффициентом (например, $\boldsymbol{x_1}$). Если перевести эту переменную в основные, то она став положительной, увеличит переменную x_4. Однако рост переменной $\boldsymbol{x_1}$ ограничен условиями неотрицательности остальных переменных, которые определяют оценочным отношением: $\boldsymbol{x_1}$ = min{**2**;3} = 2, т.е. первое уравнение разрешающее, тогда $x_1 \leftrightarrow x_3$

Шаг 2. *Основные переменные:* x_1, x_4 *Неосновные переменные:* x_3, x_2

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_3 *и* x_2), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения*****:**

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 - x_3 \\ x_4 = -6 + 2(2 - x_2 - x_3) + \boldsymbol{x_2} = -2 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получили недопустимое решение (т.к. $x_4 \le 0$), на втором шаге: $X_2 = (2,0,0,-2)$

Переменную x_4 необходимо увеличить, это возможно сделать за счет увеличения любой из неосновных переменных, входящих во второе уравнение с положительным коэффициентом. Но так как второе уравнение не содержит неосновной переменной с положительным коэффициентом, поэтому невозможно увеличить переменную x_4 и получить допустимое базисное решение. Система противоречива

Ответ: Решений нет.

Задача 3: Решить симплексным методом задачу линейного программирования:

$$F(X) = -x_1 - x_2 \to \min$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 + 1, \\ x_4 = -x_1 + 2x_2 + 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Решение:

I шаг: *Основные переменные:* x_3 , x_4 *Неосновные переменные:* x_1, x_2

Исходная система представлена в каноническом виде. Основные переменные выражены через неосновные. Система допустимого вида на первом шаге имеет вид:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 - x_2 + 1, \\ x_4 = -x_1 + 2x_2 + 2 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$), на первом шаге: $X_1 = (0,0,1,2)$.

При решении X_1 значение функции цели равно: $F(X_1) = 0$.

Выразим линейную функцию цели через неосновные (т.е. x_1 *и* x_2) переменные: $F(X) = - x_1 - x_2$.. Проверим, выполняется критерий оптимальности на нахождение минимума функции цели? Нет, критерий оптимальности не выполнился, т.к. в функции цели $F(X) = - x - x_2$ есть переменные с отрицательными коэффициентами.

В данной задаче для увеличения F можно переводить в основные переменные x_1, либо x_2, так как обе эти переменные входят в выражение F со знаком «-». Будем выбирать переменную, имеющую *больший по модулю* коэффициент (в данном случае любую переменную, либо x_2, либо x_1.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_1 чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_1: $x_1 = \min\{\infty, \mathbf{2}\} = 2$, следовательно второе уравнение разрешающее. Переменная x_4 обращается в ноль и переходит в неосновные на место x_1 , т.е. $x_1 \leftrightarrow x_4$

II шаг: *Основные переменные:* x_3 , x_1 *Неосновные переменные:* x_2 , x_4.

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_4 *и* x_2), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения.*** Выразим функцию цели через новые неосновные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_1 \\ x_3 = 2 + 2x_2 - x_4 - x_2 + 1 = 3 + x_2 - x_4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$

$F(X) = -(-x_4 + 2x_2 + 2) - x_2 = -2 - 3x_2 + x_4.$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$), на втором шаге: $X_2 = (2,0,3,0)$.

При решении X_2 значение функции цели равно: $F(X_2) = -2 - 0 + 0 = -2$.

Критерий оптимальности на минимум функции цели не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменная (x_2) с отрицательным коэффициентом.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_2 чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_2: $x_2 = \min\{\infty, \infty\} = \infty$.

Если на каком - либо шаге получаем, что во всех уравнениях системы бесконечны оценочные отношения той переменной, которая переводится в основные, то задача не имеет конечного оптимума (решения нет). Значение функции F неограниченное и отрицательное, то есть, $F_{min} = -\infty$.

Ответ: Задача не имеет решения. $F_{min} = -\infty$.

Задача 4: Решить симплексным методом задачу линейного программирования: $F(X) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

Решение:

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 8 \\ 2x_1-x_2-x_4 = 1 \\ x_1-2x_2+x_5 = 2 \end{cases}$$

причем $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$

Шаг 1. *Основные переменные:* x_3, x_4, x_5 *Неосновные переменные:* x_1, x_2

Выразим основные переменные через неосновные, получим систему допустимого вида на первом шаге:

$$\begin{cases} x_3 = 8-x_1-x_2 \\ \boxed{x_4 = -1+\mathbf{2x_1}-x_2} \\ x_5 = 2-x_1+2x_2 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получили недопустимое решение (т.к. $x_4 \leq 0$), на первом шаге: $X_1 = (0,0,8,-1,2)$.

Линейную функцию на недопустимом решении не рассматривают. В системе допустимого вида выберем то уравнение, которое содержит отрицательный свободный член, т.е. второе.

Переменную x_4 необходимо увеличить, это возможно сделать за счет увеличения любой из неосновных переменных, входящих во второе уравнение с положительным коэффициентом ($\mathbf{x_1}$). Если перевести эту переменную в основные, то она став положительной, увеличит переменную x_4. Однако рост переменной $\mathbf{x_1}$ ограничен условиями неотрицательности остальных переменных, которые определяют оценочным отношением: $\mathbf{x_1} = \min\{8;\mathbf{1/2};2\}=1/2$, т.е. второе уравнение разрешающее, тогда $x_1 \leftrightarrow x_4$.

Шаг 2. *Основные переменные:* x_3, x_1, x_5 *Неосновные переменные:* x_4, x_2

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_4 *и* x_2), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения:***

$$\begin{cases} x_1 = 1/2+1/2x_4+1/2x_2 \\ x_3 = 8\text{-}1/2\text{-}1/2x_4\text{-}1/2x_2\text{-}x_2 = \boxed{15/2-1/2x_4-3/2x_2} \\ x_5 = 2\text{-}1/2\text{-}1/2x_4\text{-}1/2x_2+2x_2 = 3/2\text{-}1/2x_4+3/2x_2 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$), на втором шаге: $X_2 = (1/2, 0, 15/2, 0, 3/2)$.

Выразим линейную функцию цели через новые неосновные (т.е. x_2 *и* x_4) переменные: $F(X)=3x_1 + 3x_2 = 3(1/2+1/2x_4+1/2x_2)+3x_2 =$

$= 3/2+3/2x_4+3/2x_2+3x_2 = 3/2\mathbf{+9/2x_2+3/2x_4}$

При решении X_2 значение функции цели равно $F(X_2)= 3/2+9/2\cdot 0+3/2\cdot 0=3/2$.

Критерий оптимальности на максимум функции цели не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменные (x_2 *и* x_4) с положительными коэффициентами. Выберем переменную с наибольшим коэффициентом (x_2).

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_2 чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_2: $x_2 = \min\{\infty;5;\infty\} = 5$, т.е. $x_2 \leftrightarrow x_3$

Шаг 3. *Основные переменные:* x_2, x_1, x_5 *Неосновные переменные:* x_4, x_3

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_4 *и* x_3), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения:***

$$\begin{cases} x_2 = 5\text{-}1/3x_4\text{-}2/3x_3 \\ x_1 = 1/2+1/2x4+1/2(5\text{-}1/3x_4\text{-}2/3x_3)=1/2+5/2+1/2x_4\text{-}1/6x_4\text{-}1/3x_3= \\ 3+1/3x_4\text{-}1/3x_3 \\ x_5 = 3\text{-}2\text{-}1/2x_4+3/2(5\text{-}1/3x_4\text{-}2/3x_3)=3/2\text{-}1/2x_4+15/2\text{-}1/2x_4\text{-}x_3=9\text{-}x_4\text{-}x_3 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$), на третьем шаге: $X_3 = (3,5,0,0,9)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем

шаге, через новые неосновные (т.е. x_3 *и* x_4) переменные: $F(X) = 3/2+9/2x_2+3/2x_4 = 3/2+9/2(5-1/3x_4-2/3x_3)+3/2x_4 = 3/2+45/2-3/2x_4-$
$- 3x_3+3/2x_4 = 24-3x_3 - \mathbf{0} \cdot x_4$.

При решении X_3 значение функции цели равно: $F(X_3)= 24-3\cdot 0 - 0 = 24$

В выражении функции цели отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, значит критерий оптимальности на максимум функции выполнен, следовательно X_3 – оптимальное базисное решение, а $F_{max} = F(X_3) = 24$.

Однако в выражении для F отсутствует неосновная переменная x_4 (формально входит с нулевым коэффициентом), поэтому изменение этой переменной не повлечет за собой изменения линейной функции цели задачи.

Ответ: множество решений, max F(X*) = 24.

3.3. *Задачи для самостоятельного решения*

Задание: ***Решить ЗЛП симплексным методом.***

1. Найти максимум функции:

$$F(x) = -6x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

2. Найти максимум функции:

$$F(x) = x_1 + x_2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3. Найти минимум функции:

$$F(x) = -3x_1 - 4x_2 + x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 \ge -10, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

4. Найти максимум функции:

$$F(x) = x_1 - 24x_2 + 12x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 1, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

5. Найти максимум функции:

$$F(x) = -2x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 6x_4$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

6. Найти максимум функции:

$$F(x) = 3x_1 + x_2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Тема 4. Двойственные задачи линейного программирования

4.1. Методические указания

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая ***двойственной;*** первоначальная задача называется ***исходной*** *(*или ***прямой).***

Рассмотрим симметричные взаимодвойственные задачи линейного программирования.

Алгоритм составления симметричной двойственной задачи:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду «≤», если минимум - к виду «≥». Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на (-1).

2. Составить расширенную матрицу системы $A_{1,}$ в которую включить матрицу коэффициентов при переменных A, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.

3. Найти матрицу $A^{|}_1$, транспонированную к матрице A_1.

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы $A^{|}_1$ и условия неотрицательности переменных.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и, может быть решена, независимо от другой. Однако, решив одну из пары двойственных задач, можно или найти оптимальное решение другой задачи, не решая ее, или установить его отсутствие. Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Первая теорема двойственности. *Если одна из пары двойственных задач имеет конечный оптимум, то и двойственная к ней также имеет конечный оптимум, причем значения целевых функций задач на своих оптимальных решениях совпадают:* $maxF(X^*) = minZ(Y^*)$.

Если одна из пары двойственных задач не имеет решения в виду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Вторая теорема двойственности: *Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответственных переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.*

Итак, с помощью теорем двойственности можно, решив симплексным методом исходную задачу, найти оптимум и оптимальное решение двойственной задачи.

Соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи:

Переменные исходной задачи 1	
Первоначальные	***Дополнительные***
$x_1, \quad x_2 \ldots. x_n$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_{m+1} \quad y_{m+2} \ldots y_{m+n}$	$x_{n+1} \quad x_{n+2} \ldots. x_{n+m}$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_2 \ldots. y_m$
Дополнительные	***Первоначальные***
Переменные двойственной задачи 2	

Соответствие между переменными взаимо двойственных задач ***при достижении оптимума*** *(т.е. на последнем шаге решения каждой задачи* ***симплексным методом****) представляет соответствие между* ***основными (****не равными нулю****)*** *переменными одной из двойственной задач и* ***неосновными*** *(равными нулю****)*** *переменными другой задачи, когда они образуют допустимые базисные решения.*

Третья теорема двойственности (теорема об оценках). *Значения переменных* y_i *- в оптимальном решении двойственной задачи представляют* *собой оценки влияния свободных членов* b_i *системы ограничений - неравенств прямой задачи на величину целевой функции этой задачи:* $\Delta f(\bar{X}) = \Delta b_i y_i$.

4.2. Решение типовых задач

Задача 1: Составить задачу, двойственную следующей исходной задаче:

$$F(X) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Решение:

I. Так как исходная задача на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду «≤», для чего умножим первое и четвертое неравенства на (-1), получим:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \end{cases}$$

II. Составим расширенную матрицу системы

$$\begin{array}{c} \qquad\quad \leq \\ A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ \hline -1 & 2 & F \end{array}\right) \end{array}$$

III. Найдем матрицу $A^{|}_{1}$, транспонированную к A:

$$\left(\begin{array}{c} \geq \\ \\ \\ \end{array}\right)$$

$$A_1^{|} = \left.\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ \hline -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{array}\right.$$

IV. Сформулируем двойственную задачу:

$Z\ (У) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$

Задача 2. Решить ЗЛП симплексным методом и с помощью теорем двойственности найти оптимум и оптимальное решение двойственной задачи.

$$F(X) = 7x_1 + 5x_2 \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 19, \\ 2x_1+x_2 \leq 13, \\ \quad 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 \quad \leq 18 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

Решение:

Приведем систему ограничений к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3 = 19, \\ 2x_1+x_2+x_4 = 13, \\ \quad 3x_2+x_5 = 15, \\ 3x_1 +x_6 = 18. \end{cases}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$

Шаг 1. *Основные переменные*: x_3,x_4,x_5,x_6 *Неосновные переменные*: x_1,x_2

Выразим основные переменные через неосновные, получим систему допустимого вида на первом шаге:

$$\begin{cases} x_3 = 19-2x_1-3x_2, \\ x_4 = 13-2x_1-x_2, \\ x_5 = 15-3x_2, \\ \boxed{x_6 = 18-3x_1} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0$), на первом шаге: $X_1 = (0, 0, 19, 13, 15, 18)$

Выразим линейную функцию цели, через неосновные (т.е. x_1 *и* x_2) переменные: $F(X) = 7x_1+5x_2$.

При решении X_1значение функции цели равно: $F(X_1) = 7\cdot 0+5\cdot 0 = 0$

Проверим, выполняется критерий оптимальности на нахождение максимума функции цели? Нет, критерий оптимальности не выполнился, т.к. в функции цели $F(X) = 7x_1+5x_2$ есть переменные с положительным коэффициентом.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_1, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_1: $x_1 = \min\ \{8{,}5;\ 6.5;\ \infty;\ \mathbf{6}\} = 6$, следовательно четвертое уравнение разрешающее.

Переменная x_6 обращается в ноль и переходит в неосновные на место x_1, т.е. $x_1 \leftrightarrow x_6$,

Шаг 2. *Основные переменные*: x_1, x_3, x_5, x_4 *Неосновные переменные*.: x_6, x_2

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_6 *и* x_2), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения:***

$$\begin{cases} x_1 = 6-1/3x_6 \\ x_3 = 19-2(6-1/3x_6)-3x_2 = 7+2/3x_6-3x_2 \\ x_5 = 15-3x_2 \\ x_4 = 13-2(6-1/3x_6)-x_2 = \boxed{1+2/3x_6-x_2} \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на втором шаге: $X_2 = (6, 0, 7, 1, 15, 0)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_6 *и* x_2) переменные: $F(X) = 7x_1+5x_2 = 7(6 - 1/3x_6)+5x_2 = 42 - 7/3x_6 + \mathbf{5x_2}$, Критерий оптимальности на максимум не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменная с положительным коэффициентом (x_2).

При решении X_2 значение функции цели равно: $F(X_2) = 42$.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_2, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_2: $\mathbf{x_2} = \min\{\infty; 7/3; 5; \mathbf{1}\}=1$, четвертое уравнение разрешающее, т.е. $x_2 \leftrightarrow x_4$.

Шаг 3. *Основные переменные*: x_1,x_2,x_3,x_5 *Неосновные переменные*.: x_4,x_6

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_4 *и* x_6), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения:***

$$\begin{cases} x_2 = 1+2/3x_6+x_4 \\ x_1 = 6-1/3x_6 \\ x_3 = 7+2/3x_6-3(1+2/3x_6+x_4) = \boxed{4+3x_4-4/3x_6} \\ x_5 = 15-3(1+2/3x_6+x_4) = 12-2x_6+3x_4 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на третьем шаге: $X_3 = (6, 1, 4, 0, 12, 0)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_4 *и* x_6) переменные: $F(X) = 42 - 7/3x_6 + 5(1+2/3x_6-x_4) = 42 -7/3x_6 + 5 + 10/3x_6 - 5x_4 = 47 - 5x_4 + \mathbf{x_6}$,

Критерий оптимальности на максимум не выполнился, т.к. в полученной функции цели есть переменная с положительным коэффициентом (x_6).

При решении X_3 значение функции цели равно: $F(X_3) = 47$.

Выясним с какой основной переменной нужно поменять x_6, чтобы получить ***новое ДБР***. Для этого находим оценочные отношения для x_6: $\boldsymbol{x_6} = \min\{\infty; 18; \mathbf{3}; 6\}=3$, третье уравнение разрешающее, т.е. $x_6 \leftrightarrow x_3$.

Шаг 4: *Основные переменные*: x_2,x_1,x_6,x_5 *Неосновные переменные.*: x_4,x_3

Выразим ***новые основные переменные, через новые*** (x_4 *и* x_6), ***неосновные, начиная с разрешающего уравнения:***

$$\begin{cases} x_6 = 3+9/4x_4-3/4x_3 \\ x_2 = 1+2/3(3+9/4x_4 - 3/4x_3)-x_4 = 3+1/2x_4 - 1/2x_3 \\ x_1 = 6-1/3(3+9/4x_4 - 3/4x_3) = 5 - 3/4x_4 + 1/3x_3 \\ x_5 = 12-2(3+9/4x_4 - 3/4x_3)+3x_4 = 6 - 9/2x_4 - 3/4x_3+3x_4 = 6 - 3/2x_3 - 3/2x_4 \end{cases}$$

При допущении, что неосновные переменные равны нулю, получим допустимое решение (т.к. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$), на четвертом шаге: $X_4 = (5, 3, 0, 0, 6, 3)$.

Выразим линейную функцию цели, полученную на предыдущем шаге, через новые неосновные (т.е. x_4 *и* x_3) переменные: $F(X) = 47-5x_4+x_6 = 47-5x_4+3+9/4x_4 - 3/4x_3 = = 50 - \mathbf{11/4x_4 - 3/4x_3}$

При решении X_4 значение функции цели равно: $F(X_4) = 50$.

Критерий оптимальности на максимум выполнился, т.к. в полученной функции цели нет переменных с положительным коэффициентом.

Следовательно, задача имеет единственное оптимальное решение: $X^* = X_4 = (5, 3, 0, 0, 6, 3)$, а функция цели в максимальной точке равна: $F_{max}(X^*) = 50$.

Найдем с помощью теорем двойственности оптимум и оптимальное решение двойственной задачи.

По первой теореме двойственности: $F_{max}(X^*) = Z_{min}(У^*) = 50$;

По второй теореме двойственности:

а) составим таблицу соответствий между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи:

$$\begin{array}{cc|cccc}
 & & 3/4 & 11/4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4
\end{array}$$

б) очевидно, оптимальное решение двойственной задачи:
$У^* = (3/4, 11/,4\ 0, 0)$.

Ответ: $X^* = (5, 3, 0, 0, 6, 3)$, $F_{max}(X^*) = 50$;
$У^* = (3/4, 11/4, 0, 0)$, $Z_{min}(У^*) = 50$.

4.3. <u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Задание 1: ***Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования:***

Вариант 1

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице:

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

• проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

• определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II видов на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы сырья III вида;

• оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Вариант 2

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице:

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

Требуется:

1.Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

•проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

•определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья II и III видов на 120 и 160 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья I вида;

• оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задание 2: ***Для следующих задач составить и решить симплексным методом двойственные и, используя их решение, найти решение исходных задач***

Вариант 3

$$Z(X) = -x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Вариант 4

$$Z(X) = 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq -2, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Вариант 5

$$Z(X) = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

Вариант 6

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases}$$

.

Раздел 2. ИГРОВЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Тема 5. Игры с седловыми точками и их решение

5.1. Методические указания

Игра с нулевой суммой задается следующими условиями:

1) имеются два игрока – А и В; Пусть игрок A имеет m стратегий $S_A^C = \{A_1,..,A_m\}$, а противник, т.е. игрок B – n стратегий $S_B^C = \{B_1,..,B_n\}$. (игра имеет размерность $m \times n$; $m \times n$ **- игра).**

2) каждый игрок выбирает одну из своих стратегий, независимо от другого игрока: первый одну из m стратегий, второй одну из n;

3) если первый игрок выбирает стратегию i, а второй – стратегию j, то первый игрок получает выигрыш $П_{ij}$, который интерпретируется как платеж от второго игрока, т.е. выполняется соотношение $\mathbf{П^1_{ij} = - П^2_{ij}}$ – выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Процесс разыгрывания конечной антагонистической игры состоит в том, что оба игрока независимо друг от друга выбирают свои стратегии, которые определяют результат игры, отражающийся в матрице выигрышей - ***платежной матрице игры.***

Величина $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j \alpha_{ij}$ *называется* ***нижней ценой игры****, или* ***максимальным гарантированным выигрышем первого игрока (максимином)***. Эта величина показывает выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок при выборе вторым игроком любой из его возможных стратегий, т.е. выигрыш игрока А, который не зависит от действий второго игрока (гарантированный).

Величина или число $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ называется **верхней ценой игры** или **минимальным гарантированным проигрышем второго игрока (минимаксом)**. Эта величина показывает проигрыш, который может обеспечить себе второй игрок при выборе первым игроком любой из его возможных стратегий, т.е. проигрыш игрока В, который не зависит от действий первого игрока (гарантированный).

Для нахождения нижней и верхней цен игры удобно платежную матрицу увеличить в размерах, приписав ($n + 1$) - й столбец показателей эффективности α_i стратегий A_i игрока А и ($m + 1$) - ю строку показателей неэффективности β_j стратегий B_j игрока В. В результате получим следующую таблицу:

B_j / A_i	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	Минимум по строкам α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	α_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	α_m
Максимум по столбцам β_j	β_1	β_2	$\cdots$	β_n	α / β

Игры, в которых нижняя цена игры равна верхней, их называют ***играми с седловой точкой.***

В платежной матрице любой игры с седловой точкой всегда существует элемент a_{i^*,j^*}, являющийся одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Такой элемент называется **седловой точкой**. Матрица игры может обладать несколькими седловыми точками, но все они имеют одно и тоже значение. Седловая точка также может рассматриваться и как точка равновесия $\left(A_i^*, B_j^*\right)$ в том смысле, что отклонение от нее для каждого из игроков невыгодно.

В играх с седловой точкой максиминная стратегия i^* первого игрока и минимаксная стратегия j^* второго, соответствующие цене игры $\nu = \alpha = \beta$ являются оптимальными стратегиями *первого и* *второго игроков. Совокупность этих двух стратегий* (i^*, j^*) *называют* ***решением игры.***

Чтобы найти решение антагонистической игры необходимо определить оптимальные стратегии игроков и цену игры.

5.2. Решение типовых задач

Задача 1

Провести анализ и составить платежную матрицу для игры «поиск»: игрок А может спрятаться в одном из двух укрытий (I или II); игрок В ищет игрока А и если найдет получает штраф 1 ден.ед. от игрока А, в противном случае платит 1 ден.ед. игроку А.

Решение:

Рассмотрим *возможные стратегии* игроков:

A_1 - игрок А прячется в укрытии I;

A_2 - игрок А прячется в укрытии II;

B_1 - игрок В ищет игрока А в укрытии I;

B_2 - игрок В ищет игрока А в укрытии I;

Рассмотрим *комбинации стратегий* сторон и определим соответствующие *выигрыши* сторон:

A_1-B_1 - игрок А прячется в укрытии I и там его обнаруживает игрок В, игрок А платит штраф, т.е. $a_{11} = -1$.

A_1-B_2 - игрок А прячется в укрытии I, игрок В ищет его в укрытии II и не находит его там, игрок А получает штраф, т.е. $a_{12} = 1$.

A_2-B_1 - игрок А прячется в укрытии II, игрок В ищет его в укрытии I и не находит его там, игрок А получает штраф, т.е. $a_{21} = 1$.

A_2 - B_2 - игрок А прячется в укрытии II и там его обнаруживает игрок В, игрок А платит штраф, т.е. $a_{22} = -1$/

Таким образом, для игры «поиск» размера 2 х 2 получаем платёжную матрицу: $A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$

Задача 2

Игроки А и В одновременно и независимо друг от друга записывают каждый одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если сумма написанных чисел четная, то игрок В платит игроку А эту сумму; если она нечетная, то, наоборот, игрок А платит игроку В эту сумму.

Требуется проанализировать игру и составить ее платежную матрицу. Определить нижнюю и верхнюю цены игры. Имеет ли игра седловую точку.

Решение:

Игра состоит из двух ходов; оба — личные.

У нас (А) три стратегии: A_1 - писать 1; A_2 - писать 2; A_3 - писать 3.

У противника (В)- те же три стратегии.

Игра представляет собой игру 3 $\times$ 3 с платежной матрицей, приведенной в таблице:

В / А	B_1 A_1 (писать1)	B_2 (писать 2)	B_3 (писать 3)
A_1 (писать1)	2	-3	4
A_2 (писать 2)	-3	4	-5
A_3 (писать 3)	4	-5	6

Определим нижнюю и верхнюю цены игры, для этого добавим строку и столбец в платежной матрице:

B / A	B_1 A_1 (писать1)	B_2 (писать 2)	B_3 (писать 3)	Минимум по строкам α_i
A_1 (писать1)	2	-3	4	-3
A_2 (писать 2)	-3	4	-5	-5
A_3 (писать 3)	4	-5	6	-5
Максимум по столбцам β_j	4	4	6	α = -3 / β = 4

$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$ = -3 – нижняя цена игры (максимальный гарантированный выигрыш первого игрока); $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ = 4 – верхняя цена игры (минимальный гарантированный проигрыш второго игрока) .

Так как $\alpha \neq \beta$, то игра является неустойчивой, поэтому в игре отсутствует седловая точка.

Задача 3

Определить нижнюю и верхнюю цены игры и соответствующие стратегии, если матрица игры имеет вид:

B / A	B_1	B_2	B_3
A_1	0,9	0,4	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8
A_3	0,5	0,7	0,2

Решение:

Рассмотрим платежную матрицу игры.

При выборе стратегии A_1 (первая строка матрицы) минимальный выигрыш игрока А равен α_1 = min (0,9; 0,4; 0,2) = 0,2 и соответствует стратегии B_3 игрока В. При выборе стратегии A_2 (вторая строка матрицы) минимальный выигрыш равен α_2 = min (0,3; 0,6; 0,8) = 0,3, он достигается при стратегии B_1. При выборе стратегии A_3 (третья строка матрицы) минимальный выигрыш равен α_3 = min (0,5; 0,7; 0,2) = 0,2, он достигается при стратегии B_3.

B \ A	B_1	B_2	B_3	Минимум по строкам α_i
A_1	0,9	0,4	0,2	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8	0,3
A_3	0,5	0,7	0,2	0,2
Максимум по столбцам β_j	0,9	0,7	0,8	α = 0,3 \ β = 0,7

Нижняя цена игры $\alpha = \max(a_1, a_2, a_3)$ = max (0,2; 0,3; 0,2) = 0,3, т.е., гарантируя себе максимальный выигрыш при любой стратегии игрока В, игрок А должен выбрать стратегию A_2, т.е. A_2 является наиболее осторожной (максиминной) стратегией игрока А. Пользуясь этой стратегией, он гарантирует себе, что будет поражать самолеты в среднем не менее, чем 0,3 (30%) всех случаев.

Рассмотрим возможные стратегии игрока В. Выбирая стратегию B_1 (первый столбец таблицы), игрок В понимает, что игрок А ответит стратегией A_1, чтобы максимизировать свой выигрыш (проигрыш игрока В). Следовательно, максимальный проигрыш игрока В при выборе им стратегии B_1 равен β_1 = max (0,9; 0,3; 0,5) = 0,9. Аналогично, максимальный проигрыш игрока В (выигрыш А) при выборе им стратегии B_2 (второй столбец) равен β_2 = max (0,4; 0,5; 0,6) = 0,6. При выборе стратегии B_3 максимальный проигрыш игрока В равен β_3 = max (0,2; 0,8; 0,2) = 0,8.

Верхняя цена игры β = min (0,9; 0,7; 0,8) = 0,7. Наиболее осторожной (минимаксной) стратегией игрока В является B_2. Применяя этот самолет, противник может быть уверен, что он будет поражаться не более, чем в 0,7 (70%) всех случаев.

Нетрудно заметить, что в проведенном анализе каждая из сторон была ориентирована на худшую с ее точки зрения ситуацию — минимальный выигрыш или максимальный проигрыш при любой фиксированной стратегии. Обе стороны должны были улучшить, насколько возможно, свое положение, выбирая максиминную и минимаксную стратегии с целью ослабить (и даже исключить) зависимость получаемых результатов от действий противника. В этом находит свое выражение принцип гарантированного результата, предполагающего, как было замечено, отсутствие риска и связанных с ним нежелательных последствий.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются минимаксными стратегиями, является неустойчивым $\alpha \neq \beta$ и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Задача 4

Определить нижнюю и верхнюю цену игры, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}75 \end{Vmatrix}$$

Имеет ли игра седловую точку? Найти решение игры.

Решение:

Построим таблицу, в которой, кроме матрицы А, введены столбец α_i, и строка β_j. Анализируя строки матрицы (стратегии игрока А), заполняем столбец α_i: α_1= 0,5, α_2= 0,6, α_3 = 0,7 — минимальные числа в строках 1, 2, 3. Аналогично β_1 = 0,9, β_2 = 0,7, β_3 = 0,8 — максимальные числа в столбцах 1, 2, 3, соответственно.

B / A	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0,5	0,6	0,7	0,5
A_2	0,9	0,6	0,8	0,6
A_3	0,8	**0,7**	0,75	***0,7***
β_i	0,9	***0,7***	0,8	α =0,7 / β = 0,7

Нижняя цена игры α = maxα_i = max (0,5; 0,6; 0,7) = 0,7 (наибольшее число в столбце с) и верхняя цена игры β = minβ_j = min (0,9; 0,7; 0,8) = 0,7 (наименьшее число в строке). Эти значения равны, т.е. $\alpha = \beta$, и достигается на одной и той же паре стратегий (A_3, B_2). Следовательно, игра имеет седловую точку (A_3, B_2) и цена игры $\nu = 0{,}7$.

5.3. <u>Задачи для самостоятельного решения</u>

Задание: ***Для следующих задач определите верхнюю и нижнюю цены игры и, если возможно, то и седловую точку***

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -4 & 3 & -1 & -2 \\ -5 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}9 & 1{,}0 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}7 & 1{,}2 & 0{,}9 \\ 1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}5 & 1{,}0 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}7 & 1{,}0 \\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & -0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}5 & 0{,}7 & 1{,}1 & 0{,}6 \\ 1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}7 & 1{,}1 \\ 1{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Тема 6. Антагонистические игры.
Решение игры *2x2* аналитическим методом

6.1. Методические указания

Среди игр двух лиц с нулевой суммой существуют игры без седловых точек ($\alpha \neq \beta$). В таких играх нижняя цена игры строго меньше ее верхней цены ($\alpha \prec \beta$), т.е. ситуация равновесия отсутствует, а минимамаксные и максиминные стратегии не являются оптимальными, т.е. их совокупность не является решением игры. Такие игры называются **не полностью определенными**.

Для преодоления нестабильности не полностью определенной игры используют *смешанные стратегии*, которые заключаются в случайном чередовании чистых стратегий. Выигрыш игрока A (проигрыш игрока B) – случайная величина, математическое ожидание которой является ценой игры.

Рассмотрим не вполне определенную игру 2×2. Пусть задана платежная матрица игры A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения оптимальных смешанных стратегий P^* и Q^* и цены игры ν.

Математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении им оптимальной стратегии $P^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ будет равно цене игры и в том случае, когда второй игрок применяет свою первую чистую стратегию, и в том случае, когда второй игрок применяет свою вторую чистую стратегию, т.е. должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1^* + a_{21} \cdot p_2^* = \nu, \\ a_{12} \cdot p_1^* + a_{22} \cdot p_2^* = \nu, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Из данной системы уравнений *определяют* p_1^* *и* p_2^**:*

$$p_1^* = \frac{(a_{22}-a_{21})(a_{11}-a_{12})}{(a_{11}-a_{12})[(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})]} = \frac{(a_{22}-a_{21})}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})}.$$

Цена игры будет равна:

$$v = \frac{a_{11}(a_{22}-a_{21})}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})} + \frac{a_{21}(a_{11}-a_{12})}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{(a_{22}-a_{21})+(a_{11}-a_{12})}.$$

Математическое ожидание проигрыша второго игрока при применении им оптимальной стратегии $Q^* = \left(q_1^*, q_2^*\right)$ будет равно цене игры и в том случае, когда первый игрок применяет свою первую чистую стратегию, и в том случае, когда он применяет свою вторую чистую стратегию, т.е. должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot q_1^* + a_{12}\cdot q_2^* = v, \\ a_{21}\cdot q_1^* + a_{22}\cdot q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Из данной системы уравнений *определяют* q_1 *и* q_2*:*

Цена игры будет равна:

$$q_1^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})}.$$

6.2. <u>Решение типовых задач</u>

Задача 1 Задана платежная матрица игры A:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 50 & 30 \end{pmatrix}.$$

Найти решение игры.

Решение:

Определим верхнюю и нижнюю цену игры, использовав для этого максиминную и минимаксную стратегии:

$$\max_i \min_j h_{ij} = v_{\wedge} = 30,$$
$$\min_j \max_i h_{ij} = v^{\wedge} = 40,$$
$$v^{\wedge} < v_{\wedge}.$$

Поскольку нижнее значение игры меньше верхнего значения игры, то седловая точка в этой игре отсутствует, следовательно, решения игры в чистых стратегиях не существует.

Для нахождения решения игры в смешанных стратегиях воспользуемся теоремой об активных стратегиях.

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока используем соотношения:

$$\begin{cases} 20p_1^* + 50p_2^* = v, \\ 40p_1^* + 30p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$p_1^* = 1/2;\ p_2^* = 1/2;\ v = 35.$$

Для нахождения оптимальной стратегии второго игрока воспользуемся соотношениями:

$$\begin{cases} 20q_1^* + 40q_2^* = v, \\ 50q_1^* + 30q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$q_1^* = 1/4;\ q_2^* = 3/4;\ v = 35.$$

Ответ: решением игры является:
$$P^* = \left(p_1^* = 1/2;\ p_2^* = 1/2\right),$$
$$Q^* = \left(q_1^* = 1/4;\ q_2^* = 3/4\right),$$
$$v = 35.$$

Задача 2 Игра «поиск» задана платёжной матрицей без седловой точки: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \alpha = -1, \beta = 1.$

Найти решение игры.

Решение:

Проверим наличие седловой точки α = max (-1; -1) = -1 , β = min (1; 1) = 1

Игра не имеет седловой точки и, следовательно, решение должно лежать в области смешанных стратегий:

$$S_A^* = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{Bmatrix} \qquad S_B^* = \begin{Bmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{Bmatrix}$$

Нужно найти p_1, p_2, q_1, q_2.

Ищем решение в смешанных стратегиях; для игрока A средний выигрыш равен цене игры v (при B_1 и B_2); для игрока B средний выигрыш равен цене игры v (при A_1 и

Системы уравнений в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} (-1)p_1^* + 1 \cdot p_2^* = v \\ 1 \cdot p_1^* - 1 \cdot p_2^* = v \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-1)q_1^* + 1 \cdot q_2^* = v \\ 1 \cdot q_1^* - 1 \cdot q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Для определения p_1 *и* p_2 имеем уравнения:

$$p_1 - (1 - p_1) = -p_1 + (1 - p_1) \quad \text{или} \quad 4p_1 = 2, \quad \text{откуда} \quad p_1 = 1/2; \ p_2 = 1/2; \ v = 0$$

Аналогично найдем: $q_1 = 1/2; \ q_2 = 1/2$. Решая эти системы, получаем: $p_1^* = p_2^* = q_1^* = q_2^* = \frac{1}{2}, v = 0$

Это означает, что оптимальная стратегия каждого игрока состоит в том, чтобы чередовать свои чистые стратегии случайным образом, выбирая каждое из убежищ с вероятностью ½, при этом средний выигрыш равен 0.

Следовательно, оптимальная стратегия для каждого из игроков состоит в том, чтобы случайным образом чередовать обе свои чистые стратегии, пользуясь одинаково часто каждой из них; при этом средний выигрыш будет равен нулю.

Ответ: $S_A^* = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $S_B^* = (\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $\nu = 0$

6.3. Задачи для самостоятельного решения

Задание: ***Найти решение игры аналитическим методом.***

Вариант 1

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Тема 7. Графический метод решения антагонистических игр в смешанных стратегиях

7.1. *Методические указания*

Графический метод применим к тем играм, в которых хотя бы один игрок имеет две стратегии (при решении игры 2×2, 2×n и m×2).

Рассмотрим решение игры 2×2. Пусть игра задана платежной матрицей $A=\|a_{ij}\|,\ \ i,j=1,2.$ приведенной ниже:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Решение игры 2×2, проводится в соответствии с алгоритмами нахождения оптимальных стратегий, рассмотренными ниже.

Рассмотрим решение игры 2×n. Пусть игра задана платежной матрицей $A=\|a_{ij}\|,\ \ i=1,2,\ j=1,2,...,n$ приведенной ниже:

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}

Алгоритм графического нахождения оптимальных стратегий игрока А и цены игры v

1. По оси абсцисс, строим отрезок A_1A_2 единичной длины.

2. Через концы отрезка [0,1] проводим к нему два перпендикуляра – левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0,1] откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первой строки матрицы А.

4. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком [0,1] откладываем все элементы второй строки матрицы А. (При этом

масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковы, не обязательно совпадающие с масштабом горизонтального отрезка [0,1]).

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам a_{1j} и a_{2j} $(j = 1,2,\dots,n)$, стоящим в j-м столбце матрицы А, соединяем отрезком $a_{1j}a_{2j}$ Таким образом будет построено n отрезков.

6. Находим (выделяем) нижнюю огибающую семейства отрезков, представляющую собой выпуклую вверх ломаную, а в частности, может быть и отрезком.

7. На нижней огибающей, находим максимальную (наивысшую) точку (точки) – точку М.

8. Абсцисса p_2^* этой точки является вероятностью выбора игроком А чистой стратегии A_2 в оптимальной смешанной стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$.

9. Ордината наивысшей точки нижней огибающей является ценой игры v.

10. Верхний из двух концов нижней огибающей (лежащих на перпендикулярах) – это нижняя цена игры в чистых стратегиях α.

11. Нижний из верхних концов отрезков $a_{1j}a_{2j}, j = 1,\dots,n$,есть верхняя цена игры в чистых стратегиях β.

Рассмотрим решение игры m×2. Пусть игра задана платежной матрицей $A = \|a_{ij}\|, \ i = 1,2,\dots,m, j = 1,2.$ приведенной ниже:

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
…	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}

Алгоритм графического нахождения оптимальных стратегий игрока В и цены игры v

1. По оси абсцисс, строим отрезок B_1B_2 единичной длины.

2. Через концы отрезка [0,1] проводим к нему два перпендикуляра – левый и правый.

3. На левом перпендикуляре от точки 0 его пересечения с отрезком [0,1] откладываем (как на вертикальной числовой оси) все элементы первого столбца матрицы А.

4. На правом перпендикуляре от точки 1 его пересечения с отрезком [0,1] откладываем все элементы второго столбца матрицы А. (При этом масштабы на левом и правом перпендикулярах должны быть одинаковы, не обязательно совпадающие с масштабом горизонтального отрезка [0,1]).

5. Каждую пару точек, соответствующих элементам a_{i1} *и* a_{i2} $(i = 1,2,\ldots,m)$, стоящим в *i-й* строке матрицы А, соединяем отрезком $a_{i1}a_{i2}$. Таким образом, будет построено m отрезков.

6. Находим (выделяем) верхнюю огибающую из полученного семейства отрезков, представляющую собой выпуклую вниз ломаную, а в частности, может быть и отрезком.

7. На верхней огибающей, находим минимальную (низшую) точку (точки) – точку М.

8. Абсцисса q_2^* минимальной точки является вероятностью случайного выбора игроком В чистой стратегии B_2 в оптимальной смешанной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.

9. Ордината минимальной точки верхней огибающей является ценой игры v.

10. Верхний из нижних концов отрезков $a_{i1}\,a_{i2}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, это нижняя цена игры в чистых стратегиях α.

11. Нижний из концов верхней огибающей (лежащих на перпендикулярах) является верхней ценой игры в чистых стратегиях β.

7.2. Решение типовых задач

1. Решит графическим методом матричную игру:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

Рассмотрим платежную матрицу игры.

Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Русский (Россия)

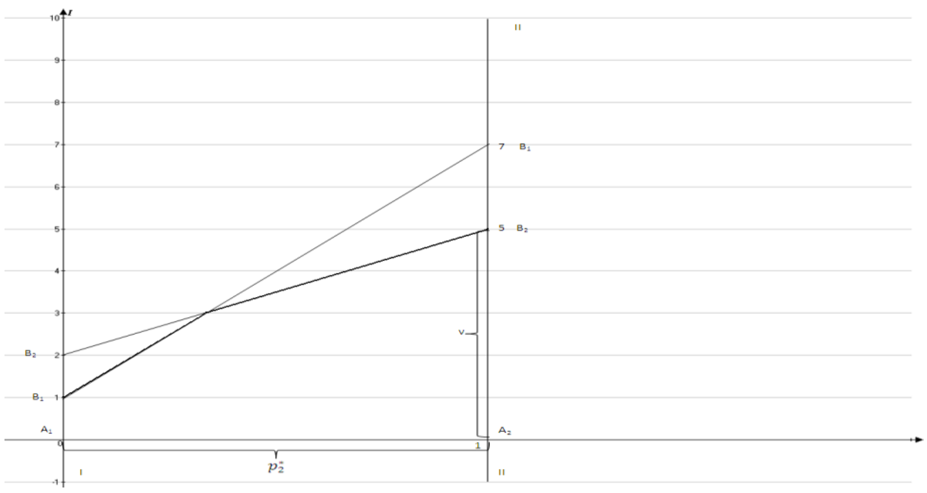
Отформатировано: Шрифт: 14 пт, Русский (Россия)

	B_1	B_2	Минимум по строкам α_i
A_1	1	2	1
A_2	7	5	5
Максимум по столбцам β_j	7	5	α = 5 β = 5

Так как α = 5 и β = 5, то игра устойчивая

Седловая точка a_{22}=5, ν=5, $(A_2^*; B_2^*)$

Найдем графически S_A^* и ν



Ответ: $(A_2^*; B_2^*)$, ν=5.

2. Решит графическим методом матричную игру

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение :

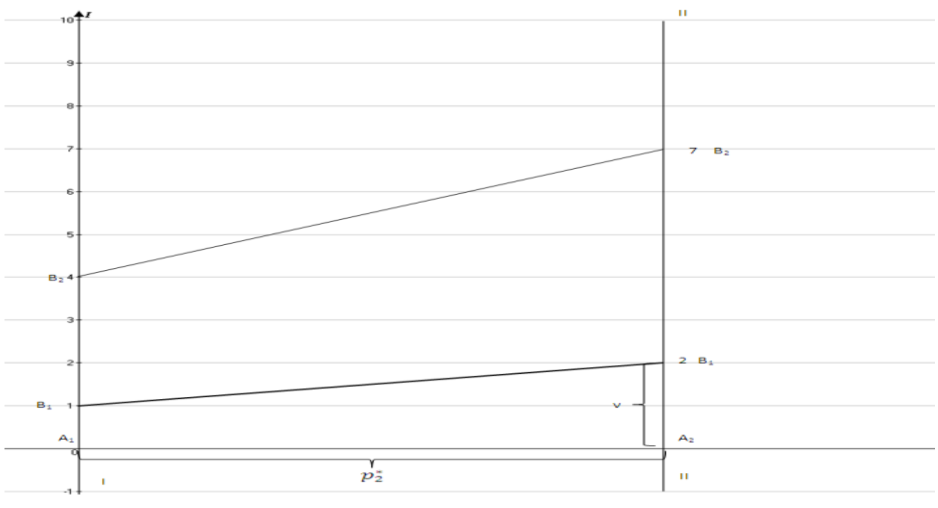
Рассмотрим платежную матрицу игры.

	B_1	B_2	Минимум по строкам α_i
A_1	1	4	1
A_2	2	7	2
Максимум по столбцам β_j	2	7	$\alpha = 2$ $\beta = 2$

Так как $\alpha = 2$ $\beta = 2$, игра устойчивая

Седловая точка a_{21}=2, ν=2, $(A_2^*; B_1^*)$

Найдем графически S_A^* и ν



Ответ: $(A_2^*; B_1^*)$, ν=2.

3. Решит графическим методом матричную игру

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

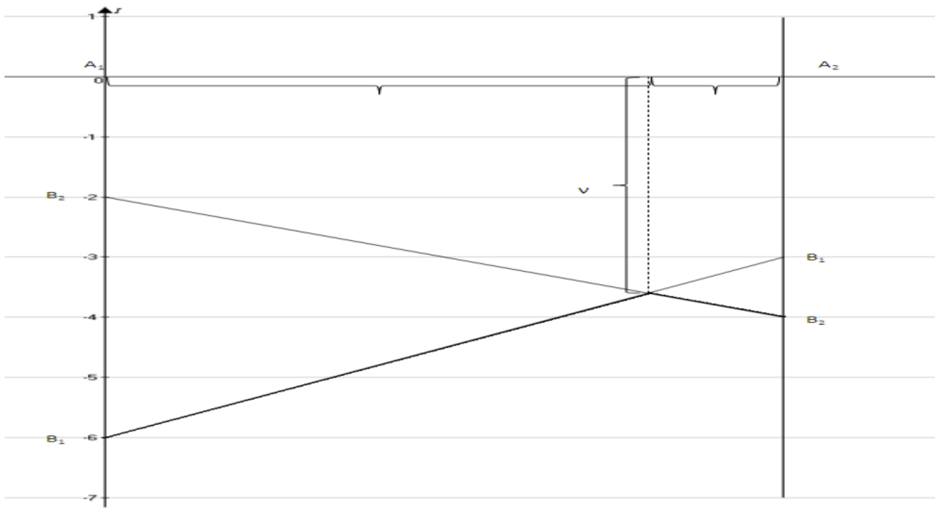
Решение:

Рассмотрим платежную матрицу игры.

	B_1	B_2	Минимум по строкам α_i
A_1	-6	-2	-6
A_2	-3	-4	-4
Максимум по столбцам β_j	-3	-2	α = - 4 β = - 3

Так как α = - 4 ≠ β = - 3 , игра не устойчивая

Найдем графически S_A^* и ν



Активные стратегии: B_1, B_2.

Найдем S_A^* и ν: $\begin{cases} -6p_1^* - 3p_2^* = \nu \\ -2p_1^* - 4p_2^* = \nu \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -6p_1^* - 3p_2^* = -2p_1^* - 4p_2^* \\ p_1^* = 1 - p_2^* \end{cases}$$

$-6+6p_2^*-3p_2^*=-2+2p_2^*-4p_2^*$; $\quad -6+3p_2^*=-2-2p_2^*$; $\quad 5p_2^*=4$

$p_2^*=\frac{4}{5}$ $\quad p_1^*=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ $\quad S_A^*=(\frac{1}{5};\frac{4}{5})$.

Найдем цену игры из первого уравнения системы: $-\frac{6}{5}-\frac{12}{5}=\nu$, $\quad \nu=-\frac{18}{5}$

Найдем S_B^* и ν: $\begin{cases}-6q_1^*-2q_2^*=\nu\\ -3q_1^*-4q_2^*=\nu\\ q_1^*+q_2^*=1\end{cases}$

$$\begin{cases}-6q_1^*-2q_2^*=-3q_1^*-4q_2^*\\ q_1^*=1-q_2^*\end{cases}$$

$-6+6q_2^*-2q_2^*=-3+3q_2^*-4q_2^*$; $\quad -6+4q_2^*=-3-q_2^*$; $\quad 5q_2^*=3$

$q_2^*=\frac{3}{5}$ $\quad q_1^*=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ $\quad S_B^*=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$, $\quad \nu=-\frac{18}{5}$

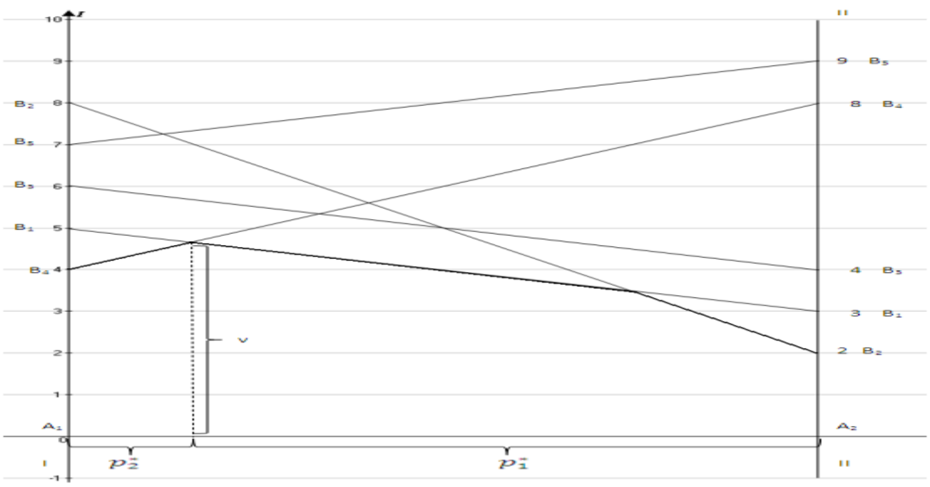
Ответ: $S_A^*=(\frac{1}{5};\frac{4}{5})$, $S_B^*=(\frac{2}{5};\frac{3}{5})$, $\nu=-\frac{18}{5}$

4. Решит графическим методом матричную игру

$$A=\begin{pmatrix}5 & 8 & 6 & 4 & 7\\ 3 & 2 & 4 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем графически S_A^* и ν



Активные стратегии: B_1, B_2.

Исходная матрица упрощается до матрицы:

	B_1	B_4	Минимум по строкам α_i
A_1	5	4	4
A_2	3	8	3
Максимум по столбцам β_j	5	8	α = 4 β = 5

Так как α = 4 $\neq$ β = 5 , то игра неустойчивая

Найдем S_A^* и ν : $\begin{cases} 5p_1^* + 3p_2^* = \nu \\ 4p_1^* + 8p_2^* = \nu \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5p_1^* + 3p_2^* = 4p_1^* + 8p_2^* \\ p_1^* = 1 - p_2^* \end{cases}$$

$5 - 5p_2^* + 3p_2^* = 4 - 4p_2^* + 8p_2^*$; $5 - 2p_2^* = 4 + 4p_2^*$; $-6p_2^* = -1$

$p_2^* = \frac{1}{6}$ $p_1^* = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ $S_A^* = (\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$

Найдем цену игры из первого уравнения системы: $\frac{25}{6} + \frac{3}{6} = \nu$ => $\nu = \frac{14}{3}$

Найдем S_B^* и ν : $\begin{cases} 5q_1^* + 4q_4^* = \nu \\ q_1^* + 8q_4^* = \nu \\ q_1^* + q_4^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5q_1^* + 4q_4^* = q_1^* + 8q_4^* \\ q_1^* = 1 - q_4^* \end{cases}$$

$5 - 5q_4^* + 4q_4^* = 3 - 3q_4^* + 8q_4^*$; $5 - q_4^* = 3 + 5q_4^*$; $-6q_4^* = -2$

$q_4^* = \dfrac{1}{3}$ $q_1^* = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ $S_{\text{B}}^* = \left(\dfrac{2}{3}; 0; 0; \dfrac{1}{3}\right)$, $\nu = \dfrac{14}{3}$

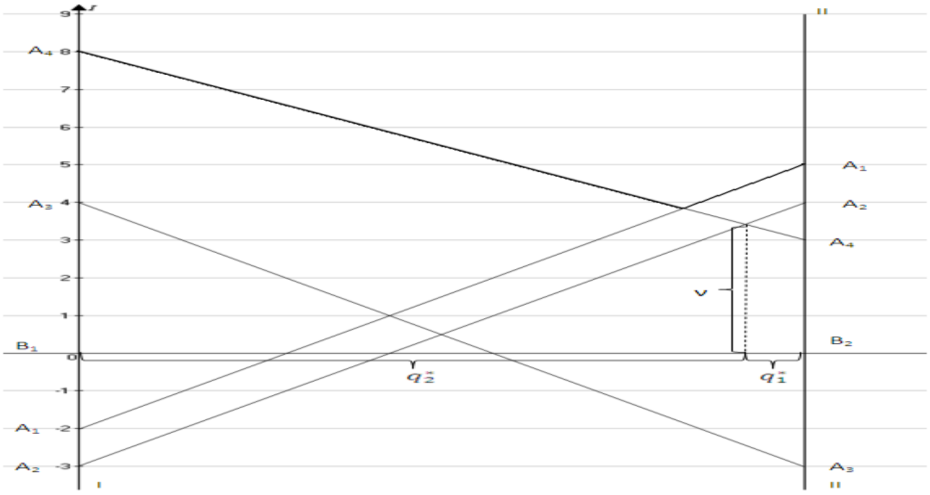
Ответ: $S_A^* = (\frac{5}{6}; \frac{1}{6})$, $S_{\text{B}}^* = (\frac{2}{3}; 0; 0; \frac{1}{3})$, $\nu = \frac{14}{3}$

5. Решит графическим методом матричную игру

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \\ 4 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем графически оптимальную стратегию второго игрока S_B^* и ν.



Активные стратегии: A_1, A_4.

Исходная матрица упрощается до матрицы:

	B_1	B_2	Минимум по строкам α_i
A_1	-2	5	-2
A_4	8	3	3
Максимум по столбцам β_j	8	5	α = 3 β = 5

Так как α = 3 ≠ β = 5, то игра неустойчивая

Найдем S_A^* и ν : $\begin{cases} -2p_1^* + 8p_4^* = \nu \\ 5p_1^* + 3p_4^* = \nu \\ p_1^* + p_4^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2p_1^* + 8p_4^* = 5p_1^* + 3p_4^* \\ p_1^* = 1 - p_4^* \end{cases}$$

$-2 + 2p_4^* + 8p_4^* = 5 - 5p_4^* + 3p_4^* \quad -2 + 10p_4^* = 5 - 2p_4^*; \quad 12p_4^* = 7$

$p_4^* = \frac{7}{12} \quad p_1^* = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \quad S_A^* = (\frac{5}{12}; 0; 0; \frac{7}{12}).$

Найдем цену игры из первого уравнения системы: $-\frac{10}{12} + \frac{56}{12} = \nu$, $\nu = \frac{23}{6}$

Найдем S_B^* и ν: $\begin{cases} -2q_1^* + 5q_2^* = \nu \\ 8q_1^* + 3q_2^* = \nu \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2q_1^* + 5q_2^* = 8q_1^* + 3q_2^* \\ q_1^* = 1 - q_2^* \end{cases}$$

$-2 + 2q_2^* + 5q_2^* = 8 - 8q_2^* + 3q_2^*; \quad -2 + 7q_2^* = 8 - 5q_2^*; \quad 12q_2^* = 10$

$q_2^* = \frac{5}{6} \quad q_1^* = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \quad S_{\text{В}}^* = \left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right). \quad \nu = \frac{23}{6}.$

Ответ: $S_A^* = (\frac{5}{12}; 0; 0; \frac{7}{12})$, $S_{\text{В}}^* = (\frac{1}{6}; \frac{5}{6}), \nu = \frac{23}{6}$

7.3. Задачи для самостоятельного решения

Задание:1. ***Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков.***

Вариант 1

$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 2

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 3

$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Вариант 4

$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 5

$A = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$

Вариант 6

$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

Задание:2. ***Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните их с результатами, полученными геометрическим способом.***

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -1 & -2 & 2\\ -2 & 5 & -3 & -4 & 3\end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2 & -2\\ -2 & 5 & 3 & -4\end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8 & 5\\ 7 & 3 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix}1{,}1 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1{,}0 & 0{,}4\\ 1{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}6\end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 4 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

Задание:3. ***Дайте геометрическую интерпретацию решения игры для двух игроков. Для проверки геометрического решения проведите также алгебраические расчеты и сравните результаты с геометрическими.***

Вариант 1

$$A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 7 & 6\\ 4 & 5\\ 9 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\\ 4 & 1\\ 2 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 7\\ 5 & 8\\ 2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 5 & 7\\ 2 & -8\\ -1 & 4\\ 6 & -3\end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 3\\ 2 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\\ 4 & 7\\ 2 & 8\end{pmatrix}$$

Раздел 3. МОДЕЛИ МИКРОЭКОНОМИКИ

Тема 8. Модели поведения потребителей. Функции спроса

8.1. Методические указания

Главная проблема рационального ведения домашнего хозяйства потребителя заключается в том, чтобы установить, в каких объемах он приобретет наличные товары и услуги при заданных ценах и известном доходе.

Поведение потребителя (решение о покупке определенного набора товаров), с точки зрения рационального ведения хозяйства, математически можно представить как выбор конкретной точки в пространстве товаров.

Предположим, что предпочтение потребителей на множестве товаров выражается целевой функцией потребления *U(x, y)*. Тогда простейшая **модель поведения потребителя,** другими словами **задача потребительского выбора** (задача рационального поведения потребителя на рынке) будет иметь вид: *найти потребительский набор* $X^* = (x^*, y^*)$, *который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.*

Модель потребительского выбора в математической форме:

$$U(x, y) \to \max,$$

при условиях

$$p_1 x + p_2 y \le I,$$

$$x > 0,\ y > 0.$$

Набор $X^* = (x^*, y^*)$ называют ***оптимальным набором для потребителя*** (или **локальным рыночным равновесием потребителя).**

Рассмотрим решение задачи потребительского выбора.

Для решения задачи потребительского выбора используется метод Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = U(x, y) + \lambda(p_1 x + p_2 y - I),$$

где λ — неопределенный множитель Лагранжа.

Далее ищется точка максимума функции *L:* все три частные производные этой функции приравниваются к нулю, т.е. получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \partial L / \partial x = U'_x + \lambda p_1 = 0 \\ \partial L / \partial y = U'_y + \lambda p_2 = 0 \\ \partial L / \partial \lambda = p_1 x + p_2 y - I = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \partial U / \partial x + \lambda p_1 = 0 \\ \partial U / \partial y + \lambda p_2 = 0 \\ p_1 x + p_2 y - I = 0 \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений неизвестную λ, получим систему 2-х уравнений с 2-мя неизвестными *x* и *y*.

$$\begin{cases} {\partial U / \partial x}\Big/{\partial U / \partial y} = p_1 / p_2 \\ p_1 x + p_2 y = I \end{cases}$$

Решение $X^* = (x^*, y^*)$ этой системы уравнений является **решением задачи потребительского выбора.**

Рассмотрим отношение: $\dfrac{\partial U(x, y)}{\partial x} \Big/ \dfrac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial y}{\partial x} \approx -\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Дробь $-\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называется **нормой замены** первого продукта вторым, которая показывает, какое количество товара *y* необходимо, чтобы компенсировать потерю товара *x. Норма замены показывает*, на сколько должен потребитель увеличить (уменьшить) потребление второго продукта, если он уменьшил (увеличил) потребление первого продукта на одну единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей. Производная $-\frac{\partial y}{\partial x}$ называется **предельной нормой замены** первого продукта вторым и равна отношению рыночных цен на эти продукты: $-\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p_1}{p_2}$

8.2. *Решение типовых задач*

1.Функция полезности имеет вид: $U(x,y) = 2\cdot(x-1)^{1/4} + (y-1)^{1/3}$. Цена единицы первого блага равна 2, второго – 3. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 1000. Как следует распределить эту сумму между двумя благами, чтобы полезность от их приобретения была бы наибольшей?

Решение:

ЭММ поведения потребителя: $\begin{cases} 2\cdot(x-1)^{1/4} + (y-1)^{1/3} \to \max \\ \text{при ограничениях} \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 2x + 3y - 1000 = 0. \end{cases}$

Данная задача – задача нелинейного программирования и для ее решения используется метод Лагранжа.

Функция Лагранжа: $L(x,y,\lambda) = U(x,y) + \lambda(p_1 x + p_2 y - I)$,

где λ - неопределенный множитель Лагранжа.

Чтобы (x^*, y^*) - оптимум для потребителя – являлась максимумом функции Лагранжа, необходимо, чтобы:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1)^{-3/4} + 2\lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{3}(y-1)^{-2/3} + 3\lambda = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 1000 = 0.$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^{-3/4} + 2\lambda = 0, & \cdot 3 \\ & - \\ \frac{1}{3}(y-1)^{-2/3} + 3\lambda = 0, & \cdot 2 \\ 2x + 3y - 1000 = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x-1)^{-3/4} - \frac{2}{3}(y-1)^{-2/3} = 0, \\ 2x + 3y - 1000 = 0. \end{cases}$$
$$x = 263.966,$$
$$y = 157.356.$$

Полезность наибольшей будет при приобретении (x, y) при распределении $x = 263.966, \quad y = 157.356.$

Ответ: (2991^3√3+3/6^3√3+3; 499 +3^3√3 / 3 ^{3}√3 +3/2)

2. Решите задачу потребительского выбора, найдя функции спроса, при ценах благ p_1 = 10, p_2 = 2 и доходе I = 60, со следующей функцией предпочтения: U = $x_1x_2 \to$ max . Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

Решение:

ЭММ задачи: $u(x_1, x_2) \to \max$

при условиях:

$$g(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2 - I$$
$$x_1 > 0, x_2 > 0$$

Функция Лагранжа: $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(10x_1 + 2x_2 - 60)$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx_1} = x_2 + 10\lambda \\ \frac{dL}{dx_2} = x_1 + 2\lambda \quad |*5 \\ \frac{dL}{d\lambda} = 10x_1 + 2x_2 - 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 10\lambda = 0 \\ - \\ 5x_1 + 10\lambda = 0 \\ 10x_1 + 2x_2 - 60 = 0 \end{cases}$$

$x_2 - 5x_1 = 0$

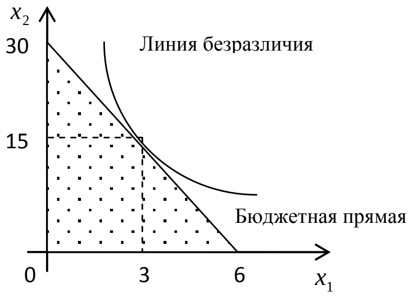
$x_2 = 5x_1$

$10x_1 + 10x_1 - 60 = 0$

$20x_1 = 60$

$x_1 = \frac{60}{20} = 3$

$x_2 = 5 \cdot 3 = 15$



(3;15) – оптимальный набор для потребления

$10x_1 + 2x_2 = 60$ - бюджетная прямая

$5x_1 + x_2 = 30$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 30 \quad (0;30)$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 6 \quad (6;0)$

$u^*(3;15) = 3 \cdot 15 = 45$

$x_1 \cdot x_2 = 45$

то есть $x_1 = \frac{45}{x_2}$ - кривая безразличия

Ответ: (3;15)

8.3. Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

Функция полезности имеет вид: $U(x,y) = 2\ln(x\text{-}1) + 3\ln(y\text{-}1)$. Цена единицы первого блага равна 8, второго - 16. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 100. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

Вариант 2

Решите задачу потребительского выбора, найдя функции спроса, при ценах благ $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ и доходе $I = 60$, со следующей функцией предпочтения: $U(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2^3$. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

Вариант 3

Функция полезности имеет вид: $U(x,y) = 2(x\text{-}1)^2 + (y\text{-}1)^2$. Цена единицы первого блага равна 2, второго - 3. На приобретение этих благ может быть затрачена сумма, равная 120. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

Вариант 4

Решите задачу потребительского выбора, найдя функции спроса, при ценах благ $p_1 = 10$, $p_2 = 5$ и доходе $I = 100$, со следующей функцией предпочтения: $U(x,y) = 3x^{2/3}y^{1/3}$ Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

***Вариант* 5**

Решите задачу потребительского выбора, найдя функции спроса, при ценах благ $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ и доходе $I = 60$, со следующей функцией предпочтения: $U(x,x_2) = x_1 x_2$. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

***Вариант* 6**

Целевая функция потребления для двух товаров имеет вид: $U(x,y) = 3x^2y^3$, а вектор цен равен $p = (2; 4)$; величину дохода обозначим $I = 15$. Определить характеристики оптимального набора для потребителя и функции спроса на товары. Изобразите допустимое множество и кривые безразличия.

Тема 9. Модели поведения производителей. Производственная функция

9.1. Методические указания

Рассмотрим модели поведения производителей, в условиях совершенной конкуренции, основанные на максимизации прибыли.

Пусть производственная фирма выпускает один вид продукции или много видов, но в постоянной структуре, тогда **годовой выпуск фирмы** (в натурально-вещественной форме) X – это число единиц продукции одного вида или число многономенклатурных агрегатов.

***Обозначим*:** $x = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ - вектор-столбец возможных **объемов затрат** различных видов ресурсов;

$(x; y)$ - объемы затрачиваемых производством ресурсов - *в частном случае* (для двух видов ресурсов).

Технология фирмы определяется ее производственной функцией*, выражающей связь между затратами ресурсов и выпуском:*

$$X = F(x); \quad \text{или} \qquad f(x, y) = X,$$

где $F(x)$ и $f(x, y)$ - общий объем выпускаемой предприятием продукции, являющейся производственной функцией данного предприятия, X – годовой выпуск фирмы.

Доход *(выручка) предприятия в заданном промежутке времени (в году) – это произведение общего объема выпускаемой предприятием продукции на рыночную цену этой продукции:*

$$p \cdot F(x) = R,$$

где $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ - вектор-строка рыночных цен единицы продукции;

R - годовой доход предприятия - это стоимость годового выпуска фирмы.

Издержки производства *предприятия в заданном промежутке времени – это общие выплаты по всем видам затрат, а именно:*

$$wx = C,$$

где $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ - вектор-строка рыночных цен единицы ресурсов;

С - издержки производства - это стоимость затрат ресурсов за год.

Прибыль предприятия *– разность между его доходом и издержками производства*: $П(x) = pF(x) - wx$,

Если предприятие для выпуска продукции затрачивает ресурсы x и y то ***прибыль предприятия*** в заданном промежутке времени –

$$П(x, y) = R - C = p \cdot f(x, y) - (w_1 x + w_2 y),$$

где w_1, w_2 - рыночные цены на затрачиваемые производством ресурсы x и y соответственно.

Целью предприятия является максимизация прибыли путем рационального распределения затрачиваемых ресурсов.

В случае а) **долговременного промежутка времени** предприятие может свободно выбирать ресурсы x и y и эти ресурсы не ограничены. Поэтому **задачу максимизации прибыли для долговременного промежутка времени** записывают в виде:

$$П(x, y) = p \cdot f(x, y) - (w_1 x + w_2 y) \to \max$$

при условиях: $x > 0, y > 0$.

В случае б) **кратковременного промежутка времени** предприятие должно учитывать неизбежные лимиты на объемы затрачиваемых ресурсов. **Задача максимизации прибыли** в этом случае определяется соотношениями: $П(x, y) = p \cdot f(x, y) - (w_1 x + w_2 y) \to \max$

при условиях:

$$\begin{cases} g_1(x, y) \le b_1, \\ ..., \\ g_m(x, y) \le b_m, \\ x > 0, y > 0, \end{cases}$$

где m - количество ограничивающих факторов.

Рассмотрим решение задачи максимизации прибыли предприятия для долговременного промежутка времени (случай а)).

Это задача нелинейного программирования (задача на глобальный абсолютный максимум).

Подозрительные точки локального экстремума дважды дифференцируемой в точке (x_0, y_0) функции $\Pi(x,y)$ являются корнями системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \Pi(x,y)}{\partial y} = 0 .$$

Необходимыми условиями решения этой задачи являются условия Куна – Таккера:

если

$$\frac{\partial^2 \Pi(x,y)}{\partial x^2} < 0 \left(или \, \frac{\partial^2 \Pi(x,y)}{\partial y^2} < 0 \right)$$

и выполняется неравенство:

$$\frac{\partial^2 \Pi(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \Pi(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0,$$

то **точка** (x_0, y_0) **является точкой локального максимума**.

Рассмотрим решение задачи максимизации прибыли предприятия для кратковременного промежутка времени (случай б) для ПФ $f(x,y) = a_0 x^{a_1} y^{a_2}$.

Задача на max прибыли:

$$\Pi(x,y) = p a_0 x^{a_1} y^{a_2} - (w_1 x + w_2 y) \to \max$$

при условиях:

$$w_1 x + w_2 y \le C,$$
$$x > 0, y > 0.$$

Решение этой задачи различным образом проводится для случаев $1 > a_1 + a_2$ и $1 < a_1 + a_2$.

При $1 > a_1 + a_2$ предварительно ищется глобальный абсолютный максимум функции прибыли. Если этот максимум лежит левее и ниже границы $w_1 x + w_2 y = C$, то он принимается в виде решения задачи. Если он лежит правее и выше, то задачу математического программирования можно заменить задачей на условный экстремум:

$$\Pi(x, y) = pa_0 x^{a_1} y^{a_2} - (w_1 x + w_2 y) \to \max$$

при условиях:

$$w_1 x + w_2 y = C,$$
$$x > 0, y > 0,$$

где С – допустимые издержки предприятия.

При $1 < a_1 + a_2$ задачу математического программирования надо сразу заменить задачей на условный экстремум.

В обоих случаях функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, \lambda) = pa_0 x^{a_1} y^{a_2} - (w_1 x + w_2 y) + \lambda(w_1 x + w_2 y - C).$$

Составляем систему линейных уравнений, для чего приравниваем к нулю первые частные производные функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = pa_0 a_1 x^{a_1 - 1} y^{a_2} - w_1 + \lambda w_1 = 0;$$
$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = pa_0 a_2 x^{a_1} y^{a_2 - 1} - w_2 + \lambda w_2 = 0;$$
$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = w_1 x + w_2 y - C = 0.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{a_1 y}{a_2 x} = \frac{w_1}{w_2};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} w_2 - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} w_1 = 0.$$

Складывая первое и второе уравнения и производя алгебраические преобразования, получим;

$$y_0 = \frac{C}{w_2\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)}$$

Подставив эту формулу в первое уравнение системы, найдем

$$x_0 = \frac{C}{w_1\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)}$$

Оптимальный состав ресурсов (x_0, y_0) или **функции спроса на ресурсы позволяют оценить оптимальные затраты при ограниченных издержках предприятия**.

Функция предложения выпуска определяется соотношением:

$$f_0(x_0, y_0) = a_0 C^{a_1+a_2}\left(\frac{1}{w_1\left(1+\frac{a_2}{a_1}\right)}\right)^{a_1}\left(\frac{1}{w_2\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)}\right)^{a_2}$$

Прибыль при оптимальных издержках предприятия:

$$П_0(x_0, y_0) = p \cdot f(x_0, y_0) - C_0$$

9.2. Решение типовых задач

1. Производственная функция, характеризующая выпуск продукции предприятием за год, имеет вид

$$F = 5x^{0,4}y^{0,4},$$

где x – количество затраченного за год труда (человеко – часов);
y – затраты на капитал.

Средняя стоимость единицы труда составляет 10 руб., а стоимость единицы капитала (рубля) – 20% годовых. Рыночная цена выпускаемой продукции - 10 руб. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции, издержки производства и прибыль.

Решение:

$$\Pi(x,y) = 10 \bullet 5x^{0,4}y^{0,4} - (10x + 0{,}2y) \to \max$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

$$\Pi(x,y) = 50x^{0,4}y^{0,4} - 10x - 0{,}2y \to \max$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = 50y^{0,4} \bullet 0{,}4x^{-0,6} - 10 = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y} = 50x^{0,4} \bullet 0{,}4y^{-0,6} - 0{,}2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x^{-0,6}y^{0,4} = 10 \\ 20x^{0,4}y^{-0,6} = 0{,}2 \end{cases}$$

$$\frac{20x^{-0,6}y^{0,4}}{20x^{0,4}y^{-0,6}} = \frac{10}{0{,}2}$$

$$x^{-1}y^{1} = 50$$

$$\frac{y}{x} = 50; \quad x = \frac{y}{50}$$

Тогда:

$$20\left(\frac{y}{50}\right)^{-0,6} \bullet y^{0,4} - 10 = 0$$

$$20 \bullet 50^{0,6} \bullet y^{-0,2} = 10$$

$$y^{-0,2} = \frac{10}{20 \bullet 50^{0,6}}$$

$$\frac{1}{y^{1/5}} = \frac{1}{2 \bullet 50^{3/5}}$$

$$\left(y^{1/5}\right)^5 = \left(2 \bullet 50^{3/5}\right)^5$$

$$y = 2^5 \bullet 50^3$$

$$y_0 = 4000000\,\textit{руб.}$$

$$x_0 = 80000\,\textit{чел / часов}$$

Годовой выпуск продукции в оптимальной точке:

$$F_0(x_0, y_0) = 5x_0^{0,4}y_0^{0,4} = 5 \bullet 80000^{0,4} \bullet 4000000^{0,4} = 200000\,\textit{ед.}$$

Оптимальные издержки производства:

$$C_0(x_0, y_0) = \omega_1 x_0 + \omega_2 y_0 = 10 \bullet 80000 + 0{,}2 \bullet 4000000 = 1600000\,\textit{руб.}$$

Оптимальная прибыль:

$$П_0(x_0, y_0) = pF_0 - C_0 = 10 \bullet 200000 - 1600000 = 400000 \,руб.$$

Оптимальный состав ресурсов находится по формулам:

$$x_0 = \left(\frac{pa_0a_1}{\omega_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}}\left(\frac{a_2\omega_1}{a_1\omega_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} = \left(\frac{10\cdot 5\cdot 0{,}4}{10}\right)^{\frac{1}{0{,}2}}\cdot\left(\frac{0{,}4\cdot 10}{0{,}4\cdot 0{,}2}\right)^{\frac{0{,}4}{0{,}2}} = 80000 \,чел.-ч.;$$

$$y_0 = \left(\frac{pa_0a_1}{\omega_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}}\left(\frac{a_2\omega_1}{a_1\omega_2}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} = \left(\frac{10\cdot 5\cdot 0{,}4}{10}\right)^{\frac{1}{0{,}2}}\left(\frac{0{,}4\cdot 10}{0{,}4\cdot 0{,}2}\right)^{\frac{0{,}6}{0{,}2}} = 4000000 \,руб.$$

Таким образом, для реализации оптимальной прибыли предприятие должно привлечь капитал в размере 4 млн. руб. и содержать штат из $\frac{80000}{2200} = 36$ работников. Здесь учтено, что один человек отрабатывает в году 2200 часов.

Оптимальное количество производимой за год продукции определяется по формуле:

$$F_0 = a_0\left(\frac{pa_0a_1}{\omega_1}\right)^{\frac{a_1+a_2}{1-a_1-a_2}}\left(\frac{a_2\omega_1}{a_1\omega_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} = 5\left(\frac{10\cdot 5\cdot 0{,}4}{10}\right)^{\frac{0{,}8}{0{,}2}}\cdot\left(\frac{0{,}4\cdot 10}{0{,}4\cdot 0{,}2}\right)^{\frac{0{,}4}{0{,}2}} = 200000 \,шт.$$

Оптимальные издержки производства предприятия

$$C_0 = \omega_1 x_0 + \omega_2 y_0 = 10\cdot 80000 + 0{,}2\cdot 4000000 = 0{,}8\cdot 10^6 + 0{,}8\cdot 10^6 = 1{,}6\cdot 10^6 \,руб.$$

Оптимальная годовая прибыль предприятия

$$П_0 = pF_0 - C_0 = 10\cdot 200000 - 1600000 = 400000 \ руб.$$

2. Производственная функция, характеризующая выпуск продукции предприятием за год, имеет вид

$$F = x^{0,6}y^{0,5}$$

где x – количество затраченного за год труда (человеко – часов)
y – затраты на капитал.

Средняя стоимость единицы труда составляет 10 руб., а средняя стоимость единицы капитала (рубля) – 20% годовых. Рыночная цена выпускаемой продукции – 10 руб. издержки производства предприятия не должны превышать: а) 200 тыс. руб.; б) 2 млн. руб. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции и прибыль.

Решение: а)

$$П(x,y) = 10x^{0,6}y^{0,5} - 10x - 0,2y \to \max$$

при условиях: $\begin{cases} 10x + 0,2y \le 200000 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$

$$a_1 + a_2 = 0,6 + 0,5 = 1,1 > 1$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = 10x^{0,6}y^{0,5} - 10x - 0,2y + \lambda(10x + 0,2y - 200000)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x^{-0,4}y^{0,5} - 10 + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 5x^{0,6}y^{-0,5} - 0,2 + 0,2\lambda = 0 / * 50 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 0,2y - 200000 = 0 \end{cases}$$

$$6x^{-0,4}y^{0,5} - 10 - 250x^{0,6}y^{-0,5} + 10 = 0$$

$$6x^{-0,4}y^{0,5} = 250x^{0,6}y^{-0,5}$$

$$\frac{6x^{-0,4}}{250x^{0,6}} = \frac{y^{-0,5}}{y^{0,5}}$$

$$\frac{0,024}{x} = \frac{1}{y}$$

$$x = 0,024y$$

$$\begin{cases} x = 0,024y, \\ 10x + 0,2y - 200000 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,024y, \\ 0,44y = 200000; \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{1200}{0,11} \\ y_0 = \dfrac{50000}{0,11} \end{cases}$$

$\left(\dfrac{1200}{0,11}; \dfrac{50000}{0,11}\right)$ - оптимальный набор ресурсов x и y .

Годовой выпуск продукции в оптимальной точке:

$$F_0 = x_0^{0,6} y_0^{0,5} = \left(\frac{1200}{0,11}\right)^{0,6} \bullet \left(\frac{50000}{0,11}\right)^{0,5} = 178427,5 \textit{ед.}$$

Оптимальные издержки производства:

$$C_0 = \omega_1 x_0 + \omega_2 y_0 = 10 \bullet \frac{1200}{0,11} + 0,2 \bullet \frac{50000}{0,11} = \frac{2200000}{11} = 200000 \textit{руб.}$$

Оптимальная прибыль:

$$\varPi_0 = pF_0 - C_0 = 10 \bullet 178428 - 200000 = 1584280 \textit{руб.}$$

Оптимальный состав ресурсов находим по формулам:

$$x_0 = \frac{C}{\omega_1\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)} = \frac{200000}{10 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{0,6}\right)} = 10909,091 \textit{чел.} - \textit{ч.};$$

$$y_0 = \frac{C}{\omega_2\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)} = \frac{200000}{0,2 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{0,5}\right)} = 454545,44 \textit{руб.}$$

Таким образом, для реализации оптимальной прибыли предприятие должно привлечь капитал, равный 454545,44 руб. и содержать штат из $\frac{10909,091}{2200} = 5$ работников. Здесь учтено, что один человек отрабатывает в году 2200 часов. Как и следовало ожидать, *затраты на труд и капитал:*

$$C_0 = 10 \cdot 10909,091 + 0,2 \cdot 454545,44 = 200000 \textit{руб.}$$

Годовой выпуск продукции определяем по формуле:

$$F_0 = a_0 C^{a_1 + a_2} \left(\frac{1}{\omega_1\left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{\omega_2\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)}\right)^{a_2} =$$

$$= (2 \cdot 10)^{0,6+0,5} \left(\frac{1}{10 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{0,6}\right)}\right)^{0,6} \left(\frac{1}{0,2\left(1 + \frac{0,6}{0,5}\right)}\right)^{0,5} = 178428 \textit{шт.}$$

Прибыль при оптимальных издержках предприятия находят по формуле:

$$П_0(x_0, y_0) = pF_0 - C_0 = 10 \cdot 178428 - 200000 = 1584280 \, руб.;$$

б) *оптимальный состав ресурсов*

$$x_0 = \frac{2000000}{10 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{0,6}\right)} = 109090,91 \, чел.-ч.$$

$$y_0 = \frac{2000000}{0,2 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{0,5}\right)} = 4545454,4 \, руб.$$

Отсюда следует, что для реализации оптимальной прибыли предприятие должно привлечь капитал, равный 4545454,4 руб., и содержать штат из $\frac{109090,91}{2200} = 50$ работников.

Годовой выпуск продукции:

$$F_0 = \left(2 \cdot 10^6\right)^{0,6+0,5} \left(\frac{1}{10 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{0,6}\right)} \right)^{0,6} \left(\frac{1}{0,2 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{0,5}\right)} \right)^{0,5} = 2246267 \, шт.$$

Прибыль при оптимальных издержках предприятия:

$$П_0(x_0, y_0) = 10 \cdot 2246267 - 200000 = 20462670 \, руб.$$

Таким образом, при выполнении условия $a_1 + a_2 > 1$ прибыль предприятия быстро растет при увеличении издержек производства производится. При издержках производства 200 тыс.руб. прибыль по сравнению с издержками возросла в $\frac{1584280}{200000} = 7,9$ раза, а при издержках 2 млн. руб. - в $\frac{20462670}{2000000} = 10,2$ раза.

9.3. Задачи для самостоятельного решения

Вариант 1

Производственная функция фирмы имеет следующий вид: $F(x_1, x_2) = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2,$ где x_1, x_2 – затраты ресурсов. Определить максимальный выпуск и обеспечивающие этот выпуск затраты ресурсов.

Вариант 2

Задана производственная функция $F(x, y) = 24\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2}$, цены на единицу первого и второго ресурсов - $\omega_1 = 27$ ден.ед., $\omega_2 = 4$ ден.ед., а так же ограничения С в сумме С = 6 ден.ед., которая может быть потрачена на приобретение ресурсов (сумма ≤ С). Рыночная цена выпускаемой продукции - 15 ден.ед. Найти значения величин используемых ресурсов (x, y), при которых фирма – производитель получит наибольшую прибыль. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции, издержки производства и прибыль.

Вариант 3

Производственная функция, характеризующая выпуск продукции предприятием за год, имеет вид: $f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y},$ Стоимость единицы первого ресурса равна 5 ден.ед., второго – 10 ден.ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден.ед. Рыночная цена выпускаемой продукции - 10 ден.ед. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции, издержки производства и прибыль.

Вариант 4

Рекламное объявление в газете стоит 500 марок, минута телевизионного времени – 1500 марок. Недельный рекламный бюджет фирмы – 15000 марок. Если x_1, x_2 – соответственно число объявлений в газете и число минут рекламного времени на телевидении в неделю, то прибыль фирмы за неделю: $П(x_1,x_2) = 4x_1x_2 - 5x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 + 100000.$ Как следует использовать рекламный бюджет, чтобы прибыль была максимальна?

Вариант 5

Выпуск однопродуктовой фирмы определяется ПФКД: $f\,(K;L) = 4K^{1/6}L^{1/3}$. Найти распределение фондов К и затрат труда L , при котором выпуск будет максимальным, если на аренду фондов и оплату труда выделено 200ден.ед., стоимость аренды фондов $\omega_к = 10$ ден.ед. на единицу фондов, ставка зарплаты $\omega_L = 20$ден.ед./чел. Рыночная цена выпускаемой продукции - 25 ден.ед. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции, издержки производства и прибыль.

Вариант 6

Задана производственная функция: $f\,(x, y) = 10\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}$, цены на единицу первого и второго ресурсов- ω_1 = *2*ден.ед., ω_2 = *4*ден.ед., а так же ограничения С в сумме С = 12 ден.ед., которая может быть потрачена на приобретение ресурсов. Рыночная цена выпускаемой продукции - 20 ден.ед. Определить оптимальный состав ресурсов, годовой выпуск продукции, издержки

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрашин, Е.А. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Абрашин Е.А., Комаров В.А. – Волгоград: Волгоградский институт бизнеса, Вузовское образование, 2009. – 207 с.
2. Алексеенко, В.Б. Математические модели в экономике: учебное пособие / В.Б. Алексеенко, Ю.С. Коршунов, В.А Красавина. – М.: Российский университет дружбы народов, 2013. – 80 с.
3. Бродецкий, Г.Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации: учеб. для студентов учреждений высшего профессионального образования / Г.Л. Бродецкий. – М.: ИЦ Академия, 2012. – 288 с.
4. Гармаш, А.Н. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавриата и магистратуры / А.Н. Гармаш, И.В. Орлова, В.В. Федосеев. – Люберцы.: Юрайт, 2016. – 328 с.
5. Гетманчук, А.В. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / А.В. Гетманчук, М.М. Ермилов. – М.: Дашков и К, 2015. – 188 с.
6. Гордеева, Д.С. Экономика образования: учебное пособие для студентов / Д.С. Гордеева, Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 101 с.
7. Дегтярева Н.А. Исследование индекса развития человеческого потенциала социально-экономической системы / Н.А. Дегтярева, К.О. Латышева // Ключевые элементы развития человеческого потенциала, экономики и обеспечения экономической безопасности: сборник статей участников Международной научно-практической конференции V Уральского вернисажа науки и бизнеса / под общ. ред. Е.П. Велихова. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 16 марта 2018. - С. 104-108.

8. Дегтярева Н.А. Принятие эффективных управленческих решений на основе эконометрического прогнозирования. / Н.А. Дегтярева, Н.А. Берг // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономические науки». - № 4 (414) 2018. вып. 61. – С. 176-183.

9. Дегтярева, Н.А. Применение статистических методов исследования в сельском хозяйстве / Н.А. Дегтярева, Н.А.Берг //Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2017. - № 1. – С.42-47.

10. Дегтярева, Н.А. Использование информационных технологий в управлении / Н.А. Дегтярева, И.Д. Колмакова // Вестник факультета управления Челябинского государственного университета. Серия: «Управление». – 2016.- № 1. - С. 99 - 101.

11. Дегтярева, Н.А. Информатизация общеобразовательных школ // Функциональная и прикладная наука: сборник научных статей по итогам научно-исследовательской работы за 2014 г./ под науч. ред. М.В. Потаповой.- Челябинск: Изд-во Челяб.гос.пед.ун-т. - 2015. - С. 91-94.

12. Дегтярева, Н.А. Исследование зависимости количества безработных от социально-экономических факторов на основе модели множественной регрессии // Фундаментальная и прикладная наука. – Челябинск: Из-во Челяб.гос.пед.ун-та. – 2016. – № 2. – С. 13 – 17.

13. Дегтярева, Н.А. Математическая статистика [Текст]: учебно-практическое пособие / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Изд-во Южно-Урал гос.гуман.- пед. ун-та, 2018. – 122 с.

14. Дегтярева, Н.А. Модели анализа и прогнозирования на основе временных рядов: монография / Н.А. Дегтярева. - Челябинск: Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера», 2018.- 160 с.

15. Дегтярева, Н.А. Повышение экономической эффективности функционирования крестьянских (фермерских) хозяйств в условиях рынка: диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук /

Дегтярева Н.А.; Челябинская государственная агроинженерная академия. - Челябинск, 2000. - 218 с.

16. Дегтярева Н.А. Принятие эффективных управленческих решений на основе эконометрического прогнозирования. / Н.А. Дегтярева, Н.А. Берг // Вестник Челябинского государственного университета. Серия: «Экономические науки». - № 4 (414) 2018. вып. 61. – С. 176-183.

17. Дегтярева, Н.А. Применение статистических методов исследования в сельском хозяйстве / Н.А. Дегтярева, Н.А.Берг //Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2017. - № 1. – С.42-47.

18. Дегтярева, Н.А. Применение экономико-математических моделей для принятия управленческих решений / Н.А. Дегтярева // В сборнике: Конкурентоспособность и развитие социально-экономических систем Материалы Всероссийской научной конференции памяти академика А. И. Татаркина. Под ред. В. И. Бархатова, Д. А. Плетнёва. 2017. – С. 62 – 64.

19. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по статистике: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 90 с.

20. Дегтярева, Н.А. Сборник задач по экономико-математическим методам и моделям: учебное пособие для студентов / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 77 с.

21. Дегтярева, Н.А. Эконометрические модели анализа и прогнозирования: монография / Н.А. Дегтярева. – Челябинск: Цицеро, 2017. – 170 с.

22. Забудский, Г.Г. Математическое моделирование в экономике: учебное пособие / Г.Г. Забудский.- Электрон.текстовые данные. – Омск: Омский государственный университет, 2008. – 91 с.

23. Ильченко, А.Н. Практикум по экономико-математическим методам: учебное пособие / А.Н. Ильченко, О.Л. Ксенофонтова, Г.В. Канакина. – М.: Финансы и статистика, 2014. – 288 с.

24. Колемаев, В.А. Математическая экономика: учебник для вузов / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2005. – 399 с.

25. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике: учебное пособие / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2009. – 407 с.

26. Кузнецов, Б.Т. Математика: учебник / Б.Т. Кузнецов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 719 с.

27. Невежин, В.П. Сборник задач по курсу «Экономико-математическое моделирование»: учебное пособие для вузов / В.П. Невежин, С.И. Кружилов. – М.: ОАО «Издательский Дом» «Городец», 2005. – 320 с.

28. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА, 2013. – 389 с.

29. Орлова, И.В. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебник для бакалавров / И.В. Орлова. – М.: Юрайт, 2013. – 328 с.

30. Попов, А.М. Экономико-математические методы и модели: учебник для бакалавров / А.М. Попов. – М.: Юрайт, 2013. – 479 с.

31. Семёнов, А.Г. Математические модели в экономике: учебное пособие / А.Г. Семёнов, И.А. Печерских. – Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2011. – 187 с.

32. Смагин, Б.И. Экономико-математические методы / Б.И. Смагин. – М.: Колос, 2012. – 271 с.

33. Стрикалов, А.И. Экономико-математические методы и модели: пособие к решению задач / А.И.Стрикалов, И. А. Печенежская. – Ростов н/Д : Феникс, 2008. – 348 с.

34. Хуснутдинов, Р.Ш. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Р.Ш. Хуснутдинов. – М.: НИЦ ИНФРА, 2013. – 224 с.

35. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А.С. Шапкин, Н.П. Мазаева. – М.: Издательско-торговая корпорация "Дашков и К", 2004. – 400 с.

36. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Под ред. Ю.В. Криволуцкого, Л.А. Фунберг. – М.: ЮНИТИ, 2015. – 319 с.

37. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие / В.В. Федосеев [и др.]. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 304 с.

38. Юденков, А.В. Математическое программирование в экономике: учебное пособие / А.В. Юденков, В.В. Круглов. – М.: Финансы и статистика, 2010. – 240 с.

39. *Effective Management Predictions on yhe Basis of the Regression Model /* Kolmakova Ekaterina, Degtyareva Nina, Kolmakova Irina // *INSIGHTS AND POTENTIAL SOURCES OF NEW ENTREPRENEURIAL GROWTH: Proceedings of the International Roundtable on Entrepreneurship 4 december 2016, BELGRADE, SERBIA. - Filodiritto Publishe. -* First Edition Vol. IV, No. 1, 2017. – pp.146 – 156, ISBN: 978-88-95922-84-3. Идентификационный номер: WOS:000403567000010 (WEB OF SCIENCE)

Учебное издание

НИНА АДАМОВНА ДЕГТЯРЕВА

ПРАКТИКУМ
ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ
МЕТОДАМ И МОДЕЛЯМ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Изд-во ЗАО «Библиотека А.Миллера»,
454080, г. Челябинск, Свердловский пр., 60

Подписано к печати 25.02.2019
Формат 60х84 1/16 Объем 6,1 уч-изд.л.
Заказ № 537 Тираж 100 экз
Отпечатано на ризографе в типографии ФГБОУ ВО ЮУрГГПУ
454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 69