МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

Физико-математический факультет
Кафедра математики и методики обучения математики

РЕШЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НЕОДНОЗНАЧНОСТЬЮ В УСЛОВИИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05 Педагогическое образование

Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
51,84 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
« 22 » марта 2018 г.
зав. кафедрой МиМОМ
Суховиенко Е.А.

Выполнил:
Студент группы ОФ-513/086-5-1
Иксанов Руслан Наилевич

Научный руководитель:
уч. степень, должность
доктор педагогических наук, доцент
Суховиенко Е.А.

Челябинск
год
2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Каждый человек, кем бы он ни был, постоянно в жизни сталкивается с неординарными ситуациями, к которым он чаще всего не готов, он не обладает каким-то определенным алгоритмом необходимых действий. С родом таких ситуаций приходится встречаться и учащимся в ходе обучения математики в школе. Поэтому возникает необходимость в формировании у учащихся умений ставить и решать задачи самых разнообразных типов. Решение подобных задач способствует возникновению всевозможных связей между теоритическими и практическими знаниями, полученными на уроках, что приводит к формированию более крепких связей между, изученным материалом и его практической применимостью, а в итоге и более качественному пониманию предмета. Такая активная самостоятельная мыслительная деятельность приводит к формированию новых свойств личности, качеств ума и тем самым к повышению уровня интеллектуального развития, то есть формированию универсальных учебных действий.

Универсальные учебные действия (УУД) — это умение учиться, то есть способность человека к самосовершенствованию через усвоение нового социального опыта. УУД в образовательном процессе школы выступают в качестве предметных и метапредметных результатов освоения учениками основной образовательной программы соответствующего уровня общего образования (начального, основного, среднего (полного)). УУД были определены Федеральным государственным образовательным стандартом второго поколения и вошли в учебную деятельность школы с 2009 года. Таким образом, одной из важных целей становится формирование УУД в образовательном процессе школы [18].

Особая роль в формировании универсальных учебных действий принадлежит нестандартным задачам, так как именно умение решать такие задачи способствует организации и осуществлению эффективных действий в различных ситуациях. К типу подобных задач относят планиметрические задачи с неоднозначностью в условии. Неоднозначность в условии позволяет получить несколько чертежей, которые удовлетворяют условию.

Обычно, эти задачи оказываются одними из самых трудных задач, с которыми очень плохо справляются ученики.

Объект исследования – процесс изучения учащимися геометрии.

Предмет исследования – решение планиметрических задач с неоднозначностью в условии как средство формирования УУД учащихся.

Гипотеза исследования – если разработать методику решения многовариантных задач, способствующую формированию, то освоение учащимися способов решения таких задач будет более эффективным..

Цель исследования – разработка методики решения многовариантных задач, способствующей формированию УУД.

Предмет, цель и гипотеза исследования определяют следующие задачи:

- подбор многовариантных задач из школьных учебников и задачников для средней школы, КИМов;
- классифицировать планиметрические задачи с неоднозначностью в условии;
- подобрать и решить планиметрические задачи, подводящие к ним;
- соотнести планиметрические задачи с неоднозначностью в условии и формируемые ими УУД;
- разработать методику решения планиметрических задач с неоднозначностью в условии.

ГЛАВА 1. МНОГОВАРИАНТНЫЕ ЗАДАЧИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГОВАРИАНТНЫХ ЗАДАЧ

Для рассмотрения многовариантных задач обратимся к литературе, которая предназначена для этого. Основными источниками для рассмотрения многовариантных задач с неоднозначностью в условии являются учебные пособия: Р.К. Гордина [1], Э.Г. Готмана [3], А.Г. Корянова и А.А. Прокофьева [9], [10], И.Ф. Шарыгина [16]. Изучение указанных источников, сбор необходимой информации и её анализ способствовали выделению следующих типов задач с неоднозначностью в условии:

I. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения элементов фигуры:
   1) расположение точек на прямой;
   2) расположение точек вне прямой;
   3) выбор обозначений вершин многоугольника;
   4) выбор некоторого элемента фигуры;
   5) выбор плоской фигуры.

II. Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения фигур:
   1) Взаимное расположение прямолинейных фигур;
   2) Взаимное расположение окружностей:
      a) расположение центров окружностей относительно общей касательной;
      b) расположение центров окружностей относительно их общей точки касания;
      c) расположение центров окружностей относительно общей хорды;
      d) расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности;

е) расположение точек касания окружности и прямой. [9]

Многовариантность задачи как результат неоднозначности в задании взаимного расположения элементов фигуры

Приведем пример подобной задачи из тех, что были предложены на МИОО в 2010 году, и представляющей собой взаимное расположение точек на одной прямой.

1) (МИОО, 2010). В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$,$BC = \sqrt{3}$. Точка F на прямой AB выбрана так, что $\angle AFD = \angle DFC$. Найти AF.

Решение. Рассмотрим треугольник FCD, он равнобедренный, $FC = CD = 2$, потому что $\angle AFD = \angle DFC = \angle FDC$ – накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD. Рассмотрим прямоугольный треугольник AFD ($FD = 2$ – гипотенуза и $AD = \sqrt{3}$ – катет). По теореме Пифагора $AF = \sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2} = 1$.

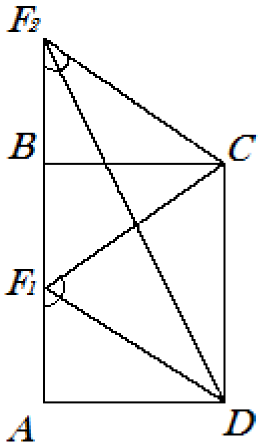

рис. 1

Неоднозначность в этой задаче заключается в расположении точки F относительно точек A и B на соответствующей прямой.

Случай 1. Точка F лежит между точками A и B (точка F_1 на рис. 1), то $AF = 1$.

Случай 2. Точка B лежит между точками A и F (точка F_2 на рис. 1), то $AF = 3$.

Случай 3. Положение точки A между B и F невозможно, так как в этом случае $\angle AFD$ не равно $\angle DFC$, так как $\angle AFD = \angle AFC + \angle DFC$, что противоречит условию задачи.

Ответ: 1 или 3.

Проанализировав задачную базу учебных пособий по геометрии, мы убедились, что планиметрических задач с неоднозначностью в условии очень мало, учащиеся с ними практически не встречаются, они для них новы. И для того, чтобы данные задачи не представляли для учащихся существенных проблем в будущем, стоит провести подготовку учащихся по распознаванию данных задач, решению простых подводящих задач с постепенно увеличивающейся сложностью.

Рассмотрим классификацию типов планиметрических задач с неоднозначностью в условии. Также выделим задачи, которые помогут при подготовке к рассмотрению более сложных задач.

Расположение точек на прямой

Рассмотрим случаи расположения точек относительно одной или двух прямых.

Рассмотрим подготовительные задачи:

1) Пусть взяты точки *A, B и C* на прямой так, что между точками *A* и *B* расстояние равно 5, а между *B и C* равно 3. Чему равно расстояние между *A* и *C*?

Решение: Расположение точек относительно одной прямой в данной задаче создает неоднозначность, так как мы не знаем, как они расположены относительно друг друга. Поэтому рассмотрим шесть возможных вариантов расположения этих точек относительно друг друга: *A, B и C* или *C, B, A; A, C, B* или *B, C, A; C, A, B* или *B, A, C.*

Пусть точка B лежит между точками A и C (см. рис. 2а), то $AC = AB + BC = 5 + 3 = 8$, то отрезок $AC = 8$.

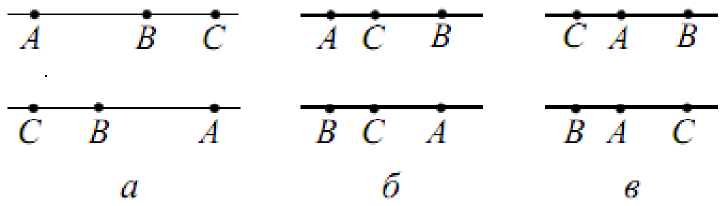

рис. 2

Пусть точка C лежит между A и B (см. рис.2б), то $AB = BC + AC$ и тогда $AC = 5 - 3 = 2$.

Случай, изображенный на рис. 2в невозможен, так как тогда по условию $CB < AB$.

Ответ: 8 или 2.

В следующем типе задач перебор сокращается, когда в условии дается дополнительная информация о взаимном положении точек (левее, правее, деление отрезка в заданном отношении).

2) На прямой взяты точки *A, B и C* так, что точка *B* расположена правее точки A и $\frac{AB}{BC} = 3$. Найти отношение $\frac{AC}{AB}$.

В этой задаче благодаря дополнительной информации о расположении точек в условии мы приходим к рассмотрению трех вариантов: *A, B, C; A, C, B и C, A, B.*

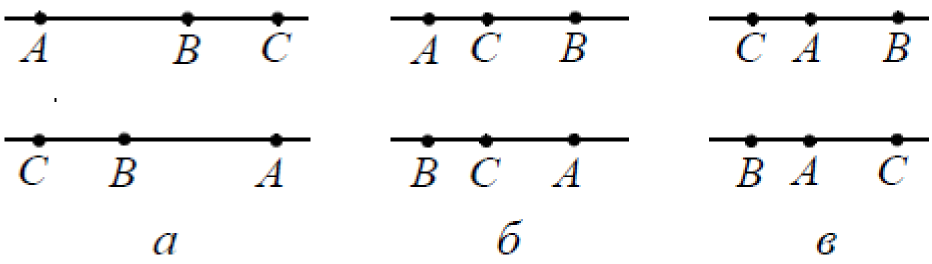

рис. 3

Ответ: $\frac{4}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

В большинстве случаев на экзаменах или олимпиадах в задачах точки «привязаны» к более сложной конфигурации и от их расположения зависит перебор вариантов для построения чертежа.

3) Чему равна площадь треугольника, если две его стороны равны 25 и 17, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 15.

Неоднозначность в условии состоит в том, что не указано, принадлежит ли основание высоты, опущенной из В на третью сторону, самому отрезку или его продолжению. Рассмотрим два варианта построения (см. рис. 4).

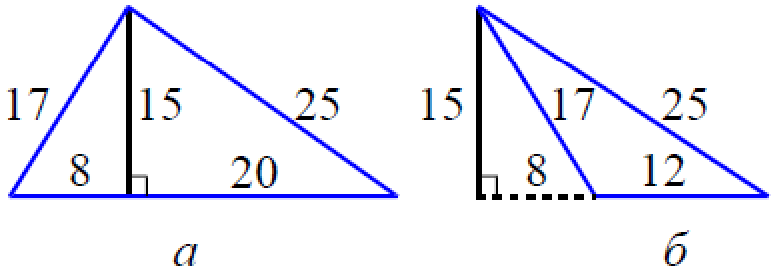

рис. 4

Ответ: 210 или 90.

4) Чему равен периметр трапеции, боковые стороны которой равны 25 и 17, высота 15, а одно из оснований равно 12.

В данной задаче можно построить только два варианта чертежа трапеции *ABCD* и *ABCD₁* (см. рис. 5).

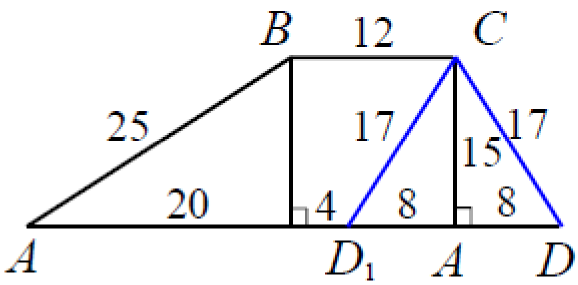

рис. 5

Ответ: 78 или 94.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике *ABC* отрезок *MK* с концами на сторонах *AB* и *BC* параллелен основанию *AC*. Чему равна длина отрезка *MK*, если $AC = 10$, а точка *M* делит сторону *AB* в отношении 2:3.

2. В параллелограмме *ABCD* точка *M* принадлежит диагонали *BD* и делит ее в отношении 1:2. Чему равна площадь параллелограмма *ABCD*, если $S_{ABCM} = 60$.

3. (МИОО, 2010). Через середину стороны AB квадрата *ABCD* проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, $\tan\alpha = 3$. Чему равна площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна 4.

4. (ЕГЭ, 2012). В треугольнике *ABC* известны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые *AB* и *BC* соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок *KL* касается окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Чему равна длина отрезка KL.

5. (ЕГЭ, 2012). В треугольнике $\angle C = 60°$. На сторонах *AB* и *AC* как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются в точках A и D так, что *DB:DC=1:3*. Чему равен угол *A* треугольника *ABC*.

Ответы: 1) 4 или 6. 2) 180 или 90. 3) 2 или 10. 4) $\frac{14}{9}$ или 7. 5) arccos$\frac{2\sqrt{7}}{7}$ или arccos$\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

Расположение точек вне прямой

В этом параграфе рассмотрим примеры расположения точки и прямой; примеры расположения двух точек в одной полуплоскости или в разных относительно данной прямой; примеры взаимного расположения одной или нескольких точек и двух параллельных прямых. Также они связаны некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

Рассмотрим подготовительные задачи:

1) (ФЦТ 2010) На стороне *BC* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *BPC*. Найти высоту треугольника *ADP*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Рассмотрим два варианта построения, удовлетворяющих условию задачи.

1. Точки P и A находятся в одной полуплоскости относительно прямой BC (см. рис. 6*а*). В равнобедренном треугольнике DPC имеем $\angle PCD = 30^0$ и $\angle PDC = \angle DPC = 75^0$. Тогда из треугольника ADP находим $\angle ADP = 15°$ и высоту AH.

$$AH = AD \cdot sin15^0 = \sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{16}} =$$

$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

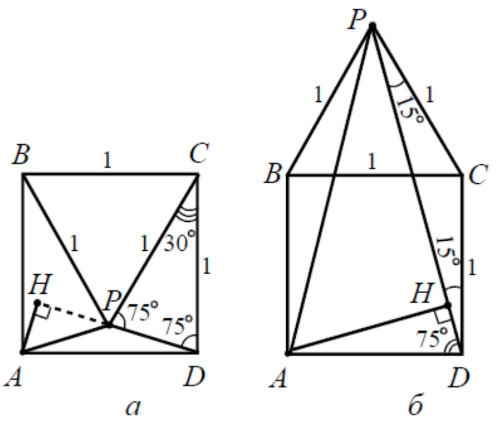

рис. 6

2. Точки P и A лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC (см. рис. 6б). Как и в предыдущем случае рассмотрим углы равнобедренного треугольника DPC, затем по определению синуса в треугольнике ADP найдем:

$$AH = AD \cdot sin\angle HAD = AD \cdot sin\angle PDA = 1sin75^0 = \sqrt{\frac{1-cos150°}{2}} =$$

$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}.}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}.}{4}$

2) Окружность радиуса 2 касается стороны AC прямоугольного треугольника ABC в точке C. Чему равно расстояние от вершины B до центра окружности, если известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$.

Здесь возможно два варианта построения, которые удовлетворяют условию задачи, так как центр окружности может лежать в одной или другой полуплоскости относительно прямой *AC* (см. рис. 7).

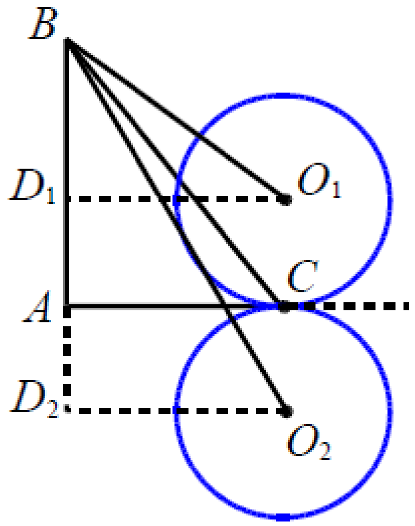

рис. 7

По теореме Пифагора легкой найти гипотенузы получившихся треугольников.

Ответ: 5 или $\sqrt{65}$.

3) Концы отрезка находятся от прямой на расстоянии 6 и 14. Чему равно расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

Неоднозначность возникает потому, что в условии не указано, лежат ли концы отрезка в одной полуплоскости или в разных относительно данной прямой. Рассмотрим два варианта построения (см. рис. 8).

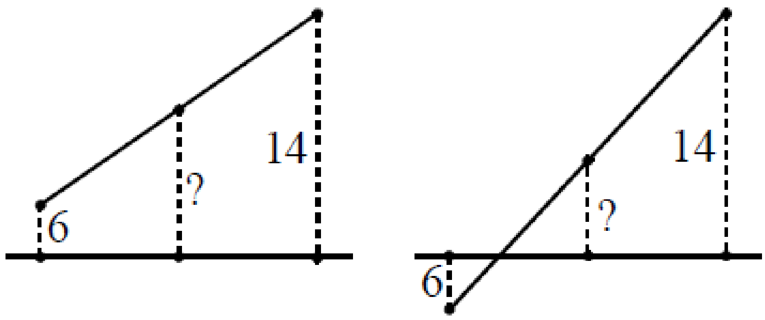

рис. 8

Ответ: 10 или 4.

Задачи для самостоятельного решения

1) В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Чему равна длина диагонали трапеции?

2) Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника *ABCD*. Длина касательной, проведенной к окружности из точки C, равна 3. Чему равна длина стороны *BC*, если известно, что $AB = 1$.

3) Дан параллелограмм *ABCD*, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^0$. Окружность с центром в точке *O* касается биссектрисы угла *D* и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Чему равна площадь четырехугольника *ABOD*?

4) В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований 30 и 10. Чему равен радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

5) (МИОО, 2011). Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина *C*, на другой – основание *AB* равнобедренного треугольника *ABC*. Известно, что $AB = 10$. Чему равно расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC*, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника *ABC*.

Ответы: 1) $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$. 2) $\frac{3(\sqrt{5}+1)}{2}$ или $\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$. 3) $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ или $\frac{5\sqrt{3}}{4}$. 4) 2 или 12. 5) $\frac{\sqrt{793}}{3}$ или $\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

Выбор обозначений вершин многоугольника

В данных задачах в условии допускается различное решение вследствие вариативности буквенного обозначения вершин многоугольника.

Рассмотрим подготовительную задачу:

Дан параллелограмм *ABCD*, один из углов которого равен $60°$. Точки *E* и *F* являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой *EF* от параллелограмма *ABCD*, равна *S*. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат точки *E*, *F* и *C*.

Данная задача позволяет построить и рассмотреть четыре различных чертежа (см. рис. 9).

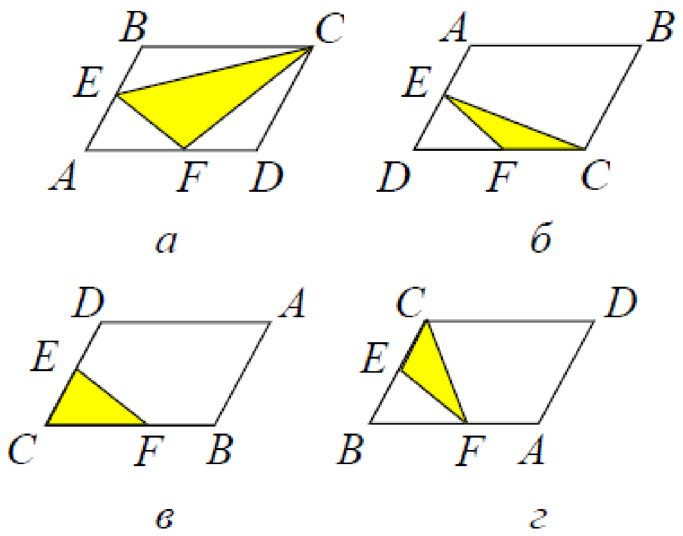

рис. 9

Ответ: *S* или *3S*.

Задачи для самостоятельного решения

1) Высота $CK = 12$ параллелограмма *ABCD*. Чему равна диагональ *AC*, если известно, что $AD = 15$, $CD = 14$, а точка *K* принадлежит прямой *AB*.

2) (ЕГЭ, 2012). Боковые стороны $KL = 10$ и $MN = 26$ трапеции $KLMN$. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник AML.

Ответы: 1)$\sqrt{623}$ или 13. 2) 2 или 6.

Выбор некоторого элемента фигуры

К задачам этого типа относят такие задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано какого конкретно из имеющихся. В случае линейного элемента это может быть, например, сторона многоугольника или длина отрезка перпендикуляра, опущенного на сторону фигуры, и т.д. В случае углового элемента это может быть, например, какой-то из углов фигуры.

Рассмотрим подготовительные задачи:

1) Чему равна площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны 30^0, если одна из его сторон равна 6.

В задаче два варианта, в первом основание треугольника равно 6, во втором 6 равна боковая сторона.

Ответ: $9\sqrt{3}$ или $12\sqrt{3}$.

2) Чему равна площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 10, а один из углов равен 30^0.

В данной задаче также 2 варианта, в одном варианте 30^0 равен угол при основании, в другом сама вершина.

Ответ: 25 или $25\sqrt{3}$.

3) Площадь треугольника ABC равна 8. MN – средняя линия. Чему равна площадь треугольника CMN.

В данной задаче можно рассмотреть три средние линии по одной для каждой стороны (см. рис. 10), которые равны.

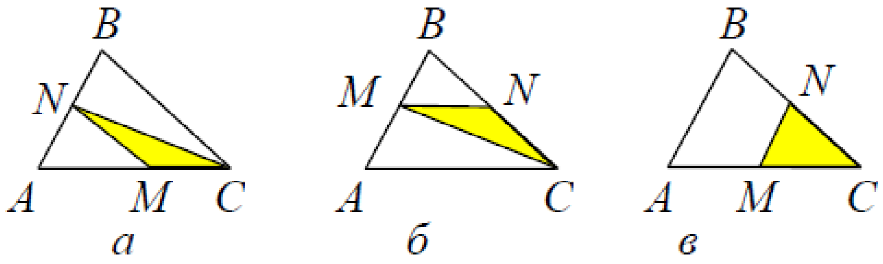

Рис 10

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

1) (МИОО, 2011). Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5:8, считая от основания. Чему равен радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

2) В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Чему равен радиус второй окружности.

3) В ромбе $ABCD$ $AB = 2$ и один из углов равен 60^{0} проведены высоты CM и DK. Чему равна длина отрезка MK.

4) (ЕГЭ, 2012). Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной равной 4, углом 120^{0}. Внутрь треугольника вписаны две равные окружности таким образом, что окружности касаются друг друга, каждая окружность касается двух сторон треугольника. Чему равен радиус окружностей.

5) (ЕГЭ, 2012). В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности.

Ответы: 1) 15 или 24. 2) 0,75 или $\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}$. 3) 1 или 2, или $\sqrt{7}$. 4) $\sqrt{3}-1$ или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. 5) 1:3 или 5:1.

Выбор плоской фигуры

Неоднозначность в данных задачах связана с неопределенностью выбора отношения площадей фигур, выбором подобных треугольников и т.д.

1) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Чему равна длина отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

Решение. Пусть искомый отрезок $EF = x$ (см. рис. 11).

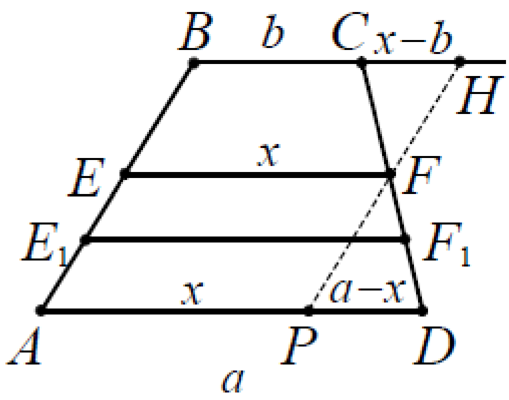

рис. 11

1. Тогда $\frac{S_{BEFC}}{S_{ADFE}} = \frac{2}{3}$, отсюда имеем

$$\frac{S_{BEFC}}{S_{ADFE}} = \left(\frac{b+x}{2}h_1\right):\left(\frac{a+x}{2}h_2\right) = \frac{2}{3},$$

где h_1 и h_2 высоты этих трапеций соответственно.

Отсюда $\frac{h1}{h2} = \frac{2(a+x)}{3(b+x)}$, (*)

,где h_1 и h_2 высоты этих трапеций.

Через точку *F* проведем отрезок *PH* параллельно *AB*. Тогда треугольники *PFD* и *HFC* подобны и справедливо равенство

$\frac{CH}{PD} = \frac{h_1}{h_2}$ или $\frac{x-b}{a-x} = \frac{h_1}{h_2}$.

По соотношению (*):

$$\frac{x-b}{a-x} = \frac{2(a+x)}{3(b-x)}.$$

Решая полученное уравнение относительно переменной x, получаем $3(\mathrm{x}^2 - \mathrm{b}^2) = 2(\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2), 5\mathrm{x}^2 = 2\mathrm{a}^2 + 3\mathrm{b}^2$,

$$x = \sqrt{\frac{2a^2 + 3b^2}{5}}.$$

2. Случай, когда площади трапеций *AEFD* и *BCFE* относятся как 2:3, решается аналогично. В этом случае площади трапеций *BCFE* и *AEFD* относятся как 3:2.

Ответ: $\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$ или $\sqrt{\frac{3a^2+2b^2}{5}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1) (ЕГЭ, 2011). Через вершину *B* правильного шестиугольника *ABCDEF* проведена прямая, пересекающая диагональ *CF* в точке *K*. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 2:3. Чему равно отношение *CK:KF*.

2) (ФИПИ, 2011). Точка *H* – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке *M*. Чему равно *HM*.

Ответы: 1) $\frac{17}{13}$ или $\frac{10}{7}$. 2) $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.

1.2. МНОГОВАРИАНТНОСТЬ ЗАДАЧИ КАК РЕЗУЛЬТАТ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ В ЗАДАНИИ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ФИГУР

В данных задачах неоднозначность возникает в тех случаях, когда не указана конфигурация рассматриваемых фигур, то есть однозначно не определено их взаимное расположение. Рассмотрим следующие случаи, при которых трактовка условия приводит к неоднозначности в задаче:

- взаимного расположения прямолинейных фигур;
- взаимного расположения окружностей;

Взаимное расположение прямолинейных фигур

Рассмотрим подготовительные задачи:

1) Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты построения на стороне *AB*:

а) равностороннего треугольника *ABP*;

б) квадрата *ABPQ*.

2) Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты расположения параллелограмма *MNPQ*, вписанного в данный треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника.

3) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$ и $AC = 12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Чему равно это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.

Решение. Проведем высоту *BD* равнобедренного треугольника *ABC*. Прямые, параллельные сторонам BA и BC, действительно, образуют треугольник с основанием, лежащим на прямой *AC*. Но вершина этого треугольника может располагаться по разные стороны относительно *AC*.

1. Пусть прямые *EF* || *BC* и *EG* || *AB* (см. рис. 12).

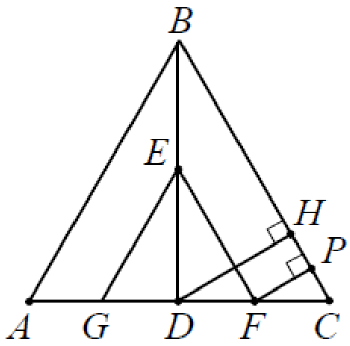

рис. 12

Тогда $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Пусть $DF = x$, а $DE = y$, тогда по подобию треугольников *BDC* и *EDF* и площади треугольника *GFE*, площадь которого дана по условию, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{8}{y} = \frac{6}{x} \\ xy = 12 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Отсюда следует, что *F* середина отрезка *CD* и *DF=3* и *FC=3*. DH и FP – перпендикуляры на прямую BC. Так как высота DH в прямоугольном треугольнике BDC равна

$$\frac{BD * DC}{BC} = \frac{8 * 6}{10} = 4{,}8;$$

то из подобия треугольников *DHC* и *FPC* получаем

$$FP = \frac{DH * FC}{DC} = \frac{4{,}8 * 3}{6} = 2{,}4.$$

2. Второй случай расположения прямых *EF* и *EG* (см. рис. 13), решается аналогичным образом и приводит к ответу 7,2.

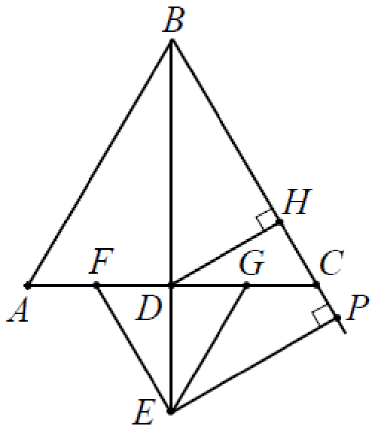

рис. 13

Альтернативные варианты расположения прямых не удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 2,4 или 7,2.

Задачи для самостоятельного решения

1) Ромб, одна из вершин которого совпадает с вершиной острого угла, а три другие лежат на сторонах, вписан в прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4. Чему равна площадь ромба.

2) (ФЦТ, 2010). На стороне *CD* квадрата *ABCD* со стороной, равной 1, построен равносторонний треугольник *CPD*. Чему равна высота треугольника *ABP*, проведенная из вершины *A*.

Ответы: 1) $\frac{45}{16}$ или $\frac{80}{27}$. 2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Взаимное расположение окружностей

Взаимное расположение окружностей можно различать по внешнему признаку (касающиеся, пересекающиеся, непересекающиеся) или по внутреннему признаку (взаимное расположение центров окружностей относительно общей касательной, общей хорды и т.д.).

Благодаря динамическим геометрическим программам («Живая Геометрия», «Geogebra» или «Wingeom») можно интерактивно рассмотреть всевозможные случаи взаимного расположения окружностей: двух окружностей, двух окружностей с общей касательной, двух окружностей с общей хордой. При перемещении одной окружности относительно другой видно наличие общих точек (одна, две, ни одной), возможные варианты касания окружностей (внешнее, внутреннее), варианты касательных (внешние, внутренние), расположение центров касательных относительно общей хорды, общей касательной.

Рассмотрим подготовительные задачи:

1) К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Чему равно расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15.

Ответ: $6\sqrt{6}$ или 12.

2) Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B – точки касания). Чему равно расстояние между точками A и B.

Ответ: $\frac{24\sqrt{7}}{11}$, или $\frac{16\sqrt{57}}{11}$, или 4,8.

Расположение центров окружностей относительно общей касательной

В данных задачах может присутствовать две и более окружностей, которые касаются одной прямой, но не указано расположение центров этих окружностей относительно этой прямой. Поэтому данная прямая может быть для них внутренней или внешней.

1) Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно a, причем $R>r$ и $a>r+R$. Чему равно расстояние между точками касания.

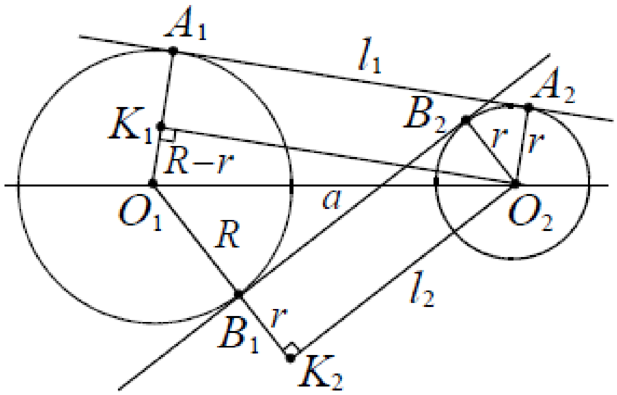

рис. 14

Решение. Пусть O_1 – центр окружности радиуса R, O_2 – центр окружности радиуса r, A_1A_2 и B_1B_2 – внешняя и внутренняя касательные соответственно (см. рис. 14). Из центра меньшей окружности опустим перпендикуляры O_2K_1 и O_2K_2 на радиус O_1A_1 и продолжение радиуса O_1B_1 соответственно.

Рассмотрим прямоугольные треугольники $O_1K_1O_2$ (гипотенуза $O_1O_2=a$, катет $O_1K_1=R\text{-}r$) и $O_1K_2O_2$ (гипотенуза $O_1O_2=a$, катет $O_1K_2=R+r$). По теореме Пифагора для этих треугольников получим:

$$l1 = A_1A_2 = \sqrt{a^2-(R-r)^2}\text{(длина внешней касательной);}$$

$$l2 = B_1B_2 = \sqrt{a^2-(R+r)^2}\text{(длина внутренней касательной).}$$

Ответ: $\sqrt{a^2-(R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2-(R+r)^2}$.

Расположение центров окружностей относительно их общей точки касания

Тип данных задач подразумевает взаимное расположение пары окружностей с неуказанным типом касания (внешний или внутренний, см. рис. 15).

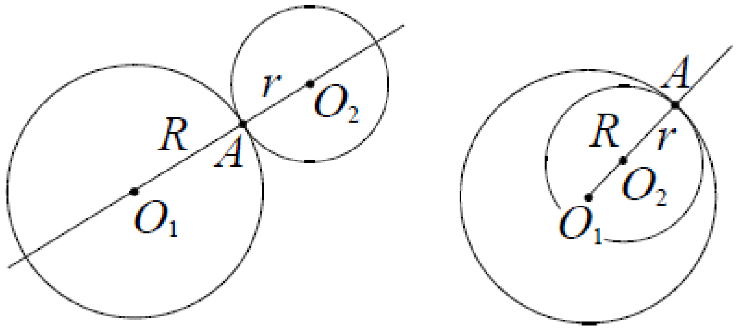

рис. 15

Перед тем как решать данные задачи необходимо рассмотреть следующие факты:

При любом способе касания точка касания и центры окружностей лежат на одной прямой.

При внешнем касании центры окружностей расположены на линии центров по разные стороны от точки касания, при внутреннем – по одну сторону.

Расстояние между центрами касающихся окружностей радиусов R и r *(R≥r)* равно $R+r$ при внешнем касании и $R-r$ при внутреннем.

1) (ЕГЭ, 2010). Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке С. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Чему равно BC?

Решение. Неоднозначность в условии заключается в то, что не указан тип касания окружностей (внешнее или внутреннее), поэтому возникает пара чертежей удовлетворяющих условию.

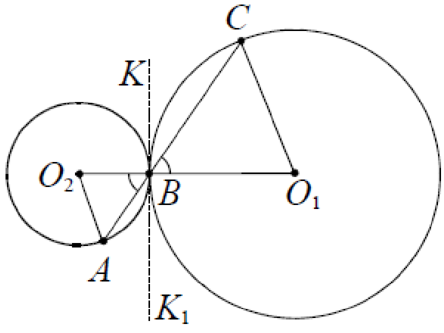

рис. 16

1. Если окружности касаются внешним образом, то проведем через точку B общую касательную KK_1 (она перпендикулярна линии центров, см. рис. 16).

Так как треугольники AO_2B и CO_1B равнобедренные и $\angle O_2BA=\angle O_1BC$, то они подобны по первому признаку подобия. Для подобных треугольников AO_2B и O_1BC можем записать:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BO_2}{BO_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда $BC=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}3\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$

2. Окружности касаются внутренним образом (см. рис. 17). В этом случае при исходных числовых данных задача не имеет решения.

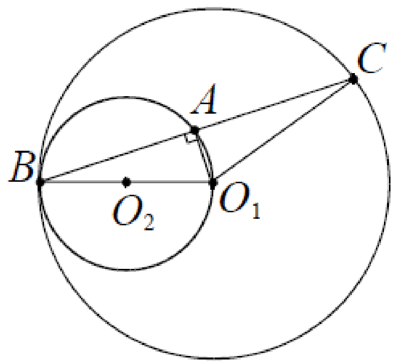

рис. 17

Рассмотрим прямоугольный треугольник CO_1A. $AC=3\sqrt{2}$, $CO1=4$. Этого не может быть так, как катет AC больше гипотенузы CO_1.

Расположение центров окружностей относительно общей хорды

В условии задач этого типа фигурируют две пересекающиеся окружности, но не указано расположение центров окружностей относительно их общей хорды (см. рис. 18 и 19).

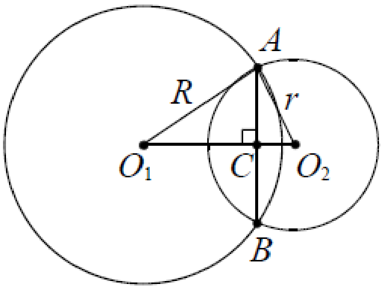

рис. 18

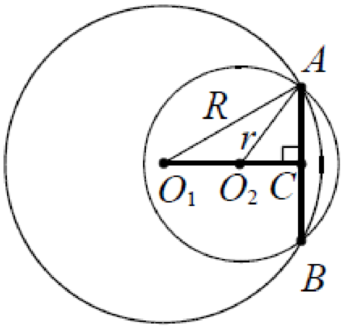

рис. 19

При решении подобных задач полезно вспомнить следующие факты:

- Пересекающиеся окружности в точках A и B имеют общую хорду AB.
- Общая хорда перпендикулярна линии центров и делится ею пополам.

1) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Чему равно расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

Решение. Отрезок AB – общая хорда данных окружностей. Неоднозначность возникает потому, что не уточнено расположение центров окружностей относительно AB. Поэтому возникает два чертежа.

1. Пусть центры окружностей лежат по разные стороны от их общей хорды AB. (см. рис. 18). Линия центров O_1O_2 перепендикулярна хорде AB и делит ее в точке пересечения C пополам. Это следует из равенства треугольников O_1AO_2 и O_1BO_2 по трем сторонам и совпадения оснований высот, опущенных из точек A и B. Тогда из прямоугольных треугольников O_1AC и O_2AC соответственно получаем:

$$O_1C = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

и

$$O_2C = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6.$$

Искомое расстояние между центрами равно $O_1O_2 = O_1C + O_2C = 15 + 6 = 21$.

2. Пусть центры окружностей лежат по одну сторону от хорды *AB* (см. рис. 19). Аналогично поступая, находим $O_1O_2 = O_1C - O_2C = 15 - 6 = 9$.

Ответ: 21 или 9.

Расположение центров окружностей относительно хорды большей окружности

В условии задач следующего типа фигурируют две окружности, одна из которых расположена внутри другой и касается хорды окружности большего радиуса (см. рис. 20).

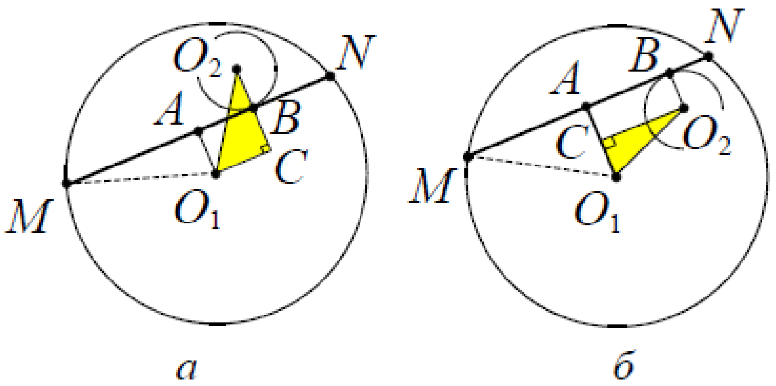

рис. 20

Полезно вспомнить следующее:

Вычисления в этой задаче сводятся к применению теоремы Пифагора в треугольнике O_1O_2C, при этом расстояние O_1A находится из теоремы Пифагора для треугольника MAO_1 (см. рис. 20).

1) Окружности радиусов 20 и 3 касаются внутренним образом. Хорда *AB* большей окружности касается меньшей окружности в точке *M*. Чему равны длины отрезков *AM* и *MB*, если $AB = 32$.

Решение. Пусть точка *N* – середина хорды *AB*, тогда расстояние от центра *O* окружности радиуса 20 до хорды *AB* равно

$$ON = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Рассмотрим два случая.

1. Центры O и O_1 окружностей расположены по разные стороны относительно хорды AB (см. рис. 21), $O_1M = 3$.

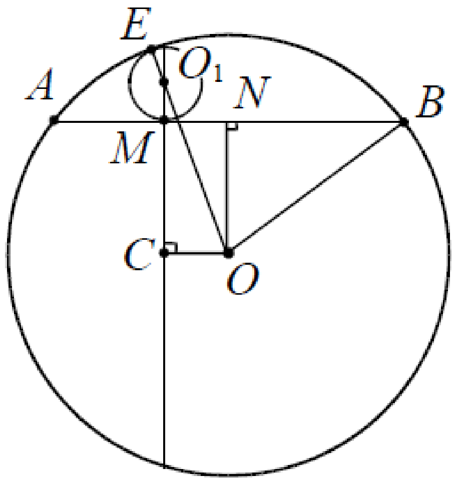

рис. 21

Продолжив перпендикуляр O_1M к хорде AB за точку M и опустив на него перпендикуляр из центра O, получим прямоугольный треугольник OO_1C, в котором $OO_1 = 20 - 3 = 17$, $O_1C = O_1M + MC = O_1M + ON = 3 + 12 = 15$ и $OC = MN$. Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем:

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Тогда

$$AM = AN - MN = 16 - 8 = 8$$

и

$$MB = MN + NB = 8 + 16 = 24$$

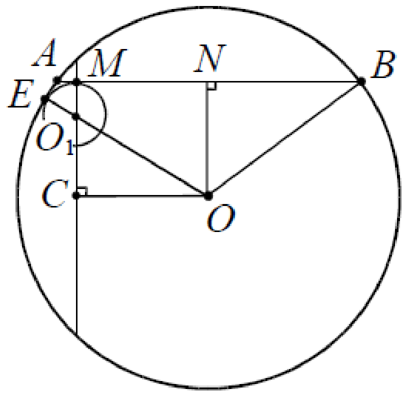

рис. 22

2. Центры O и O_1 окружностей расположены по одну сторону относительно хорды AB (см. рис. 22). Тогда из теоремы Пифагора для треугольника OO_1C получаем

$$OC = \sqrt{OO_1^2 - O_1C^2} = \sqrt{17^2 - 9^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$AM = AN - MN = 16 - 4\sqrt{13}$$

$$MB = MN + NB = 4\sqrt{13} + 16.$$

В данной задаче можно рассмотреть еще два случая, когда точка касания M расположена правее точки N. В этом случае ответы будут $AM = 24$ и $MB = 8$ или $AM = 16 + 4\sqrt{13}$ и $MB = 16 - 4\sqrt{13}$.

Ответ: 24 и 8; $16 + 4\sqrt{13}$ и $16 - 4\sqrt{13}$.

Расположение точек касания окружности и прямой

Рассмотрим опорную задачу.

Опорная задача: Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен $2\sqrt{Rr}$.

1) На стороне AB угла ABC, равного 30°, взята такая точка D так, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Чему равен радиус окружности, проходящей через точки ш, D и касающейся прямой BC.

Решение. Центр искомой окружности O – точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AD и перпендикуляра к прямой BC, восставленного из точки касания E (см. рис. 23) окружности и прямой. Возможны два варианта положения окружности. В первом случае окружность касается луча BC, во втором точка касания E_1 лежит на продолжении луча BC за точку B.

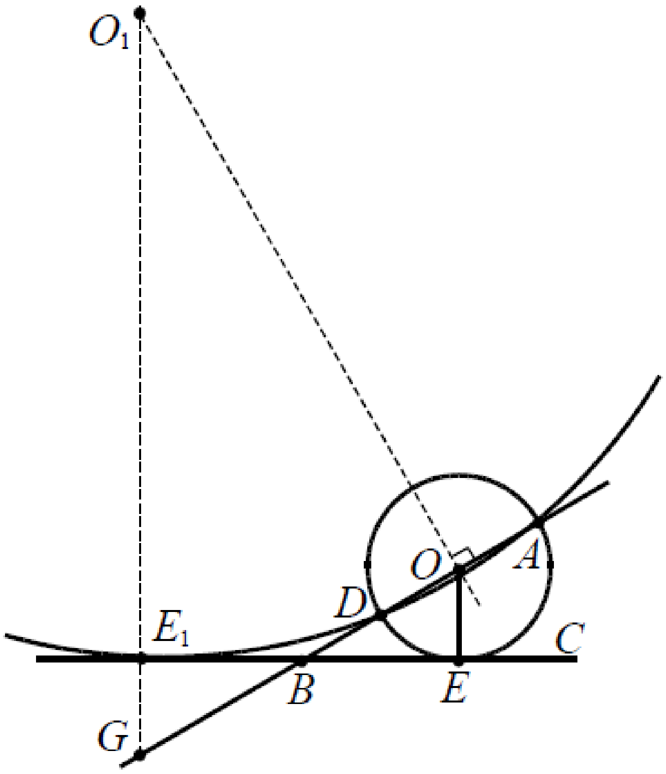

рис. 23

1. Пусть точка касания лежит на луче BC. Тогда по теореме о касательной и секущей имеем

$BE^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3$, откуда $BE = \sqrt{3}$.

В треугольнике BDE получаем $DE = 1$. Так как $BD = DE$, то треугольник BDE – равнобедренный и $\angle BED = 30^0$. Поскольку этот угол образован касательной BE и хордой DE, то дуга окружности DE равна 60^0. Следовательно, искомый радиус окружности равен хорде $DE = 1$. Тогда центр O окружности совпадает с серединой отрезка AD.

2. В случае, когда точка касания лежит на продолжении луча BC за точку B (см. рис. 23), аналогично имеем:

$BE_1^2 = BD \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3$, откуда $BE_1 = \sqrt{3}$. Сравнивая прямоугольные треугольники BE_1G и BEO, находим $BG = BO = 2$, $GE_1 = OE = 1, \angle BGE_1 = 60^0$. Из прямоугольного треугольника GO_1O, в котором $\angle OGO_1 = 60^0, GO = 4$, находим $GO_1 = 8$. Радиус второй окружности равен $GO_1 - GE_1 = 8 - 1 = 7$.

Ответ: 1 или 7.

Задачи для самостоятельного решения

1) Чему равен радиус окружности, вписанной в угол *MKN* равный *2arcsin0,6* и касающейся окружности, радиуса 4 также вписанной в угол *MKN*.

2) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Чему равен радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

3) Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, другая $6r$. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Чему равна длина хорды AB, если $AB=2BC$.

4) Две окружности радиусов 1 и 5 касаются. Чему равен радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

5) (ЕГЭ, 2012). Точка O – центр правильного шестиугольника *ABCDEF* со стороной 7. Чему равен радиус окружности касающейся окружностей, описанных около треугольников *BOD, DOF, BOF*.

6) В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB = 24$. Точка C на хорде AB так, что $AC:BC = 1:2$. Чему равен радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

7) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Чему равен радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

Ответы: 1) 1 и 16. 2) $\frac{17}{2}$ или $\frac{41}{10}$. 3) 2r$\sqrt{21}$ или 6r. 4) 7,5 или $\frac{20}{9}$. 5) 14 или 6. 6) $\frac{8}{3}$ или $\frac{32}{3}$. 7) 1,44 или 36.

1.3. СООТВЕТСТВИЕ ЗАДАЧ И УУД

В соответствии с функциями УУД выделены три группы: 1) познавательные; 2) регулятивные; 3) коммуникативные. Согласно стандарту, УУД должны являться целью обучения и формироваться при освоении учениками каждой предметной области с учётом её специфики.

При изучении планиметрических задач с неоднозначностью в условии формируются следующие УУД:

Познавательные: выбор наиболее эффективных способов решения задач; анализ; установление причинно-следственных связей; доказательство; построение логической цепи рассуждений; выведение следствий.

Регулятивные: планирование; определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата; составление плана и последовательности действий.

Коммуникативные: совместная работа в группах по поиску решения и его обсуждению; постановка вопросов – инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации; умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка.

Рассмотрим задачу:

Периметр равнобедренной трапеции равен 136. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 9:25. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Чему равно отношение площади этого треугольника к площади трапеции *(смысловое чтение)*.

Анализ

Построим трапецию и вписанную в нее окружность *(умение создавать модели для решения учебных задач)*.

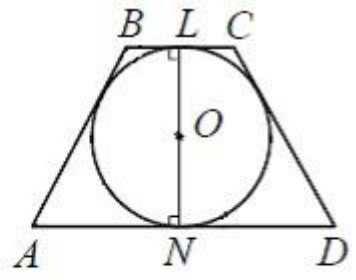

рис. 24

Задается вопрос учащимся: «Через какую вершину проходит прямая?» *(умение анализировать и делать выводы)*

Учащиеся отвечают, что в условии задачи не указано конкретно через какую вершину трапеции проходит данная прямая, из-за этого возникает неоднозначность.

А сама трапеция условием задачи задается однозначно.

Задается вопрос учащимся: «В любой ли четырехугольник можно вписать окружность?»

Учащиеся отвечают, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он выпуклый и суммы его противоположных сторон равны *(указывать какая информация (о чем) требуется для решения поставленной задачи)*.

Поэтому (см. рис. 1) $AB + CD = BC + AD = 68$. Так как по условию трапеция – равнобедренная, то $AB = CD = 34$. Поэтому, зная отношение в котором делится боковая сторона, определяем, что длины отрезков равны 9 и 25.

Так как нужно найти отношение площади отсеченного треугольника к площади трапеции, найдем площадь последней *(выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности)*.

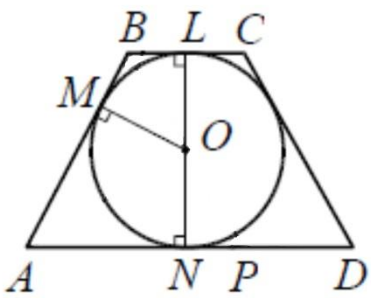

рис. 25

Чтобы найти площадь трапеции, нужно знать длины оснований. Пусть точки M, L и N – точки касания окружности боковой стороны AB и основания BC и AD соответственно (см. рис. 25). Тогда $AM = 25, MB = 9$. Так как отрезок LN перпендикулярен основаниям трапеции и точки L и N – середины BC и AD соответственно, а $MB = BL = 9$ и $AM = AN = 25$ (как отрезки касательных, проведенные из одной точки), то $BC = 2BL = 18, AD = 2AN = 50$.

Пусть высота трапеции равна h. Тогда

$$S(ABCD) = \frac{BC + AD}{2} h = 34h$$

(строят логические рассуждения и делают выводы)

Построение

Возникает два чертежа.

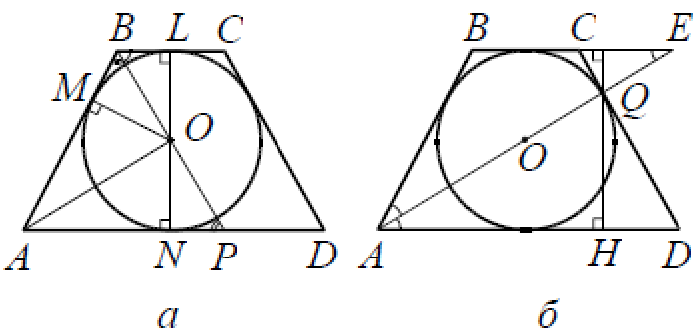

рис. 26

Рассмотрим теперь возможные случаи расположения указанной в условии задачи прямой *(умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач)*.

Решение

1-й случай. Пусть прямая проходит через центр окружности и вершину *B* (см. рис. 26а) и пересекает прямую *AD* в точке *P*.

Задается вопрос учащимся: «Как найти площадь искомого треугольника?»

Учащиеся отвечают, чтобы найти площадь искомого треугольника ABP нужно знать высоту треугольника и основание, к которому проведена данная высота.

Найдем основание *AP* треугольника *ABP*. Рассмотрим треугольники OBL и NOP. Они прямоугольные и равны по катету ($LO = ON$ — радиус окружности) и прилежащему углу (*OBL* и *NOP* — вертикальные). Отсюда следует, что $BL = NP = 9$. Нам известно, что $AN = 25$. Тогда:

$$S(ABP) = \frac{1}{2}(AN + NP)h = 17h$$

Следовательно, $\frac{S(ABP)}{S(ABCD)} = \frac{1}{2}$.

Поскольку трапеция равнобедренная, то для прямой, проходящей через вершину *C*, получим тот же результат *(оценка правильности выполнения учебной задачи)*.

2-й случай. Пусть теперь указанная в условии прямая проходит через центр окружности и вершину *A* (см. рис. 26б) и пересекает прямую *BC* в точке *E*, а боковую сторону *CD* в точке *Q*.

Задается вопрос учащимся: «Как найти площадь искомого треугольника *AQD*?»

Учащиеся отвечают, чтобы найти его площадь нужно знать высоту QH. Ее можно найти из подобия треугольников *AQD* и *CEQ*.

Треугольник ABE — равнобедренный ($\angle BEA = \angle BAE = \angle EAD$ — накрест лежащие углы) и $AB = BE = 34$. Тогда $CE = BE - BC = 34 - 18 = 16$.

Треугольники AQD и CEQ подобны с коэффициентом подобия k, равным $\frac{CE}{AD} = \frac{8}{25}$. Так как высоты этих треугольников, опущенные из точки Q, относятся друг к другу с коэффициентом k и в сумме равны h, то высота QH треугольника AQD равна $\frac{25}{33}h$. Тогда

$S(AQD) = \frac{1}{2}AD * \frac{25}{33}h = \frac{625}{33}h.$

Следовательно, $\frac{S(AQD)}{S(ABCD)} = \frac{625}{33*34} = \frac{625}{1122}$.

Тот же результат получится и для прямой, проходящей через вершину D. *(оценка правильности выполнения учебной задачи)*

Ответ: $\frac{1}{2}$ или $\frac{625}{1122}$.

Если учащийся *работает в группе* по решению сложных задач он учится *организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками*. В процессе решения таких задач возникают сложные моменты, которые разрешаются *формулировкой аргументов и отстаиванием своего мнения* по такому пути решения задачи.

При работе у доски, решая такие задачи, учащемуся нужно будет пояснять свое решение, поэтому он должен *грамотно и осознанно использовать речевые средства, уметь грамотно записывать решение*.

Проанализировав задачи, мы сделали вывод, что все УУД одинаково в них раскрыты. Таким образом, задачи формируют общую тенденцию по их формированию.

УУД, формируемые при изучении данных задач:

- умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач;
- оценка правильности выполнения учебной задачи;
- умение анализировать, строить логические рассуждения и делать выводы;
- умение создавать модели для решения учебных задач;

- смысловое чтение;
- умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками;
- работа в группе;
- умение формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение;
- умение грамотно и осознанно использовать речевые средства, уметь грамотно записывать решение;
- указывать какая информация (о чем) требуется для решения поставленной задачи;
- выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности.

ГЛАВА 2. МЕТОДИКА РАБОТЫ С ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ С НЕОДНОЗНАЧНОСТЬЮ В УСЛОВИИ

2.1. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЗАДАЧ

Сравним и проанализируем материал школьных учебников по геометрии за 7–9 класс, касающийся планиметрических задач с неоднозначностью в условии.

А.В. Погорелов «Геометрия 7-11» (рассмотрим курс 7 -9)

Данный курс разбит на 14 параграфов:

7 класс:

1) Основные свойства простейших геометрических фигур.
2) Смежные и вертикальные углы.
3) Признаки равенства треугольников.
4) Сумма углов треугольника.
5) Геометрические построения.

8 класс:

1) Четырёхугольники.
2) Теорема Пифагора.
3) Декартовы координаты на плоскости.
4) Движение.
5) Векторы.

9 класс:

1) Подобие фигур.
2) Решение треугольников.
3) Многоугольники.
4) Площади фигур.

В каждом параграфе учебника представлена теория в нескольких пунктах, завершающаяся контрольными вопросами и заданиями. Ни в одном из параграфов данного учебника многовариантные задачи не встречаются.

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк и И.И. Юдин «Геометрия 7-9»

Учебник разбит на 14 глав:

1. Начальные геометрические сведения.
2. Треугольники.
3. Параллельные прямые.
4. Соотношения между сторонами и углами треугольника.
5. Четырёхугольники.
6. Площадь.
7. Подобные треугольники.
8. Окружность.
9. Векторы.
10. Метод координат.
11. Скалярное произведение векторов.
12. Длина окружности и площадь круга.
13. Движения.
14. Начальные сведения из стереометрии.

В каждой главе представлено несколько параграфов, каждый из которых в свою очередь также разбит на несколько пунктов. В конце каждый параграф предоставляет практические задачи и вопросы. После каждой главы предлагаются вопросы для повторения по всей главе и дополнительные задачи. Удалось выявить несколько задач с неоднозначностью в условии:

№32 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $\mathrm{AB} = 12$ см, $\mathrm{BC} = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

№33 Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

№75 Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

№80 Известно, что $\angle AOB = 35^0, \angle \mathrm{BOC} = 50^0$. Чему равен угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж с помощью линейки и транспортира.

№81 Угол $hk = 120^0$, а угол $hm = 150^0$. Чему равен угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертеж.

№228 Чему равны углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 40^0; б) 60^0; в) 100^0.

№277 Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3см, а между параллельными прямыми a и c равно 5см. Чему равно расстояние между прямыми b и c.

№401 Чему равен периметр прямоугольника *ABCD*, если биссектриса угла *A* делит сторону: а) *BC* на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) *DC* на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

№656 Хорда *AB* стягивает дугу, равную 115^0, а хорда *AC* – дугу в 43^0. Чему равен угол *BAC*.

Проанализировав эти учебники можно сделать вывод, что данные задачи представлены в недостаточном количестве, чтобы сформировать практические умения у учащихся. Актуальность решения планиметрических задач с неоднозначность в условии для формирования УУД высока, поэтому учащимся и преподавателям приходится подбирать необходимый материал самостоятельно.

Подобрав задачи из разных источников, мы распределили их по темам и обнаружили следующую закономерность: тип таких задач в основном встречается в темах «Треугольник» (подобие, площадь) и «Окружность».

1. Начальные геометрические сведения.

1) Пусть взяты точки *A, B и C* на прямой так, что между точками *A* и *B* расстояние равно 5, а между *B и C* равно 3. Чему равно расстояние между *A* и *C*?

2) На прямой взяты точки *A, B и C* так, что точка *B* расположена правее точки *A* и $\frac{AB}{BC} = 3$. Чему равно отношение $\frac{AC}{AB}$.

2. Соотношения между сторонами и углами треугольника.

1) В треугольнике *ABC* отрезок *MK* с концами на сторонах *AB* и *BC* параллелен основанию *AC*. Чему равна длина отрезка *MK*, если $AC = 10$, а точка *M* делит сторону *AB* в отношении 2:3.

2) Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты построения на стороне *AB*:

а) равностороннего треугольника *ABP*;

б) квадрата *ABPQ*.

3) Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Рассмотреть возможные варианты расположения параллелограмма *MNPQ*, вписанного в данный треугольник так, что одна из его вершин совпадает с вершиной треугольника, а три другие лежат на сторонах треугольника.

3. Четырёхугольники.

1) Чему равен периметр трапеции, боковые стороны которой равны 25 и 17, высота 15, а одно из оснований равно 12.

4. Площадь.

1) Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на диагонали *BD* и делит ее в отношении 1: 2. Чему равна площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна 60.

2) В параллелограмме *ABCD* один из углов равен 60. Точки *E* и *F* являются серединами смежных сторон, образующих острый угол. Площадь треугольника, отсекаемого прямой *EF* от параллелограмма *ABCD*, равна *S*.

Чему равна площадь треугольника, вершинами которого служат точки *E*, *F* и *C*.

3) Вычислить площадь треугольника, если две его стороны равны 25 и 17, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 15.

4) Высота $CK = 12$ параллелограмма *ABCD*. Чему равна диагональ *AC*, если известно, что $AD = 15$, $CD = 14$, а точка *K* принадлежит прямой *AB*.

5) Чему равна площадь равнобедренного треугольника, углы при основании которого равны 30^0, если одна из его сторон равна 6.

6) Чему равна площадь равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 10, а один из углов равен 30^0.

7) Площадь треугольника *ABC* равна 8. *MN* – средняя линия. Чему равна площадь треугольника *CMN*.

8) (МИОО, 2010). В прямоугольнике *ABCD* $AB = 2$,$BC = \sqrt{3}$. Точка *F* на прямой *AB* выбрана так, что $\angle AFD = \angle DFC$. Чему равно AF.

9) Чему равна площадь треугольника, если две его стороны равны 25 и 17, а высота, проведенная к третьей стороне, равна 15.

10) В параллелограмме *ABCD* точка *M* принадлежит диагонали *BD* и делит ее в отношении 1:2. Чему равна площадь параллелограмма *ABCD*, если площадь четырехугольника *ABCM* равна 60.

11) (ФЦТ 2010) На стороне *BC* квадрата *ABCD* построен равносторонний треугольник *BPC*. Чему равна высота треугольника *ADP*, проведенную из вершины *A*, если известно, что сторона квадрата равна 1.

5. Подобные треугольники.

1) (МИОО, 2010). Через середину стороны *AB* квадрата *ABCD* проведена прямая, пересекающая прямые *CD* и *AD* в точках *M* и *T* соответственно и образующая с прямой *AB* угол α, $\tan\alpha = 3$. Чему равна площадь треугольника *BMT*, если сторона квадрата *ABCD* равна 4.

2) Концы отрезка отстоят от прямой на расстоянии 6 и 14. Чему равно расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

3) В ромбе *ABCD* $AB = 2$ и один из углов равен 60^0 проведены высоты *CM* и *DK*. Чему равна длина отрезка *MK*.

4) Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Чему равна длина отрезка этой прямой, заключенного внутри трапеции.

5) (ЕГЭ, 2011). Через вершину *B* правильного шестиугольника *ABCDEF* проведена прямая, пересекающая диагональ *CF* в точке *K*. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как 2:3. Чему равно отношение *CK:KF*.

6) (ФИПИ, 2011). Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку Н проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке *M*. Чему равно *HM*.

7) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC = 10$ и $AC = 12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Чему равно это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.

8) Ромб, одна из вершин которого совпадает с вершиной острого угла, а три другие лежат на сторонах, вписан в прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4. Чему равна площадь ромба.

9) Концы отрезка находятся от прямой на расстоянии 6 и 14. Чему равно расстояние от этой прямой до середины данного отрезка.

10) (ФЦТ, 2010). На стороне *CD* квадрата *ABCD* со стороной, равной 1, построен равносторонний треугольник *CPD*. Чему равна высота треугольника *ABP*, проведенную из вершины *A*.

6. Окружность.

1) (ЕГЭ-2011). Периметр равнобедренной трапеции равен 136. Известно, что в эту трапецию можно вписать окружность, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 9:25. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Чему равно отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

2) (ЕГЭ, 2012). В треугольнике *ABC* известны стороны $AB = 5, BC = 6, AC = 7$. Окружность, проходящая через точки *A* и *C*, пересекает прямые *AB* и *BC* соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Чему равна длина отрезка KL.

3) (ЕГЭ, 2012). В треугольнике $\angle C = 60°$. На сторонах *AB* и *AC* как на диаметрах построены окружности. Они пересекаются в точках *A* и *D* так, что *DB:DC=1:3*. Чему равен угол *A* треугольника *ABC*.

4) Окружность радиуса 2 касается стороны *AC* прямоугольного треугольника *ABC* в точке *C*. Чему равно расстояние от вершины *B* до центра окружности, если известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$.

5) В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Чему равна длина диагонали трапеции?

6) Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины *A* и *B* прямоугольника *ABCD*. Длина касательной, проведенной к окружности из точки *C*, равна 3. Чему равна длина стороны *BC*, если известно, что $AB = 1$.

7) Дан параллелограмм *ABCD*, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^0$. Окружность с центром в точке *O* касается биссектрисы угла *D* и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Чему равна площадь четырехугольника *ABOD*?

8) В трапеции длины боковых сторон равны 16 и 12, а длины оснований 30 и 10. Чему равен радиус окружности, касающейся меньшего основания трапеции и прямых, содержащих ее боковые стороны.

9) (МИОО, 2011). Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой – основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Чему равно расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

10) (ЕГЭ, 2012). Боковые стороны $KL = 10$ и $MN = 26$ трапеции $KLMN$. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник AML.

11) (МИОО, 2011). Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5:8, считая от основания. Чему равен радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

12) В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Чему равен радиус второй окружности.

13) (ЕГЭ, 2012). Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной равной 4 углом 120°. Внутрь треугольника вписаны две равные окружности таким образом, что окружности касаются друг друга, каждая окружность касается двух сторон треугольника. Чему равен радиус окружностей.

14) (ЕГЭ, 2012). В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности.

15) К двум окружностям радиусов 6 и 3 проведена общая касательная. Чему равно расстояние между точками касания, если расстояние между центрами окружностей равно 15.

16) Окружности радиусов 3 и 8 касаются друг друга. Через центр одной из них проведены две прямые, каждая из которых касается другой окружности (точки A и B – точки касания). Чему равно расстояние между точками A и B.

17) Прямая касается окружностей радиусов R и r. Известно, что расстояние между их центрами равно а, причем $R>r$ и $a>r+R$. Чему равно расстояние между точками касания.

18) (ЕГЭ, 2010). Окружности радиусов 2 и 4 касаются в точке B. Через точку B проведена прямая, пересекающая второй раз меньшую окружность в точке A, а большую – в точке С. Известно, что $AC = 3\sqrt{2}$. Чему равно BC.

19) Окружности радиусов 10 и 17 пересекаются в точках A и B. Чему равно расстояние между центрами окружностей, если $AB = 16$.

20) Окружности радиусов 20 и 3 касаются внутренним образом. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке M. Чему равны длины отрезков AM и MB, если $AB = 32$.

21) На стороне AB угла ABC, равного 30°, взята такая точка D так, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Чему равен радиус окружности, проходящей через точки ш, D и касающейся прямой BC.

22) Чему равен радиус окружности, вписанной в угол MKN равный $2arcsin0,6$ и касающейся окружности, радиуса 4 также вписанной в угол MKN.

23) Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Чему равен радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

24) Расстояние между центрами двух окружностей равно $10r$. Одна из окружностей имеет радиус $5r$, другая $6r$. Некоторая прямая пересекает меньшую окружность в точках A и B и касается большей в точке C. Чему равна длина хорды AB, если $AB=2BC$.

25) Две окружности радиусов 1 и 5 касаются. Чему равен радиус третьей окружности, касающейся первых двух окружностей и прямой, проходящей через центры данных.

26) (ЕГЭ, 2012). Точка O – центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Чему равен радиус окружности касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD, DOF, BOF.

27) В окружности, радиус которой равен 15, проведена хорда $AB = 24$. Точка C на хорде AB так, что $AC:BC = 1:2$. Чему равен радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.

28) Окружности радиусов 4 и 9 касаются внешним образом, лежат по одну сторону от некоторой прямой и касаются этой прямой. Чему равен радиус окружности, касающейся каждой из двух данных и той же прямой.

2.2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ

Тематическое планирование по учебнику Атанасяна Л.С. в 8 классе выделяет тему: «Окружность» Глава VIII. На изучение данной главы предоставляется 17 часов.

	Глава VIII. Окружность	17 ч
§1	Касательная к окружности	3
§2	Центральные и вписанные углы	4
§3	Четыре замечательные точки треугольника	3
§4	Вписанная и описанная окружности	4
	Решение задач	2
	Контрольная работа № 5	1

Разобрать задачи данного типа полезно в пункте: «Решение задач». Они позволят сформировать УУД и закрепить материал по теме «Окружность», потому что при решении задач данного типа нужно обладать знаниями и умениями решения задач по всей данной теме. Также данные задачи полезно решать в курсе факультатива, как дополнительного средства закрепления и отработки материала.

Урок 1

Цель: продолжить отработку навыков решения задач по теме «Окружность».

Ход урока

I. Проверка домашнего задания.

…

II. Решение задач.

Сегодня мы будем закреплять материал, решая задачи с неоднозначностью в условии. Вспомним, почему они так называются?

Учащиеся отвечают, что в таких задачах есть неопределенность, которая приводит к нескольким чертежам, а также, зачастую, к нескольким ответам.

Задача №1

В окружность радиуса $2\sqrt{5}$ вписана трапеция с основаниями 8 и $2\sqrt{11}$. Чему равна длина диагонали трапеции? *(смысловое чтение).*

Анализ

Учащиеся помнят, что трапеция, вписанная в окружность, является равнобедренной.

Им задается вопрос: « В чем возникает неопределённость?»

Учащиеся отвечают, что не определен центр окружности относительно вписанной трапеции. И может быть три случая.

Первый: центр окружности лежит вне трапеции.

Второй: центр окружности лежит внутри трапеции.

Третий: центр окружности лежит на основании трапеции, но в данной задаче этого не может быть, потому что диагональ трапеции равна $2 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$, а основания трапеции равны 8 и $2\sqrt{11}$. *(строят логические рассуждения и делают выводы)*

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*

1-й случай: пусть центр окружности лежит вне трапеции (рис. 27).

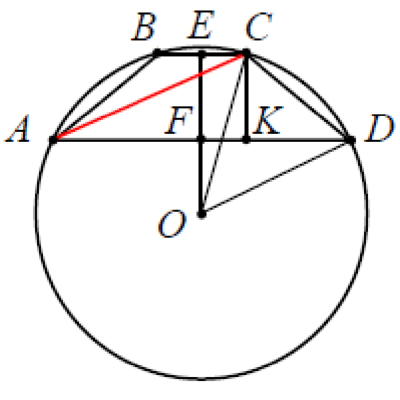

рис. 27

Решение

Задается вопрос учащимся: «Как найти искомую диагональ *AC*?»

Учащиеся отвечают, что её можно найти из прямоугольного треугольника ACK, где CK – высота трапеции. Чтобы найти высоту трапеции нужно построить прямую, проходящую через центр окружности и перпендикулярную хорде, она делит эту хорду пополам, то BE = EC = $\sqrt{11}$ и $AF = FD = 4$.

$CK = EF$. Из прямоугольных треугольников *OEC* и *OFD* легко найти *OE* и *OF*, разность которых даст нам искомую EF. $OE = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{11})^2} = 3$ и

$OF = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4^2} = 2$ соответственно.

Высота трапеции *ABCD* равна длине отрезка $EF = OE - OF = 3 - 2 = 1$. В прямоугольном треугольнике *ACK* нам известны катет *CK*, а катет *AK* равен $AK = \frac{AD-BC}{2} + BC = \frac{AD-BC+2BC}{2} = \frac{AD+BC}{2} = 4 + \sqrt{11}$, т.е. средней линии трапеции.

Находим диагональ *AC* из прямоугольного треугольника *ACK*:

$AC = \sqrt{(4+\sqrt{11})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$.

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*

2-й случай: пусть центр окружности лежит внутри трапеции (рис. 28).

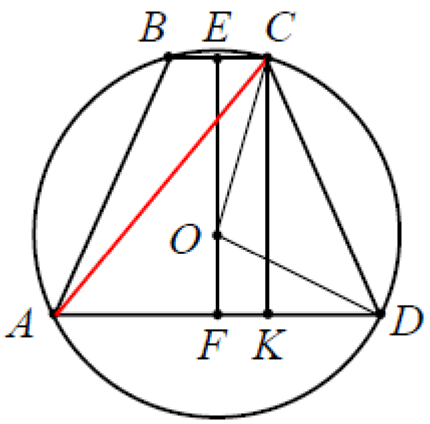

рис. 28

Решение

В этом случае аналогично строим высоту трапеции. Высота трапеции ABCD равна длине отрезка $EF = OE + OF = 3 + 2 = 5$. Находим диагональ AC из прямоугольного треугольника ACK

$$AC = \sqrt{(4+\sqrt{11})^2 + 5^2} = 2\sqrt{13+2\sqrt{11}}.$$

Ответ: $2\sqrt{7+2\sqrt{11}}$ или $2\sqrt{13+2\sqrt{11}}$.

Задача №2

Окружность с диаметром, равным $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника ABCD. Длина касательной, проведенной к окружности из точки C, равна 3. Чему равна длина стороны BC, если известно, что $AB = 1$ *(смысловое чтение)*.

Анализ

Задается вопрос учащимся: «Как расположена точка C относительно окружности?»

Учащиеся отвечают: «Так как проведена касательная из точки C к окружности, то эта точка лежит вне окружности, а значит и вся сторона CD прямоугольника ABCD тоже лежит вне окружности.»

После можно задать вопрос: «Однозначно строится прямоугольник ABCD?» или же сразу спросить «Как располагается сторона AB?».

Учащиеся сами или с помощью данных наводящих вопросов догадываются, что сторона AB может располагаться или по одну сторону от центра окружности со стороной CD, или по разные стороны от центра окружности *(умение анализировать и делать выводы)*.

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*

Учащиеся строят два возможных варианта чертежей.

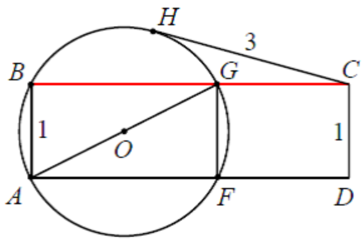

рис. 29

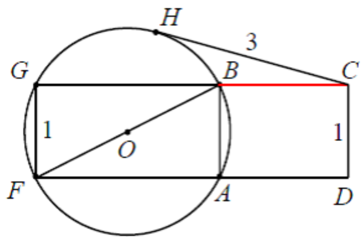

рис. 30

(умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных задач)

Решение

1-й случай: пусть окружность пересекает стороны BC и AD прямоугольника ABCD в точках G и F соответственно, и проведена касательная CH к окружности (рис. 31).

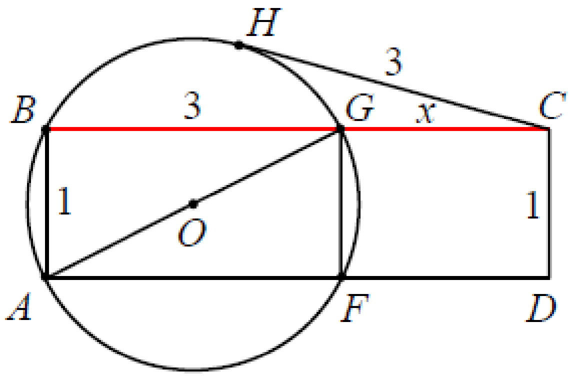

рис. 31

Задается вопрос учащимся: «Как найти искомую сторону BC?»

Учащиеся отвечают, что искомая сторона $BC = BG + CG$ и нужно узнать длины BG и CG.

Из прямоугольного треугольника ABG, используя теорему Пифагора, несложно найти

$BG = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$ ($AB = 1$ (по усл) и $AG = \sqrt{10}$ (диаметр).

Задается вопрос: «Как найти CG?»

Для ответа на данный вопрос нужно знать теорему о секущей и касательной. Учащиеся должны ее знать, либо можно было в начале урока повторить теоремы и свойства, которые могли бы нам сегодня пригодиться при решении задач, что существенно ускорит процесс решения задач на уроке.

Теорема о касательной и секущей: Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

Пусть $CG = x$, тогда по теореме о секущей и касательной имеем

$CG \cdot CB = CH^2$ или $x(x + 3) = 32$. Уравнение $x2 + 3x - 9 = 0$ имеет один положительный корень $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$. Итак, $BC = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} + 3 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ *(оценка правильности решения учебной задачи).*

2-й случай: пусть окружность пересекает продолжения сторон BC и AD прямоугольника ABCD в точках G и F соответственно, и проведена касательная к окружности CH (рис. 32).

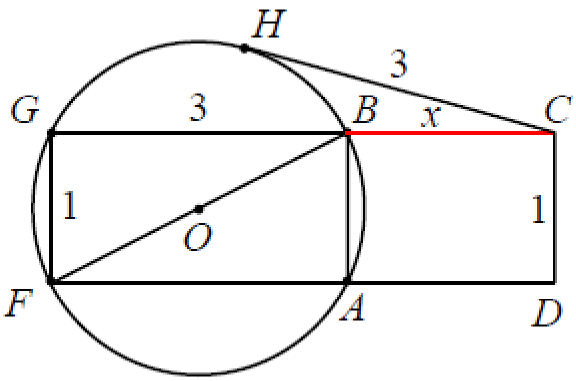

рис. 32

Решение второго случая аналогично решению первого. Его учащиеся могут сделать самостоятельно с последующей проверкой *(самостоятельно контролировать свои действия по решению учебной задачи).*

Сторона $BC = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$.

Задача №3

Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60^0$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Чему равна площадь четырехугольника $ABOD$? *(смысловое чтение).*

Анализ

Построение параллелограмма ABCD и биссектрисы угла D однозначно. Так как мы знаем, что мы решаем задачу с неоднозначностью попробуем понять, в чем она заключается здесь? Если мы посмотрим на предыдущие задачи, то мы можем увидеть какая особенность была у них, именно, в неоднозначности.

Учащиеся анализируют предыдущие задачи и отвечают, что в первой задаче было не определено расположение центра окружности относительно трапеции, а второй задаче было не определено расположение прямоугольника относительно центра окружности.

Правильно, если быть более точным, то не определено расположение центра окружности относительно прямых, каких?

Учащиеся отвечают, что это основания трапеции и стороны прямоугольника.

Эта задача похожа на предыдущие, поэтому легко догадаться, что здесь тоже будет не определено расположение центра окружности относительно чего-то, а чего именно?

Учащиеся отвечают, что это биссектриса угла D *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности* *указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*

Отсюда возникает два возможных расположения окружности относительно биссектрисы угла D.

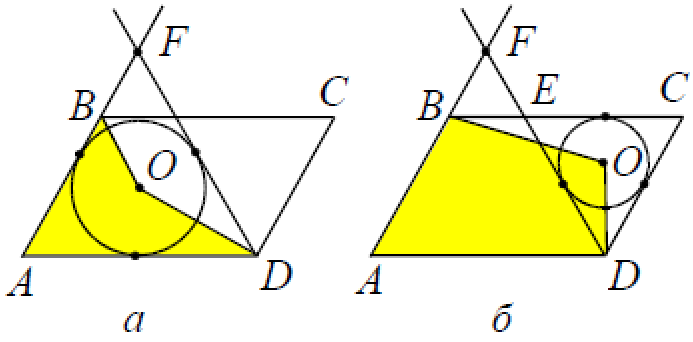

рис. 33

Решение

1-й случай. Окружность касается сторон AB и AD, образующих ∠A=60^0. Окружность вписана в треугольник AFD, где точка F является точкой пересечения прямых AB и биссектрисы угла D (см. рис. 33а).

Рассмотрим треугольник AFD, он правильный, так как ∠B=∠D=120^0, следовательно, ∠ADF=60^0. Отсюда следует, что все углы треугольника AFD равны 60^0. По условию $BC = AD = 5$.

«Как найти площадь искомого четырехугольника?»

Чтобы найти площадь искомого четырехугольника ABOD, можно представить ее как сумму площадей двух треугольников – ABO и AOD. Площади этих треугольников легко найти, зная радиус окружности, который будет их высотой *(выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности, указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

Радиус, вписанной в правильный треугольник окружности, равен

$r = \frac{AD\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Тогда

$S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{AOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6}(3+5) = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$

2-й случай.

Окружность касается сторон CE и CD, образующих ∠C=60^0. Окружность вписана в треугольник ECD (см. рис. 33б).

Рассмотрим треугольник ECD, он правильный, так как ∠B=∠D=120^0, следовательно, ∠EDC=60^0. Отсюда следует, что все углы треугольника ECD равны 60^0. По условию $AB = CD = 3$.

«А как в данном случае найти площадь искомого четырехугольника?»

Чтобы найти площадь искомого четырехугольника ABOD, можно представить ее как разность площадей данного параллелограмма ABCD и суммы площадей двух треугольников – BOC и DOC. Площади этих треугольников легко найти, зная радиус окружности, который будет их высотой *(выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи)*.

Радиус, вписанной в правильный треугольник окружности, равен

$r = \frac{CD\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Тогда

$S_{ABOD} = S_{ABCD} - (S_{BOC} + S_{DOC}) = 3 \cdot 5 \cdot sin60° - (\frac{1}{2} \cdot BC \cdot r + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot r) =$

$15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(3+5) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(15 - \frac{1}{2} \cdot 8\right) = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

При решении данных задач мы рассмотрели примеры расположения прямой и точки (задача 3); примеры взаимного расположения одной точки и двух параллельных прямых (задача 1, 2). При этом точки могут располагаться в одной или разных полуплоскостях и связанны некоторым условием (например, принадлежат одной окружности, лежат на одном перпендикуляре и т.д.).

Урок 2

Цель: продолжить отработку навыков решения задач по теме «Окружность».

Ход урока

I. Проверка домашнего задания.

…

II. Решение задач.

На прошлом уроке мы решали задачи, в которых неоднозначность заключалась во взаимном расположении точки и прямой; точки и двух параллельных прямых.

Сегодня мы рассмотрим задачи, в условии которых дана числовая величина элемента фигуры, но не указано какого конкретно из имеющихся. В случае линейного элемента это может быть, например, сторона многоугольника или длина отрезка перпендикуляра, опущенного на сторону фигуры, и т.д. В случае углового элемента это может быть, например, какой-то из углов фигуры.

Задача №1

(МИОО, 2011). Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 24. Точка касания вписанной окружности с боковой стороной делит эту сторону в отношении 5:8, считая от основания. Чему равен радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон *(смысловое чтение).*

Анализ

Рассмотри равнобедренный треугольник ABC, опустим высоту AD на его основание BC, O – центр вписанной окружности, P – точка ее касания с боковой стороной AB (рис. 34) *(умение создавать модели для решения учебных задач)*.

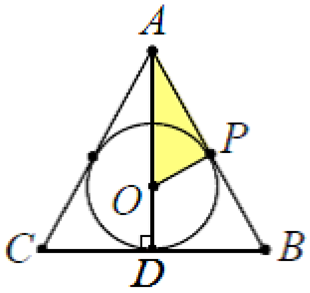

рис. 34

Задается вопрос учащимся: «Можем ли мы, зная отношение, в котором точка касания делит боковую сторону треугольника, определить какие-либо элементы треугольника? Что мы можем сказать о касательных к окружности?»

Учащиеся отвечают, что $BP = BD$, как касательные к окружности и можно принять, что $AP = 8x$, $BP = 5x$. Тогда $BD = 5x$ и $AB = AP + BP = 13x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD. Мы определили все его стороны, поэтому по теореме Пифагора $AB^2 = BD^2 + AD^2 = (13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$, откуда $x = 2$. Значит, $AP = 8 \cdot 2 = 16$, $BD = 5 \cdot 2 = 10$, $AB = 13 \cdot 2 = 26$ *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности, указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

У нас есть три пары сторон, которые мы можем продлить и построить между ними окружность так, чтобы она касалась третьей стороны треугольника.

1-й случай - это равные боковые стороны так, что окружность касается основания;

2-й и 3-й случаи – это одна из боковых сторон и основание, они дают нам равную окружность, так как у нас равнобедренный треугольник *(умение строить логические рассуждения и делать выводы).*

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач).*

У нас получается два чертежа.

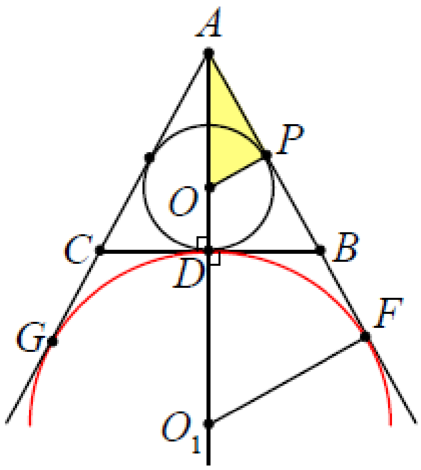

рис. 35

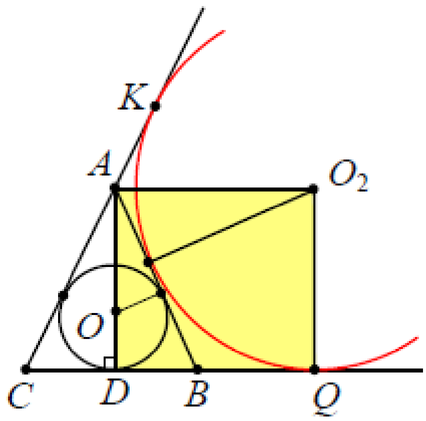

рис. 36

Решение

1-й случай

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом $r_1 = O_1F$ касается продолжений боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно (рис. 35), а также основания BC, D – точка касания.

«Что можно сказать об отрезках BD и BF?»

Учащиеся отвечают, что $BF = BD = 10$, так как это касательные к окружности с центром в O_1.

«Рассмотрим треугольник AO_1F, какой он?»

Прямоугольный, так как радиус O_1F перпендикулярен касательной AF.

«Есть ли ему подобный треугольник на чертеже?»

Учащиеся отвечают, что это треугольник ADB, и что из их подобия можно найти радиус O_1F.

$$\frac{BD}{O_1F} = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AB + BF} = \frac{24}{36} = \frac{10}{O_1F}, \text{откуда } O_1F = \frac{360}{24} = 15.$$

2-й случай

Пусть окружность с центром O_2 и радиуса $r_2 = OQ$ касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K (рис. 36).

«Рассмотрим развернутый угол САК, суммой каких углов он является?»

Учащиеся отвечают, что $\angle CAK = \angle CAD + \angle DAB + \angle BAO_2 + \angle KAO_2$. AD – биссектриса угла АСВ в равнобедренном треугольнике АСВ, поэтому $\angle CAD = \angle DAB$. $\angle BAO_2 = \angle KAO_2$ также равны, так как несложно доказать равенство соответствующих треугольников (по третьему признаку равенства треугольников). Отсюда следует, что

$\angle CAK = 2 \cdot \angle DAB + 2 \cdot \angle BAO_2 = 2(\angle DAB + \angle BAO_2) = 180°$,

следовательно $\angle DAB + \angle BAO_2 = 90°$.

Тогда $ADQO_2$ – прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 24$.

Ответ: 15 или 24.

Задача №2

В равнобедренный треугольник с основанием 12 и боковой стороной 10 вписана окружность. Вторая окружность касается двух сторон треугольника и первой окружности. Чему равен радиус второй окружности *(смысловое чтение).*

Анализ

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

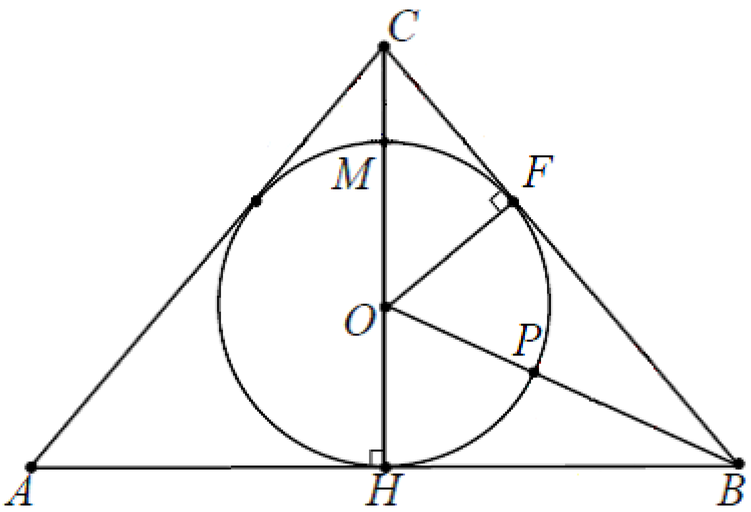

рис. 37

Проведем высоту *CH* равнобедренного треугольника *ABC* на основание *AB*, O – центр вписанной окружности, F – точка ее касания с боковой стороной BC (рис. 37) *(умение создавать модели для решения учебных задач)*.

Задается вопрос учащимся: «Сколько окружностей можно построить так, чтобы они касались двух сторон треугольника и данной окружности с центром в *O*?»

Учащиеся отвечают, что таких окружности может быть три, по одной в каждом угле треугольника, но окружности, касающиеся сторон, образующих равные углы *A* и *B*, равны, поэтому нет смысла рассматривать оба случая.

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*

Строим две окружности, первая с центром в O_1 и касается сторон *CA* и *CB*, *S* – точка ее касания со стороной *CB*, а *M* – точка касания окружностей. Вторая с в O_2 и касается сторон *BC* и *BA*, *N* – точка ее касания со стороной *BA*, а *P* – точка касания окружностей.

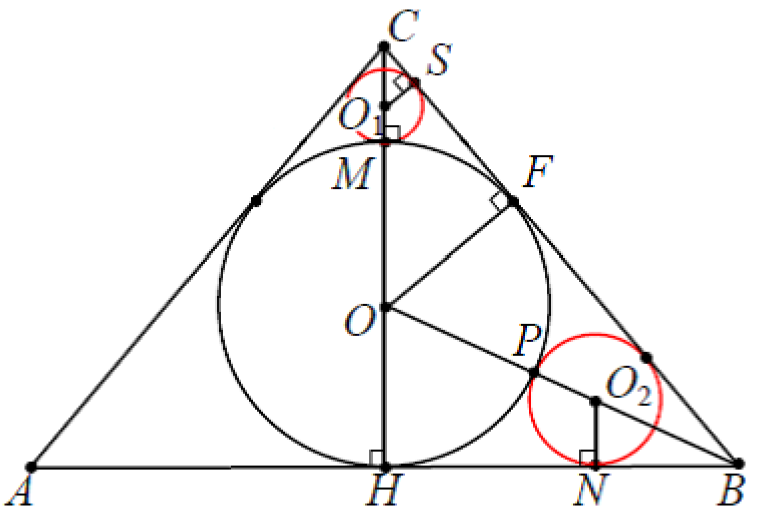

рис. 38

Решение

1-й случай

«Как найти O_1S?»

Учащиеся отмечают, что длину радиуса этой окружности можно найти из подобия треугольников *OC₁S* и *OCF*: $\frac{O_1S}{OF}=\frac{O_1C}{OC}, \frac{r_1}{r}=\frac{CH-r_1-2r}{CH-r}$. Но нужно знать радиус вписанной окружности, который несложно найти по формуле $r=\frac{S}{p}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *CHB*, по теореме Пифагора,

$$CH=\sqrt{CB^2-BH^2}=\sqrt{CB^2-(\frac{AB}{2})^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8=48.$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{48}{\frac{10+10+12}{2}}=\frac{48}{16}=3.$$

$\frac{r_1}{r}=\frac{CH-r_1-2r}{CH-r}=\frac{8-r_1-2\cdot 3}{8-3}=\frac{2-r_1}{5}=\frac{r_1}{3}$, откуда $r_1=\frac{6}{8}=0{,}75$ *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

2-й случай

Второй случай учащиеся могут разобрать самостоятельно с последующей проверкой у доски *(самостоятельно контролировать свои действия по решению учебных задач).*

Учащиеся отмечают, что длину радиуса этой окружности также можно найти из подобия треугольников *OHB* и *O₂NB:* $\frac{O_2B}{OB} = \frac{O_2B}{OB}, \frac{r_2}{r} = \frac{OB - r_2 - r}{OB}$. Но нужно знать сторону *OB*, которую несложно найти по теореме Пифагора: $OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ в прямоугольном треугольнике *BOH*.

$$\frac{r_2}{r} = \frac{OB - r_2 - r}{OB} = \frac{3\sqrt{5} - 3 - r_2}{3\sqrt{5}} = \frac{r_2}{3}, 9\sqrt{5} - 9 - 3r_2 = 3\sqrt{5}r_2, \text{откуда } r_2$$

$$= \frac{9\sqrt{5} - 9}{3\sqrt{5} + 3} = \frac{(9\sqrt{5} - 9)(3\sqrt{5} - 3)}{(3\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 3)} = \frac{135 - 54\sqrt{5} + 27}{45 - 9}$$

$$= \frac{162 - 54\sqrt{5}}{36} = \frac{18(9 - 3\sqrt{5})}{36} = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} = \frac{3(3 - \sqrt{5})}{2}.$$

Ответ: 0,75 или $\frac{3(3-\sqrt{5})}{2}$.

Задача №3

(ЕГЭ, 2012). Дан равнобедренный треугольник с боковой стороной равной 4 углом 120°. Внутрь треугольника вписаны две равные окружности таким образом, что окружности касаются друг друга, каждая окружность касается двух сторон треугольника. Чему равен радиус окружностей *(смысловое чтение).*

Анализ

Задается вопрос учащимся: «Можем ли мы решить треугольник?»

Учащиеся отвечают, что можно. Пусть *BH* высота, опущенная на основание *AC* равнобедренного треугольника *ABC*. Так как $\angle B = 120°$, то $\angle A = \angle C = 30°$; катет *BH* прямоугольного треугольника *BHC*, лежащий против угла $C = 30°$, равен половине гипотенузы BC, значит $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$. Основание $AC = 2 \cdot CH = 2 \cdot \sqrt{BC^2 - BH^2} = 2 \cdot \sqrt{4^2 - 2^2} = 2 \cdot \sqrt{12} = 4\sqrt{3}$ *(умение выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности, указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

«Какие возможные случаи могут быть в этой задаче?»

Учащиеся отвечают, что возможно 3 случая, 2 из которых подобны. Во-первых, обе окружности могут касаться боковой стороны и снования, во-вторых, одна из окружностей может касаться только боковых сторон, а вторая боковой стороны и основания *(умение анализировать и делать выводы).*

Построение

По результатам анализа получаем два рисунка, удовлетворяющих условию задачи (см. рис. 39 и рис. 40).

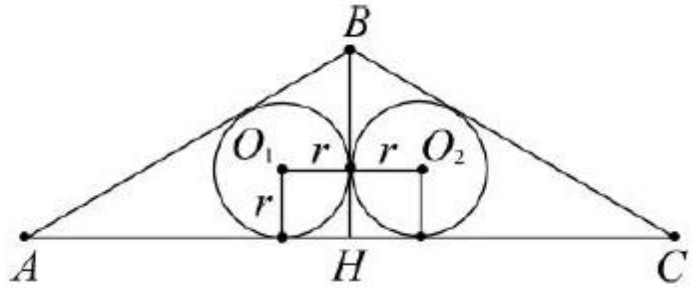

рис. 39

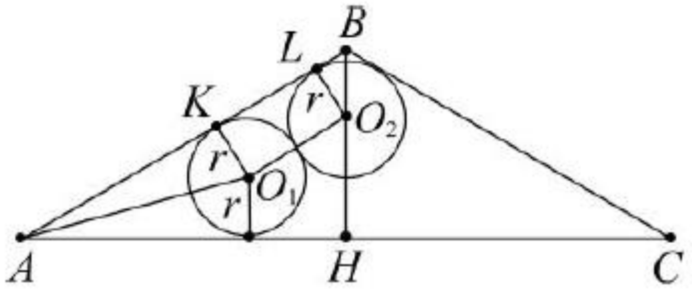

рис. 40

Решение

1-й случай

Пусть каждая из окружностей касается основания и боковой стороны (рис. 39).

«Что можно сказать о высоте *BH*?»

Учащиеся отвечают, что точка касания окружностей лежит на *BH*, так как это равные окружности, вписанные в равнобедренный треугольник. Поэтому обе окружности вписаны в прямоугольный треугольник. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABH: $AB = 4, BH = 2, AH = 2\sqrt{3}$. Радиус, вписанной в прямоугольный треугольник окружности находится по формуле: $r = \frac{AH+BH-AB}{2} = \frac{2\sqrt{3}+2-4}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3} - 1$ *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

2-й случай

Пусть одна из окружностей касается только боковых сторон, а вторая боковой стороны и основания (рис. 40).

«Что можно сказать о четырехугольнике KLO_2O_1?»

Учащиеся отвечают, что это прямоугольник, так как KO_1 и LO_2 перпендикулярны *AB*,равны между собой как радиусы, то и $KL=O_1O_2$. Половинка *KL* и есть искомый радиус.

«$AB=AK+KL+LB$, какие длины мы знаем, а какие длины нет и как их можно выразить?»

Учащиеся отвечают, что $AB = 4$, $KL=2r$, *AK и LB* можно выразить из прямоугольных треугольников AKO_1 *и* LBO_2 соответственно.

Рассмотрим треугольник LBO_2, *LB* – катет, он лежит против угла в 30°, так как *BH* – биссектриса угла $B = 120°$. Значит $2LB = BO_2$. Можно выразить отрезок LB через r, тогда $r^2 = (2LB)^2 - LB^2 = 3LB^2 \rightarrow LB = \sqrt{\frac{r^2}{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AKO_1, так как AO_1 биссектриса, то угол $KAO_1 = 15°$. Отсюда $AK = r \cdot \cot 15°$, $\cot 15° = \frac{(1+\cos 30°)}{\sin 30°} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$, $AK = r(2 + \sqrt{3})$.

$AB = AK + KL + LB = r\left(2 + \sqrt{3}\right) + 2r + \frac{r\sqrt{3}}{3}$,

$4 = r\left(2 + \sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, следовательно

$r = \frac{4}{\frac{12+4\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{3+\sqrt{3}} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

Ответ: $\sqrt{3} - 1$ или $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Задача №4

(ЕГЭ, 2012). В каком отношении точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону, если известно, что радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон, в 7 раз больше радиуса вписанной окружности *(смысловое чтение).*

Анализ

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, опустим высоту BH на его основание AC, O_1 – центр вписанной окружности с радиусом r, K – точка ее касания с боковой стороной AB (рис. 41) *(умение создавать модели для решения учебных задач).*

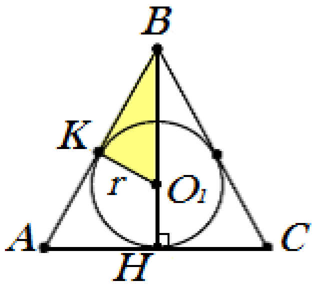

рис. 41

У нас есть три пары сторон, которые мы можем продлить и построить между ними вневписанную окружность с радиусом *7r* так, чтобы она касалась третьей стороны треугольника.

1-й случай - это равные боковые стороны так, что окружность касается основания;

2-й и 3-й случаи – это одна из боковых сторон и основание, они дают нам равную окружность, так как у нас равнобедренный треугольник *(умение строить логические рассуждения и делать выводы)*.

Построение *(умение создавать модели для решения учебных задач)*. У нас получается два чертежа.

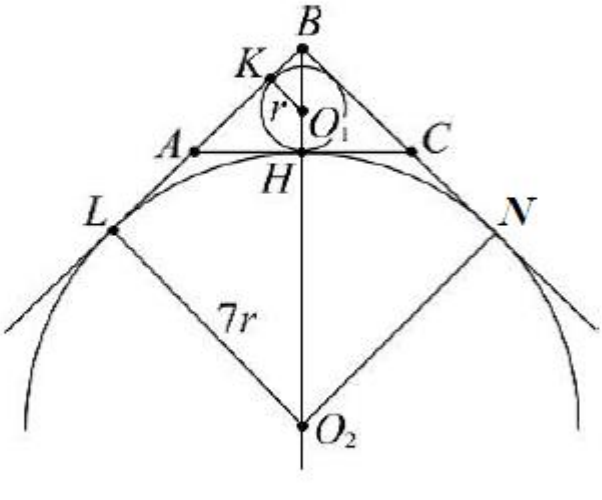

рис. 42

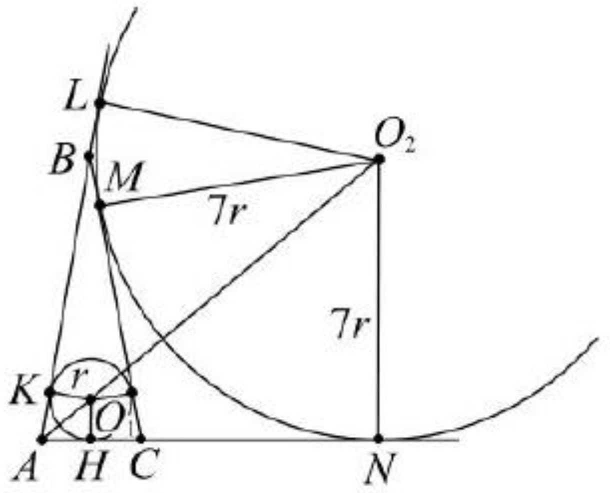

рис. 43

Решение

1-й случай.

Окружность *(O_2,r)* касается боковых сторон в точках *L,N* и основания треугольника *ABC* (рис. 42).

Задается вопрос учащимся: «Какое отношение нам нужно найти?»

Учащиеся отвечают, что нужно найти отношение $\frac{KB}{AK}$.

Задается вопрос учащимся: «Сумме каких отрезков равна сторона *LB*?»

Учащиеся отвечают, что *LB* равна сумме трех отрезков: *AL, AK, BK.*

И пользуясь свойством касательных ее можно определить так: $\begin{cases} AL = AH \\ AH = AK \end{cases} \rightarrow AL = AK$. Поэтому $LB = AL + AK + BK = 2AK + BK$.

«Рассмотрим треугольники BLO_2 и BKO_1, какие они?»

Учащиеся отвечают, что это прямоугольные треугольники, так как LO_2 и KO_1 перпендикулярны общей прямой *BL,* как радиусы. Эти треугольники подобны, так как $\angle LBH -$ общий. Коэффициент подобия равен отношению радиусов вписанной и вневписанной окружности, поэтому, $\frac{LB}{KB} = \frac{2AK+KB}{KB} = \frac{7}{1} \rightarrow 2AK + KB = 7KB, 2AK = 6KB \rightarrow \frac{KB}{AK} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план* *деятельности, указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

2-й случай.

Окружность *(O_2,r)* касается боковых сторон в точках *L*,*M* и основания треугольника *ABC* в точке *N* (рис. 43).

Задается вопрос учащимся: «Какое отношение нам нужно найти?»

Учащиеся отвечают, что нужно найти отношение $\frac{AK}{KB}$.

Задается вопрос учащимся: «Сумме, каких отрезков равна сторона *AL* и *AN*?»

Учащиеся отвечают, что $AL = AB + BL$ и $AN = AC + CN$.

«Пользуясь свойством касательных, проведенных из одной точки, определите равные отрезки».

Учащиеся отмечают, что $CM = CN -$ касательные из точки C, $AL = AN -$ касательны из точки A, $BM = BL -$ касательные из точки B.

«Найдите сумму AL и AN и замените в этом равенстве равные элементы по ранее доказанному.»

Учащиеся получают, что $AL + AN = AB + BL + AC + CN = AB + BM + AC + CM$, или $2AL = AB + (BM + CM) + AC = AB + BC + AC = 2AB + AC$, или $AL = AB + \frac{1}{2}AC = (AK + KB) + AH$, где $AK = AH -$ касательные из точки A. Поэтому $AL = 2AK + KB$.

Вы только что доказали свойство вневписанной окружности, по которому расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением его боковой стороны равно полупериметру.

«Рассмотрим треугольники *ALO_2* и *AKO_1*, какие они?»

Учащиеся отвечают, что это прямоугольные треугольники, так как *LO_2* и *KO_1* перпендикулярны общей прямой *AL*, как радиусы. Эти треугольники подобны, так как $\angle LAO_2 -$ общий. Коэффициент подобия равен отношению радиусов вписанной и вневписанной окружности, поэтому, $\frac{AK}{AL} = \frac{AK}{2AK+KB} = \frac{1}{7} \to 7AK = 2AK + KB, 5AK = KB \to \frac{AK}{KB} = \frac{1}{5}$ *(умение анализировать и делать выводы, выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности, указывать, какая информация требуется для решения поставленной задачи).*

Ответ: $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализировав объем задач, предложенных в школьных учебниках по геометрии, можно сделать вывод, что планиметрические задачи с неоднозначностью в условии практически отсутствуют, поэтому у учащихся возникают сложности с решением задач данного типа, потому что они не привычны для учащихся. Поэтому возникает необходимость работы с задачами данного типа, особенно обращая внимание на тот факт, что задачи данного типа положительно влияют на формирование универсальных учебных действий. Для этого достаточно построить урок таким образом, чтобы обратить внимание на формируемые УУД. Включить в работу простые подготовительные задачи и постепенно увеличивать их сложность. Также полезно переключаться между индивидуальной и групповой работой.

В курсе геометрии основной образовательной программы не предусмотрена работа с подобными задачами, поэтому приходится обращаться к дополнительным источникам. Но спрос на подобные задачи высок на конкурсах, олимпиадах. Также стоит отметить, что тип данных задач раньше имел место на ЕГЭ, и никто не может отрицать того, что данные задачи вновь обретут популярность в рамках проведения экзамена.

Умение решать многовариантные задачи позволяет учащимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, развития умственных способностей, умения извлекать учебную информацию на основе сопоставительного анализа, самостоятельно выполнять различные творческие работы. Они формируют широкий круг универсальных учебных действий.

Значимость работы заключается в том, что в ней представлена классификация многовариантных задач, показано, что если решать подготовительные задачи, необходимые при решении заданий с неоднозначным условием, грамотно строить процесс решения таких задач на уроке, то это качественно влияет на формирование универсальных учебных действий на уроках геометрии в школе. Данная работа может быть полезна для учащихся и учителей, которые могут использовать ее при подготовке к урокам и формированию и проведению элективных курсов по дополнительной подготовке учащихся.

Гипотеза подтвердилась, действительно, продуктивность решения задач по геометрии повышается, если разработать и применить методику решения многовариантных задач в соответствии с формируемыми при этом УУД, а именно, проводить ознакомительную работу на ранних этапах обучения с элементарными подготовительными задачами и выстроить систему наводящих вопросов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Математика. Задача С4. Геометрия. Планиметрия ЕГЭ 2011 [Текст]: Р. К. Гордин ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 148с.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.
3. Готман, Э. Г. Задачи по планиметрии и методы их решения [Текст]: учеб. пособие / Э. Г. Готман. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. – 240с.
4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ [Текст] / И. Р. Высоцкий, П. И. Захаров, В. С. Панфёров, А. В. Семёнов, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, С. А. Шестаков, И. В. Ященко – М.: МЦНМО, 2010.
5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания [Текст] / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.
6. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов [Текст] / под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2012. - 192с.
7. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся [Текст] / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
8. Кожухов, С. К. Математика в школе [Текст] / Кожухов С. К. // Планиметрические задачи с неоднозначным ответом. – 2011 – №5.
9. Корянов, А. Г. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С4). Планиметрические задачи с неоднозначностью в условии (многовариантные задачи) [Текст]:/ А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев. - 39 с.

10. Корянов, А. Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» [Текст]:/ А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 100 с.

11. Панферов, В. С. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач [Текст]: / В. С. Панферов, И. Н. Сергеев. ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

12. Полонский, В. Б. Учимся решать задачи по геометрии (глава IV «Многовариантные задачи») [Текст]: учеб.-метод. пособие / В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович, М. С. Якир.– К. «Магистр», 1996. – 256 с.

13. Прокофьев, А. А. Пособие по геометрии для подготовительных курсов (планиметрия) [Текст]: 4-е изд. перераб. и доп. / А. А. Прокофьев – М.: МИЭТ, 2007. – 232 с.

14. Ященко, И. В. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2013: Математика [Текст] / авт.-сост. И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – 111 с.

15. Цукарь, А. Я. Математика в школе [Текст] Цукарь А. Я. // О полезности интерпретации решения задачи – 2000 – №7. 34-37 с.

16. Шарыгин, И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами [Текст] / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 400 с.

17. Ященко, И. В. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания [Текст] / И. В. Ященко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров – М.: МЦНМО, 2009.

18. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Текст]: офиц. текст. – 2010. – 50 с.

19. Материалы Трубецкого А. П. – Учебныйцентр «Азъ» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.центр-азъ.рф

20. Математика ЕГЭ 2012 (открытый банк заданий) [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.mathege.ru.

21. Сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.alexlarin.net.

22. Сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://eek.diary.ru.

23. Решу ЕГЭ, Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://reshuege.ru.

24. ЗНО ЕГЭ in Maple [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://webmath.exponenta.ru/ege_11/c4/e1.html.

25. Информационно-поисковая система «Задачи по геометрии» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://zadachi.mccme.ru/2012.

26. Интернетпроект «Задачи» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.problems.ru.

27. «ЕГЭ: онлайн помощник по математике», сайт Себедаш И. О. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: egetrener.ru.