МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ

Том 7, тетрадь 3

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Свердловск
1970

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ, т. УП, ТЕТРАДЬ 3 (1970)

В.М. СИТНИКОВ, А.И. СТАРОСТИН

Конечные группы с расщепляемыми централизаторами инволюций

Группа $\mathfrak{G}$ называется расщепляемой, если в ней имеется совокупность $\mathfrak{M}$ собственных подгрупп $\mathfrak{U}_\alpha$, такая, что всякий отличный от единичного элемент группы $\mathfrak{G}$ содержится в одной и только одной подгруппе $\mathfrak{U}_\alpha$ из $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ при этом называют расщеплением группы $\mathfrak{G}$, а подгруппы $\mathfrak{U}_\alpha$ из $\mathfrak{M}$ – компонентами расщепления. Систематическое изучение расщепляемых групп было начато П.Г. Конторовичем еще в 30–40 годы. Конечные расщепляемые группы к настоящему времени хорошо изучены. Более того, в [1] описаны конечные группы, централизатор каждого неединичного элемента которых обладает нильпотентным расщеплением. Такие группы в [1] называются CNP-группами. (Говорят, что группа обладает нильпотентным расщеплением, если она либо нильпотентна, либо обладает расщеплением, все компоненты которого нильпотентны).

Основная цель настоящей заметки – описать строение конечных групп, централизатор каждой инволюции которых расщепляем. Так как всякая конечная расщепляемая группа с нетривиальным центром обладает нильпотентным расщеплением, то естественно следующее

Определение 1. Конечная группа, централизатор каждой инволюции которой обладает нильпотентным расщеплением, называется CJP- группой.

Л е м м а 1. Подгруппа и фактор-группа CJP- группы снова являются CJP-группами.

Для подгрупп утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{G}$ – CJP-группа, N – её инвариантная подгруппа. Индукцией по порядкам $\mathfrak{G}$ и N докажем, что $\mathfrak{G}/N$ – CJP-группа. Из предположения индукции следует, что N минимальная инвариантная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Если N неразрешима, то, обозначив через P не-

которую силовскую p – подгруппу из N, имеем $G = N \cdot N(P)$, а $G/N \approx N(P)/N \cap N(P)$. Осталось снова воспользоваться предположением индукции, так как $|N(P)| < |G|$. Пусть теперь N разрешима. Тогда N – элементарная абелева p–группа. Обозначим через $\bar{u}$ произвольную инволюцию из G/N. Достаточно доказать, что централизатор $C_{G/N}(\bar{u})$ обладает нильпотентным расщеплением. В силу предположения индукции, можно считать, что $\bar{u}$ содержится в центре фактор-группы G/N. Рассмотрим два случая.

1°. $p > 2$. В этом случае среди прообразов $\bar{u}$ имеется инволюция u, а $N \cdot \{u\}$ – инвариантная в G подгруппа. Тогда $G = N \cdot C(u)$, и осталось заметить, что нильпотентное расщепление сохраняется при гомоморфизме.

2°. $p = 2$. Обозначим через R произвольную силовскую r – подгруппу из G, где $r \neq 2$, и рассмотрим подгруппу $\mathfrak{U} = \{N, u, R\}$, где u – один из прообразов $\bar{u}$. Фактор-группа $\mathfrak{U}/N$ – нильпотентна. Так как $\mathfrak{U}$ – 2 – замкнутая CJP–группа, то централизатор любой инволюции в $\mathfrak{U}$ нильпотентен. В частности, $C_{\mathfrak{U}}(Z)$, где Z – центр силовской 2- подгруппы из $\mathfrak{U}$, совпадает с ее подгруппой Фиттинга. Пусть x – произвольный элемент из R. $\{xN\} \subset \{yN\}$, где y – непримарный элемент. Если y_1 – инволюция из $\{y\}$, то $C_{\mathfrak{U}}(y_1)$ – непримарная нильпотентная подгруппа из $\mathfrak{U}$, содержащая Z. Поэтому $C_{\mathfrak{U}}(y_1) \leq C_{\mathfrak{U}}(Z)$. Значит, $\{y, N\} \leq C_{\mathfrak{U}}(Z)$, в частности, $x \in C_{\mathfrak{U}}(Z)$. Следовательно, $\mathfrak{U}$ нильпотентна.

Обозначим через z инволюцию из пересечения N с центром некоторой силовской 2-подгруппы из G. Тогда $C(z)$ содержит по доказанному R, поэтому $C(z) = G$, т.е. G обладает нильпотентным расщеплением. Поэтому и G/N обладает нильпотентным расщеплением.

Как обычно, через $O_{2'}(G)$ обозначим наибольшую инвариантную подгруппу нечётного порядка из группы G, а через $O_2(G)$ – наибольшую инвариантную 2-подгруппу из G. CJT- группа – конечная группа, в которой централизатор каждой инволюции является 2-группой.

Л е м м а 2. Если $O_2(G) \neq E$ для CJP группы G, то $G/O_{2'}(G)$ является CJT группой.

Можно считать, что $O_{2'}(G) = E$. Обозначим через Z центр $O_2(G)$. Из $2'$-замкнутости централизаторов следует, что $C(Z) = O_2(G)$. Пусть s – произвольная инволюция из G, T – силовская 2-подгруппа из G, содержащая s, а t – инволюция из $Z \cap Z(T)$, где $Z(T)$ – центр T. Из $C(Z) =$

$O_2(G)$ следует, что $C(t) = T$, так как Z лежит в подгруппе Фиттинга из $C(t)$.

Так как $C(s)$ содержит t и так как t не перестановочна ни с одним отличным от e элементом нечётного порядка из G, то осталось рассмотреть случай, когда $C(s)$ ненильпотентен. Из непримарности подгруппы Фиттинга из $C(s)$ следует, что t не лежит в этой подгруппе Фиттинга. Это невозможно, так как $Z \cap C(s)$ – инвариантная 2-подгруппа в $C(s)$. Полученное противоречие показывает, что $C(s)$ – 2-группа.

Лемма 3. 2-замкнутая группа G чётного порядка тогда и только тогда является CJP – группой, когда либо она нильпотентна, либо $G = T \lambda H$, где T – силовская 2-подгруппа из G, и в H имеется нильпотентная инвариантная в G подгруппа A, такая что G/A – группа Фробениуса с инвариантным множителем, изоморфным T.

Пусть G ненильпотентна. Если Z – центр T, то $C(Z) = T \times A$ – нильпотентен, и A – требуемая подгруппа. Обратное очевидно.

Лемма 4. $2'$-замкнутая CJP-группа либо совпадает с централизатором некоторой инволюции, либо её силовская 2-подгруппа циклическая или максимального класса.

Пусть G – $2'$-замкнутая CJP – группа наименьшего порядка из тех, для которых не выполняется утверждение леммы. Тогда $O_2(G) = E$. Обозначим через N минимальную инвариантную подгруппу из G, а через T силовскую 2-подгруппу из G.

Допустим сперва, что $NT \neq G$. По предположению индукции NT совпадает с централизатором некоторой инволюции, поэтому, если $C(N) \neq G$, то из $O_2(C(N)) = E$ следует, что $NT = (N \times T_0) \lambda \{s\}$ расщепляема, $s^2 = e$, $T = T_0 \lambda \{s\}$. $C(N) = A_1 \lambda T_0$. $A_1 T = G$, так как в противном случае $A_1 T$ расщепляема, и $O_2(C(N)) \neq E$. По предположению индукции G/N обладает нильпотентным 2-дополнением и порядок пересечения $C(N)/N$ с подгруппой Фиттинга группы G/N нечётен. Отсюда $T_0 = 2$, а $|T| = 4$, что противоречит выбору G. Значит, $N \leq Z(G)$. Снова применив предположение индукции к G/N, имеем $O_2(G) \neq E$.

Пусть теперь $NT = G$. Так как G не группа Фробениуса, то найдется инволюция $s \in T$, такая что $C(s) \cap N = N_1 \neq E$. Очевидно, ни одна инволюция из $Z(T)$ не перестановочна ни с одним $\neq e$ элементом из N. Поэтому $C(s) = (N_1 \times T_0) \lambda Z(T)$ и $|Z(T)| = 2$. Если $N_1 \subset N$, то $N(N_1) = N \lambda T_1 \subset G$. Если $|T_0| = 2$, то T максимального класса в силу известной леммы [4]. Значит, по предположению индукции, $N(N_1)$ является централизатором некоторой инволюции, поэтому $O_2(C(N)) \neq E$. Это противоречит выбору G. Если же $N_1 = N$, то снова, очевидно, $O_2(C(N)) \neq E$.

Теорема 1. Для разрешимой CJP-группы G выполнено по крайней мере одно из следующих утверждений:

а) G – 2-замкнута;

б) G – $2'$-замкнута;

в) G есть расширение группы нечётного порядка с помощью A_4 или S_4;

г) $G = A \lambda B \lambda \{c\}$, где A и $\{c\}$ – 2 – группы, причём в B содержится инвариантная в G нильпотентная подгруппа B_0, такая что $G/B_0 = \bar{A} \lambda \bar{B} \lambda \{\bar{c}\}$, $\bar{A} \approx A$, $\{\bar{c}\} \approx \{c\}$, $\bar{A} \lambda \bar{B}$ и $\bar{B} \lambda \{\bar{c}\}$ – группы Фробениуса с инвариантными множителями $\bar{A}$ и B, соответственно.

Доказательство. Пусть G не 2-замкнута и не $2'$-замкнута, а $G/O_{2'}(G)$ – группа Фробениуса, инвариантный множитель которой – 2-группа. Полный прообраз N инвариантного множителя является $2'$-замкнутой ненильпотентной инвариантной в G подгруппой. Применим лемму 4. N не может совпадать с централизатором некоторой инволюции, так как порядок инвариантного множителя в группе Фробениуса больше 2. По той же причине силовская 2-подгруппа из N является четверной группой Клейна, и для G выполнено утверждение в).

В силу леммы 2 осталось рассмотреть случай, когда $G/O_2(G) = \bar{A} \lambda \bar{B} \lambda \{\bar{c}\}$ удовлетворяет условиям утверждения г). Полный прообраз H подгруппы $\bar{A} \lambda \bar{B}$ либо 2-замкнут, либо $|\bar{A}| = 4$ по только что доказанному. В последнем случае для G выполнено утверждение в). В первом случае $H = A \lambda B$, где A – силовская 2-подгруппа в H,

$N_H(B) = B$, $O_2(G)$ — нильпотентна и $G = H \cdot N(B) = A \lambda N(B) = A \lambda B \lambda \{c\}$. Положив $B_0 = O_{2'}(G)$ нетрудно проверить, что для G выполнено утверждение г).

Т е о р е м а 2. Если G — неразрешимая CJP-группа, то $G/O_2(G)$ — CNP-группа.

<u>Доказательство</u> будем вести индукцией по порядку группы G. В силу леммы 2 и предположения индукции G полупроста. В [2] показано, что если в G все централизаторы инволюций нильпотентны, то G — CJT-группа. Поэтому в G найдется инволюция u с ненильпотентным централизатором: $C(u) = (A \times S) \lambda \{v\}$, $v^2 = e$, $vxv = x^{-1}$ для любого $x \in A \times S$. Здесь $S \lambda \{v\}$ — силовская 2-подгруппа из $C(u)$. Обозначим через T — силовскую 2-подгруппу из G, содержащую $S \lambda \{v\}$ и рассмотрим два случая:

1°. $Z(T)$ циклический, где $Z(T)$ — центр T.

$Z(T) \subset C(u)$, и если $Z(T) \cap S \neq E$, то в качестве u можно взять инволюцию из $Z(T)$. Тогда T — группа диэдра, и централизатор центральной инволюции обладает абелевым 2-дополнением. Из [3] вытекает справедливость нашего утверждения, так как A_7 не является CJP-группой. Таким образом, можно считать, что $Z(T) = \{v\}$. Поэтому $S \lambda \{v\}$ — элементарная абелева 2-группа.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что $C(v)$ нильпотентен:

$$C(v) = L \times T.$$

Так как $L \subset C(u)$, а $A \lambda \{v\}$ — группа Фробениуса, то $L = E$. Если порядок S равен 2, то T диэдральна или полудиэдральна по лемме из [4]. Применяя теорему Уонга из [5], легко проверить в этом случае справедливость нашего утверждения. Поэтому $|S| > 2$, и T не является 2-группой максимального класса. Тогда T найдется инвариантная нециклическая подгруппа V 4-го порядка. Так как $|T : C_T(V)| = 2$, то $C(V) \cap S \neq E$, и поэтому $V = \{w\} \times \{v\}$, где $w \in S$. Из $C_T(V) = C_T(w)$ имеем $T = (S \times \{v\}) \cdot \{b\}$, где $b^2 \in S \times \{v\}$. Из коммутативности S следует даже $b^2 \in Z(T)$. Так как V инвариантна в T, то $w^b = wv$. Далее из $|S| > 2$ следует, что в S существует элемент c, такой что $\{c\} \times V$ инвариантна в T. Обозначим $c^b = c^\alpha w^\beta v^\gamma$. Тогда $\alpha = 1$, $c = c^{b^2} = c w^\beta v^\gamma w^\beta v^\beta v^\gamma$, откуда $\beta \equiv 0 \pmod 2$, т.е. $c^b = cv$. $\gamma \equiv 0 \pmod 2$, так как в противном случае c принадлежало бы $Z(T)$. Из $w^b = wv$ имеем $(cw)^b = cw$, т.е. $cw \in Z(T)$. Это противоречит предположению о цикличности $Z(T)$.

2°. $Z(T)$ нециклический.

Так как $Z(T) \cap S \neq E$ в этом случае, то можно считать, что

$u \in Z(T)$. Тогда $T = S \lambda \{v\}$, S абелева, и любая инволюция из S лежит в $Z(T)$. Централизатор любой инволюции из S совпадает с $C(u)$. Нетрудно проверить, что $|T| > 4$, и централизатор любой инволюции из $T \setminus S$ является 2-группой.

Покажем, что $N(T) = T$. Если $N(T) \supset T$, то $N(T)$ является группой Фробениуса с инвариантным множителем T, так как $N_{C(u)}(T) = T$. Далее, так как ни одна инволюция из S не сопряжена в G ни с одной инволюцией из $T \setminus S$, то S — инвариантная подгруппа в $N(T)$. Тогда $N(T)/S$ — группа Фробениуса с инвариантным множителем 2-го порядка. Это невозможно.

По первой теореме Грюна группа G имеет фактор-группу, изоморфную с T/T^*, где

$$T^* = [T \cap N(T)'] \bigcup_{x \in G} (T \cap x^{-1} T' x).$$

Так как $T' \subset S$, и ни одна инволюция из $T \setminus S$ не сопряжена ни с одной инволюцией из S, то $T^* \subseteq S$. Поэтому G имеет подгруппу G_1 индекса 2, такую что $G_1 \cap T = S$. По предположению индукции G_1 — полупростая CNP-группа с абелевой силовской 2-подгруппой. Из [1] следует, что S — элементарная абелева 2-группа. Тогда и T абелева. В силу теоремы Бернсайда из $N(T) = T$ получаем разрешимость G, что противоречит условию.

<u>Определение 2.</u> Конечная группа называется минимальной не CJP-группой, если все ее собственные подгруппы являются CJP-группами, а сама группа — не CJP-группа.

Т е о р е м а 3. Конечная группа G тогда и только тогда является минимальной не CJP-группой, когда она есть группа одного из следующих типов:

1. $G = M \times \{t\}$, где $t^2 = e$, M — группа Шмидта и либо $|M|$ нечётен, либо инвариантная силовская 2-подгруппа в M — элементарная абелева.
2. $G = (K \lambda \{a\}) \lambda \{t\}$, где $a^4 = t^2 = e$, $K \lambda \{a\}$ — группа Фробениуса, и K — минимальная инвариантная в G подгруппа.
3. $G = (\{a\} \lambda \{s\}) \times \{b\} \times \{t\}$, где $a^p = s^2 = b^q = t^2 = e$, $sas = a^{-1}$, p и q — (не обязательно различные) простые числа.
4. G — группа Шмидта, порядок центра которой чётен.

5. $G = (\{a\} \lambda \{s\}) \times \{t\}$, где $a^p = s^2 = t^4 = e$, $sas = a^{-1}$, p – простое число.

Доказательство. Легко показать, что в центре группы G имеется инволюция. Рассмотрим два случая.

Случай 1. В центре G имеется инволюция t, не содержащая в Φ – подгруппе группы G.

В этом случае $G = M \times \{t\}$. Так как каждая собственная подгруппа из M $2'$-замкнута, то по теореме Ито [6] M либо $2'$-замкнута, либо является 2-замкнутой группой Шмидта. Если M – группа Шмидта, то G – типа 1. Пусть M не является группой Шмидта. Тогда $|M|$ четен, всякая собственная подгруппа из M нечётного порядка нильпотентна, и $M = K \lambda S$, где S – силовская 2-подгруппа из M. Заметим, что $C_S(K) = E$, ибо в противном случае G – CJP – группа. Пусть в S имеется элемент a порядка 4. Подгруппа $(K\lambda\{a\}) \times \{t\}$ совпадает с G, так как в противном случае $C_S(K) \ni a$. Подгруппа $(K\lambda\{a^2\}) \times \{t\}$ ненильпотентна, поэтому G – группа типа 2.

Можно теперь считать, что S – элементарная абелева. Легко показать, что $|S| = 2$. Пусть $\{a\}$ циклическая простого порядка из $Z(K)$, допустимая относительно S. Предположим, что $\{a\}\lambda S$ – группа Фробениуса. Так как $K \lambda S$ – не группа Фробениуса, то в K найдется подгруппа $\{b\}$ простого порядка, централизующая S. Подгруппа $\{a, b, S, t\}$ не является CJP – группой, поэтому G – группа типа 3.

Так как M – не группа Шмидта, то в M найдется собственная подгруппа, которая является группой Шмидта. Её порядок имеет вид $2p$, где p – простое число. Отсюда легко заключить, что в центре K всегда найдется такой элемент a простого порядка, такой что $\{a\} S$ – группа Фробениуса.

Случай 2. Каждая инволюция из центра G содержится в Φ – подгруппе.

В этом случая каждая собственная подгруппа из G обладает нильпотентным расщеплением. Из основного результата [4] следует, что G – группа типа 4 или 5.

Обратное утверждение очевидно.

Литература

1. А.И.Старостин. О группах с расщепляемыми централизаторами. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 29:3 (1965) 605–614.
2. M. Suzuki. Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed. Ann. of Math., 82:2(1965) 191-212.
3. D. Gorenstein, J.H. Walter. On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups. Illinois J. Math., 6:4 (1962) 553-593.
4. В.М. Бусаркин, А.И.Старостин. Конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают нильпотентным расщеплением. – Изв. АН СССР, Сер. матем., 29:1 (1965) 97–108.
5. W.J. Wong. On finite groups whose 2-Sylow subgroups have cyclic subgroups of index 2. J. Austral. Math. Soc., 4:1 (1964) 90-112.
6. N. Ito. Note on (LM)-groups of finite orders. Kodai Math. Semin. Repts., 1-2(1951), 1-6.

Поступила 7.5.1969г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАПИСКИ, т. УП, ТЕТРАДЬ 3 (1970)

Л.А. СКОРНЯКОВ

О максимально-идеальных покрытиях колец

Настоящая заметка не претендует на глубину полученных результатов. Её цель – обратить внимание специалистов по теории колец на один круг вопросов, изучавшихся П.Г. Конторовичем в случае групп и сохраняющих смысл для колец. Речь идет о покрытиях (см. [1], [2]). Заметим, что некоторые результаты в этом направлении получил Ковач ([6]).

Множество $\mathfrak{P}$ максимальных двусторонних идеалов кольца $\mathfrak{R}$ (все кольца в этой заметке предполагаются ассоциативными) назовем <u>максимально-идеальным покрытием</u>, если каждый элемент из $\mathfrak{R}$ принадлежит некоторому идеалу из $\mathfrak{P}$. Пересечение всех идеалов из $\mathfrak{P}$ называется <u>ядром покрытия</u> $\mathfrak{P}$. Если ядро покрытия $\mathfrak{P}$ равно пересечению конечного числа идеалов из $\mathfrak{P}$, то оно называется <u>конечно-представимым</u>. Кольцо с нулевым умножением будем, для краткости, называть <u>нуль-кольцом</u>. Прилагательные "циклическое", "элементарное" и т.п., относящиеся к нуль-кольцу, указывают на свойства соответствующей абелевой группы.

<u>Теорема 1.</u> Кольцо $\mathfrak{R}$ обладает максимально-идеальным покрытием $\mathfrak{P}$ с конечно-представимым ядром Δ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}/\Delta \cong \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{Z}$ – нециклическая прямая сумма конечного числа конечных элементарных нуль-колец, а $\mathfrak{S}$ – прямая сумма конечного (возможно, пустого) <u>множества простых колец</u> (имеется в виду, что слагаемые не являются нуль-кольцами).

<u>Доказательство.</u> Если $\mathfrak{R}/\Delta = \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{S}$, то существование нужного максимально-идеального покрытия легко выводится из