МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

МЕТОДИКА ДОСТИЖЕНИЯ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ КООРДИНАТНОМУ МЕТОДУ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.01 Педагогическое образование,
направленность (профиль) программы бакалавриата
«Математика»

Проверка на объем заимствований:
____________% авторского текста

Работа _______________ к защите
« ___ » ___________ 20__ г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математике
_____________ Суховиенко Е.А.

Выполнила:
Студентка группы ЗФ-413/087-4-1
Газизова Юлия Надимовна
____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент кафедры МиМОМ
Баранова Валентина Александровна
____

Челябинск
2017

Содержание

Введение

Начиная с 2015 года, образовательные организации России перешли на новый Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО) [21], главная цель которого – повышение качества образования, достижения новых образовательных результатов, соответствующих современным запросам личности, общества и государства. В нем требования к результатам обучения сформулированы в виде личностных, метапредметных и предметных.

Особое внимание уделяется формированию метапредметных результатов, так как именно они обеспечивают подготовку школьников к самостоятельному анализу проблем, выбору наиболее эффективных способов решения учебных и познавательных задач, использованию межпредметных связей и метода математического моделирования, как одного из важнейших методов применения математики в различных технических и гуманитарных дисциплинах. В связи с этим необходимо в школьном курсе математики, в частности и в курсе геометрии, рассматривать понятия и факты не только на формально-абстрактном уровне, но и на межпредметном и на практико-ориентированном.

Из анализа программ по геометрии основной школы [6] и [22] можно сделать вывод, что они включают изучение не только традиционных фактов элементарной геометрии. Главной идеей изучения курса геометрии является – овладение учащимися основными методами геометрии: координатным, векторным, геометрических преобразований, а также умение применять их к решению геометрических задач.

Координатный метод или метод координат решения геометрических задач тесно связан с алгеброй, что позволяет перевести геометрическую задачу на алгебраический язык, т.е. эффективно использовать метод математического моделирования и тем самым алгоритмизировать решение.

Это в большинстве случаев упрощает поиск решения и само решение задачи. Все сказанное, подтверждает метапредметность результатов применения метода координат в геометрии.

Естественно, в настоящее время остается актуальной проблема разработки и использования метапредметных технологий преподавания, создания учителем особых условий, когда под его руководством учащиеся могут самостоятельно найти решение задачи способом построения эффективных моделей. В связи с этим необходима методика изучения метода координат, способствующая успешному самостоятельному усвоению учащимися новых знаний, умений и компетенций, включая умение учиться, позволяющая научиться решать разнообразные геометрические задачи этим методом.

Значимость и актуальность обозначенной проблемы определили выбор темы данной квалификационной работы « Методика достижения метапредметных результатов в процессе обучения координатному методу в основной школе».

Цель исследования: разработка некоторых приемов достижения метапредметных результатов в процессе обучения учащихся основной школы координатному методу решения геометрических задач.

Объект исследования: процесс обучения учащихся геометрии в основной школе.

Предметом исследования является координатный метод решения геометрических задач, как метапредметный метод математического моделирования.

Гипотеза исследования: достижение метапредметных результатов в процессе обучения координатному методу будет более эффективно при реализации следующих условий: 1) осуществлять подбор систем геометрических задач, позволяющих овладеть и использовать метод координат; 2) разрабатывать интегрированные уроки, способствующие достижению метапредметных результатов.

Для реализации поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- ✓ Ознакомиться с учебно - методической литературой по данной теме;
- ✓ Рассмотреть варианты изучения метода координат и его применение в некоторых из действующих учебников геометрии;
- ✓ Выявить умения, необходимые для успешного овладения учащимися методом координат, как методом математического моделирования ;
- ✓ Подобрать системы задач, способствующих достижению метапредметных результатов;
- ✓ Разработать ряд интегрированных уроков по формированию УУД для решения задач координатным методом.

Апробация методики проведения интегрированных уроков проводилась в период педагогической практики в 2017 г. в МОУ Метелевская СОШ в 9 классе. В апробации участвовали 21 ученик и 1 учиель.

Глава I. Координатный метод решения геометрических задач как способ достижения метапредметных результатов учащихся

1.1. Понятие метапредметности

В современном образовании метапредметности уделяется большое внимание. Связано это с переходом современного образования на новый образовательный стандарт. В стандартах второго поколения [21] для среднего (полного) общего образования термин «метапредметность» характеризуется как « способы деятельности, применяемые как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях, освоенные обучающимися на базе одного, нескольких или всех учебных предметов». Образовательные результаты ФГОС делятся на три группы : личностные; метапредметные и предметные. Первая и вторая группы должны достигаться во всех школьных предметах и даже во всей основной образовательной программе школы, хотя вклад в достижение этих результатов для разных предметов различен и определяется их мпецификой.

Изучение математики в основной школе направлено на достижение следующих целей в метапредметном направлении:

- формировать представления о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии современного общества и цивилизации;
- развить представление о математике как форме описания и методе познания действительности, создать условия для приобретения первоначального опыта математического моделирования;
- формировать общие способы интеллектуальной деятельности, характерные для математике и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности.

Среди всех основных выписанных требований ФГОС к метапредметным результатам отметим следующие умения:

- регулятивные (самостоятельное определение целей, составление и реализация плана деятельности);
- коммуникативные (продуктивное взаимодействие с людьми);
- познавательные (в том числе проектно-исследовательские)
- информационно - познавательные (работа с источниками информации, включая их критический анализ);
- владение ИКТ;
- рефлексивные (оценка собственных действий в том числе с учетом нравственных критериев и социальных последствий)

Как отмечается в методической литературе, методы развития этих умений в целом – то известны, остается их последовательно применять. Однако необходима плодотворная деятельность квалифицированных педагогов по разработке технологий проверки и оценивания сформированности указанных умений.

Использование метапредметной технологии в преподавании математики дает возможность развивать мышления у всех учеников. Суть такого подхода заключается в создании учителем особых условий, в которых дети могут самостоятельно, но под руководством учителя найти решение задачи. При этом педагог объясняет ребятам понимание сути задачи, построение эффективных моделей. Ученики могут выдвигать способы решения зачастую методом проб и ошибок. Все это не усложняет, а лишь увеличивает эффективность работы школьников.

Школьный курс математики на пути достижения метапредметных результатов обучения встречает некоторые проблемы:

– между требованиями ФГОС ООО к достижению метапредметных результатов и отсутствием регламентированного перечня планируемых образовательных результатов по отдельным школьным предметам, в том числе по геометрии, который служил бы конкретизацией требований стандарта;

– между потенциалом общеобразовательного курса математики в достижении школьниками метапредметных образовательных результатов в форме универсальных учебных действий и недостаточной проработанностью методических аспектов реализации этого потенциала через процесс решения задач координатным методом.

– между необходимостью проверять и оценивать медапредметные результаты и дефицитом контрольно-измерительных материалов (КИМ) для диагностики подготовленности обучающихся.

Необходимость устранения указанных противоречий обусловливает проблему, которая заключается в поиске методических условий эффективного формирования универсальных учебных действий, составляющих основу метапредметных образовательных результатов, в процессе решения задач координатным методом на уроках геометрии в основной школе.

Решение задач координатным методом алгоритмизированнно, что в свою очередь, упрощает поиск и само решение задачи. Данный метод переносит в геометрию важную особенность алгебры – единообразие способов для решения той или иной задачи. В отличие от арифметики и элементарной геометрии, в алгебре и аналитической геометрии решение задач приводится по общему для всех задач плану, практически подходящему к любой задачи.

Применение координатного метода для решения геометрических задач, избавляет от необходимости наглядного представления сложных пространственных изображений.

Выделим цели изучения координатного метода в школьном курсе геометрии:

- на основе метода координат показать тесную связь геометрии и алгебры;
- показать, что данный метод является более эффективным при решении задач и доказательства ряда теорем;
- развивать графическую и вычислительную культуру учащихся;
- повышать качественное освоение предметных знаний и умение;

Изучение координатного метода и обучение его применению для решения различных геометрических задач происходит в несколько этапов.

На первом этапе происходит введение основного понятийного аппарата. Все понятия отрабатываются в 5-6 классах, и в дальнейшем систематизируется в курсе геометрии. Учащиеся впервые знакомятся с координатным лучом. Затем в пятом классе при изучении отрицательных чисел, луч дополняется до координатной прямой. В шестом классе вводятся рациональные числа, после чего учащиеся начинают изучать координатную плоскость.

На втором этапе - знакомство с уравнениями прямой и окружности. С разной целью содержания материала, эти понятия изучаются, как в геометрии, так и в алгебре. Из – за этого учащиеся не замечают связи между ними и плохо усваивают суть данного метода. Например, в курсе алгебры седьмого класса путем построения ряда точек, вводятся графики основных функций, вычисление координат которых выполняется путем аналитического задания функции. Уравнение прямой и окружности в школьном курсе геометрии вводится, как множество точек, которые обладают определенным свойством (равноудаленности от 1 точки – для окружности, от двух – для прямой)

Применение самого метода координат для решения геометрических задач происходит в девятом классе. В начале обучения раскрывают этапы применения координатного метода, а потом, на примере нескольких задач показывают само применение метода

Несмотря на все достоинства координатного метода, не следует принимать его, как основной метод решения задач и доказательства теорем.

В статье Шарыгина И. Ф. [19] говорится о плохом влиянии метода координат, как для сильных, так и для слабых учеников. Для слабых учеников, то «большей частью в этой группе находятся дети, которые плохо считают, с трудом понимают и запоминают формулы. Для этих детей Геометрия могла бы стать предметом, за счет которого они могли бы компенсировать недостатки общематематического развития. А вместо этого она ложится на них дополнительным грузом». Для сильных же, «Координатный метод оставляет в стороне геометрическую суть изучаемой геометрической ситуации. Не развивается геометрическая, и даже математическая интуиция, столь необходимая математику-исследователю»,

1.2.Анализ школьных учебников

В школьном курсе геометрии существуют различные методы для решения задач и доказательства теорем. К ним можно отнести синтетический метод, метод геометрических преобразований, векторный метод и метод координат, которые в свою очередь связаны между собой. Тот или иной метод в школьных учебниках может занимать преобладающее значение. в зависимости от раскрываемой авторами концепции.

Рассмотрев школьную программу по геометрии основной школы, можно сказать, что координатному методу уделяется мало внимания. Раздел программы « Цели изучения курса геометрии» рассматривает: « при решение задач и доказательстве теорем…применяются геометрические преобразования, векторы и координаты». Значит программа не ставит цель – изучить метод координат, как метод решения геометрических задач. В программе говорится, что « в результате изучения курса геометрии учащиеся должны уметь использовать координаты для решения несложных стандартных задач». И не говорится о владение навыками использования метода координат для решения задач, хотя координатный метод лучше подходит при решении нестандартных и довольно сложных задач.

В соответствии со школьной программой изучение координат впервые начинают в V классе. Учащиеся изучают изображение чисел на прямой и координаты точек. Данные понятия в учебниках вводятся по-разному.

В учебнике Виленкина Н.Я. математика 5 класс [2] в § 3 – I главы рассматривается прямая, затем координатный луч. В § 4- шкалы и координаты. Изучив координатный луч, ребята переходят к изучению сравнения натуральных и дробных чисел. После чего, к их сложению и вычитанию. В учебнике Виленкина Н.Я. математика 6 класс[3], ребята знакомятся с координатной прямой, после изучения положительного и отрицательного числа. Учатся изображать числа на координатной прямой и находить координаты точек. В отличие от данных учебников, в учебнике Дорофеева Г.В. математика 5 класс[4], авторы не вводят определения координатного луча, в I главе изучаются линии на плоскости, вводится понятие координатной прямой, и работа совершается только с правой частью координатной прямой, которая и представляет собой координатный луч. И лишь в 6 классе [5], после изучения отрицательных чисел, начинают использовать обе части координатной прямой. Что в свою очередь, ведет к неудобству восприятия учащимися данных понятий. В общем, учебники Виленкина Н.Я.[2],[3] содержат достаточно большое количество задач для определения координатного луча и прямой, потом и плоскости. Автор чаще использует координатный луч, чтобы ввести новые понятия, чем Дорофеев Г.В.в своих учебниках[4] и[5]

В соответствие со школьной программой для основной школы в геометрии координаты изучаются в следующем порядке: координатная плоскость; формула расстояния между двумя точками плоскости с заданными координатами; уравнение прямой и окружности.[6]

Атанасян Л. С. в учебнике геометрии 7-9классов[1], изучению координатного метода посвятил целую главу. В этой главе в §1 рассматривается координаты вектора и разложение вектора по двум неколлинеарным векторам; во §2 решаются простейшие задачи в координатах, изучается связь между координатами вектора и координатами его начала и конца; и в §3 уравнение прямой и окружности. Координатный метод в данной главе трактуется как метод, изучающий геометрические фигуры средствами алгебры. Главной целью автора является, обучить учащихся применению координатного метода для решения задач на построение фигур, для доказательства задач и вывода геометрических формул.

Так в учебнике Погорелова А. В. геометрия 7-11 классов[7], координатный метод занимает одно из центральных мест. Координаты начинают изучать с восьмого класса, изучив темы «Четырехугольники» и «Теорема Пифагора». Сначала изучают основные понятия, это введение координат на плоскости, уравнения прямой и окружности, после рассматривают пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, определяют sin, cos и tg любого угла. Изучение данных тем являются начальным изучением координатного метода в школе.

И наконец, в учебнике Шарыгина И. Ф. геометрия 7-9 классов[7],большое внимание уделяется методам решения геометрических задач, по сравнению с учебниками Атанасяна Л.С. и Погорелова А.В. В данном учебнике координатный метод изучается в конце девятого класса. Изучая эту тему, школьники знакомятся с декартовыми координатами на плоскости, уравнениями прямой и окружности. Нужно отметить, что изучению данной темы уделяется мало теоретического материала. Шарыгин не рассматривает формулу середины отрезка, не дает определения фигуры, зато изучает уравнение «плоских линий», которые необходимы для решения задач. Метод координат начинает рассматривать после изучения векторов. Приводится достаточное количество задач на эту тему. Автор приводит два примера, вначале рассматривается окружность Аполлония, затем уделяется внимание выбору системы координат. К ним относятся сложные задачи, связанные с нахождением геометрического места точек.

1.3. Метод координат как метод математического моделирования

Огромна роль метода математического моделирования в процессе познания и практического использования окружающего нас мира. Практически решение любой задачи связано с необходимостью перевода ее на язык математических символ и формул, то есть с ее формализацией.

Непреходящее значение математического моделирования подчеркивалось многими исследователями (Вейль Г., Кепперс Г., Морозов К.Е., Гастев Ю.А.), которые указывали следующие аспекты его использования: 1) как средства технического расчета объекта и познания; 2) как инструмента решения научно-технических задач; 3) как мощного аппарата исследования явлений природы; 4)как метода научного исследования.

Владение современными математическими теориями и методами, общими принципами и умениями применять их к решению практических задач способствует воспитанию познавательных и творческих способностей, формированию научно-теоретического мышления. Поэтому для преподавания математических дисциплин, в частности геометрии, усиливается актуальность вопросов о роли и месте математического моделирования.

Многочисленные исследования в области педагогики (Колмогоров А.Н., Фирсов В.В., Фридман Л.М., Кудрявцев Л.Д., Шварцбурд С.И., Гончаров В.Л., Гнеденко Б.В.), психологии (Давыдов В.В., Рубинштейн С.Л., Гамезо М.В., Салмина Н.Г.), методики преподавания математики (Морозов

Г.М., Стукалов В.А., Былков В.С., Блох А.Я., Петерсон Л.Г., Мельникова Н.Б., Мешкова И.ЯГаранин., В.А.) свидетельствуют о том, что, во-первых, существующий курс математики школы лишь частично показывает процесс применения математики к решению практических задач и во-вторых, о необходимости более полного включения идей математического моделирования в школьное обучение (Майер Р.А., Муравьев Е.С., Мордкович А.Г., Раухман А.С.). По мнению психологов, использование моделирования в обучение помогает в решение педагогических задач, как: активация мыслительной деятельности, способствование формированию научно-технического мышления, повышение эффективности усвоения знаний, соблюдение принципов сознательности обучения, единства теории и практики.

Во время обучения в сознание учащегося возникает картина, то есть некая модель, которая соответствует уровню передаваемых знаний о математике, поэтому важным составляющим математического образования является обучение методу математического моделирования, поскольку именно оно позволяет раскрыть связи абстрактных математических понятий с реальностью. Осуществляя переход в структуре математического моделирования от формальной математической задачи к ее интерпретации, мы осуществляем некоторую наглядность математических средств. Благодаря этому роль математического моделирования как средства наглядности является общепризнанной (Гибш И.А., Фетисов А.И.).

Представления о структуре математического моделирования , о его компонентах, специфике отдельных его этапов создают базу для развития общих навыков применения математики к решению практических задач (Кудрявцев Л.Д., Гнеденко Б.В.), и в частности геометрии.

Рассмотрим координатный метод как метод математического моделирования.

Сущность координатного метода решения геометрических задач заключается в следующем:

1. на плоскости выбирается система координат, в основном прямоугольная;
2. положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно этой системы. В условии задачи указывается зависимость между данными и искомыми элементами заданной фигуры. Координатный метод позволяет эту зависимость перевести на алгебраический язык. Изучив полученную аналитическую связь, исследуется геометрический образ.
3. Метод координат находит убедительное применение при определении геометрических мест точек плоскости и пространства.

Координатный метод – это уникальный метод. Данный метод обеспечивает тесную связь геометрии и алгебры, которые вместе дают «богатые плоды», какие они не давали бы оставаясь раздельными. Он дает возможность, более красиво и рационально построить решение задачи и доказательства теорем, чем синтетические способы. Правда есть одна сложность, одна и та же задача аналитически по-разному представляется в зависимости от выбора системы координат. А выбор более подходящей системы координат, позволить только достаточный опыт.

1.4.Основные этапы метапредметного урока

На основе стандартов II поколения созданы «Примерные программы обучения».

1.Основные цели которых:

- ❖ Способствовать развитию коммуникативных компетенций: речевая, социокультурная, языковая, компенсаторная, учебно-познавательная компетенции;
- ❖ Развивать личность школьников;
- ❖ Формировать и развивать УУД.

2.Можно выделить предполагаемые результаты обучения:

1.Предметные результаты;

2.Личностные результаты: мотивация учащихся, самореализация, стремление к совершенствованию, развитие коммуникативных компетенций, общекультурность, толерантность к иной культуре, формирование отстаивания национальных и общечеловеческих ценностей и свою гражданскую позицию;

3.Метапредметные результаты: планирование своего речевого и неречевого поведения; умения определения области знаемого и незнаемого, также умение ставить цели и задачи, развитие исследовательских УД, умение смыслового чтения, самонаблюдение, самоконтроль.

Метапредметные результаты будут мостами, при помощи которых преодалеются горы знаний, и образована тесная связь между всеми предметами.

Метапредметный урок представляет собой урок на котором:

- ➢ ребята знакомятся с приемами, образцами мыслительной деятельности;
- ➢ учащиеся осмысливают происхождение основных понятий, на определенной предметной области знаний;
- ➢ обеспечивается целостность представлений об окружающем мире, как результат его познания.

Можно перечислить универсальные учебные действия урока:

- ✓ *Объявление темы урока*. Формулируют сами учащиеся (учитель подводит учащихся к осознанию темы)

  -Познавательные общеучебные, коммуникативные

  -Сообщение целей и задач

- ✓ *Сообщение целей и задач*. Формулируют сами учащиеся, определив границы знания и незнания (учитель подводит учащихся к осознанию целей и задач)

  -Регулятивные целеполагания, коммуникативные

- ✓ *Планирование.* Планирование учащимися способов достижения намеченной цели (учитель помогает, советует)

  -Регулятивные планирования.

- ✓ *Практическая деятельность учащихся*. Учащиеся осуществляют учебные действия по намеченному плану (применяется групповой, индивидуальный методы).

  -(учитель консультирует)

  -Познавательные, регулятивные, коммуникативные

- ✓ *Осуществление контроля*. Учащиеся осуществляют контроль (применяются формы самоконтроля, взаимоконтроля учитель консультирует)

  -Регулятивные контроля (самоконтроля),

  -коммуникативные

- ✓ *Осуществление коррекции.* Учащиеся формулируют затруднения и осуществляют коррекцию самостоятельно.

  -(учитель консультирует, советует, помогает).

  -Коммуникативные, регулятивные коррекции

- ✓ *Оценивание учащихся.* Учащиеся дают оценку деятельности по её результатам (самооценивание, оценивание результатов деятельности товарищей, учитель консультирует)

  -Регулятивные оценивания (самооценивания),

  -коммуникативные

- ✓ *Итог урока*

  -Проводится рефлексия

  -Регулятивные саморегуляции,

  -коммуникативные

- ✓ *Домашнее задание.* Учащиеся могут выбирать задание из предложенных учителем с учётом индивидуальных возможностей

  -Познавательные, регулятивные,

  -коммуникативные

Так выглядит общая форма УУД. Конкретизация идет при отборе заданий, выборе форм организации учебной деятельности на каждом этапе урока. Данный подход уже при составлении плана позволит увидеть формирование метапредметных результатов, на каждом этапе при правильной организации работы учеников. При введение в урок проблемного диалога формируется обучение детей целеполаганию, а создание проблемной ситуации поможет детям определять границы знания и незнания. Именно так и формируется тема и цель урока детьми. Педагог может только предположить план урока, а на самом деле , деятелями урока и есть ребята.

Выбрав задания на урок, учитывая инвариантную и вариантную части учебника, необходимо продумать форму организации практической работы учеников. Затем в образовательном процессе, отвечая на вопросы, учащиеся учатся слушать друг друга, и совместно приходить к общему решению задач.

Одним из приоритных требований нового Федерального государственного образовательного стандарта является формирование коммуникативной компетенций. Этому поспособствуют групповые формы работы на занятие. Приветствуется работа в малых группах, так как участвуют практически все, практикуется навыки сотрудничества, способствует лучшему усвоению нового материала, до закрепления и обобщения пройденного. Существует форма учебного практико-ориентированнного проекта, в которой формируется учебная мотивация и УУД. Также можно выделить еще одну форму урока комбинированного типа

– мини проекты. Ориентирован на самостоятельную работу учащихся. Метод проектов является сильнейшим мотиватором к обучению и самообразованию.

Учитель планируя урок должен формировать не только предметные но и метапредметные результаты. Поэтому ему необходимо разрабатывать урок с позиции эффективности применения методов и приемов, а также способов организации учебной работы учеников на уроках.

Глава II. Методические основы применения метода координат для решения задач школьного курса геометрии основной школы

2.1. Основные этапы решения задач

С помощью метода координат, можно решать задачи двух видов.

1. Пользуясь координатами можно истолковать уравнения и неравенства геометрически и таким образом применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функции первый пример такого применения координатного метода.

2. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии. Например, можно выразить через координаты основную геометрическую величину - расстояние между точками.

Решение задач, как алгебраических, так и геометрических сводится к выполнению определенного алгоритма, состоящего из III основных этапов:

I. перевести задачу на координатный (аналитический) язык;
II. преобразовать аналитическое выражение;
III. обратный перевод, то есть перевести с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача.

Рассмотрим решение алгебраической задачи координатным методом, используя данный алгоритм(задачи на составление уравнения фигуры)

Задача №1. Сколько решений имеет система уравнений.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Решение:

I этап: выявить характеристическое свойство данных фигур, иначе говоря, требуется найти, количество точек пересечения фигур, заданных уравнениями.

Уравнение $x^2+y^2=1$, это есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r = 1, а уравнение $y=x^2$ — уравнение параболы.

II этап: выбрать на плоскости прямоугольную систему координат, построить окружность и параболу; найти точки их пересечения.

Ш этап: записать характеристическое свойство фигуры на языке координат, то есть количество точек пересечения окружности и параболы.

Теперь решим геометрическую задачу, используя данный метод (геометрические задачи, которые решаются аналитическим методом)

Задача №2. Даны две точки. Найдите множество точек, для каждой из которых расстояния от двух данных точек равны.

Решение:

I этап. Обозначим точки через А и В. Введем прямоугольную систему координат с началом в точка А. (формируется умение оптимального выбора системы координат). Отсюда следует, что АВ=а, тогда в данной системе точки имеют следующие координаты А(0,0) и В(а,0). Обозначим произвольную точку так, чтобы выполнялось условие АМ=МВ($AM^{2=}MB^2$).Точка М имеет координаты М(х,у). Используем формулу расстояния от одной точки до другой, получаем

$AM^2=x^2+y^2$,

$MB^2=(x-a)^2+y^2$. Тогда $x^2+y^2=(x-a)^2+y^2$ - уравнение окружности.

II этап осуществим преобразование данного выражения, в результате получим соотношение: $x=\frac{a}{2}$

III этап осуществим обратный перевод с языка уравнения на геометрический язык. Данное уравнение – это уравнение прямой, // оси Оу и стоящей от точки А на расстояние $d=\frac{a}{2}$, то есть серединного перпендикуляра к отрезку АВ.

2.2 Разновидности задач, обучающие методу координат

Разрабатывая методику формирования умений применения метода координат, важно выявить требования, предъявляющая логическая структура решения задач к мышлению учащихся. Метод координат предусматривает наличие у учащихся навыков и умений, которые способствуют применению координатного метода на практике. Проведем анализ решения задач данным методом для выявления компонентов умения использовать метод координат. Благодаря чему, осуществиться поэлементное формирование умений использования координатного метода решения задач.

<u>Задача №1</u> . В треугольнике ABC: AC=b, AB=c, BC=a, BD - медиана. Докажите, что $BD^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.

Выберете систему координат, чтобы т.А была началом координат, а осью Ox - прямая AC (рис. 2).

(формируется умение оптимально выбирать систему координат, то есть так, чтобы наиболее просто находить координаты данных точек).

В данной системе координат точки A, C и D имеют следующие координаты: A(0,0), C(b,0) и D($\frac{b}{2}$,0).(формируется умение вычислять координаты заданных точек). Обозначим координатами x и y.- точку B Тогда используя формулу для нахождения расстояний между двумя точками, заданными своими координатами, получим:

$$x^2+y^2=c^2,\ (x-b)^2+y^2=a^2 \qquad (1)$$

(способствует умению находить расстояние между двумя точками, при заданных координатах)

Используем формулу для BD, $BD^2 = (x-\frac{b}{2})^2 + y^2$. (2)

Из формулы (1) найдем x и y.

Они равны:

$$x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b}; \quad y = \sqrt{c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}}.$$

Далее, подставим x и y в формулу (2), найдём $BD^2 = (\frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} - \frac{b}{2})^2 + c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}$.

$BD^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.(умение выполнять преобразования алгебраических выражений)

Задача №2. Найти множество точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

Обозначим данные точки через A и B. Далее нужно выбрать систему координат чтобы ось Ox совпадала с прямой AB, а началом координат была точка A.(умение оптимально выбирать систему координат).

Предположим AB=a, тогда в выбранной системе координат A(0,0), B(a,0).(развиваются умения находить координаты заданных точек)

Точка M(x,y) принадлежит данному множеству тогда только тогда, когда AM^2-MB^2=b^2 где b - постоянная величина. (умение перевода задачи с геометрического языка на аналитический, составление уравнения фигур).

Из формулы расстояния между двумя точками, получаем:

$AM^2 = x^2 + y^2$,

$MB^2 = (x - a)^2 + y^2$,

$AM^2 - MB^2 = 2ax - a^2 = b$ (умение вычислять расстояние между точками, с данными координатами), или $x = \frac{b + a^2}{2a}$. Это уравнение прямой, параллельной оси OY и стоящей от точки A на расстояние $d = \frac{|b + a^2|}{2a}$.

(умение видеть по заданному уравнению конкретный геометрический образ)

Нетрудно заметить, что и для решения этой задачи нужно владеть перечисленными выше умениями. Кроме того, для решения приведенной задачи, а также и других задач важно умение «видеть за уравнением» конкретный геометрический образ, которое является обратным к умению составлять уравнения конкретных фигур.

Выделенные умения являются основой при решении и более сложных задач.

<u>Задача №3.</u> В трапеции меньшая диагональ перпендикулярна основаниям. Найти большую диагональ, если сумма противоположных углов равна $\frac{\pi}{2}$, а основания равны a и b.

Направим оси координат по меньшей диагонали и одному из оснований (рис. 3).(умение оптимально выбирать систему координат). Обозначим координаты точек, точка A будет имеет координаты (0,0), точка B - (a,0), точка C - (0,c), точка D - (b,c).(умение находить координаты заданных точек)

Пусть $\alpha = \angle ABC$ и $\beta = \angle ADC$ это острые углы в трапеции ABCD, и их сумма равна $\frac{\pi}{2}$. Чтобы вычислить длину большей диагонали BD надо найти значение c. Его можно вычислить 2 способами.

Первый - из прямоугольного треугольника ABC по формуле $tg\alpha = \frac{CO}{AB}$ находим $c = atg\alpha$.

Второй способ из прямоугольного треугольника ACD: $c = -btg\beta$. Отсюда объединив эти две формулы получим, что

$$c = atg\alpha = -btg\beta \qquad (1)$$

Из равенства (1) находим отношение $\frac{b}{a}$: оно равно - $tg^2\alpha$, так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Выражаем $tg\alpha = \sqrt{-\frac{b}{a}}$, исходя из этого, пользуясь (1), получаем

$c = \sqrt{-ab}$.(умение выражать недостающие координаты через уже известные величины)

Далее воспользовавшись формулой расстояния между двумя точками, найдем длину BD. (умение вычисления расстояние между точками, заданными координатами)

Она равна $\sqrt{a^2 + b^2 - 3ab}$.

В итоге, можно выделить следующие компоненты умения применять координатный метод в конкретных ситуациях:

- перевод с геометрического языка на аналитический для одного типа задач и с аналитического на геометрический для другого;
- построение точки по данным координатам;
- нахождение координаты заданных точек;
- вычисление расстояния между точками, заданными координатами;
- выбор оптимальной системы координат;
- составление уравнения заданных фигур;
- видеть по заданному уравнению конкретный геометрический образ;
- выполнение преобразований алгебраических соотношений.

Данные умения могут отрабатываться на примере следующих задач, формирующих координатный метод:

1. на определение фигуры по ее уравнению;
2. на построение точки по ее координатам;
3. на преобразование алгебраических равенств;
4. на оптимальный выбор системы координат;
5. на нахождение координат заданных точек;
6. на вычисление расстояния между точками, заданными координатами;
7. на составление уравнения фигуры по ее характеристическому свойству;

Приведем примеры некоторых таких задач.

I. Построение точек на плоскости.

С координатной прямой, а затем и с координатной плоскостью учащиеся знакомятся в 5-6 классах при изучении школьного материала. Для удобства используют мультимедийные презентации, которые позволяют излагать необходимый материал, используя всевозможные иллюстрации и звуковые эффекты, тем самым, вызывая интерес учащихся и являясь хорошим наглядным средством. Приведем несколько примеров задач, которые можно использовать при изучении координатной плоскости. Эти задачи могут быть использованы:

§ для дополнительных заданий отстающим ученикам;

§ для оттачивания навыков построения точек по их координатам со всем классом;

§ для развития интереса к изучаемой теме.

1) На координатной плоскости постройте точки A(6,2), B(-2,-1), C(3,2).

2) Отметьте на плоскости несколько точек. Начертите произвольную систему координат и найдите в ней координаты заданных точек.

3) Постройте фигуры, используя координаты узловых точек. Указание: узловыми будем считать точки, служащие концами отрезков, образующих фигуры. Точки, координаты которых записаны подряд через запятую, необходимо соединять последовательно друг с другом. Если же координаты разделяются знаком «;», то точки не соединяем. Они понадобятся для изображения вспомогательных элементов.

1.**<u>Слоник рис 4</u>**

1) (2;- 3),(2;- 2),(4;- 2),(4;- 1),(3; 1),(2; 1),(1; 2),(0; 0),(- 3; 2),(- 4; 5),(0; 8), (2; 7),(6; 7), (8; 8), (10; 6), (10; 2), (7; 0),(6; 2), (6;- 2), (5;- 3), (2;- 3).

2)(4;-3),(4;-5),(3;-9),(0; - 8),(1;- 5),(1;- 4),(0;- 4),(0;- 9),(- 3;- 9),(- 3;- 3),(- 7;- 3), (- 7;- 7),(- 8;- 7),(- 8;- 8),(- 11; - 8),(- 10;- 4),(- 11;- 1),(- 14;- 3),(- 12;- 1),(- 11;2),(- 8;4),(- 4;5).

3) Глаза: (2; 4),(6; 4).

Ответ:

2.Найдите координаты выделенных на рисунке точек, двигаясь по часовой стрелке от самой жирной точки.

II.Задачи на выбор системы координат

Выбор системы координат имеет очень важное значение при применении метода координат.

Для примера возьмем задачу, которая рассмотрена в учебнике Атанасяна 7 – 9 классов[1] «Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин».

При применении метода координат необходим такой выбор осей и системы координат, при котором алгебраические выкладки становятся более простыми. Для этой задачи удачный выбор системы координат показан на рисунке 7. Таким образом, начало координат помещаем в точку A, а оси проводим через точки B и C так, чтобы эти точки лежали на положительных лучах осей. Следовательно, координаты точек B(a,0) и C(0,b). Поэтому по формуле середины отрезка

D($\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$).

Теперь вычислим AD и BD,

$$AD=\sqrt{(\frac{a}{2}-0)^2+(\frac{b}{2}-0)^2},$$

$$BD=\sqrt{(0-\frac{a}{2})^2+(0+\frac{b}{2})^2}.$$

Видно что AD=BD. А так как по определению середины отрезка BC=CD, то теорема доказана.

Возможен выбор системы координат и по-другому (рис.8, рис.9). Если ось выбрана совсем случайно, то легкую задачу можно превратить в очень трудную. Чтобы начать доказательство исходя из рисунка 10, нужно найти способ, позволяющий выразить алгебраически, что треугольник ABC имеет при вершине A прямой угол. Сделать это можно, но будет это не очень просто.

Таким образом, возникает необходимость вырабатывать у учеников, начиная с 6 класса, представления о возможности произвольного выбора системы координат. Эту работу целесообразно вести в процессе решения задач. В целях пропедевтической работы можно рекомендовать в 6 классе задачи из учебника на нахождение координат точек по рисунку, разнообразя их с помощью изменения направления осей и начала координат.

- Длина отрезка AB равна 6см.

  а)Выберите систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка. б)Выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка были бы: A (-2.5,0), B(2.5,0).
- Постройте квадрат ABCD со стороной 4 см; отметьте точку M-центр квадрата. Поместите начало координат последовательно в точки A, B, C, D и выберите направление осей координат так, чтобы точка M в каждой системе координат имела координаты (1;1). За единичный примите отрезок длиной 1 см.
- Треугольник ABC равносторонний (длина стороны равна 3 см.). Выберите систему координат так, чтобы можно проще было бы определить координаты его вершин.

III. Расстояние между точками

1) Точка M(a,c) находится от начала координат и точки A(4,0) соответственно на расстояниях 3 и 4 см. Определите координаты точки M.

2) Дан прямоугольник ABCD (AB=2 см., BC=4 см.). Как выбрать систему координат, чтобы его вершины имели координаты A(-1,-2), B(-1,2), C(1,2), D(l,-2).

3) Длины сторон треугольника ABC равны 5, 3 и 4 см. Выберете систему координат и определите в ней координаты вершин треугольника ABC.

4) Вершины четырехугольника ABCD имеют следующие координаты: A(-3,1), B(3,6), C(2,2) и D(-4,3). Установите вид четырехугольника.

IV. Составление уравнения фигур

Это умение является одним из основных умений, которые необходимы при применении метода координат к решению задач.

1) Изобразите систему координат. Отметьте на оси Ox точки A и B. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, принадлежащих: а)отрезку AB; б)лучу AB; в)лучу BA;

2) Запишите уравнение прямой, содержащей начало координат и точку A(2,5).

3) Запишите уравнение прямой, содержащей точки A(2,7)и B(1,3).

4) Изобразите на координатной плоскости произвольную прямую и найдите ее уравнение.

5) Запишите соотношения, которым удовлетворяю координаты точек прямоугольника с вершинами A(2,3), B(2,5), C(4,5), D(4,3).

6) Что представляют собой множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенствам: a)$x\le3$; b)$-5\le x\le0$; c)$x>1$; d)$x<-2$; e) $|x|\ge2$; f) $|x|\ge0$?

7) Какую фигуру образует множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $2\le x\le5$ и $1\le y\le3$?

8) Постройте точки, симметричные точкам А(2,-3) , В(5,0), С (0,7) относительно: а) оси Ох; б) оси Оу; в)биссектрисы I и III координатных углов. Запишите эти координаты.

9) Установите, относительно какой из координатных осей симметричны точки А(1,2), В (-7,2).

10) Точки А(5,…), В(…,2) симметричны относительно оси Ох. Запишите пропущенные координаты.

11) Постройте образы точек А(1,4), В(-2,-3), С(3,0) при параллельном переносе а)О(0,0)→К(3,0); б)0(0,0)→М(2,3). Запишите их координаты.

12) С помощью какого параллельного переноса можно отобразить точку М(-3,4) в точку М1(2,4)?

13) Найдите на прямых у=-3х+1 и у=2х+3 точки, симметричные относительно оси Ох.

14) Запишите уравнение прямой, на которую отображается прямая у=4х-3 вектором с координатами (3,4).

15) На прямых у=3х+2 и у=-5х+5 найдите такие точки, которые находятся одна от другой на расстоянии 5 см, и принадлежат прямой, параллельной оси Ох.

2.3. Опытное преподавание

Опытное преподавание проводилось в 9 классе Метелевской средней общеобразовательной школы. Перед его проведением была изучена математическая и методическая литература и разработана методика проведения факультативного занятия. Изучению данной темы отводится восемь занятий. Обучение геометрии ведется по учебнику Атанасяна [1], поэтому в качестве основного теоретического и практического источника, мной был выбран данный методический комплект.

Далее рассмотрены уроки по теме метод координат , а именно урок на тему:« Уравнение окружности ». Вначале ребята изучали векторы (понятие вектора, операции над векторами, формулу серединного отрезка) и перешли к изучению координатного метода.

Урок №1.

Тема :« Уравнение окружности», 9 класс.

Тип урока: урок изучение нового материала.

Цели урока:

1. Личностные (развить навык самостоятельности в работе, трудолюбия, аккуратности, творческую и мыслительную деятельность ребят, интерес к математике, прививать умения сотрудничества, самооценку);
2. Метапредметные (способствовать формированию, информационной, коммуникативной и учебной компетенции учеников, умению работать с данной информацией в необычной ситуации, учить анализу, размышлению и сравнению)
3. Предметные (выведение понятия уравнение окружности, научить учащихся составлять уравнение окружности по готовому чертежу, строить окружность по заданному уравнению)

Планируемые результаты:

Личностные:

* Самоопределение: рефлексивная самооценка учебной деятельности;
* Смыслообразование : мотивация образовательной деятельности основываясь на презентациях и проблемных ситуациях; самостоятельное приобретение новых знаний и практических умений;
* Нравственно-этическое оценивание: воспитывать необходимость знания математики, умения применять в жизненной ситуации.

Метапредметные:

- Коммуникативные: формировать умения работать в группе с выполнением разных соц.ролей, представлять и отстаивать свои взгляды и убеждения, вести дискуссию, развивать монологическую и диалогическую речи, уметь выражать свои мысли и выслушивать собеседника, воспитание сдержанности, культуры и взаимоотношений;
- Познавательные : приобретение опыта самостоятельного поиска и анализа информации путем практики, развивать мышление и внимание учеников;
- Регулятивные : умение владеть навыками самостоятельного приобретения новых знаний, организации учебной работы, постановки цели, планирования, самоконтроля и самооценки.

Предметные :

- ❖ Факты : Окружность – одно из фундаментальных понятий геометрии. С окружностью мы знакомились ещё в 5 классе, а целью сегодняшнего урока я ставлю выведение уравнения окружности по геометрическим свойствам данной линии и применение его для решения геометрических задач. При выведении уравнения окружности вам потребуются уже известное определение окружности и формула, позволяющая найти расстояние между двумя точками по их координатам.
- ❖ Эмпирические понятия: расстояние между точками, прямоугольная система координат, уравнение окружности.
- ❖ Теоретические понятия: формула уравнения окружности.
- ❖ Оборудование: ПК, мультимедийный проектор, экран.

План урока:

1. Вступительное слово – 2 мин.
2. Актуализация знаний – 2 мин.
3. Постановка проблемы и её решение –12мин.

4. Фронтальное закрепление нового материала – 8 мин.
5. Самостоятельная работа в группах – 15 мин.
6. Презентация работы: обсуждение – 4 мин.
7. Итог урока. Домашнее задание – 2 мин.

Ход урока:

Этапы урока	**Деятельность учителя**	**Деятельность учащихся**	**Примечание**
Цель данного этапа: ***Психологический настрой учащихся; Вовлечение всех учащихся в учебный процесс, создание ситуации успеха.***			
1.Организационный момент. 2 минуты	Доброе утро! 14 ноября Всемирный день борьбы с диабетом. 1901 — венский врач Карл Ландштейнер разделил все образцы крови на три группы: A, B и 0. 1936 -В СССР организуется Гидрометеорологическая служба. 1969 — Посадка на Луну в Океане Бурь американского космического корабля «Аполлон-12», пилотируемого космонавтами Ч. Конрадом, А. Бином и Р. Гордоном. 1994 — Открывается движение между Парижем и Лондоном через туннель под Ла-Маншем. На сегодняшнем уроке вам тоже предстоит совершить открытие, которому посвящена тема урока «Уравнение окружности». -Приготовьте ваши тетради и запишите тему урока.	Записывают тему урока в тетрадь.	.
	-Ребята! С окружностью вы познакомились ещё в 5 и 8 классах. А что вы о ней знаете?	-Определение окружности. -Радиус. -Диаметр. -Хорда. И т.д.	Учащиеся перечисляют все, что знают об окружности.

	-Знаете вы много, и эти данные можно использовать при решении геометрических задач. Но для решения задач, в которых применяется метод координат, этого недостаточно. **Почему?** -Абсолютно верно. Поэтому главной целью сегодняшнего урока я ставлю выведение уравнения окружности по геометрическим свойствам данной линии и применение его для решения геометрических задач. И пусть **девизом урока** станут слова среднеазиатского учёного-энциклопедиста Ал-Бируни: «Знание -самое превосходное из владений. Все стремятся к нему, само же оно не приходит».	-Мы ещё не знаем общего вида уравнения окружности.	***Слайд 2*** ***Слайд 3***
Цель этапа – получить представление о качестве усвоения учащимися материала, определить опорные знания.			
<u>2.</u>Актуализация знаний. 2 минуты	***При выведении уравнения окружности*** вам потребуются уже известное определение окружности и формула, позволяющая найти расстояние между двумя точками по их координатам. **<u>Давайте вспомним эти факты</u>** /*повторение материала,* изученного ранее/: – Запишите формулу нахождения координат середины отрезка. – Запишите формулу вычисления длины вектора. – ***Запишите формулу нахождения расстояния между точками*** (длины отрезка). Корректирование записей…	- Один ученик у доски, а остальные в тетрадях записывают формулы -Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от	***Слайд 4***

	Геометрическая разминка. Даны точки*A (-1;7)* и *B (7; 1).* Вычислите координаты середины отрезка АВ и его длину. Проверяет правильность выполнения, корректирует расчеты…	данной точки. **|AB|=√(x –x)²+(y –y)²** **M(x ;y), A(x ;y)** Вычисляют: С (3; 4) |AB| = 10	***Слайд 5***
<u>3.</u>Формирование новых знаний. 12 минут Цель: формирование понятия - уравнение окружности.	**Решите задачу:** В прямоугольной системе координат построена окружность с центром А(х ;у). М(х ; у)-произвольная точка окружности***. Найдите радиус окружности.*** -Будут ли координаты любой другой точки удовлетворять данному равенству? Почему? Возведём обе части равенства в квадрат. **В результате имеем:** r² =(x –x)²+(y –y)²- уравнение окружности, где (x ;y)-координаты центра окружности, (x ;y)- координаты произвольной точки лежащей на окружности, r-радиус окружности. **<u>Решите задачу:</u>** *Какой вид будет иметь уравнение окружности с центром в начале координат?* **Итак, что надо знать для составления уравнения окружности?** Предложите алгоритм составления уравнения окружности. Вывод: … записать в тетрадь.	-Радиусом называется отрезок, соединяющий центр окружности с произвольной точкой лежащей на окружности. Поэтому r=|AM|=√(x –x)²+(y –y)² -Любая точка окружности лежит на этой окружности. Учащиеся ведут записи в тетради. (0;0)-координаты центра окружности. $x^2+y^2=r^2$, где r-радиус окружности. -координаты центра окружности, радиус, любую точку окружности… Предлагают алгоритм… Записывают алгоритм в тетрадь.	***Слайд 6*** ***Слайд 7*** Учитель фиксирует равенство на доске. ***Слайд 8*** Учитель фиксирует равенство на доске. ***Слайд 9***

4. Первичное закрепление. 23 минуты Цель: воспроизведение учащимися только что воспринятого материала для предупреждения утраты образовавшихся представлений и понятий. Закрепление новых знаний, представлений, понятий на основе их применения.	-Применим полученные знания при решении следующих задач. **Задача:** Из предложенных уравнений назовите номера тех, которые являются уравнениями окружности. И если уравнение является уравнением окружности, то назовите координаты центра и укажите радиус. -Не каждое уравнение второй степени с двумя переменными задаёт окружность. $4x^2+y^2=4$-**уравнение эллипса.** $x^2+y^2=0$-**точка.** $x^2+y^2=-4$-**это уравнение не задаёт никакой фигуры.** -Ребята! А что нужно знать, чтобы составить уравнение окружности? **Решите задачу** №966 стр.245(учебник). Учитель вызывает ученика к доске. -Достаточно ли данных, которые указаны в условии задачи, чтобы составить уравнение окружности? **Задача:** Напишите уравнение окружности с центром в начале координат и диаметром 8. **Задача**: построение окружности. - Центр имеет координаты?	1) $(x-5)^2+(y-3)^2=36$- уравнение окружности;(5;3),r=6. 2) $(x-1)^2+y^2=49$- уравнение окружности;(1;0),r=7. 3) $x^2+y^2=7$- уравнение окружности;(0;0),$r=\sqrt{7}$. 4) $(x+3)^2+(y-8)^2=2$- уравнение окружности; (-3;8),$r=\sqrt{2}$. 5) $4x^2+y^2=4$-не является уравнением окружности. 6) $x^2+y^2=0$- не является уравнением окружности. 7) $x^2+y^2=-4$- не является уравнением окружности. -Знать координаты центра окружности. -Длину радиуса. -Подставить координаты центра и длину радиуса в уравнение окружности общего вида. Решают задачу №966 стр.245(учебник). -Данных достаточно. Решают задачу. -Так как диаметр окружности в два раза больше её радиуса, то $r=8\div2=4$. Поэтому $x^2+y^2=16$. - Выполняют построение окружностей	***Слайду 10-13*** Решение типовых задач, проговаривая способ решения в громкой речи. Учитель вызывает одного ученика записать полученное уравнение. ***Возврат к слайду 9*** Обсуждение плана решения данной задачи. ***Слайд. 15.*** Учитель вызывает одного ученика к доске решать данную задачу. ***Слайд 16.***

      Контроль ЗУН	- Определите радиус… и выполняйте построение **Задача на стр.243**(учебник) разбирается устно. **Используя план решения задачи со стр.243, решите задачу:** Составьте уравнение окружности с центром в точке А(3;2), если окружность проходит через точку В(7;5).	 Работа по учебнику. Задача на стр.243. Дано: А(3;2)-центр окружности; В(7;5)є(А;r) Найти: уравнение окружности Решение: $r^2 =(x - x\ )^2+(y - y\ )^2$ $r^2 =(x - 3)^2+(y - 2\ )^2$ $r = AB$, $r^2 = AB^2$ $r^2 =(7-3)^2+(5-2)^2$ $r^2 =25$ $(x - 3)^2+(y - 2\ )^2=25$ **Ответ: $(x - 3)^2+(y - 2\ )^2=25$**	 ***Слайд 17.***
<u>**5.**</u>Итог урока. 5 минут Рефлексия деятельности на уроке.	Домашнее задание: §3, п.91, контрольные вопросы №16,17. Задачи №959(б, г, д), 967. Задача на дополнительную оценку(проблемная задача): Построить окружность, заданную уравнением $x^2+2x+y^2-4y=4$. -О чём на уроке мы говорили? -Что хотели получить? -Какая цель была поставлена на уроке? -Какие задачи позволяет решить сделанное нами «открытие»? -Кто из вас считает, что достиг цели, поставленной на уроке учителем на100%, на 50%; не достиг цели…? Выставление оценок.	Записывают домашнее задание. Учащиеся отвечают на поставленные учителем вопросы. Проводят самоанализ собственной деятельности.	 Учащимся необходимо выразить в слове результат и способы достижения.

Урок № 2.

Тема **:** « Уравнение окружности», 9 класс

Тип урока: урок развивающего контроля

Цели урока:

Деятельностная: научить учащихся способам самоконтроля и взаимоконтроля, формировать способности, позволяющие осуществлять контроль.

Содержательная: проверка знаний, умений, приобретенных навыков и самопроверка учеников.

Задачи:

1.*Предметные*: применение полученных на предыдущих уроках знаний для решения задач, развитие математической речи.

2.*Личностные*: формирование уважительного отношения к чужому мнению, развитие самостоятельности, наличие мотивации к творческому труду, формирование установки на успех.

3.*Метапредметные:* овладение составляющими исследовательской и проектной деятельности, включая умение выдвигать гипотезы, классифицировать, делать выводы и заключения.

Планируемые результаты:

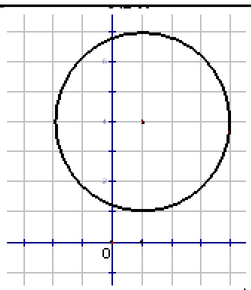
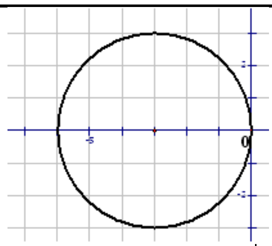
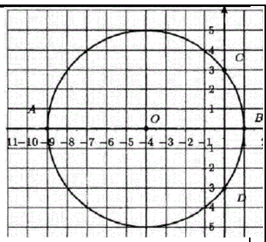
Овладение алгоритмом составления уравнения окружности, основами логического мышления при нахождении путей решения задачи.

ХОД УРОКА.

Этапы урока	Время
I. МОТИВАЦИОННЫЙ ЭТАП.	**1´**
Приветственное слово учителя. - Эпиграфом к нашему уроку пусть будут слова знаменитого Паскаля:	

«Случайные открытия делают только подготовленные умы». Учитель сообщает тему урока и то, что это последний урок по той теме.	
II. ЭТАП ЦЕЛЕПОЛАГАНИЯ.	1´
Обучающиеся формулируют цель урока с учетом имеющего опыта прошлых уроков по данной теме.	
III. АКТУАЛИЗАЦИЯ ЗНАНИЙ И ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ПРОБНОГО ДЕЙСТВИЯ	**10´**
Обучающиеся подписывают рабочие листы. Работают с ними. 1. Игра «Третий лишний» В рабочих листах таблица, содержащая три задания. В каждом задании по три формулы. Необходимо найти лишнюю в каждой строке формулу и выпишите цифру, под которой оно записано в строку под таблицей.	

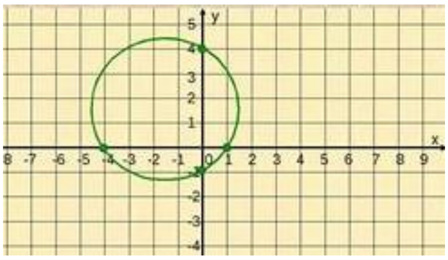
«ТРЕТИЙ ЛИШНИЙ»		
1	2	3
УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ		
$(x-2)^2+(y+3)^2=16$	$(x+5)^2+(x-7)^2=9$	$x^2+y^2=1$
ДЛЯ УРАНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ УКАЗАНЫ КООРДИНАТЫ ЕЁ ЦЕНТРА И РАДИУС		
$(x+2)^2+(y-6)^2=4$ $(2; -6)$, $R = 2$	$(x-8)^2+(y-5)^2=16$ $(8; 5)$, $R = 4$	$(x+4)^2+y^2=1$ $(-4; 0)$, $R = 1$
ДЛЯ ОКРУЖНОСТИ УКАЗАНЫ КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА И РАДИУС		

		
(1; 4), R= 3	(-3; 0), R= 9	(-4; 0), R = 5

Ответ:

В таблицу подведения итогов обучающиеся ставят столько баллов, сколько цифр совпало, т.е. от 0 до 3.

2. Решение задач со слайдов. Обучающиеся записывают ответы в рабочие карты.



1) *Найдите координаты точек пересечения окружности с осью абсцисс. Запишите абсциссу той точки, которая находится ближе к началу отсчета.*

2) Найдите длину хорды, ограниченную точками пересечения окружности с осью ординат. Запишите найденное число.

3) Найдите расстояние между точками пересечения окружностями с осями координат. Запишите наибольшее из этих расстояний.

Ответ: Проверка верности ответов. За каждый верный ответ – один балл.	
IV. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТВОРЧЕСКОГО УРОВНЯ	**18′**
Работа в тетрадях (по одному человеку на каждый пример у доски) *1. Установите, является ли данное уравнение уравнением окружности. В случае утвердительного ответа укажите координаты центра и радиус окружности.* *а)* $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0;$ *б)* $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0.$ *2. Составьте уравнение окружности, касающейся координатных осей и прямой* $y = -4$. *3. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки: A(-3; 7), B(-8; 2), C(-6; -2).*	
V. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА	**13′**
Вариант 1. 1.Начертите в одной системе координат окружности, заданные уравнениями: а) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4,$ б) $(x - 5)^2 + {}^{y2} = 16,$ в) $x^2 + y^2 = 9.$ 2. Напишите уравнение окружности с центром в точке C(7; -4), радиусом 6. 3. Напишите уравнение окружности с центром в точке A(-4; -2), проходящей через точку B(-2; 1) 4. Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если	

M(-1; -5), N(3; 1). Вариант 2. 1. Начертите в одной системе координат окружности, заданные уравнениями: а) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ б) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ в) $x^2 + y^2 = 25$ 2. Напишите уравнение окружности с центром в точке C(-5; 2), радиусом 4. 3. Напишите уравнение окружности с центром в точке B(3; -2), проходящей через точку A(-1; -4) 4. Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если M(-2; 1), N(4; -5).	
VI. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ	**1´**
Решить задачу: *«Определите вид треугольника, вершинами которого являются центры окружностей, заданные уравнениями:* $(x+1)^2 + (y-10)^2 = 7,$ $(x-12)2 + (y+5)^2 = 9,$ $x^2 + (y-8)^2 = 23.$ *Найдите периметр и площадь этого треугольника. Составьте уравнение окружности с центром в середине сторона АС и радиусом равным длине меньшей медианы».*	
VII. РЕФЛЕКСИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ	**1´**
Подведение итогов. По предложенной в рабочем листе шкале перевода баллов в отметки, обучающиеся подводят итоги, оглашают результаты.	

В рабочих листах в разделе РЕФЛЕКСИЯ обучающиеся отмечают своё мнение об уровне усвоения материала на «лестнице успеха».

Многое на уроке было не понятно. С большинством заданий не справился.

Выполнил почти все задания. Задачи творческого уровня показались сложными

На уроке всё было понятно. Все задания выполнил самостоятельно.

Проведем анализ уроков: учащиеся на занятиях активно принимали участие, особенно на первом при выводе формул, так как материал не сложный и использует факты и понятия, которые были изучены не так давно и повторены на устном счете. Также на уроке удалось прорешать все запланированные задачи на закрепление.

Проведенная на следующем уроке самостоятельная работа показала, что практически все ученики усвоили материал (с работой не справились 4 человека из 21 учеников этого класса). Наибольшее количество ошибок было сделано в задаче № 2, когда дети работали со слайдом.

Таким образом, можно предположить, что тема «Уравнение окружности » была успешно усвоена большинством учеников данного класса.

2.4. Интегрированный урок применения координатного метода, способствующего формированию метапредметных результатов

Несмотря на то что метод координат имеет некоторые недостатки, такие как наличие большого количества дополнительных формул, необходимых запомнить, и отсутствие предпосылок развития творческих способностей учащихся, некоторые виды задач трудно решить без применения данного метода. Поэтому изучение координатного метода необходимо, и более детальное знакомство с этим методом целесообразно проводить на факультативных занятиях. Далее рассмотрим ряд задач для факультативного занятия.

Задача 1. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных ему хорд постоянна рис.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в центре окружности. Пусть хорда МР параллельна оси Ох, а точка А принадлежит диаметру (рис. 11). Обозначим расстояние ОА через а, а расстояние от точки Р до оси Ох через b. Тогда точка А имеет координаты (a, 0). Точки Р и М принадлежат окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1, следовательно их координаты удовлетворяют уравнению данной окружности $x^2 + y^2 = 1$. Используя это уравнение находим координаты точек P($\sqrt{1-b^2};b$) и M($-\sqrt{1-b^2};b$). Необходимо доказать, что AM2+AP2 не зависит от переменной b. Найдем AM2 и AP2 используя формулу нахождения расстояния между двумя точками по их координатам: $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. Они соответственно равны $\left(\sqrt{1-b^2}+a\right)^2+b^2$ и $\left(\sqrt{1-b^2}-a\right)^2+b^2$, а их сумма после приведения подобных равна 2a2+2. Это число не зависит от переменной b, что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что сумма квадратов длин сторон четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей. (Теорема Эйлера)

Решение: Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке

Пусть точки A, B, C и D имеют координаты (0,0), (d,0), (c,d) и (0,d) соответственно. Следовательно, координаты точек L и P есть ($\frac{a+c}{2};\frac{d}{2}$) и ($\frac{b}{2};\frac{d}{2}$). Найдем квадраты длин отрезков, с помощью формулы нахождения расстояния между точками по их координатам.

AD^2=a^2+d^2; BC^2=$(c-b)^2+d^2$; DC^2=c^2; AB^2=a^2+b^2;

AC^2=$(c-a)^2+d^2$; BD^2=b^2+d^2; LP^2=$(\frac{b}{2}-\frac{c+a}{2})^2$.

Запишем выражение, которое необходимо доказать, используя значения которые мы нашли.

AD^2+BC^2+DC^2+AB^2=AC^2+BD^2+4LP^2

a^2+d^2 + $(c-b)^2+d^2$ + c^2 + a^2+b^2 = $(c-a)^2+d^2$ + b^2+d^2 +4 $(\frac{b}{2}-\frac{c+a}{2})^2$

Раскроем скобки, приведем подобные и получим верное равенство 0=0. Значит, сумма квадратов длин сторон четырехугольника равна сумме квадратов длин его диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом расстояния между серединами диагоналей.

Задача 3. Диаметры AB и CD окружности перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке К, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Докажите, что если CK:KD так же как 2:1, то AL:LB так же как 3:1.

Решение: Введем прямоугольную систему координат, направив оси по данным диаметрам AB и CD (рис.).

Радиус окружности будем считать равным = 1. Тогда точки A, B, C, D будут иметь координаты (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1) соответственно. Так как CK:KD=2:1, то точка К имеет координаты (0, $\frac{1}{3}$). Найдем координаты точки E как точки пересечения прямой AK, имеющей уравнение $y=\frac{1}{3}(x+1)$ и окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=1$. Получаем, что точка E имеет координаты ($\frac{4}{5};\frac{3}{5}$). Точка L – это точка пересечения прямых CE и оси абсцисс, значит ординаты точки L равна 0.

Найдем абсциссу точки L. Прямая CE задана уравнением $y=2x-1$. Она пересекает ось Ox в точке ($\frac{1}{2}$,0). Отсюда координаты точки L($\frac{1}{2}$,0). Найдем отношение AL:LB. Оно равно трем, что и требовалось доказать.

Задача 4. Найдите расстояние от точки A(-1,3,0) до плоскости α, заданной уравнением x -3y -2z +5=0.

Решение. По формуле $\rho(A,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ получаем:

$$\rho(A,\alpha)=\frac{|-1-3\cdot3-2\cdot0+5|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\rho(A,\alpha)=\frac{|-1-3\cdot3-2\cdot0+5|}{\sqrt{1+2^2+3^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{14}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Задача 5. Векторы a и $в$ взаимно перпендикулярны, а вектор c образует с каждым из них угол 60°. Зная что $|a|=3, |в|=5, |c|=8$, вычислить скалярное произведение $(3a-2в)(в+3c)$.

Решение. По свойству скалярного произведения раскроем скобки:

$$(3a-2в)(в+3c).=3a\cdot в-2в\cdot в+9a\cdot c-6в\cdot c$$

Из определения скалярного произведения получаем: $a\cdot в=0$ (так как a и $в$ перпендикулярны); $\vec{в}\cdot\vec{в}=|\vec{в}|^2=25; \vec{в}\cdot\vec{c}=|в|\cdot|c|\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}|в|\cdot|c|=20$

$$a\cdot c=|a|\cdot|c|\cdot cos60°=\tfrac{1}{2}|a|\cdot|c|=12$$

Подставляя эти значения в выражение $(3a-2в)(в+3c).=3a\cdot в-2в\cdot в+9a\cdot c-6в\cdot c$, находим скалярное произведение: $(3a-2в)(в+3c).$ =0 – 50+9 12 -120=-62

Ответ: $(3a-2в)(в+3c).$ =0 – 50+9 12 -120=-62

Задача 6.Дан квадрат ***ABCD*** со стороной ***a***. Определите расстояние между серединой отрезка ***AM***, где ***M*** – середина ***BC***, и точкой ***N*** на стороне ***CD***, делящей ее так, что ***CN:ND=3:1***.

Решение:

Выберем систему координат как показано на рисунке. Тогда точки ***M*** и ***N*,** согласно условию, будут иметь координаты:

$M\left(\frac{a}{2};a\right)$, $N\left(a;\frac{a}{4}\right)$ соответственно.

Так как ***E*** – середина ***AM*,** то ее координаты будут следующими:

$x_E=\frac{0+\frac{a}{2}}{2}=\frac{a}{4}$; $y_E=\frac{0+a}{2}=\frac{a}{2}$. Значит, ***E*** $\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2}\right)$.

Найдем расстояние между точками ***E*** и ***N***:

$$EN=\sqrt{\left(a-\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}-\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2+\left(-\frac{a}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}a^2+\frac{1}{16}a^2}=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Задача. 7. Основание АВ равнобедренного треугольника равно 20. Окружность радиуса 15 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания АВ в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник АВС.

Решение.

Пусть точка О – центр окружности, расположенной

вне Δ ABC. Радиус окружности, вписанной
в треугольник лежит на пересечении его биссектрис. Пусть точка M – центр окружности, вписанной вΔ ABC, тогда MT – радиус вписанной окружности. Рассмотрим ΔOAM. Угол OAM прямой, как угол между биссектрисами смежных углов; AT - высота, опущенная из вершины прямого угла. Следовательно $AT^2 = MT\cdot TO$.

$AT = \frac{1}{2}AB = 10$; TO=15; $10^2 = MT\cdot 15$, отсюда $MT = \frac{100}{15} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$.

Ответ: $6\frac{2}{3}$.

Для закрепления пройденного материала необходимо решение следующих задач:

1. Докажите, что если в треугольнике две медианы конгруэнтны, то треугольник равнобедренный.

2. Найдите множество таких точек P, что отношение расстояний от каждой из них до двух данных точек равно a.

3. Доказать, что уравнение окружности с центром в точке C (a,c) и радиусом r имеет вид: $(x-a)^2+(y-c)^2=r^2$

4. Найдите угол между прямыми 3x-4y+6=0 и 12x+5y+8=0

5. Определите расстояние от точки A(-3,4) до прямой y=x+2.

6. Вычислите площадь треугольника, вершины которого имеют следующие координаты: A (0,-2), B(6,2) и C(2,4) .

7. На прямой с даны три точки A, B, C так, что точка B лежит между точками A и C. В одной полуплоскости с границей a построены равносторонние треугольники AMB и BPC. Доказать, что середина отрезка PA, середина отрезка MC и точка B являются вершинами равностороннего треугольника.

8. Доказать, что для любой точки P лежащей между вершинами B и треугольника ABC, справедливо равенство :

$AB^2*PC+AC*BP-AP^2*BC=BC*BP*PC$.

9. Дан прямоугольник. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки, принадлежащей плоскости этого прямоугольника до его вершин, в два раза больше суммы квадратов расстояний от этой точки до сторон прямоугольника.

10. Доказать, что если через некоторую точку M провести прямую, пересекающую окружность в точках A и B, то произведение MA*MB постоянно и не зависит от положения прямой.

11. Дан прямоугольник ABCD. Найти множество точек M, для которых $MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$. (ответ: множество точек M есть плоскость)

12. Дан прямоугольник ABCD. Найти множество точек M, для которых MA+MC=MB+MD. (Ответ: пара прямых)

13. Дан прямоугольный треугольник ABC (ÐC=90°) . Найти множество точек P, для которых $2PC^2=PA^2+PB^2$. (ответ: множество точек P есть прямая, содержащая середину M гипотенузы AB и перпендикулярная к медиане CM).

Заключение

Федеральный государственный образовательный стандарт определил приоритетные направления развития образования. Одним из которых является метапредметный подход, как средство достижения метапредметных результатов.

Подведя итоги, можно сделать вывод о том, что использование метапредметного подхода в обучение развивает такие способности, как понимание, мышление, рефлексия и действие. Учащиеся становятся активными участниками получения нового знания, развивается их самостоятельность, аналитическое и творческое мышление, развивается познавательная активность, обеспечивается фундаментальное усвоение знаний.

Координатный метод - наиболее простой в применение, поэтому является необходимой составляющей для решения задач различного уровня. Его применение, как способа достижения метапредметных результатов, позволяет учащимся значительно упростить и сократить процесс решения задач, и в дальнейшем поможет при изучении стереометрии и математики в ВУЗах.

В квалификационной работе:

- Проанализировано содержание программы изучения геометрии в основной школе;
- Рассмотрены варианты изучения метода координат и его применение в некоторых из действующих учебников геометрии;
- Изучена методическая литература по данной теме;
- Выявлены умения, необходимые для успешного овладения учащимися методом координат, как методом математического моделирования ;
- Подобраны системы задач, формирующих эти умения, а также осуществляющих контроль;
- Подобраны методические приемы, способствующие достижению метапредметных результатов;

- Разработаны несколько метапредметных уроков по формированию УУД для решения задач координатным методом.

И было проведено опытное преподавание, которое подтвердило гипотезу о необходимости изучения координатного метода в школьном курсе геометрии, подбором систем геометрических задач, позволяющих овладеть и эффективно использовать метод координат и разработкой интегрированных уроков, способствующих достижению метапредметных результатов учащихся основной школы.

Библиографический список

1. Атанасян, Л. С. Геометрия для 7-9 классов средней школы [Текст] / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина – М. Просвещение, 2012г.- 255с.

2. Виленкин, Н. Я. Математика: Учеб. для 5 кл. сред. шк. [Текст]/ В.И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд.- М:Мнемазина, 2012г. – 280с.

3. Виленкин, Н. Я. Математика: Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И Шварцбурд. – М. Мнемозина, 2014г. – 288с.

4. Дорофеев, Г. В. Математика: Учеб. для 5 кл. общеобразоват. учреждений [Текст] / Л.Г.Петерсон, 2-е–изд.,перераб. - М. Просвещение, 2011г. Ч1-176с.,Ч2-240с.

5. Дорофеев, Г. В. Математика: Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учеб. заведений [Текст] / И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова – М. Дрофа, 2003г. – 368с.

6. Бурмистрова Т.А. Программа по геометрии 7 – 9 классов общеобразовательных учреждений. – М: Просвещение, 2011г.-96с.

7. Погорелов А. В. Геометрия для 7-11 классов средней школы - М: Просвещение, 2014г. - 240с.

8. Шарыгин, И. Ф. Геометрия 7-9 кл.: Учеб для общеоразоват. учеб. заведений [Текст] – М. Дрофа, 2000г. -368с.

9. Автономова, Т. В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: Книга для учителя [Текст]/ Б. И. Аргунов – М. Просвещение, 2009г. – 126с.

10. Гельфанд, И. М. Метод координат [Текст]- М. Наука, 2002г. -90с.

11. Изучение координат в III – IV кл. / Л. Г. Петерсон // Математика в школе - 2015г.- №4

12. Индивидуальные карточки по геометрии для 7-9 кл. / Т. М. Мищенко // Математика в школе – 2009г. - № 8

13. Итоги работы в 7 кл. по учебнику Шарыгина И. Ф. 7-9 / О.В. Бощенко // Математика в школе - 2002г. №5

14. К изучению перемещений на координатной плоскости / Г.Б. Лудина // Математика в школе – 1983г.- №2

15. Метод координат / А. Савин // Квант -2014г. - №9

16. Мишин, В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. [Текст] / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев – М. Просвещение 2001г. – 598с.

17. Лященко, Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов [Текст] / К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко – М. Просвещение, 2012г. – 233с.

18. Лускина М. Г. Факультативные занятия по математике в школе: Методические рекомендации [Текст]/ В. И. Зубарева – Киров ВГПУ, 2005г.

19. Понтрягин, Л. С. Знакомство с высшей математикой. Метод координат [Текст] – М. Наука, 2012г. – 128с.

20. Новые компьютерные технологии. Координатная плоскость // Математика - Приложение к газ. «Первое сентября» – 2004г. №29

21. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (ФГОС ООО). Режим доступа: http://www.ug.ru//new_standards/4.

22. Бутузов В.Ф. Геометрия. Рабочая программа к учебнику Л.С.Атанасяна и др.7-9 классы: пособие для учителей общеобразов. учреждений / В.Ф. Бутузов. – М, Просвещение, 2011г.

23. Пассов Е.А., Основы коммуникативной методики [текст]/Е.И. Пассов. –М: Просвещение, 2004г.