АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 35

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

6

МОСКВА · 1971

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
35 (1971), 1208—1224

УДК 519.4

В. М. СИТНИКОВ

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С 2-ЗАМКНУТЫМИ ИЛИ 2′-ЗАМКНУТЫМИ ЦЕНТРАЛИЗАТОРАМИ ИНВОЛЮЦИЙ

В работе изучены конечные группы, централизатор каждой инволюции в которых 2-замкнут или 2′-замкнут.

Конечная группа G называется 2-замкнутой, если силовская 2-подгруппа ее нормальна; G называется 2′-замкнутой, если она обладает нормальным 2-дополнением.

Судзуки описал конечные группы, централизатор каждой инволюции в которых 2-замкнут, и назвал их c-группами ([9]). Конечные группы, в которых централизатор каждой инволюции 2′-замкнут, описаны Горенстейном в статье ([5]). Назовем их c'-группами. В настоящей работе доказана следующая

ТЕОРЕМА А. *Пусть G — конечная группа, централизатор каждой инволюции которой 2-замкнут или 2′-замкнут. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *G — c'-группа;*

(2) *$G/O(G)$ — c-группа.*

Здесь $O(G)$ — *наибольшая инвариантная подгруппа нечетного порядка группы G.*

Замечание. В работе ([5]) пропущена следующая c'-группа H: $H/O(H) \simeq PSL^*(3, 4)$ (см. лемму 5 настоящей работы).

В качестве следствия получается следующая

ТЕОРЕМА Б. *В простой конечной неабелевой группе G централизатор каждой инволюции 2-замкнут или 2′-замкнут тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $PSL(2, q)$, q — *степень простого числа* >3;

(2) $PSL(3, 2^n)$, $n>1$;

(3) $PSU(3, 2^n)$, $n>1$;

(4) $Sz(2^{2n+1})$, $n\geqslant 1$;

(5) A_7.

Обозначения стандартны. Приведем лишь некоторые из них:

$U_G(T;\ q)$ — множество T-инвариантных q-подгрупп группы G, которые пересекаются с T по единичной подгруппе, где T — некоторая подгруппа из G;

$U^*_D(T;\ q)$ — множество максимальных по включению элементов из $U_G(T;\ q)$;

$SCN_n(T)$ — множество самоцентрализующихся инвариантных подгрупп в группе T, минимальное число образующих которых не ниже n;

$A \leftthreetimes B$ — полупрямое произведение с инвариантным множителем A;

$O(x) = O_{2'}(C_G(x)) = O(C_G(x))$, где x — некоторый элемент группы G;

p, r — простые числа;

V_{p^n} — элементарная абелева p-группа порядка p^n.

Приведем некоторые определения:

cc'-группа — конечная группа четного порядка, централизатор каждой инволюции которой 2-замкнут или $2'$-замкнут;

Группа G называется p-скованной, если для каждой неединичной p-подгруппы P группы G централизатор $C_G(Q) \leqslant O_{p',p}(N_G(P))$, где Q — силовская p-подгруппа из $O_{p',p}(N_G(P))$.

Пусть H — подгруппа группы G, содержащая силовскую 2-подгруппу T из G. Будем говорить, что H контролирует 2-слияние в T, если любые 2-элемента из T, сопряженные в G, сопряжены и в группе H.

Подгруппа H четного порядка группы G называется сильно 2-изолированной подгруппой, если централизатор любой инволюции из H в группе G содержится в H.

Все рассматриваемые группы конечны.

ЛЕММА 1. *Пусть в группе G централизатор каждой инволюции разрешим. Тогда группа G 2-скована.*

Доказательство. Пусть P — неединичная 2-подгруппа, $N = N_G(P)$, Q — силовская 2-подгруппа из $O_{2',2}(N)$. Так как $P \leqslant Q$ и $C(Q) \leqslant C(P) \leqslant N$, то $C(Q)$ содержится в разрешимом радикале $S(N)$ группы N. Утверждение леммы следует теперь из известной леммы Холла — Хигмэна ([1]) и равенства $O_{2',2}(S(N)) = O_{2',2}(N)$.

ЛЕММА 2. *Фактор-группа cc'-группы G по инвариантной подгруппе N нечетного порядка является cc'-группой.*

Доказательство. Пусть $N\omega$ — произвольная инволюция из фактор-группы G/N. Тогда полный прообраз централизатора $C_{G/N}(N\omega)$ есть $N \cdot C_G(\omega)$. Поэтому $C_{G/N}(N\omega) \simeq C_G(\omega)/N \cap C_G(\omega)$. Осталось заметить, что гомоморфный образ 2-замкнутой или $2'$-замкнутой группы соответственно 2-замкнут или $2'$-замкнут.

ЛЕММА 3. *Если в cc'-группе G имеется неединичная инвариантная 2-подгруппа N, то фактор-группа $G/O(G)$ — c-группа.*

Доказательство. В силу леммы 2 можно считать, что $O(G) = 1$. Предположим теперь, что в группе G существует инволюция τ с не 2-замкнутым централизатором: $C(\tau) = O(\tau) \leftthreetimes T$, $O(\tau) \neq 1$. Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая T, тогда $D = T \cap Z(S) \cap O_2(G) \neq 1$. Ясно, что $[D, O(\tau)] = 1$. Пусть инволюция $\sigma \in D^{\#}$, тогда $C(\sigma)$ содержит не 2-замкнутую подгруппу $H = \{C(\tau), O_2(G)\}$. Следовательно, централизатор $C(\sigma)$ не 2-замкнут. Но тогда $[O(\tau), O_2(G)] = 1$. С другой стороны, по лемме 1 $C(O_2(G)) \leqslant O_2(G)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. *Если G — разрешимая cc'-группа, то фактор-группа $G/O(G)$ является c-группой.*

$\simeq PSL(2, 2^n)$. Теперь, как и в предыдущем случае, получаем, что $C_N(\nu)$ неразрешим. Полученное противоречие показывает, что $n = 2m$ четно и $G \cap [F \times \{\nu\}]$ содержит инволюцию $\mu = \sigma\nu$, $\sigma \in F$, $\sigma^2 = 1$. Рассмотрим группу $H = N \lambda \{\mu\}$. Пусть $\overline{\mu}$—автоморфизм группы $GL(3, 2^n)$, индуцирующий автоморфизм μ. Тогда $C_{GL(3,2^{2m})}(\overline{\mu}) = GU(3, 2^{2m})$, так как $\overline{\mu}$ централизуют те и только те матрицы A из $GL(3, 2^{2m})$, для которых ${}^t\overline{A} = A^{-1}$, $\overline{A}$ — матрица, полученная из A под действием инволютивного автоморфизма поля $GF(2^{2m})$. Как и выше, нетрудно показать, что в случае $m > 2$ $C_N(\mu)$ содержит подгруппу $C \simeq PSU(3, 2^{2m})$, т. е. $C_N(\mu)$ неразрешим. Следовательно, осталось проверить случай $n = 4$, $N = PSL(3, 4)$ и G изоморфно вкладывается в группу $M = L \lambda \{\mu\}$, $L \simeq PGL(3, 4)$. Если $G = M$, то $C_G(\mu) = \{\mu\} \times L_1$, $L_1 \simeq PGU(3, 4)$. Так как $PGU(3, 4)$ — не 2-замкнутая и не $2'$-замкнутая группа, то $G = N \lambda \{\mu\} = PSL^*(3, 4)$. В этом случае централизатор $C_G(\mu) = \{\mu\} \times L_2$, где $L_2 \simeq PSU(3, 4)$, $2'$-замкнут, так как $PSU(3, 4) \simeq V_9 \lambda Q$, где Q — группа кватернионов восьмого порядка. Так как все инволюции из $G \setminus N$ сопряжены ([12]), то G является c'-группой. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 6. *Пусть T — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда $SCN_3(T) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное. Так как централизаторы инволюций в группе G разрешимы и группа G проста, то по результату Янко — Томпсона ([8]) G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, q)$, A_7, $PSU(3,4)$, $SL(3, 3)$, M_{11}. В первых трех случаях G — либо c-группа, либо c'-группа. В группах $SL(3, 3)$ и M_{11} все инволюции сопряжены и централизатор инволюции изоморфен $GL(2, 3)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 7. *Силовская 2-подгруппа T группы G нормализует, но не централизует некоторую подгруппу нечетного порядка.*

Доказательство. Предположим противное. Покажем, что в этом случае централизатор каждой инволюции 2-замкнут. Так как в силу леммы 1 и леммы 6 справедлива теорема транзитивности Томпсона, то любая подгруппа нечетного порядка, которая нормализуется $A \in SCN_3(T)$, централизуется A ([4]). Пусть x — произвольная инволюция из T. Предположим, что $C(x)$ не 2-замкнут: $C(x) = O(x) \lambda S$. Без ограничения общности можно считать, что $S \leqslant T$. Так как A имеет инвариантную в T элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то $C_A(x)$ содержит элементарную абелеву подгруппу V порядка 4. Пусть t_1, t_2, t_3 — инволюции из V. Тогда по лемме Брауэра

$$O(x) = C_{O(x)}(t_1)\, C_{O(x)}(t_2) C_{O(x)}(t_3).$$

Если для некоторого $i = 1, 2, 3$ $C(t_i)$ $2'$-замкнут, то $O(t_i)$ централизуется A. Следовательно, V также централизует $C_{O(x)}(t_i)$. Если $C(t_i)$ 2-замкнут, то ясно, что $C_{O(x)}(t_i)$ централизует V. Таким образом, V централизует $O(x)$. Без ограничения общности можно считать, что $V \cap Z(T) \neq 1$, и пусть инволюция $\tau \in (V \cap Z(T))^{\#}$. Тогда по предположению $C(\tau)$ 2-замкнут. По доказанному выше $O(x) \leqslant C(\tau)$. Следовательно, $[O(x), S] \leqslant T \cap O(x) = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 8. *Любая элементарная абелева 2-подгруппа порядка* 4 *в группе G содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть B — элементарная абелева 2-подгруппа порядка 4 из силовской 2-подгруппы T группы G, централизатор каждой инволюции которой 2-замкнут. В этом случае любой элемент Q из $U(T;\, 2')$ содержится в $C(B)$, так как $H = Q \leftthreetimes B$ является c-группой и по лемме 6 (9) B централизует Q. С другой стороны, $Z(T) \leqslant O_2(C(B))$, поэтому $[Z(T), Q] \leqslant Q \cap O_2(C(B)) = 1$. Следовательно, $Q \leqslant C(Z(T))$. Так как по лемме 7 существует T-инвариантная p-подгруппа P, которая не централизуется T, то централизатор $C = C(Z(T))$ $2'$-замкнут и $\{U(T;\, 2')\} = O(C) = O$. Заметим также, что $C(z) = C$ для каждой инволюции $z \in Z(T)^{\#}$. Покажем, что $N = N(O)$ является сильно 2-изолированной подгруппой в группе G. Пусть $A \in SCN_3(T)$. Докажем, что $\{U(T;\, 2')\} = \{U(A;\, 2')\}$. Так как $O \leqslant \{U(A;\, 2')\}$, то достаточно показать, что $\{U(A;\, 2')\} \leqslant O$. Пусть P — произвольная A-инвариантная p-подгруппа из G, $P \leqslant P_1 \in U^*(A;\, p)$. В силу теоремы транзитивности Томпсона (4) существует $x \in C(A)$ такой, что $P_1^x \in U(T;\, p)$. Следовательно, $P_1^x \leqslant O$. С другой стороны, $C(A) = A \times D$, где $D \leqslant O$. Так как можно считать, что $x \in D$, то $(P_1^x)^{x^{-1}} = P_1 \leqslant O$. Утверждение доказано.

Пусть V — четверная подгруппа из T такая, что $V \cap Z(T) \neq 1$. Докажем, что $\{U(V;\, 2')\} = O$. Если $Q \in U(V;\, 2')$, то по лемме Брауэра $Q = C_Q(t_1)\, C_Q(t_2)\, G_Q(t_3)$, где t_1, t_2, t_3 — инволюции из V. Более того, если $C(t_i)$ 2-замкнут для некоторого $i = 1, 2, 3$, то $C_Q(t_i) \leqslant C_Q(t_j)$ для $j \neq i$, $i, j = 1, 2, 3$. Так как централизатор инволюции из $Z(T)$ не 2-замкнут по замечанию, приведенному выше, то $Q = \{C_Q(t) \mid t \in V^{\#}$ и $C(t)$ $2'$-замкнут$\}$. С другой стороны, если $C(t_i)$ $2'$-замкнут, то $C_Q(t_i) \leqslant Q_i$, где $Q_i \in U(A;\, 2')$. Следовательно, $Q \leqslant O$ и утверждение доказано.

Пусть T_1 — силовская 2-подгруппа группы G и T_1 содержит V, где V — четверная подгруппа из T и $V \cap Z(T) \neq 1$, тогда $T_1 \leqslant N$. Это следует из того, что $\{U(T_1;\, 2')\} \leqslant \{U(V;\, 2')\} = O$.

Пусть ν — произвольная инволюция из T. Так как A имеет инвариантную элементарную абелеву подгруппу порядка 8 в T, то $C_A(\nu)$ содержит четверную подгруппу V_ν такую, что $V_\nu \cap Z(T) \neq 1$.

Рассмотрим централизатор инволюции ν из T. Пусть $C(\nu)$ $2'$-замкнут: $C(\nu) = O(\nu) \leftthreetimes S$. По доказанному выше $C(\nu) \leqslant N$, так как $O(\nu) \in U(V_\nu;\, 2')$ и $V_\nu \leqslant S$.

Предположим теперь, что $C(\nu)$ не $2'$-замкнут: $C(\nu) = S \leftthreetimes K$, $S = O_2(C(\nu))$. Как и выше, получаем, что $S \leqslant N$. Покажем, что $K \leqslant N$. Без ограничения общности можно считать, что $S \leqslant T$. Пусть $Z = \Omega_1(Z(S))$, и пусть $\tau \in (Z \cap Z(T))^{\#}$, $k \in K$. Тогда $\tau^k \in Z$ и $C(\tau^k) = O^k \leftthreetimes T^k$. Так как $C(\tau^k)$ содержит четверную подгруппу V из A такую, что $V \cap Z(T) \neq 1$, то по доказанному выше $O^k = O$ и, следовательно, $K \leqslant N$. Тем самым мы доказали, что N является сильно 2-изолированной подгруппой. Это противоречит выбору G. Лемма доказана.

Следствие. *Централизатор элементарной абелевой 2-подгруппы порядка 4 в группе G $2'$-замкнут.*

ЛЕММА 9. *Пусть S — элементарная абелева 2-подгруппа порядка 4 в группе G, и пусть $P \in U(S;\ p)$. Тогда*

$$P = \{C_P(t) \mid t \in S^{\#} \text{ и } C(t) \text{ не 2-замкнут}\}.$$

Доказательство. Как было уже замечено в лемме 8, если централизатор некоторой инволюции t из $S^{\#}$ 2-замкнут, то $C_P(t) \leqslant C_P(s)$ для любой инволюции $s \in S \setminus \{t\}$. С другой стороны, $P = \{C_P(s) \mid s \in S^{\#}\}$. Так как по лемме 8 S содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором, то утверждение леммы становится очевидным.

Обозначим через O функтор на группе G, который каждой подгруппе H из G ставит в соответствие $O(H)$. Пусть A — элементарная абелева 2-подгруппа ранга не ниже 3.

Определение 1. O назовем A-сигнализаторным функтором в группе G, если для каждой пары инволюций ν, $\sigma \in A^{\#}$ имеет место:

$$O(\nu) \cap C(\sigma) \leqslant O(\sigma).$$

Определение 2. Пусть B — нециклическая абелева 2-подгруппа группы G. Тогда $U_O(B)$ означает множество B-инвариантных подгрупп K из G нечетного порядка таких, что

$$K = \{K \cap O(b) \mid b \in B^{\#}\}.$$

Приведем следующий результат Гольдшмидта [([6]), стр. 405].

ТЕОРЕМА. *Если элементарная абелева 2-подгруппа A порядка 16 в группе H обладает A-сигнализаторным функтором O в группе H, то элементы из $U_O(A)$ в H порождают подгруппу из H нечетного порядка.*

Чтобы применить теорему Гольдшмидта, докажем предварительно следующие две леммы.

ЛЕММА 10. *Нециклическая абелева 2-подгруппа A в G обладает A-сигнализаторным функтором O в группе G.*

Доказательство. Пусть ν и σ — произвольные инволюции из A, и пусть $D = O(\nu) \cap C(\sigma)$. Если $C(\sigma)$ $2'$-замкнут, то, очевидно, что $D \leqslant O(\sigma)$.

Пусть централизатор $C(\sigma)$ не $2'$-замкнут: $C(\sigma) = Q \leftthreetimes K$, $Q = O_2(C(\sigma))$. Так как централизатор $C(\{\nu\} \times \{\sigma\})$ по следствию леммы 9 $2'$-замкнут, то $D \leqslant O(C(\{\nu\} \times \{\sigma\})) = K_0$. С другой стороны, $C(\{\nu\} \times \{\sigma\})$ 2-замкнут, так как содержится в $C(\sigma)$. Поэтому $C(\{\nu\} \times \{\sigma\}) = Q_0 \times K_0$. Для доказательства леммы нам достаточно показать, что K_0 централизует Q. Пусть Q_1 — централизатор K_0 в группе Q. Тогда $Q_1 \geqslant Q_0$ и $C_Q(Q_1) \leqslant Q_1$. Предположим, что $Q_1 < Q$, и пусть $H = Q \leftthreetimes K_0$. Тогда

$N = N_H(Q_1) = Q_2 \leftthreetimes K_0 > H$ и $C_H(Q_1) = Z(Q_1) \times K_0 \triangleright N$. По лемме Фраттини, $N = Z(Q_1) \cdot N_N(K_0)$. С другой стороны, $N_N(K_0) = K_0 \times Q_1$. Следовательно, $N = Q_1 \times K_0$. Это противоречит тому, что $Q_1 < Q$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Множество $U_0(A)$ совпадает с множеством $U(A;\ 2')$, если A — нециклическая абелева 2-подгруппа группы G.*

Доказательство. По определению, любой элемент из $U_0(A)$ содержится в $U(A;\ 2')$. Пусть $K \in U(A;\ 2')$. Тогда $K \equiv U(B;\ 2')$, где B — элементарная абелева подгруппа из A порядка 4. По лемме 9, $K = \{C_K(b) \mid b \in B^{\#}$ и $C(b)$ не 2-замкнут$\}$. С другой стороны, если $C(b)$ $2'$-замкнут для некоторой инволюции b из $B^{\#}$, то $C_K(b) = K \cap O(b)$. Лемма доказана.

Из теоремы Гольдшмидта и предыдущих лемм вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — элементарная абелева 2-подгруппа в группе G порядка 16. Тогда элементы из $U(A;\ 2')$ порождают подгруппу нечетного порядка в группе G.*

Замечание. Другими словами, подгруппа $H = \{U(A;\ 2')\}$ — единственный максимальный элемент по включению из $U(A;\ 2')$.

ЛЕММА 12. *Пусть H — конечная c'-группа и $H/O(H) \simeq PSL^*(3,\ 4)$, S — четверная 2-подгруппа группы H. Тогда $N_H(S)$ действует транзитивно на множестве максимальных S-инвариантных p-подгрупп из H.*

Доказательство. Предположим сначала, что все максимальные S-инвариантные p-подгруппы из H содержатся в $O(H)$. Тогда они являются силовскими p-подгруппами группы $O(H)$. Пусть $M = O(H) \leftthreetimes S$, а P_1 и P_2 — различные S-инвариантные силовские p-подгруппы группы $O(H)$. Тогда $P_1 = P_2^x$ для $x \in O(H)$ и $S^x \leqslant N_M(P_1)$. Так как S и S^x являются силовскими 2-подгруппами группы $N_M(P_1) = K \leftthreetimes S$, то существует $y \in K \leqslant O(H)$ такой, что $S^y = S^x$. Следовательно, $yx^{-1} \in N_M(S) \cap O(H) \leqslant C_M(S)$. С другой стороны, $P_1^{yx^{-1}} = P_1^{x^{-1}} = P_2$ и лемма в этом случае доказана.

Поэтому существует S-инвариантная p-подгруппа P, которая не содержится в $O(H)$. По доказанному выше можно считать, что $O(H) = 1$ и $H = PSL^*(3,\ 4)$. Так как $PSL(3,\ 4)$ является $C|T$-группой, то $S \nleqslant PSL\ (3,\ 4)$ и $P \leqslant C_H(\nu)$ для некоторой инволюции $\nu \in S \setminus PSL\ (3,\ 4)$. С другой стороны, все инволюции из $PSL^*\ (3,\ 4) \setminus PSL\ (3,\ 4)$ сопряжены ([12]). Следовательно, $C_H(\nu) = (P \leftthreetimes Q) \times \{\nu\}$, где $P \simeq V_9$, Q — группа кватернионов порядка 8, а $P \leftthreetimes Q$ является группой Фробениуса из $PSL\ (3,\ 4)$, $S = \{\nu\} \times \{\tau\}$, $\tau \in Q_0$. Пусть P_1 — другая максимальная S-инвариантная p-подгруппа из H. Тогда $P_1 \leqslant C_H(\nu\tau)$. С другой стороны, инволюции ν и $\nu\tau$ сопряжены в $N_H(S)$. Следовательно, P и P_1 сопряжены элементом из $N_H(S)$. Лемма доказана.

Замечание. Эта лемма показывает, что пропущенная в работе ([5]) группа $PSL^*\ (3,\ 4)$ не влияет на доказательство основной теоремы из ([5]).

ЛЕММА 13. *Пусть S — подгруппа из силовской 2-подгруппы T группы G, и пусть $S\simeq V_{2^n}$, $n\geqslant 2$. Тогда для каждого простого нечетного числа p имеет место*:

(1) *$O(C(S))$ действует транзитивно сопряжением на элементах множества $U^*(S;p)$.*

(2) *T нормализует некоторый элемент из $U^*(S;p)$.*

(3) *Если $P\in U(S;p)$, то*

$$N(S)=O(C(S))\cdot[N(S)\cap N(P)].$$

Доказательство. Пусть $O(C(S))=O(S)$. Докажем, что (3) следует из (1). Пусть $x\in N(S)$, $P\in U^*(S;p)$. Тогда по (1) $P^x=P^y$, где $y\in O(S)$. Следовательно, $xy^{-1}\in N(P)$. Отсюда $x\in O(S)[N(S)\cap N(P)]$.

Приступим к доказательству утверждения (1), когда $S\simeq V_{2^n}$, $n\geqslant 3$. Пусть утверждение (1) не выполняется. Тогда множество элементов из $U^*(S;p)$ разбивается на несколько классов сопряженных p-подгрупп относительно действия элементов из $O(S)$. Обозначим это множество классов через $J_1, J_2, \ldots, J_k$, $k\geqslant 2$. Пусть P_i — некоторые представители этих классов.

Предположим, что существуют i и j такие, что $i\neq j$ и $P_i\cap P_j\neq 1$. Выберем среди таких пересечений максимальное по порядку. Пусть это будет $D=P_1\cap P_2$, $P_1\in J_1$, $P_2\in J_2$. Рассмотрим нормализатор $N=N(D)$. Пусть $R_i=N_{P_i}(D)$, $i=1, 2$. Ясно, что $R_i>D$, $i=1, 2$. Так как $|S|\geqslant 8$, то по лемме 8.5.5 из ([4]) следует, что существует инволюция $v\in S$ такая, что $C_{R_i}(v)=Q_i\nleqslant D$. Следовательно, $Q_iD>D$, $i=1, 2$. Если централизатор $C(v)$ 2-замкнут, то $C_{R_i}(v)$ содержится в $C_{R_i}(x)$ для любой инволюции $x\in S\setminus\{v\}$. Так как S содержит инволюцию с не 2-замкнутым централизатором, то без ограничения общности можно считать, что централизатор $C(v)$ $2'$-замкнут. Пусть $C(v)=O(v)\leftthreetimes S_1$. Тогда N содержит подгруппу $H=DO(v)\leftthreetimes S$. Пусть DQ_i содержится в S-инвариантной силовской p-подгруппе F_i из H, $i=1, 2$. Тогда, как в лемме 12, можно показать, что существует элемент y из $O(C_H(S))$ такой, что $F_1=F_2^y$. С другой стороны, $F_i\cap P_i\geqslant DQ_i>D$. Следовательно, в силу выбора группы D, F_i, $i=1, 2$, содержатся, с одной стороны, в максимальных S-инвариантных p-подгруппах, которые принадлежат J_1, а с другой стороны, содержатся в максимальных S-инвариантных p-подгруппах, которые принадлежат J_2. Полученное противоречие с выбором D доказывает, что для различных i и j $P_i\cap P_j=1$.

Пусть $P_1\in J_1$, $P_2\in J_2$. По лемме 8.5.5 ([4]) существует инволюция $v\in S$ такая, что $C_{P_i}(v)=Q_i\neq 1$, $i=1, 2$. Как уже было сказано выше, можно считать, что $C(v)$ $2'$-замкнут. Пусть $C(v)=O(v)\leftthreetimes S_1$. Тогда в группе $O(v)$ существуют S-инвариантные силовские p-подгруппы R_1 и R_2, содержащие Q_1 и Q_2 соответственно. С другой стороны, $R_1=R_2^x$ для некоторого элемента x из $C_{O(v)}(S)$. Следовательно, $P_1\cap P_2^y\neq 1$ для некоторого элемента $y\in O(S)$. Теперь, как и выше, можно показать, что $P_2\in J_1$. Полученное противоречие доказывает утверждение (1) в случае $S\simeq V_{2^n}$, $n\geqslant 3$.

Приступим к доказательству (2), когда $S \simeq V_{2^n}$, $n \geqslant 3$. Можно считать S порядка 8. В самом деле, пусть S_1-подгруппа из S порядка 8. В силу утверждения (3), S нормализует максимальную S_1-инвариантную p-подгруппу P_1 из G. Следовательно, $P_1 \leqslant P$, где $P \in U^*(S;\ p)$. С другой стороны, S_1 нормализует P. Поэтому, по (1), $|P| \leqslant |P_1|$ и $P = P_1$. Пусть $A \in SCN_3(T)$. Если $S \leqslant A$, то $A \leqslant N_T(S)$ и поэтому A нормализует некоторый элемент из $U^*(S;\ p)$, который является также максимальной A-инвариантной p-подгруппой из G. Применяя теперь рассуждения к подгруппе A вместо S, получаем, что силовская 2-подгруппа T из G нормализует некоторую максимальную S-инвариантную p-подгруппу из G. В этом случае утверждение (2) доказано. Поэтому будем считать, что $S \nleqslant A$. Будем предполагать, что (2) выполняется для всех $S_0 \simeq V_8$ таких, что $|S_0 \cap A| > |S \cap A|$. По лемме 4.1 из ([5]) существует $S_0 \simeq V_8$ из $N_T(S)$ такая, что $|S_0 \cap A| > |S \cap A|$. По (3) S_0 нормализует некоторую максимальную S-инвариантную p-подгруппу P из G. С другой стороны, по (2), T нормализует некоторую S_0-инвариантную p-подгруппу P_0 из G. Следовательно, $|P_0| \geqslant |P|$. Однако S нормализует P_0, так как $S \leqslant T$. Поэтому $|P| = |P_0|$ и $P_0 \in U^*(S;\ p)$. Тем самым утверждение (2) доказано в случае $S \simeq V_{2^n}$, $n \geqslant 3$.

Теперь будем считать, что $S \simeq V_4$. Так как $SCN_3(T) \neq \varnothing$, то в T существует $S_0 \simeq V_8$ такая, что $S < S_0$.

Докажем утверждение (2) для S. Пусть P — максимальная S_0-инвариантная p-подгруппа из G, которая также T-инвариантна. Такая p-подгруппа существует по доказанному выше. Покажем, что P является также максимальной S-инвариантной p-подгруппой из G. Пусть $P \leqslant Q$, где $Q \in U^*(S;\ p)$. По лемме 9 имеем: $Q = \{C_Q(t) \mid t \in S^{\#}$ и $C(t)$ не 2-замкнут$\}$.

Пусть R_t — силовская p-подгруппа группы $C(t)$, нормализуемая 2-подгруппой S_0, где $t \in S^{\#}$, $C(t)$ не 2-замкнут и $C_Q(t) \neq 1$. Ясно, что $C_P(t) = P_0$ является S_0-инвариантной p-подгруппой из $C = C(t) = O(t) \leftthreetimes T_1$. Покажем, что P_0 вкладывается в S_0-инвариантную силовскую p-подгруппу из $O(t)$. Если P_0 не является силовской p-подгруппой в $O(t)$, то $N_{O(t)}(P)$ является S_0-инвариантной подгруппой и в $N_{O(t)}(P_0)$ существует силовская p-подгруппа P_1, которая S_0-инвариантна. Таким образом, мы можем дойти до силовской p-подгруппы P_2 группы $O(t)$, котороя содержит P_0 и S_0-инвариантна. Без ограничения общности будем считать, что $P_0 \leqslant R_t$. С другой стороны, в силу (1), $R_t^x \leqslant P$ для некоторого $x \in O(C(S_0)) \leqslant O(t)$. Следовательно, $C_Q(t) \geqslant C_P(t) = R_t^x$. Так как R_t^x — силовская p-подгруппа из $C(t)$, то $C_Q(t) = C_P(t)$. Таким образом, $P = Q$ и утверждение (2) доказано.

Заметим, что мы попутно доказали, что если $C(t)$ $2'$-замкнут, $t \in S^{\#}$, то $C_P(t)$ является силовской p-подгруппой группы $C(t)$.

Приступим к доказательству утверждения (1) для нашей подгруппы S. Предварительно докажем, что $N(S)$ действует транзитивно на множестве максимальных S-инвариантных p-подгрупп. Пусть P_1 — максимальная S-инвариантная p-подгруппа, которая также T-инвариантна. Ясно, что $P_1 \in U^*(T;\ p)$.

Предположим, что существует максимальная S-инвариантная p-подгруппа Q, которая не сопряжена с P_1 элементом из $N(S)$. По лемме 8 в S существует инволюция t с не 2-замкнутым централизатором $C(t)$ такая, что $C_Q(t) \neq 1$. По замечанию, приведенному выше, $P_0 = C_{P_1}(t)$ является силовской p-подгруппой в $C(t)$. Централизатор $C_Q(t)$ содержится в S-инвариантной силовской p-подгруппе Q_0 из $C(t)$. Ясно, что P_0 и Q_0 сопряжены элементом из $O(C_{O(t)}(S))$. Следовательно, существует элемент $x \in O(S)$ такой, что $Q^x \cap P_1 \neq 1$.

Выберем среди максимальных S-инвариантных p-подгрупп, не сопряженных с P_1 элементом из $N(S)$, такую, что ее пересечение с P_1 имеет максимальный порядок. Пусть это будет P_2 и $P_1 \cap P_2 = D$. Рассмотрим нормализатор $N = N(D)$. Пусть $R_i = N_{P_i}(D)$, $R_i > D$, $i = 1, 2$, и пусть R_i вкладывается в максимальную S-инвариантную p-подгруппу Q_i, $i = 1, 2$, из N.

Пусть N является c'-группой. Тогда по лемме 2.8 ([5]) и лемме 12 максимальные S-инвариантные p-подгруппы из N сопряжены элементами из $N_N(S)$. Это ведет к противоречию с выбором D. Следовательно, $N/O(N)$ не является c'-группой.

Предположим, что $S(N) = O(N)$. Тогда $N/O(N)$ является неразрешимой c-группой, но не c'-группой, и, следовательно, все инволюции из N сопряжены. Это вытекает из того, что в полупростых c-группах все инволюции сопряжены ([9]). С другой стороны, централизатор инволюции τ из N переходит на централизатор инволюции $\bar{\tau}$ из $\bar{N}$ при естественном гомоморфизме $N \to \bar{N} = N/O(N)$. Следовательно, централизатор $C_N(\tau)$ не $2'$-замкнут и все инволюции из S обладают не $2'$-замкнутыми централизаторами. Это противоречит лемме 8. Поэтому $O_{2',2}(N) > O_{2'}(N)$.

Пусть R — силовская 2-подгруппа из $O_{2',2}(N)$. Так как силовские p-подгруппы из $O_{2'}(N)$, которые S-инвариантны, сопряжены элементами из $O(S)$, то нам достаточно доказать, что в фактор-группе $\bar{N} = N/O(N)$ максимальные S-инвариантные p-подгруппы сопряжены элементами из $N_{\bar{N}}(\bar{S})$. Для удобства будем считать $\bar{N} = N$. Рассмотрим группу $M_i = RQ_iS$, $i = 1, 2$. Так как M_i — разрешимая группа и $O_{2'}(M_i) = 1$, то $S \cap O_2(M_i) \neq 1$, $i = 1, 2$. Пусть $v_i \in (S \cap O_2(M_i))^{\#}$. Тогда $[\{v_i\}, Q_i] \leqslant O_2(M_i) \cap Q_i = 1$. Следовательно, $Q_i \leqslant C(v_i)$ и $Q_i \leqslant C_N(S)$. Так как $C_N(S)$ $2'$-замкнут, то Q_i, $i = 1, 2$, являются силовскими p-подгруппами в $O(C_N(S))$. Следовательно, Q_1 и Q_2 сопряжены элементом из $O(S)$. Это противоречит выбору D. Таким образом, мы доказали, что $N(S)$ действует транзитивно на множестве максимальных S-инвариантных p-подгрупп из G.

Пусть $N = N(S)$, R — силовская 2-подгруппа из N, содержащая S_0, $R_0 = R \cap O_{2',2}(N)$. Ясно, что R_0 — силовская 2-подгруппа из $O_{2',2}(N)$. Следовательно, по лемме Фраттини, $N = O(N) \cdot N_0$, где $N_0 = N_N(R_0)$. Заметим, что $N(S)/C(S)$ изоморфна подгруппе из S_3. Так как по лемме 8 $C(S)$ $2'$-замкнут, то $C(S) \leqslant O(N) \lambda R_0$. Поэтому $S_0 \leqslant R_0$. По (2) R_0 нормализует некоторую максимальную S-инвариантную p-подгруппу P из G. Так как N действует транзитивно на множестве максимальных S-инвариантных p-подгрупп, то для доказательства (1) достаточно показать, что для любого $x \in N_0$ существует $y \in O(S)$ такой, что $P^x = P^y$. Но это следует из того, что P^x является максимальной S_0-инвариантной p-подгруппой и, следовательно, $P^x = P^y$ для некоторого $y \in O(C(S_0)) \leqslant O(S)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. *Пусть P — неединичная максимальная по порядку T-инвариантная p-подгруппа G, $p>2$, $[P, T] \neq 1$. Тогда нормализатор $H = N(P)$ контролирует 2-слияние в силовской 2-подгруппе T группы G.*

Доказательство. Предположим противное. По теореме Альперина [([4]), теорема 7.2.7] в группе G найдется такая силовская 2-подгруппа Q и такие два элемента x и y, лежащие в $D = T \cap Q$, что $T \cap N(D)$ — силовская 2-подгруппа в $N(D)$, элементы x и y сопряжены элементом из $N = N(D)$, но не сопряжены элементом из H. Положим $Z = \Omega_1(Z(D))$, тогда $N \leqslant N(Z)$. Пусть Z — циклическая группа. Если $N(Z)$ $2'$-замкнут, то $N = O(N) \leftthreetimes [T \cap N]$, а элементы x и y сопряжены в $T \cap N \leqslant H$. Предположим, что $N(Z)$ не $2'$-замкнут. Тогда по определению $D = T$, а $Z(T)$ циклический. Так как централизатор инволюции $z \in Z^{\#}$ не $2'$-замкнут, то $C_T(P) = 1$. С другой стороны, $C_T(P)$ содержит $\{zz_1\}$ (z_1 — центральная инволюция из T), так как $C_P(z)$ и $C_P(z_1)$ лежат, ввиду леммы 9, в $C_P(zz_1)$. Следовательно, Z — нециклическая группа. Тогда по лемме 13 (3), $N(Z) = O(N(Z))[N(Z) \cap H]$. Так как элементы из $O(N(Z))$ централизуют элементы из D, которые при сопряжении остаются в D, то x и y сопряжены элементом из $N(Z) \cap H$. Лемма доказана.

Следствие. *Группа $H = N(P)$ не содержит инвариантных подгрупп индекса 2.*

Доказательство. По теореме 7.3.4 ([4])

$$T \cap G' = \{x^{-1}x^g \mid x, x^g \in T,\ g \in G\}.$$

С другой стороны, по лемме 14 $x^{-1}x^g = x^{-1}x^h$ для некоторого $h \in H$, если x, $x^g \in T$. Поэтому

$$T \cap G' = \{x^{-1}x^h \mid x^{-1}, x^h \in T,\ h \in H\} = T \cap H'.$$

Утверждение вытекает теперь из простоты группы G.

ЛЕММА 15. *Пусть A_1 и A_2 — различные элементарные абелевы подгруппы порядка 16 в силовской 2-подгруппе T группы G. Тогда выполняются следующие условия:*

(1) $\{U(A_1; 2')\} = \{U(A_2; 2')\}$;

(2) $N(T) \leqslant N(\{U(A_1; 2')\})$.

Доказательство. Пусть $B_i = \{U(A_i; 2')\}$, $i = 1, 2$. По теореме 1 B_i — наибольшая A_i-инвариантная подгруппа нечетного порядка в группе G. Ясно, что $\{U(T; 2')\} \leqslant B_1 \cap B_2$. Для доказательства леммы нам достаточно показать, что $\{U(T; 2')\} = B_1$. Пусть $p \in \pi(B_1)$. По лемме 13 (2) среди A_1-инвариантных силовских p-подгрупп группы B существует T-инвариантная p-подгруппа P. Следовательно, все такие T-инвариантные силовские p-подгруппы из B_1, где p пробегает все множество

$\varkappa(B_1)$, порождают T-инвариантную подгруппу, которая совпадает с B_1. Непосредственно из равенства $\{U(T_i; 2')\}=B_i$, $i=1, 2$, вытекает утверждение (2). Лемма доказана.

ЛЕММА 16. *Пусть T — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда в T существует инволюция, централизатор которой не содержит в T элементарной абелевой подгруппы порядка* 16.

Доказательство. Предположим противное. Покажем, что в этом случае в группе G существует сильно 2-изолированная подгруппа. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех элементарных абелевых подгрупп из T порядка 16. Тогда каждый элемент из $\mathfrak{M}$ в силу леммы 15 и теоремы 1 обладает наибольшей допустимой подгруппой нечетного порядка в группе G, которая совпадает для всех элементов из $\mathfrak{M}$. Обозначим ее через O. Докажем, что $N=N(O)$ является сильно 2-изолированной подгруппой в группе G. Предварительно покажем, что любая 2-подгруппа S из G, содержащая некоторую элементарную абелеву подгруппу V из T порядка 16, содержится в N. Пусть $S_1=S\cap N$. Ясно, что $V\leqslant S_1$. Если $x\in N_S(S_1)\setminus S_1$, то $(O\lambda S_1)^x=O^x\lambda S_1$. Поэтому $O^x\in U(V; 2')$ и, следовательно, $O^x=O$. Отсюда $x\in N$ и $S=S_1$.

Пусть ν — произвольная инволюция из T. Предположим, что централизатор $C(\nu)$ $2'$-замкнут: $C(\nu)=O(\nu)\lambda S$. Так как по предположению S содержит элементарную абелеву подгруппу V из T порядка 16, то, по доказанному выше, $S\leqslant N$. С другой стороны, $O(\nu)\in U(V; 2')$. Следовательно, $O(\nu)\leqslant O$ и $C(\nu)\leqslant N$.

Предположим теперь, что $C(\nu)=S\lambda K$, $S=O_2(C(\nu))$ не $2'$-замкнут. Как и выше, отсюда следует, что $S\leqslant N$. Пусть V — элементарная абелева подгруппа из $S\cap T$ порядка 16. Тогда для $k\in K$ подгруппа $O^k\in$ $\in U(V; 2')$, так как $(O\lambda S)^k=O^k\lambda S$. В силу леммы 15, $O^k=O$ и $K\leqslant N$. Следовательно, N — сильно 2-изолированная подгруппа в группе G, что невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. *Пусть T — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда* $SCN_5(T)=\varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в T существует инвариантная элементарная абелева подгруппа A порядка 32. Покажем, что в этом случае централизатор $C_T(\nu)$ произвольной инволюции ν из T содержит элементарную абелеву подгруппу C порядка 16. Если $\nu\in A$, то это очевидно. Пусть $\nu\notin A$. Группу A можно рассматривать как векторное пространство V над полем из двух элементов, а ν — как линейное преобразование этого пространства порядка 2. Так как $\dim(V)=5$, то ν имеет не менее трех жордановых блока. Поэтому $B=C_A(\nu)$ имеет порядок $\geqslant 8$. Но тогда группа $Q=B\times\{\nu\}$ содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 16. Это противоречит лемме 16. Лемма доказана.

ЛЕММА 18. *Пусть T — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда* $SCN_4(T)=\varnothing$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в T существует инвариантная элементарная абелева подгруппа порядка 16, но в T

нет, по лемме 17, инвариантных абелевых подгрупп порядка 32. Пусть P — максимальная T-инвариантная p-подгруппа в группе G. Тогда по лемме 14 $H=N(P)$ контролирует 2-слияние в группе T и H не содержит инвариантных подгрупп индекса 2. Такая p-подгруппа P, удовлетворяющая условиям леммы 14, существует в силу леммы 7.

Покажем, что $O_{2',2}(H) \neq O_{2'}(H)$. Пусть $O_{2',2}(H) = O_{2'}(H)$. Тогда по предположению индукции $\overline{H} = H/O(H)$ является полупростой c- или c'-группой. Так как $SCN_3(T) \neq \varnothing$ и $\overline{H}$ не содержит инвариантных подгрупп индекса 2, то из описания c-групп и c'-групп ([9]), ([5]) следует, что все инволюции в $\overline{H}$ сопряжены. Но тогда все инволюции сопряжены и в группе G. Следовательно, $O_{2',2}(H) \neq O_{2'}(H)$.

Пусть $O_{2',2}(H) = O(H) \leftthreetimes S$, $Z = \Omega_1(Z(S))$. Предположим сначала, что Z — нециклическая группа. Тогда, по следствию леммы 8, $C_H(Z) \leqslant O_{2',2}(H)$. Поэтому $\tilde{H} = H/O_{2',2}(H)$ можно рассматривать как группу автоморфизмов Z. Так как по лемме 17 $|Z| \leqslant 16$, то $\tilde{H}$ изоморфно вкладывается в $GL(4, 2)$. Заметим, что $H/O(H)$ в силу леммы 3 является c-группой. Поэтому $\tilde{H}$ также является c-группой.

Предположим, что $\tilde{H}$ — неразрешимая c-группа. Известно, что $GL(4, 2) \simeq A_8$, где A_8 — знакопеременная группа степени 8. Сравнивая порядки подгрупп группы $GL(4, 2)$ и порядки маленьких неразрешимых c-групп, получаем, что $\tilde{H}$ содержит инвариантную подгруппу $\tilde{L}$, изоморфную одной из следующих групп: $GL(3, 2) \simeq PSL(2, 7)$; $PSL(2, 9) \simeq A_6$; $PSL(2, 4) \simeq A_5$. Пусть L — полный прообраз $\tilde{L}$ в группе H. Тогда $\overline{L} = L/O(H)$ является c-группой и $O_2(\overline{L}) \neq 1$. В силу леммы 4 получаем, что $\overline{L}/O_2(\overline{L}) \simeq PSL(2, 4)$. Как и в лемме 4, можно показать, что $\overline{L}$ является $C|T$-группой. Из результата Хигмэна [([7]), теорема 8.2] и того, что $SCN_5(T) = \varnothing$, вытекает, что $O_2(\overline{L}) = V_{16}$. Таким образом, $S \simeq V_{16}$ и $T/S \simeq V_4$. Заметим что $Z(T) < S$. Нормализатор силовской 2-подгруппы $\overline{T}$ в группе $\overline{L}$ является группой Фробениуса вида $\overline{T} \leftthreetimes \{\bar{b}\}$, $\bar{b}^3 = 1$. Следовательно, $Z(\overline{T})$ нециклический. Так как $\overline{T} \simeq T$, то $Z(T)$ — нециклическая группа. Теперь нетрудно показать, что централизатор любой инволюции v из T содержит в T элементарную абелеву подгруппу порядка 16. Если $v \in S$, то это очевидно. Пусть $v \notin S$. Тогда S можно представить как векторное пространство V размерности 4 над полем $GF(2)$, а v — как линейное преобразование порядка 2. Так как v имеет по крайней мере два жордановых блока размерности 1, то число жордановых блоков будет не меньше трех. Следовательно, $|C_S(v)| \geqslant 8$ и $C_T(v)$ содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 16. Это противоречит лемме 16. Таким образом, H — разрешимая группа. Заметим, что H будет разрешимой группой и в случае цикличности $Z = Z(S)$. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать ограничение на цикличность Z. Так как H не содержит инвариантных подгрупп индекса 2, то $\overline{H} = H/O(H)$, в силу леммы 3 и теоремы 5([9]), либо 2-замкнута, либо является c-группой вида $\overline{H} = \overline{S} \leftthreetimes (K \leftthreetimes Q) \cdot \{b\}$, $\overline{S} = O_2(\overline{H})$, $\overline{S} \leftthreetimes K = O_{2,2'}(\overline{H})$, Q — группа кватерионов по-

рядка 8, $|b|=3^{\alpha}$ и $(K\lambda Q)\{b\}/K\simeq GL(2, 3)$. Как было уже сказано выше,
группа $\widetilde{H}=\overline{H}/O_2(\overline{H})$ изоморфно вкладывается в $GL(4, 2)$. Легко показать,
что такой подгруппы в $GL(4, 2)$ нет. Следовательно, $\overline{H}$ — 2-замкнутая c-груп-
па и по лемме Фраттини $H=O(H)N_H(T)$. Так как H контролирует 2-слия-
ние в T, то из строения H вытекает, что $N(T)$ контролирует 2-слияние в T.
По теореме Глаубермана ([3]) получаем, что $Z(T)$ нециклический. Выше уже
было показано, что в этом случае централизатор каждой инволюции из T
содержит в T элементарную абелеву подгруппу порядка 16. Это противоре-
чит лемме 16. Лемма доказана.

ЛЕММА 19. *Пусть $P\in U^*(T; p)$. Тогда $N(P)$ — разрешимая подгруп-
па единичной 2-длины в группе G, $N(T)$ контролирует 2-слияние в T от-
носительно G и T не содержит элементарных абелевых подгрупп поряд-
ка 16.*

Доказательство. Как и в лемме 18, можно доказать, что $O_{2',2}(H)\neq$
$\neq O_{2'}(H)$, где $H=N(P)$. Пусть $O_{2',2}(H)=O(H)\lambda S$, $Z=\Omega_1(Z(S))$. Если
Z — нециклическая группа, то $C_H(Z)\leqslant O_{2',2}(H)$ и $H/O_{2',2}(H)$ изоморфно вкла-
дывается в $GL(3, 2)$, так как $SCN_4(T)=\varnothing$ и $|Z|\leqslant 8$.

Предположим, что H — неразрешимая группа. Тогда $Z\simeq V_8$ и
$H/O_{2',2}(H)\simeq GL(3, 2)\simeq PSL(2, 7)$, так как $PSL(2, 7)$ — минимальная
простая группа. С другой стороны, $\overline{H}=H/O(H)$ является c-группой,
$O_2(\overline{H})\neq 1$ и $\overline{H}/O_2(\overline{H})\simeq PSL(2, 7)$. Это противоречит лемме 4. Следова-
тельно, H — разрешимая подгруппа. Как и в лемме 18, можно показать,
что $\overline{H}=H/O(H)$ — 2-замкнутая c-группа, $H=O(H)\cdot N_H(T)$ и $N(T)$ конт-
ролирует 2-слияние в группе T. Поэтому по теореме Глаубермана ([3])
$Z(T)$ — нециклическая группа.

Приступим к доказательству последнего утверждения.

Пусть A — элементарная абелева подгруппа из T порядка 16. По тео-
реме 1 подгруппа A обладает единственным максимальным элементом
B из $U(A; 2')$. Покажем, что нормализатор $N=N(B)$ является сильно
2-изолированной подгруппой в группе G. Как уже было показано в лем-
ме 15, силовская 2-подгруппа T из G нормализует B. Более того,
$N(T)\leqslant N$, так как для x из $N(T)$ имеет место $B^x\in U(A; 2')$. Следова-
тельно, N-контролирует 2-слияние в группе T. Как и в лемме 18, можно
показать, что N — разрешимая группа единичной 2-длины. Поэтому
$N=B\cdot N(T)$, так как $B=O(N)$ и $N(T)\leqslant N$. Пусть $Z=\Omega_1(Z(T))$,
$4\leqslant|Z|\leqslant 8$. Так как $N(T)$ контролирует 2-слияние в T, то легко пока-
зать, что все инволюции из Z сопряжены между собой. Поэтому в силу
леммы 8 централизатор каждой инволюции из Z не 2-замкнут. Если
$\nu\in Z^{\#}$, то $C(\nu)=O(\nu)\lambda T\leqslant N$, так как $O(\nu)\in U(A; 2')$ и $T\leqslant N$. Пусть ин-
волюция $\sigma\in T$ и $C(\sigma)$ $2'$-замкнут: $C(\sigma)=O(\sigma)\lambda S$. Покажем, что $C(\sigma)\leqslant N$.
Предварительно заметим, что $C_T(x)$ является силовской 2-подгруппой в
$C(x)$ для любой инволюции x из T. Это следует из того, что $N(T)$ конт-
ролирует 2-слияние в группе G. Поэтому нам достаточно показать, что
$O(\sigma)\leqslant N$. Так как $Z\leqslant S$ и $O(\sigma)=\{C_{O(\sigma)}(t)\,|\,t\in Z\}$, то по доказанному
выше $O(\sigma)\leqslant N$. Предположим теперь, что $C(\sigma)$ не $2'$-замкнут: $C(\sigma)=$

$=S\lambda K$, $S=O_2(C(\sigma))$. Как было уже показано, $S\leqslant T$. Осталось доказать, что $K\leqslant N$. Так как $N(T)$ контролирует 2-слияние в T, то группа G 2-нормальна. Поэтому элементы из K не сдвигают Z в подгруппе S. Следовательно, $K\leqslant N(Z)$. С другой стороны, $N(Z)=O(C(Z))\cdot N(T)$ и поэтому $C(\sigma)\leqslant N$. Таким образом, мы доказали, что N — сильно 2-изолированная подгруппа в группе G. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. *$Z=\Omega_1(Z(T))\simeq V_4$, в нормализаторе $N(T)$ существует подгруппа $F=(Z\times\{v\})\lambda\{b\}$ со следующими свойствами: $Z(F)=\{v\}\times\{b^3\}$, $|b|=3^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$, $|v|=2$, $(Z\lambda\{b\})/\{b^3\}$ — группа Фробениуса, все инволюции из $(Z\times\{v\})\diagdown Z$ сопряжены, централизаторы этих инволюций не $2'$-замкнуты.*

Доказательство. В группе T существует инволюция v с не $2'$-замкнутым централизатором $C(v)=S\lambda K$, $S\leqslant T$, и $S=O_2(C(v))$. Ясно, что $v\notin Z^{\#}$. Следовательно, S содержит подгруппу $Z\times\{v\}$. Так как по лемме 19 T не содержит элементарной абелевой подгруппы порядка 16, то $\Omega_1(S)=Z\times\{v\}$, а $Z\simeq V_4$. С другой стороны, $K\leqslant N(Z)$ и $C(Z)$ $2'$-замкнут. Следовательно, в K существует 3-элемент b, который нетривиально действует на Z. Покажем, что $F=(Z\times\{v\})\lambda\{b\}$ удовлетворяет всем условиям следствия. Для этого достаточно проверить сопряженность всех инволюций из $(Z\times\{v\})\diagdown Z$. Так как $S\neq T$, то S содержится собственным образом в качестве инвариантной подгруппы в подгруппе S_1 из T. Следовательно, v сопряжена уже в T с некоторой инволюцией из $(Z\times\{v\})\diagdown$ $\diagdown(Z\cup\{v\})$. С другой стороны, элемент b транзитивно переставляет инволюции из $(Z\times\{v\})\diagdown(Z\cup\{v\})$. Отсюда вытекает сопряженность инволюций из $(Z\times\{v\})\diagdown Z$.

ЛЕММА 20. *Нормализатор $N=N(O(C(\Omega_1(Z(T)))))$ является сильно 2-изолированной подгруппой в группе G.*

Доказательство. Пусть $Z=\Omega_1(Z(T))$. Покажем сначала, что любой элемент из $U(T;\ 2')$ содержится в централизаторе $C(Z)$. Пусть $P\in U^*(T;\ p)$. Рассмотрим группу $L=P\lambda Z_1$, где $Z_1=Z\times\{v\}$ — подгруппа, рассмотренная в следствии леммы 19. По формуле Брауэра, $P=$ $=\{C_P(t)\mid t\in\{z\}\times\{v\}\}$, где z — некоторая инволюция из $Z^{\#}$. Если $t=v$ или zv, то $C_P(t)$ централизует z, так как $C(t)$ 2-замкнут по следствию. Из вышеприведенного равенства вытекает, что z централизует P, следовательно, $P\leqslant C(Z)$.

Пусть $C(Z)=O\lambda T$, $N=N(O)$. Ясно, что $O(N)=O$ и O является единственным максимальным элементом из $U(T;\ 2')$. Следовательно, $N(Z)\leqslant N$. В силу леммы 19, N контролирует 2-слияние в T. Пусть σ — инволюция из T и $C(\sigma)$ не $2'$-замкнут: $C(\sigma)=S\lambda K$, $S=O_2(C(\sigma))$. Так как $Z(T)\leqslant S$, то $K\leqslant N(Z)$ в силу 2-нормальности группы G. Следовательно, $C(\sigma)\leqslant N$. Предположим, что $C(\sigma)$ $2'$-замкнут: $C(\sigma)=O(\sigma)\lambda S$. Тогда $O(\sigma)=\{C_{O(\sigma)}(t)\mid t\in Z^{\#}\}$. С другой стороны, $C(t)=O\lambda T$ для $t\in Z^{\#}$. Следовательно, $C(\sigma)\leqslant N$ и N — сильно 2-изолированная подгруппа в группе G. Лемма доказана.

С другой стороны, в группе G нет собственной сильно 2-изолированной подгруппы. Полученное противоречие доказывает теорему А.

Теорема Б является следствием из теоремы А и работ ([9]) и ([5]).

Автор благодарен А. И. Старостину за постановку задачи и руководство работой, а также А. Н. Фомину за помощь при обсуждении статьи.

Свердловск
Институт математики и механики
АН СССР

Поступило
12.II.1971

ЛИТЕРАТУРА

[1] Холл М., Теория групп, М., ИЛ, 1962.
[2] Carter R. W., Simple groups and Lie algebras, J. London Math. Soc., 40, № 2 (1965), 193—240.
[3] Glauberman G., Central elements in core-free groups, J. Algebra, 4, № 3 (1966), 403—420.
[4] Gorenstein D., Finite groups, Harper and Row, 1968.
[5] Gorenstein D., Finite groups, the centralizers of whose involutions have normal 2-complement, Canad. J. Math., 21, № 2 (1969), 335—357.
[6] Gorenstein D., Harada K., A characterisation of Janko's two new simple groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21, № 3 (1970), 331—406.
[7] Higman G., Odd Characterisations of Finite Simple Groups, Lectures, Michigan University, 1968.
[8] Janko Z., Thompson J. G., On finite simple groups whose Sylow 2-subgroups have no normal elementary subgroups of order 8, Math. Z., 113, № 5 (1970), 385—397.
[9] Suzuki M., Finite groups in which centralizers of any element of order 2 is 2-closed, Ann. Math., 82, № 2 (1965), 191—212.
[10] Suzuki M., On a class of doubly transitive groups, Ann. Math., 75, № 1 (1962), 105—145.
[11] Schreier O., van der Waerden B. L., Die Authomorphismen der projectiven Gruppen, Hamb. Abh., 6 (1928), 308—322.
[12] Taylor D. E., A characterisation of the group Aut (PGL (3, 4), J. Austral. Math. Soc., 11, № 2 (1970), 195—206.