МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ЮЖНО-УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГУМАНИТАРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЮУрГГПУ»)

ФАКУЛЬТЕТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Методика решения уравнений и неравенств с модулем при подготовке к ЕГЭ по математике

Выпускная квалификационная работа
по направлению 44.03.05
Направленность программы бакалавриата
«Математика. Экономика»

Проверка на объем заимствований:
75,02 % авторского текста

Работа рекомендована к защите
рекомендована/не рекомендована

« 21 » июня 2018 г.
зав. кафедрой математики и методики обучения математики
Е.А. Суховиенко

Выполнила:
Студентка группы ОФ513/086-5-1
Яхина Екатерина Сергеевна

Научный руководитель:
Доцент, кандидат пед. наук
Эрентраут Елена Николаевна

Челябинск
2018

Оглавление

Введение

Одной из важнейших характеристик числа принято считать понятие его абсолютной величины (модуля).

В школьном курсе математики понятие модуля встречается неоднократно. Но изучение задач с модулем не является в нем отдельной темой, в 6 классе вводится только понятие модуля как расстояние между началом отсчета и координатой точки, в 8 – понятие преобразования графика функции с модулем, в старших классах - при изучении степенных функций. Поэтому, чаще всего, к окончанию школы у учеников не складывается в голове четкого понимания понятия модуль, его свойств, методов решения уравнений и неравенств с ним, и, конечно, при сдаче ЕГЭ усложненные задания второй части, в которых присутствуют абсолютная величина числа, вызывают большие затруднения у выпускников.

Решение таких заданий требует не только знания свойств функций и уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования. Навыки в решении уравнений, неравенств, содержащих модуль, и построение графиков элементарных функций, содержащих модуль, совершенно необходимы любому ученику, желающему не только успешно выступить на математических конкурсах и олимпиадах, но и хорошо подготовиться к поступлению в дальнейшем в высшие учебные заведения.

Трудности при изучении данного вида задач связаны со следующими их особенностями: обилие формул и методов, используемых при решении уравнений данного вида; возможность решения одного и того же уравнения, содержащего модуль, различными методами.

То есть актуальность дипломной работы заключается в необходимости более подробного разбора темы «Модуль числа», ее повторения и закрепления, чтобы помочь ученикам систематизировать знания и научиться применять их на практике.

Объект исследования: процесс обучения математике в школе.

Предмет исследования: понятие модуля и методы решения уравнений и неравенств с модулем.

Цель дипломной работы: повысить уровень понимания и практической подготовки учеников при решении уравнений и неравенств с модулем.

Таким образом, гипотеза исследования заключается в том, что применение разработанного в данной работе элективного курса при подготовке к выпускным экзаменам будет способствовать формированию у учащихся четкого понимания понятия модуль и поможет систематизировать методы решений уравнений и неравенств.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать методическую, психолого-педагогическую литературу по теме исследования.
2. Изучить и систематизировать методы решений уравнений и неравенств с модулем.
3. Проанализировать задания ЕГЭ, включающие в себя уравнения и неравенства с модулем.
4. Разработать элективный курс «Методы решений уравнений и неравенств с модулем в заданиях ЕГЭ».

Дипломная работа состоит из двух глав. Первая глава – теоретическая, в ней общая информация о модуле числа, построении графиков элементарных функций и преобразований их с модулем, методах решения уравнений и неравенств с модулями:

1) метода с помощью определения и свойств модуля,
2) метода интервалов,
3) графического метода,
4) метода при помощи зависимостей между числами, их модулями и квадратами,
5) метода использования геометрической интерпретации модуля,
6) метода замены переменной.

Были разобраны методы решения уравнений и неравенств с модулями, содержащих параметр: аналитический и геометрический способы.

Вторая глава – практическая, она содержит в себе разработку элективного курса: «Методы решения уравнений и неравенств с модулем в заданиях ЕГЭ».

Глава 1. Методы решений уравнений и неравенств с модулем

1.1. Общие сведения о модуле числа

Понятие «модуль» (с лат. *«modulus»* - мера) впервые ввел в пользование английский математик и философ Роджер Котс (1682-1716), являющийся учеников Исаака Ньютона. Великий немецкий физик, изобретатель, математик и философ Готфрид Лейбниц также в своих работах и трудах использовал функцию модуля, которую он обозначил mod(x). Однако общепринятое и современное значение модуля как абсолютной величины было дано в 1841 году выдающимся немецким математиком Карлом Вейерштрассом. В начале девятнадцатого века ученые Арган и Коши ввели данное понятие и для комплексных чисел, которые изучаются в высшей математике. На сегодняшний день, так как функция модуля вычисляется очень просто, ее ввели и список стандартных функций фактически всех языков программирования.

Определение 1.

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа a называется неотрицательное число, взятое из двух чисел a и $-a$.

Абсолютную величину числа a обозначают $|a|$ и читают «абсолютная величина числа a», или «модуль числа a». [2]

Определение можно записать в следующем виде:

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{если } a > 0, \\ 0, \text{если } a = 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{array}\right.$$

Примеры:

1. $|10| = 10.$
2. $|-5| = 5$, так как $-5 < 0, -(-5) = 5.$
3. $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, так как $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0.$
4. $|\sqrt{5} - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - \sqrt{5}$, так как $\sqrt{5} - \sqrt{7} < 0, -(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \sqrt{7} - \sqrt{5}.$

Теорема 1.

Противоположные числа имеют равные абсолютные величины, то есть $|a| = |-a|$.

Доказательство следует из определения модуля числа:

$$|-a| = \left[\begin{array}{ll} -a, & \text{если } -a > 0, \ \text{ т. е. } a > 0, \\ 0, & \text{если } -a = 0, \ \text{ т. е. } a = 0, \\ -(-a), & \text{если } -a < 0, \ \text{ т. е. } a > 0; \end{array}\right.$$

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{если } a > 0, \\ 0, \text{если } a = 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, $|a| = |-a|$. [2]

Геометрическая интерпретация понятия $|a|$.

Помимо алгебраического определения «модуль числа» в математике при решении уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины, используется геометрическая интерпретация абсолютной величины числа.

Известно, что каждому действительному числу можно поставить в соответствие точку числовой прямой.

Пусть нам даны точки $\text{A}(x_1)$ и $\text{B}(x_2)$, где $x_1, x_2 \in R$. Расстояние между ними обозначается $|AB|$ и вычисляется по формуле расстояния между точками: $|AB| = |x_1 - x_2|$ (Рис.1).

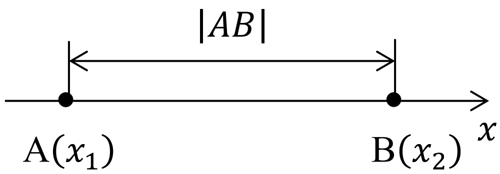


Рис. 1

Это расстояние, или величина отрезка, рассматривается всегда как величина неотрицательная.

Множество точек $M(x)$ числовой прямой, для которых $|x| = a$, $(a > 0)$, состоит из двух точек: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$. (Рис.2)

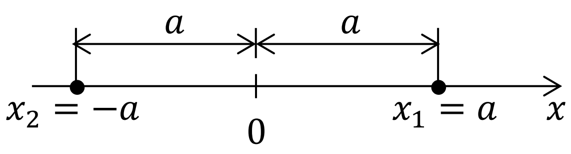


Рис.2

Действительно, $|x| = |x - 0|$ есть расстояние между точкой $M(x)$ и началом координат. Таких точек на числовой прямой только две: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

Отсюда, в частности, следует, что уравнение $|x| = a$ $(a > 0)$ имеет два решения: $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

При $a = 0$ уравнение $|x| = a$ будет иметь одно решение $x = 0$, а при $a < 0$ решений уравнения не будет, что следует из определения абсолютной величины числа.

Если рассматривать неравенство $|x| < a$ $(a > 0)$, то можно утверждать, что его решением будет промежуток $-a < x < a$. Так как это есть множество точек $M(x)$ числовой прямой, отстоящих от начала координат на расстояние меньше, чем a, то есть лежащих между точками $M(-a)$ и $M(a)$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что решением неравенства $|x| > a$ $(a > 0)$ является объединение точек, принадлежащих двум промежуткам $-\infty < x < -a$ и $a < x < +\infty$. [1]

Таким образом, геометрическая интерпретация понятия $|a|$ подтверждает, что $|a| = |-a|$.

Примеры:

1. Если $|a| = 7$, то $a_1 = 7$ и $a_2 = -7$, или $a = \pm 7$. (Рис.3)

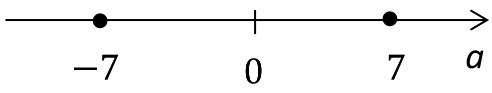


Рис.3

2. Если $|a| < 12$, то по геометрическому истолкованию модуля следует, что $-12 < a < 12$. (Рис.4)

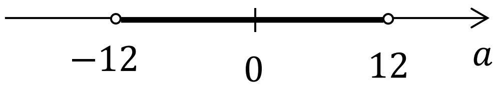


Рис.4

3. Если $|a| > 9$, то решение можно записать в следующем виде: $\begin{cases} a < -9, \\ a > 9. \end{cases}$ (Рис.5)

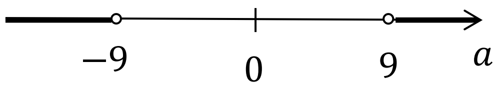


Рис.5

Свойства модуля числа:

1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

Модуль произведения двух числе равен произведению их модулей. (Верно для любого конечного числа сомножителей).

Доказательство.

1. Если $\left[\begin{array}{l} a = 0,\ b = 0 \\ a = 0,\ b \neq 0, \\ a \neq 0,\ b = 0 \end{array}\right.$ то очевидно, что свойство выполняется.

2. Если $a > 0,\ b > 0$, тогда $|a| = a, |b| = b$ и $ab > 0$. Значит, $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.

3. Если $a < 0,\ b < 0$, тогда $|a| = -a, |b| = -b$ и $ab > 0$. Значит, $|ab| = ab = (-a) \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

4. Если $a > 0$ и $b < 0$, тогда $a = |a|, -b = |b|$ и $ab < 0$. Значит, $|ab| = -ab = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$.

Аналогичные рассуждения при $a < 0$ и $b > 0$.

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, где $b \neq 0$.

Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел. (Знаменатель не должен быть равен 0).

Доказательство.

1. Если $a = 0$, то очевидно, что свойство выполняется, и $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = 0$.

2. Если $a > 0,\ b > 0$, тогда $|a| = a, |b| = b$ и $\frac{a}{b} > 0$. Значит, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

3. Если $a < 0,\ b < 0$, тогда $|a| = -a, |b| = -b$ и $\frac{a}{b} > 0$. Значит, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

4. Если $a > 0$ и $b < 0$, тогда $a = |a|, -b = |b|$ и $\frac{a}{b} < 0$. Значит, $\left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$. [1]

Аналогичные рассуждения при $a < 0$ и $b > 0$.

3) $|a^n| = |a|^n, n \in N$.

Доказательство.

$$|a^n| = |a \cdot a \cdot \ldots \cdot a| = |a| \cdot |a| \cdot \ldots \cdot |a| = |a|^n.$$

В школьном курсе математики рассматривается частный случай этого свойства при $n = 2$: $|a^2| = |a|^2$. [15]

4) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Модуль суммы двух действительных чисел не превосходит суммы модулей этих чисел.

1. Если $a > 0,\ b > 0$, тогда $|a| = a, |b| = b$ и $a + b > 0$. Значит, $|a + b| = a + b = |a| + |b|$.

2. Если $a < 0,\ b < 0$, тогда $|a| = -a, |b| = -b$ и $a + b < 0$. Значит, $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$.

3. Если a и b разных знаков, и, например, $|a| \geq |b|$, то по правилу сложения чисел разных знаков получаем: $|a+b| = |a| - |b| < |a+b|$. Таким образом, свойство доказано. [15]

1.2 Построение графиков элементарных функций

Так как построение графика любой функции с модулем начинается с построения графика элементарной функции, то ученикам необходимо знать не только название элементарной функции и ее формулу, но и уметь строить ее график.

В алгебре и математическом анализе существует несколько определений понятия «функция». Так, одно из определяющих понятий ввел Н.И. Лобачевский: переменная y называется функцией переменной x, если каждому значению x, из области ее изменения, соответствует определенное значение y. [6]

Ю.М.Колягин в учебнике алгебры 9 класса приводит похожее определение: если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число y, то говорят, что на этом множестве задана функция $y(x)$. [8]

По определению Ю.Н.Макарычева в учебнике алгебры 9 класса функция – это зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y. [11]

В школьном курсе математики изучаются основные элементарные функции:

1) степенная функция $y = x^n$;

2) показательная функция $y = a^x, a > 0$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x, a > 0$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$. [6]

Рассмотрим каждую функцию отдельно.

1) Степенная функция $y = x^n$.

Графики при $x \geq 0$ в случаях, когда $n > 1$, $n = 1$, $0 < n < 1$, $n < 0$ представлены на графике. (Рис.6)

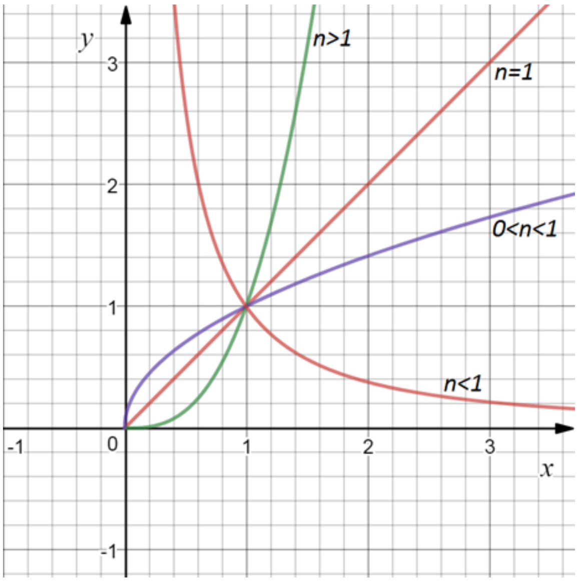


Рис.6

Функция $f(x)$, обладающая свойством $f(-x) = f(x)$, называется четной, например $x^2, \cos x$, а обладающая свойством $f(-x) = -f(x)$, называется нечетной, например $x^3, \sin x$. Четная функция симметрична относительно оси ординат, нечетная - относительно начала координат.

Пример 1.

Построить график функции $y = x^{-2}$, т.е. $y = \frac{1}{x^2}$, $n < 0$, функция четная. (Рис.7)

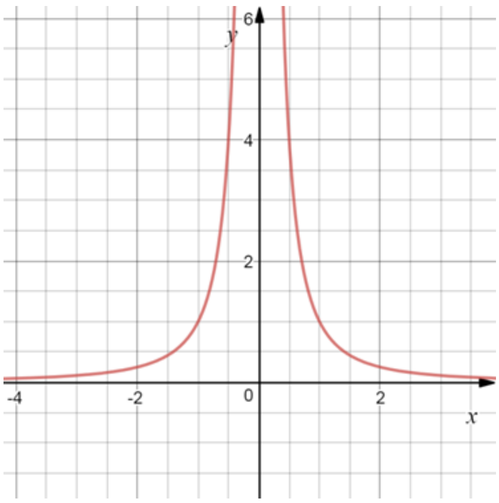


Рис.7

Пример 2.

Построить график функции $y = x^3$, $n > 0$, функция нечетная.

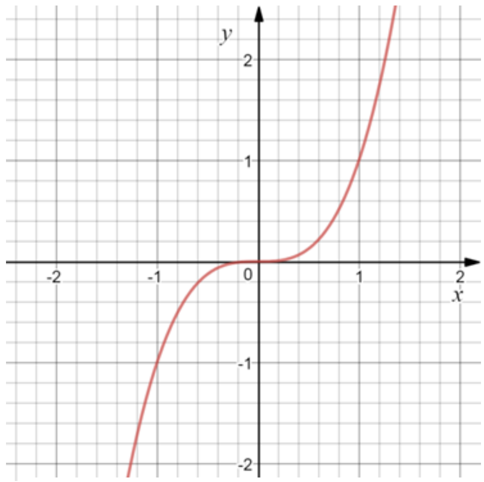


Рис.8

2) Показательная функция $y = a^x$

Функцию вида $y = a^x, a > 0, a \neq 1$, называют показательной функцией. [14].

Основные свойства показательной функции $y = a^x$:

$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

Важным моментом в показательной функции является то, что график всегда будет проходить через точку с координатами $(0; 1)$.

Пример 3.

Построить график функции $y = 2^x$. (Рис.9)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

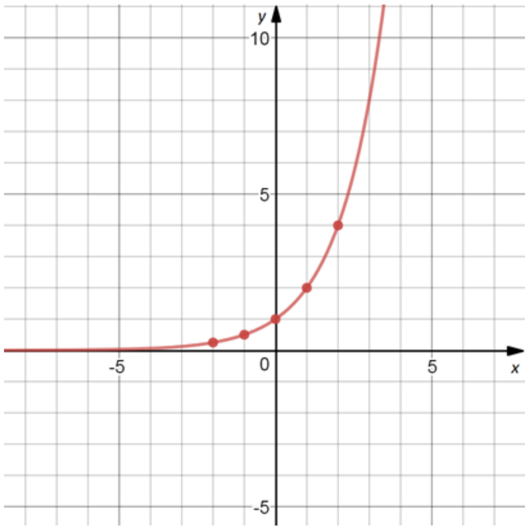


Рис.9

Пример 4.

Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. (Рис.10)

x	-1	0	1	2
y	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

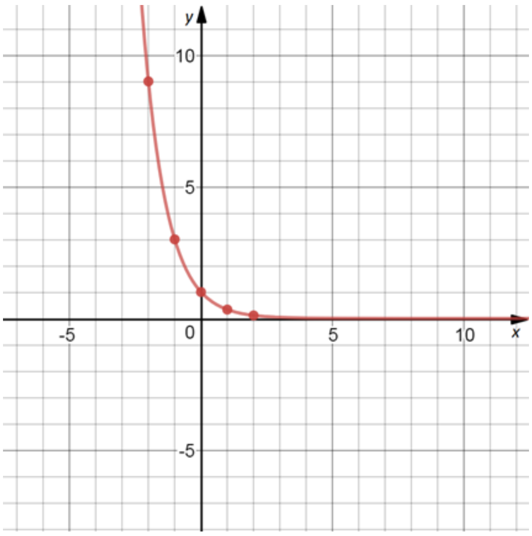


Рис.10

3) Логарифмическая функция $y = log_a x$

Логарифмическая функция вида $y = \log_a x\,, a > 0, a \neq 1, x > 0.$ является обратной для показательной функции $y = a^x$.

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, и всегда проходит через точку с координатами $(1; 0)$. [13]

Пример 5.

Построить график функции $y = \log_2 x$. (Рис.11)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

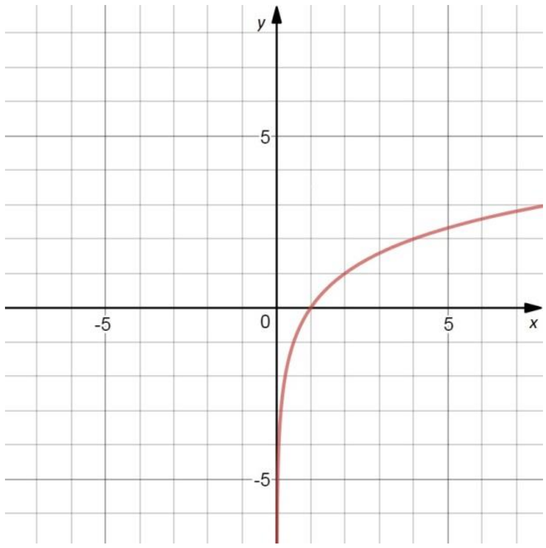


Рис.11

Пример 6.

Построить график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. (Рис.12)

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	1	0	-1	-2

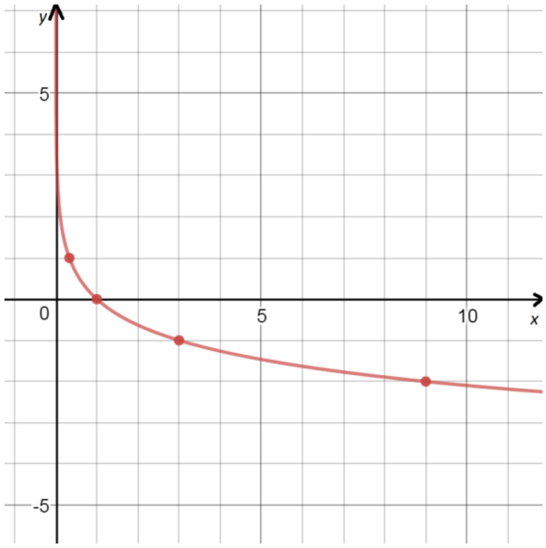


Рис.12

4) Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$

4.1) Тригонометрическая функция $y = \sin x$

График функции $y = \sin x$ называется синусоидой, он симметричен относительно начала координат в прямоугольной системе координат, так как функция синуса является нечетной. При построении графика необходимо помнить, что функция $y = \sin x$ ограничена снизу и сверху, так как $-1 \leq$

$\sin x \leq 1$, функция возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывает на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ и т.д. Функция является периодической с периодом в 2π. (Рис.13)

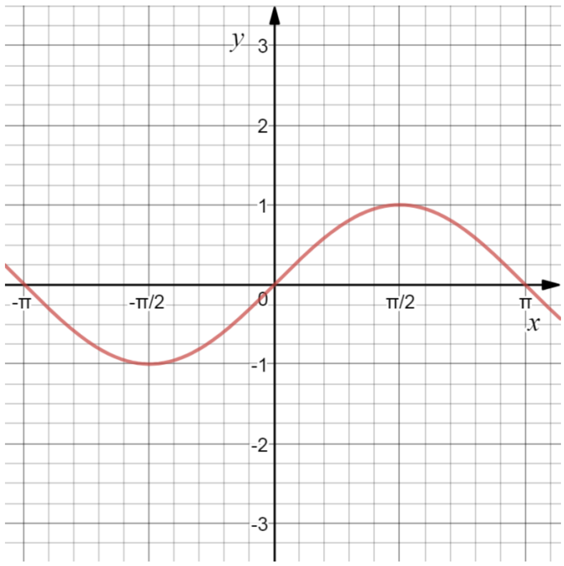


Рис.13

4.2) Тригонометрическая функция $y = \cos x$

Косинус – это функция четная, ее график, косинусоида, симметричен относительно оси Oy, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$. Функция так же ограничена сверху и снизу, возрастает на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и убывает на $[0; \pi]$ и т.д. Область определения – все действительные числа, область значений $[-1; 1]$. Функция является периодической с периодом в 2π. (Рис.14)

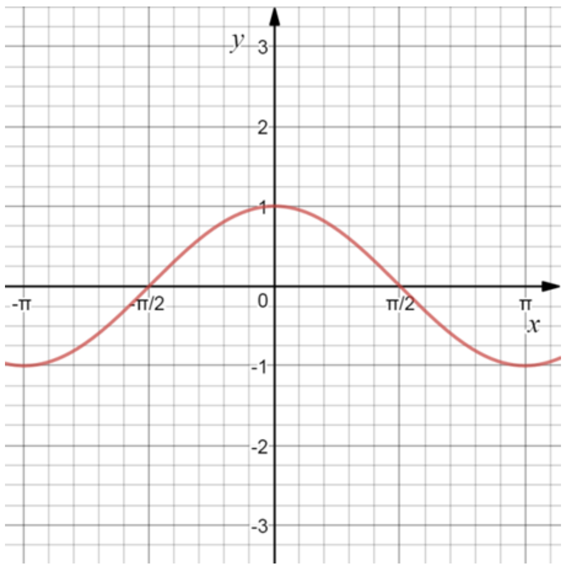


Рис.14

4.3) Тригонометрическая функция $y = tgx$

Графиком функции $y = tgx$ является тангенсоида, область определения – множество всех действительных чисел за исключением вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Функция периодическая с периодом π. (Рис.15)

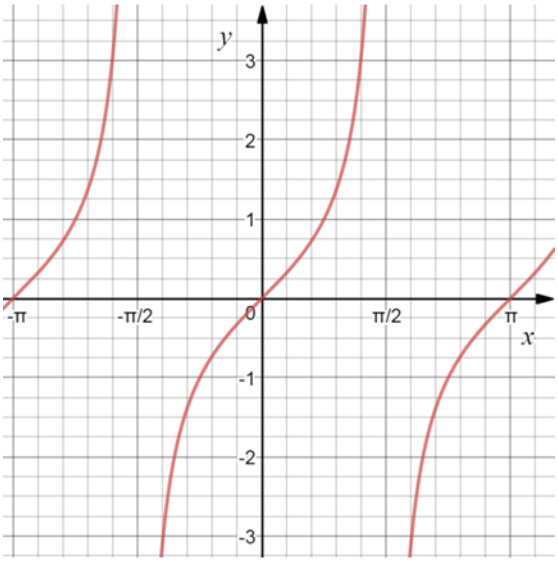


Рис.15

4.4) Тригонометрическая функция $y = ctgx$

Так как функции тангенса и котангенса связаны формулой $ctgx = \frac{1}{tgx}$, то и их графики будут похожи. Но область определения у котангенса - множество всех действительных чисел за исключением вида $x = 0 + \pi k, k \in Z$. (Рис.16)

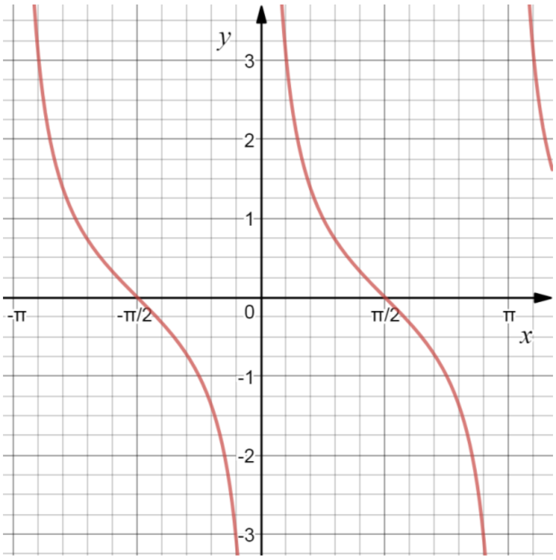


Рис.16

5) Обратные тригонометрические функции $y = arcsin\,x$, $y = arccos\,x$, $y = arctg\,x$, $y = arcctg\,x$.

5.1) Обратная тригонометрическая функция $y = arcsin\,x$

Функция $y = \arcsin x$ – обратная к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. График функции $y = \arcsin x$ может быть получен из графика функции $y =$

$\sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. (Рис.17)

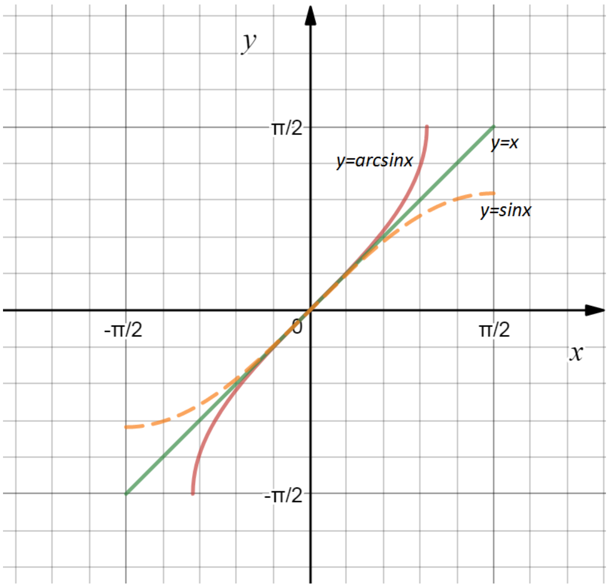


Рис.17

5.2) Обратная тригонометрическая функция $y = arccos\, x$

Функция $y = \arccos x$ – обратная к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

График функции $y = \arccos x$ может быть получен из графика функции $y = \cos x, x \in [0; \pi]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. (Рис.18) [13]

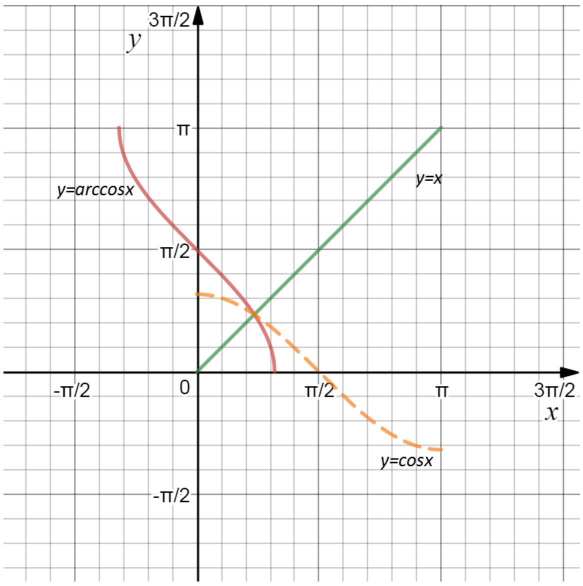


Рис.18

5.3) Обратная тригонометрическая функция $y = arctg\, x$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ – обратная к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Аналогично, график функции $y = \operatorname{arctg} x$ можно получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. (Рис.19)

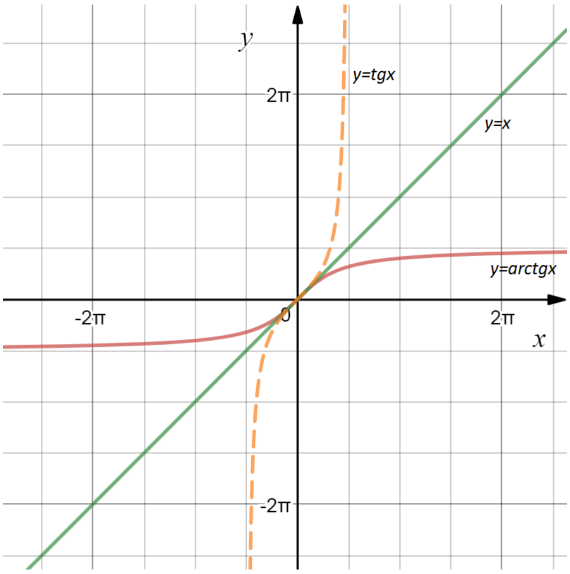


Рис.19

5.3) Обратная тригонометрическая функция $y = arcctg\,x$

Аналогично предыдущим случаям, построим график функции $y = arcctg\,x$, $x \in (0; \pi)$. (Рис.20)

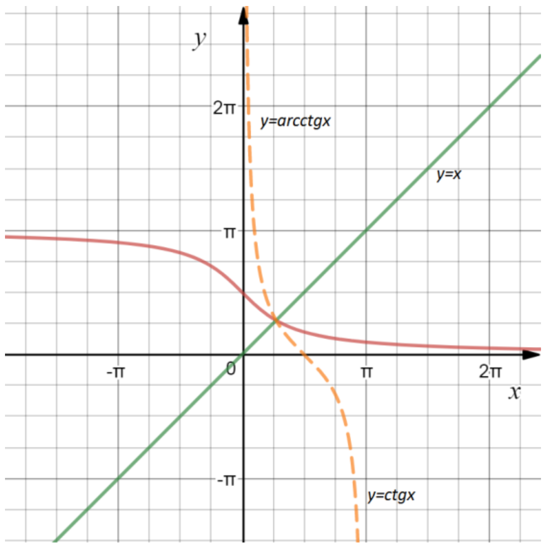


Рис.20

После рассмотрения элементарных функций мы можем перейти к изучению графиков функций с модулями.

1.3. Построение графиков функций и уравнений, содержащих модуль числа

Построение графиков функций вида $y = |f(x)|$.

Под $|f(x)|$ (т.е. под абсолютной величиной функции $f(x)$) понимают функцию вида:

$$y = \left[\begin{array}{l} f(x), \text{где } f(x) \geq 0, \\ -f(x), \text{где } f(x) < 0. \end{array}\right.$$

Таким образом, можно выделить алгоритм построения графиков функции вида $y = |f(x)|$:

1) Строим график функции $y = f(x)$.

2) Ту часть графика, которая расположена ниже оси Ох, т.е. где $f(x) < 0$, отображаем симметрично относительно оси абсцисс, оставив верхнюю часть графика без изменений.

Примечание. График функции $y = |f(x)| + k$ следует рассматривать как перемещение графика функции $y = |f(x)|$ по вертикали на величину k (k - действительное число). [2]

Пример 7.

Построить график функции $y = |2x| + 1$.

а) Следуя алгоритму, сначала построим график функции $y = 2x$.

б) Часть графика, лежащую ниже оси Ох, симметрично отобразим относительно этой оси.

в) Поднимем график на 1 единицы вверх, как сказано в примечании. (Рис.21)

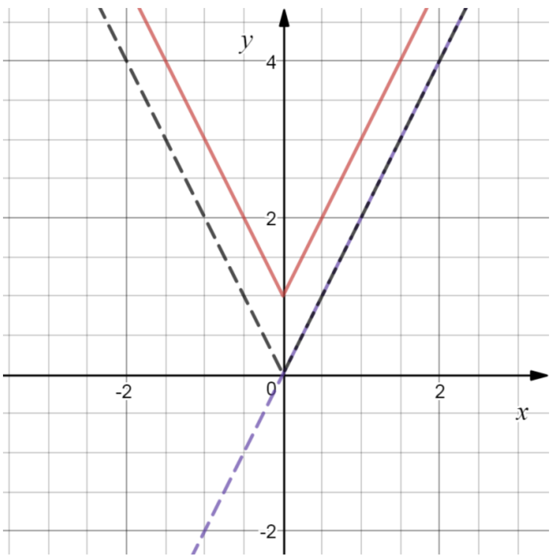


Рис.21

Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$

Функция $y = f(|x|)$ – четная, т.к. $|x| = |-x|$, а значит и $f(|-x|) = f(|x|)$.

Значит, алгоритм построения графика функции вида $y = f(|x|)$:

1) Построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$.

2) В силу четности функции, построенную часть отобразить симметрично относительно оси Оу.

Пример 8.

Построить график функции $y = 2\sin|x|$.

1) Строим график функции $y = 2\sin x$, при $x \geq 0$.

2) Построенную часть отображаем симметрично относительно оси Оу. (Рис.22)

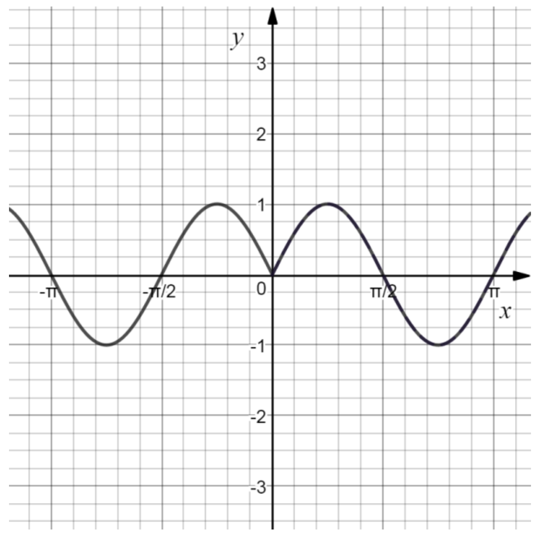


Рис.22

Пример 9.

Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$.

1) Строим график функции $y = x^2 - 4x + 3, x \geq 0$.

2) Отображаем полученный график относительно оси Оу. (Рис.23)

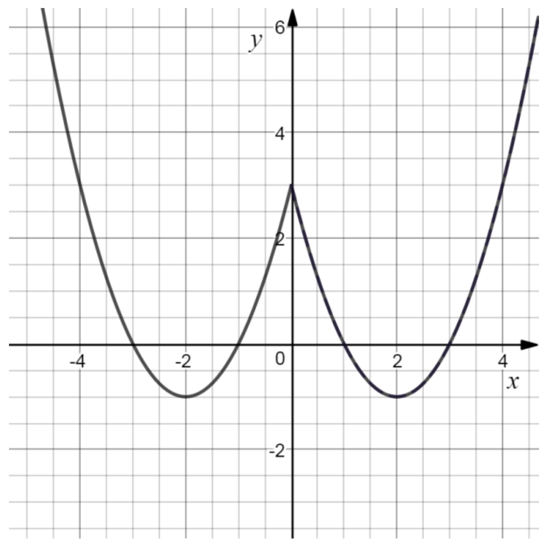


Рис.23

Построение графиков функций вида: $\boldsymbol{y = |k_1x + b_1| + |k_2x + b_2| + \cdots + |k_nx + b_n|, n \in N}$.

Суть метода заключается в рассмотрении функции на каждом из промежутков, на которые нули подмодульных выражений разбивают числовую прямую, определить знак каждого подмодульного выражения на всех промежутках, раскрыть модуль, используя определение абсолютной величины числа, а затем выполнить построения. [17]

Пример 10.

Построить график функции $y = |2x + 4| + |x + 1|$.

Нули подмодульных выражений $x = -2$ и $x = -1$.

Рассмотрим функцию на трех промежутках:

1) $\begin{cases} x < -2, \\ y = -3x - 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -2 \le x < -1, \\ y = x + 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \ge -1, \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

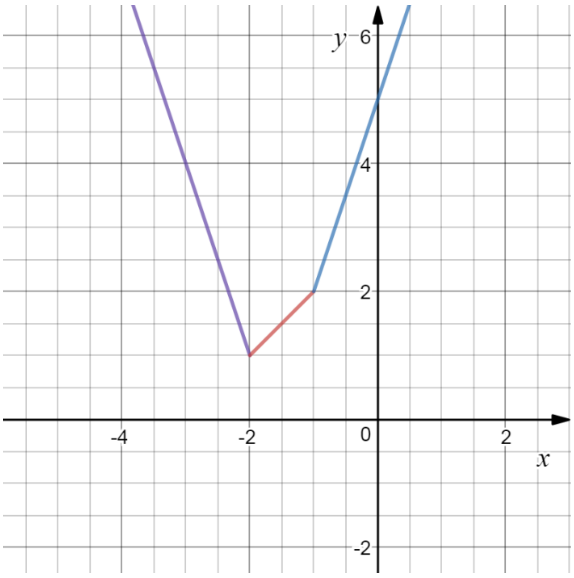


Рис.24

Таким образом, для построения графика необходимо найти точки излома, вычислить значения функции в точках слева и справа от точек излома, а затем соединить полученные точки с точками излома и точки излома между собой. (Рис.24) [17]

Построение графиков функций $\boldsymbol{y = \big|f|x|\big|}$

Рассмотрим один из возможных вариантов порядка построения графика данной функции:

1) Построить график функции $y = f(x)$ при $x \ge 0$.

2) Построенную часть отобразить симметрично относительно оси Oy.

3) На полученном графике часть, расположенную ниже оси Ox, отобразить симметрично вверх, оставив верхнюю часть без изменения.

Пример 11.

Построить график функции $y = |ln|x| - 1|$.

1) Строим график функции $y = lnx - 1$. (Рис.25,а)

2) Часть графика, где $x \geq 0$, отображаем симметрично относительно Оу. (Рис.25,б)

3) Отображаем нижнюю часть графика симметрично относительно оси Ох.

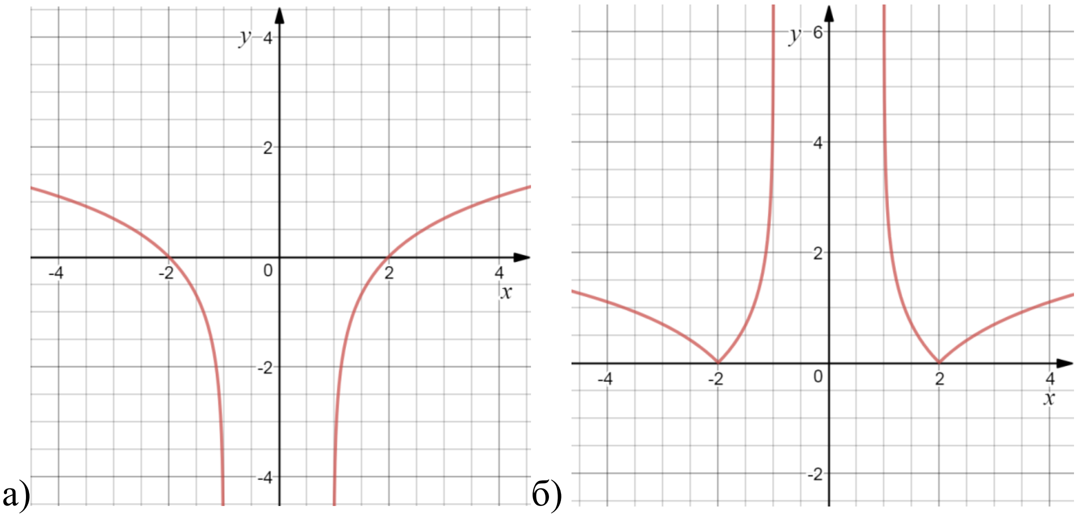


Рис.25

Построение графика функции вида $|y| = f(x)$

Так как $|-y| = |y|$, то график функции $|y| = f(x)$ симметричен относительно оси Ох.

Рассмотрим примерный порядок построения графика данной функции:

1) Найти область определения, если $f(x) \geq 0$ по определению модуля числа.

2) Построить график $y = f(x)$ там, где функция определена.

3) Построить кривые, симметричные построенному графику относительно оси Ох.

Пример 12.

Построить график функции $|y| = 2^x$.

1) Областью определения показательной функции являются все действительные числа.

2) Строим $y = 2^x$.

3) Полученный график отображаем симметрично относительно оси Ох. (Рис.26)

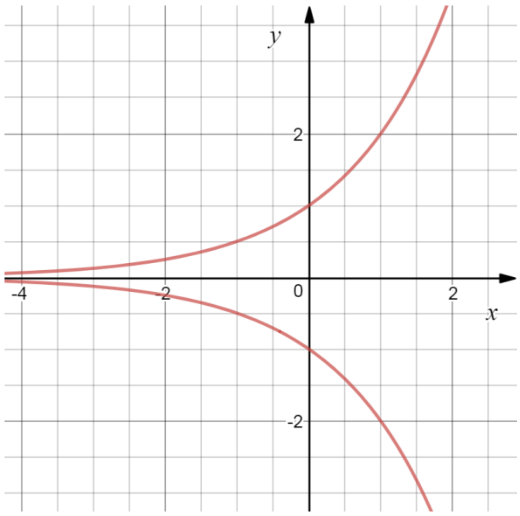


Рис.26

Построение графика функции вида $|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|$

Учитывая определение абсолютной величины числа, получаем порядок построения графика данной функции:

1) Строим график функции $y = |f(x)|$. (см. построение графиков функций вида $y = |f(x)|$).

2) Строим график функции $y = -|f(x)|$. Для этого отображаем построенный график $y = |f(x)|$ симметрично относительно оси Ох.

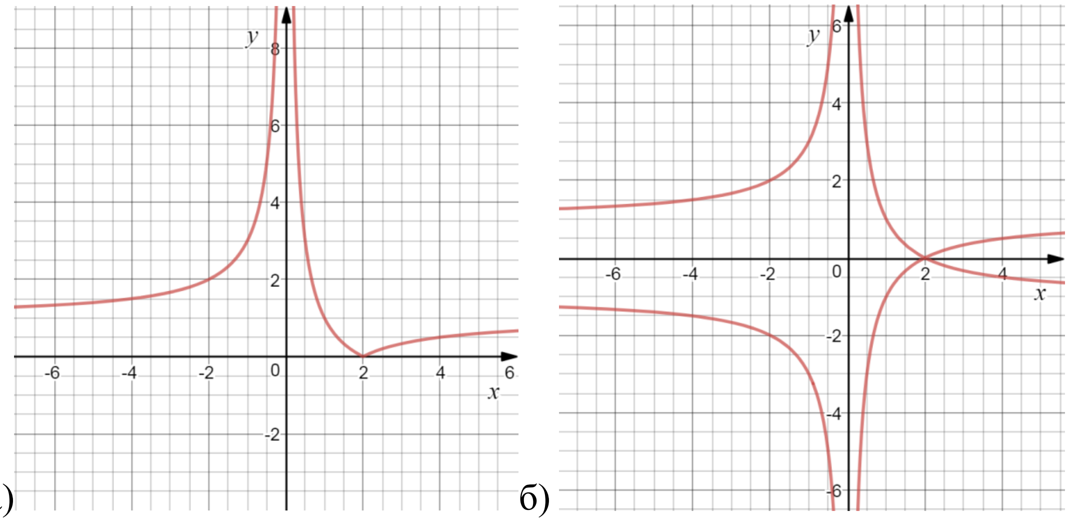
Объединение графиков – искомый график уравнения.

Пример 13.

Построить график функции $|y| = \left|\frac{2}{x} - 1\right|, x \neq 0$.

1) Строим $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|, x \neq 0$. Для этого сначала строим гиперболу $y = \frac{2}{x} - 1$ (то есть график функции $y = \frac{2}{x}$ опускаем на 1 значение вниз по оси Оу), затем часть, лежащую ниже оси Ох, отображаем ей симметрично вверх. (Рис.27,а)

2) Строим график $y = -\left|\frac{2}{x} - 1\right|$, симметрично отображая график $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$ относительно оси Ох. Объединение графиков есть решение. (Рис.27,б)



а) б)

Рис.27

Таким образом, мы рассмотрели построение графиков функций основных видов с модулями. Более сложные задачи и некоторые другие виды функций рассмотрим в практической части.

1.4. Методы решения уравнений и неравенств с модулем

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль, с помощью определения и свойств модуля.

Данный метод решения является одним из самых используемых в школе, так как для его применения достаточно знать определение и основные свойства модуля числа, а эти понятия учениками разбираются в шестом и восьмом классах. Таким образом, суть решения заключается в раскрытии модуля, то есть выведении аргумента из-под знака модуль, используя определение.

Пример 14.

1. Решить уравнение, используя определение абсолютной величины числа:

$x^2 - 7|x| + 12 = 0.$

Рассмотрим переменную x, стоящую под модулем:

1) Если $x < 0$, то по определению $|x| = -x.$ Выведем аргумент из-под знака модуль, используя полученное, и решим квадратное уравнение:

$$x^2 - 7 \cdot (-x) + 12 = 0,$$

$$x^2 + 7x + 12 = 0,$$

$$x_1 = -3; x_2 = -4.$$

Оба корня принадлежат указанному промежутку $x < 0$, поэтому они будут являться решениями уравнения.

2) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$. Решаем полученное квадратное уравнение:

$$x^2 - 7x + 12 = 0,$$

$$x_3 = 3; x_4 = 4.$$

Найденные корни принадлежат интервалу $[0; +\infty)$.

Ответ: $-4; -3; 3; 4$.

Таким образом, решая уравнение с переменной под знаком модуль, нужно помнить о промежутке. Если корень не принадлежит ему, то в решение его включать нельзя.

Пример 15.

Решить уравнение: $x^2 + |x| - 2 = 0$.

Аналогично предыдущему примеры, рассмотрим переменную x относительно 0.

1) Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Получаем уравнение:

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 2.$$

Корень $x_2 = 2$ не принадлежит интервалу $(-\infty; 0)$, значит, он не будет являться решением уравнения, в отличие от $x_1 = -1$.

2) Если $x \geq 0$, то $|x| = x$. Решаем квадратное уравнение:

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_3 = -2;\ x_4 = 1.$$

Аналогично с первым случаем утверждаем, что $x_3 = -2$ не будет являться корнем данного уравнения, так как не принадлежит заданному промежутку. Корень $x_4 = 1$ войдет в ответ.

Ответ: $-1; 1$.

В последних двух примерах мы рассмотрели случаи, когда под знаком абсолютной величины стоит только аргумент. Но, чаще всего, подмодульное выражение не состоит из одной переменной.

Пример 16.

Решить уравнение: $|2x + 8| = 12$. Воспользуемся определением.

1) Если $2x + 8 < 0$, то есть $x < -4$, то получаем: $-2x - 8 = 12$, следовательно, $x = -10 \in (-\infty; -4)$.

2) Если $2x + 8 \geq 0$, то есть $x \geq -4$, то получаем: $2x + 8 = 12$, следовательно, $x = 2 \in [4; +\infty)$.

Ответ: $-10; 2$.

Неравенство с модулем при помощи определения решается аналогично.

Пример 17.

Решить неравенство $|x^2 - x| < 30$.

1) Если $x^2 - x < 0$, то есть $x \in (0; 1)$, то получим неравенство: $x - x^2 < 30$. В этом неравенстве все точки интервала $(0; 1)$ являются решением.

2) Если $x^2 - x \geq 0$, то есть $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$, то получим $x^2 - x < 30$. Решением неравенства является $(-\infty; -5] \cup [6; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup (0; 1) \cup [6; +\infty)$.

Таким образом, использование определения абсолютной величины является одним из самых простых способов решения уравнений с модулем.

Метод интервалов

Применение метода интервалов основано на теореме, которая является следствием теоремы Больцано-Коши о нулях непрерывной функции:

Теорема 2.

Если функция непрерывна на промежутке и не обращается в нуль ни в одной точке этого промежутка, то она имеет один и тот же знак на всем промежутке. [10]

Метод интервалов позволяет решать более сложные уравнения и неравенства с модулем, но в школе учениками подробно он не проходится. Алгоритм метода заключается в следующем:

1. На числовой оси отметить все нули выражений, стоящих под знаком модуль.

2. Определить знак каждого из этих выражений на каждом из промежутков.

3. Раскрыть модули на каждом из промежутков и решить полученное уравнение (неравенство).

4. Из полученных решений выбрать те, которые принадлежат выбранному промежутку.

5. В ответ записать объединение решений всех промежутков.

Пример 18.

Решить уравнение: $|x-5|+|x-9|=6.$

Будем следовать алгоритму и найдем нули выражений, стоящих под знаком модуля: $\left[\begin{array}{l} x-5=0, \\ x-9=0. \end{array}\right.$ Получаем: $\left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=9. \end{array}\right.$ Отметим их на числовой прямой и определим знаки каждого из выражений на промежутках.

1) Если $x < 5$, то оба подмодульных выражения будут отрицательны, значит, по определению абсолютной величины их необходимо раскрыть, поменяв знаки: $5 - x + 9 - x = 6$. Решая уравнение, получим $x = 4 \in (-\infty; 5)$. Значит, $x = 4$ будет являться корнем изначального уравнения.

2) Если $5 \leq x < 9$, то $x - 5 \geq 0$, а $x - 9 < 0$. Таким образом, после раскрытия модуля уравнение примет вид: $x - 5 + 9 - x = 6$. Решая, приходим к выводу, что корней нет.

3) Если $x \geq 9$, то оба выражения будут неотрицательны.

$x - 5 + x - 9 = 6$. Корень уравнения: $x = 10 \in [9; +\infty)$.

Объединив полученные решения, приходим к ответу: корнями уравнения $|x - 5| + |x - 9| = 6$ являются числа 4; 10.

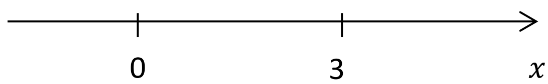
Пример 19.

Решить неравенство методом интервалов:

$$|x - 3| + |x| \leq 5$$

Аналогично предыдущему примеру с уравнением, будем следовать алгоритму.

$$\left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ \quad x = 0. \end{array}\right.$$



1) Если $x < 0$, то после раскрытия модуля получим неравенство:

$$3 - x - x \leq 5$$

$$x \geq -1$$

Объединяя заданный интервал и полученное решение, приходим к выводу, что нам удовлетворяют $x \in [-1; 0)$.

2) Если $0 \leq x < 3$, то:

$$3 - x + x \leq 5$$

$$3 \leq 5$$

Так как неравенство верно для любых x, то $[0; 3)$ – часть ответа.

3) Если $x \geq 3$, то:

$$x - 3 + x \leq 5$$

$$x \leq 4$$

То есть, $x \in [3; 4]$.

Объединив полученные решения, приходим к ответу: $x \in [-1; 4]$.

Метод решения при помощи зависимостей между числами, их модулями и квадратами.

Данный способ используется при решении уравнений, обе части которого находятся под знаком модуля. Так как модуль всегда неотрицательное число, то при возведении в квадрат обеих частей уравнения, мы получим верное равенство. В этом и заключается суть данного метода.

$$\left.\begin{array}{l} |a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \\[2em] a^2 = b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

Рассмотрим примеры уравнений.

Пример 20.

Решить уравнение: $|x + 2| = |3x - 4|$.

Воспользуемся соотношением: $(x+2)^2 = (3x-4)^2$.

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим квадратное уравнение: $2x^2 - 7x + 3 = 0$, которое ученики без особых трудностей решают через дискриминант. Получаем корни: $x_1 = 3$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

Графический метод.

Данный метод в школе является достаточно распространенным, но при решении уравнений, содержащих именно модуль, он встречается гораздо реже, так как результаты не всегда являются точными.

Суть метода заключается в использовании графиков функций для определения количества корней и их расположения.

Пример 21.

Решить уравнение $|x+3| = 2$ графическим методом. Для этого построим в одной системе координат графики функций $y = |x+3|, y = 2$ и посмотрим на их взаимное расположение.

Для построения графика функции $y = |x+3|$ необходимо сначала построить график функции $y = x + 3$, а затем отобразить часть прямой, лежащую ниже оси абсцисс, симметрично относительно Ох. Графиком функции $y = 2$ является прямая, проходящая через точку с координатами (0;2) и параллельная оси абсцисс. (Рис.28)

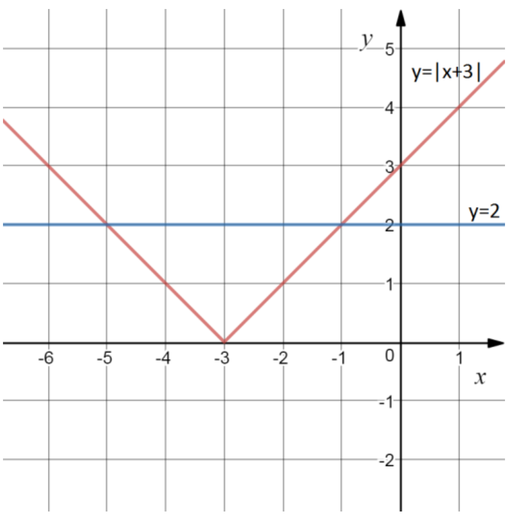


Рис.28

Абсциссы точек пересечения графиков и есть корни уравнения: $x_1 = -5; x_2 = -1$.

Ответ: -5; -1.

Пример 22.

Решить неравенство графическим методом: $|2-x|<|4+x|$.

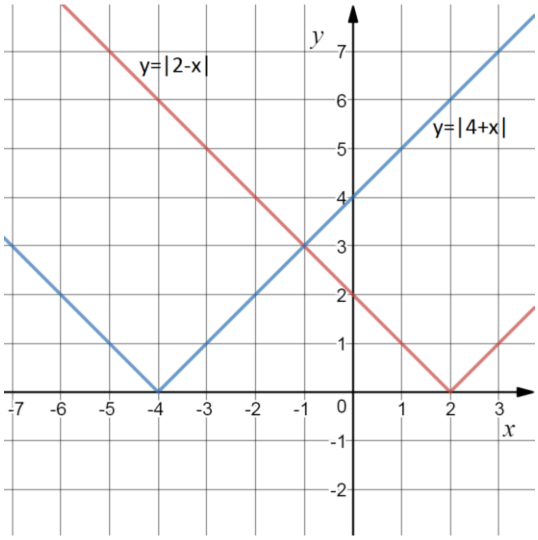


Рис.29

Построим графики функций $y=|2-x|, y=|4+x|$ и посмотрим, какое множество точек будет удовлетворять неравенству. (Рис.29)

Таким образом, получаем, что графики пересекаются в точке с абсциссой, равной -1, и искомое решение: $x\in(-\infty;-1)$.

Ответ: $(-\infty;-1)$.

Пример 23.

Решить уравнение графическим методом $|x^2-4|=|1-x^2|$.

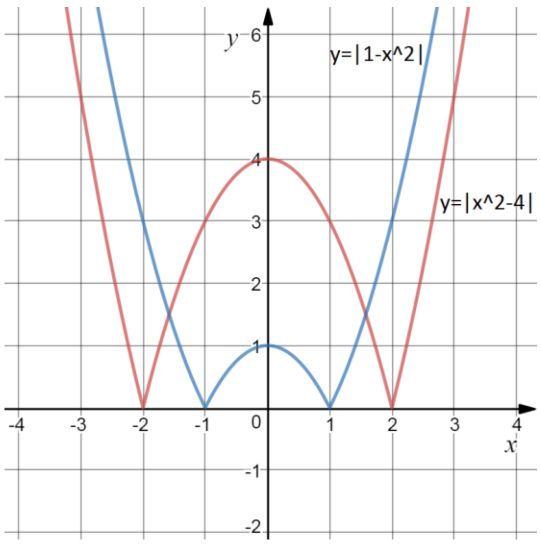


Рис.30

Построим графики $y=|x^2-4|, y=|1-x^2|$ аналогично примеру 1 и рассмотрим точки пересечения графиков. (Рис.30)

Построив графики, приходим к выводу, что можно определить количество решений уравнения, а именно два корня, но точные их значения мы найти не можем.

В этом и заключается основная причина редкого использования геометрического метода в решении уравнений с модулями.

Метод использования геометрической интерпретации модуля.

В параграфе 1.1 при разборе общих сведений о модуле была приведена геометрическая интерпретация абсолютной величины числа. Одним из выводов этого рассуждения было то, что геометрический смысл выражения $|x-a|$ заключается в расстоянии, или длине отрезка, между точками $A(x)$ и $B(a)$ на координатной прямой.

Этот метод в некоторых случаях позволяет ученикам решить уравнения с модулем без особых трудностей, но при этом он ограничивается уравнениями определенных видов.

Пример 24.

Решить уравнение: $|x-5|+|x-6|=1$.

Левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки $A(x)$ до двух фиксированных точек $B(5)$и $C(6)$. Так как эта сумма должна равняться 1, то $x \in [5;6]$. А точки вне этого отрезка не будут являться решением, потому что сумма расстояний любой из них и точек Bи C всегда будет получаться больше 1.

Ответ: $[5;6]$

Пример 25.

Решить уравнение $|x-5|-|x-6|=1$.

Аналогично предыдущим рассуждениям, получим, что разность расстояний от некоторой точки $A(x)$ до двух фиксированных точек $B(5)$и $C(6)$ будет равна 1 только в том случае, когда $x \in [6;+\infty)$.

Проанализировав основные способы решения уравнений и неравенств с помощью модуля на простых примерах, можно сделать выводы, что ни один из них не является универсальным. Необходимо добиваться, чтобы ученики умели самостоятельно подбирать наиболее эффективный способ решения и могли его применить без особых трудностей.

Метод замены переменной.

Правильная замена переменного в ряде задач значительно упрощает их решение. Суть метода заключается в том, чтобы заменить одно из выражений через другую переменную и, тем самым, привести уравнение или неравенство к стандартному виду. Рассмотрим пример.

Пример 26.

Решить уравнение $\cos^2 x = 1{,}5|\sin x|$.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - |\sin x|^2$, то пусть $\sin x = t$, причем $t \in [0; 1]$.

Тогда $1 - t^2 = 1{,}5t$. Получили приведенное квадратное уравнение, решаемое через теорему Виета или дискриминант.

$$\left[\begin{array}{l} t = 0{,}5 \in [0; 1], \\ t = -2 \notin [0; 1] \end{array}\right. \Rightarrow \sin x = 0{,}5 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. [17]$$

1.5. Методы решения уравнений и неравенств с модулем и параметром

В курсе элементарной математики уравнения и неравенства с параметрами являются, пожалуй, самыми сложными задачами. Однако такие задачи необходимо значить школьникам, в том числе и для подготовки к ЕГЭ.

Если в выражении с двумя неизвестными $\mathrm{F}(\mathrm{x}; \mathrm{a}) = 0$ (или $\mathrm{F}(\mathrm{x}; \mathrm{a}) > 0$) переменной a придавать какое-либо фиксированное значение, то это уравнение (или неравенство) можно рассматривать как задачу с одной переменной x. Множеством решения такой задачи является множество пар чисел $(\mathrm{x}; \mathrm{a})$, при подстановке которых в исходное выражение получается верное равенство (или верное неравенство). Аргументы x и a считаются неравноправными, так как при решении задач обычно стараются найти x , выраженное через a. Далее необходимо выяснить зависимость решений от значений параметра а, что является важной частью решения задачи. Иногда ее называют исследованием и отделяют от непосредственного решения. [18]

Для решения таких заданий чаще всего используются два метода: аналитический и геометрический.

Особый класс задач с параметром и модулем составляют задачи, в которых нужно указать число решений при данных значениях параметра или решить обратную задачу (указать, при каких значениях параметра уравнение имеет заданное число корней). Выбор того или иного способа решения зависит от структуры конкретной задачи. [16]

Аналитический способ решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, при наличии параметра.

Данный метод основывается на использовании определения и свойств модуля, без построения графиков функций.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 27.

Решить уравнение $|x + a| = a - 4$.

Воспользуемся определением модуля числа. При $a - 4 < 0$, т.е. при $a < 4$, уравнение не имеет решений. Если $a - 4 \geq 0$, или $a \geq 4$, получаем совокупность уравнений: $\left[\begin{array}{l} x + a = a - 4, \\ x + a = 4 - a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 4 - 2a. \end{array}\right.$

Ответ: при $a < 4$ корней нет, при $a \geq 4$ $x = -4$ и $x = 4 - 2a$.

Пример 28.

При каждом a решить неравенство: $|3x + a| \leq x + 3$.

По геометрической интерпретации модуля числа получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x + a \geq -x - 3, \\ 3x + a \leq x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-3-a}{4} \\ x \leq \frac{3-a}{2} \end{cases}$$

Причем $\frac{-3-a}{4} \leq \frac{3-a}{2}$, то есть $a \leq 9$.

Ответ: при $a > 9$ корней нет, при $a \leq 9$ $x \in \left[\frac{-3-a}{4}; \frac{3-a}{2}\right]$.

Графический способ решения уравнений и неравенств с модулями при наличии параметров.

Использование графиков функций и уравнений, чаще всего, значительно упрощает решение уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 29.

Решить уравнение $\big||x+2|-3\big| = a$.

По уже описанной методике строим график функции $y = \big||x+2|-3\big|$. Для этого сначала построим $y = |x+2| - 3$, а после отобразим часть графика, лежащую ниже оси Ox симметрично относительно этой оси вверх. (Рис.31)

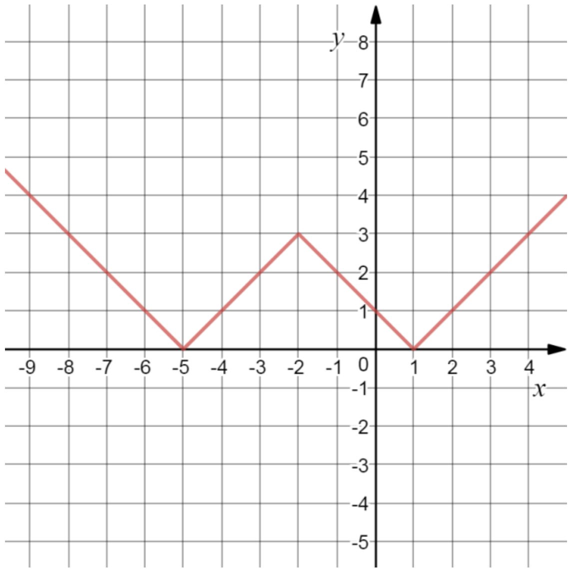


Рис.31

Графиком функции $y = a$ будет прямая, параллельная оси Оу.

Из рисунка видно, что при а < 0, уравнение корней не имеет, при а $= 0$ корнями будут х $= -5$ и х $= 1$. Если $0 <$ а < 2, то уравнение имеет 4 корня:

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = a, \\ -x + 1 = a, \\ x + 5 = a, \\ -x - 5 = a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + 1, \\ x = 1 - a, \\ x = a - 5, \\ x = -a - 5. \end{array}\right.$$

При $a = 3$ уравнение имеет 3 корня:

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x - 1 = 3, \\ -x - 5 = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4, \\ x = -8. \end{array}\right.$$

При $a > 3$ уравнение будет иметь два корня:

$$\left[\begin{array}{l} x - 1 = a, \\ -x - 5 = a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + 1, \\ x = -a - 5. \end{array}\right.$$

Ответ: При $0 <$ а $< 2, x = a + 1; 1 - a; a - 5; -a - 5$. При $a = 3: x = -2; 4; -8$. При $a > 3$, $x = a + 1;\ -a - 5$.

1.6. Развитие познавательного интереса учащихся по теме «Модуль числа».

Познавательный интерес, интерес к учебно-познавательной деятельности, является мощным двигателем в обучении.

Около двадцати лет назад проблему отсутствия у учеников интереса к математике помогало решать введение факультативных занятий. Весомый вклад в факультативное движение внес И.Ф. Шарыгин, разработавший факультативный курс по математике (решение задач). Свою работу автор строил на определенных методических принципах:

1) Принцип регулярности. Основная работа происходит не в классе на совместных занятиях, а дома, индивидуально. Лучше заниматься понемногу, но часто.

2) Принцип параллельности. Следует постоянно держать в поле зрения несколько (две – три) тем, постепенно продвигаясь по ним вперед и вглубь.

3) Принцип опережающей сложности. Не следует загружать ученика большой по объему, но не сложной работой. Задания желательно подобрать так, чтобы две трети из них были доступны практически всем учащимся, а треть – по силам лишь некоторым.

4) Принцип вариативности. Очень полезно на примере одной задачи рассмотреть различные приемы и методы решения.

5) Принцип самоконтроля. Регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть непременным элементом самостоятельной работы.

6) Принцип быстрого повторения. По мере накопления числа решенных задач следует просматривать и некоторым образом раскладывать по полочкам образовавшийся задачный архив.

7) Принцип работы с текстом.

8) Принцип моделирования ситуаций. Полезно моделировать критические ситуации, которые могут возникнуть при решении задач и отрабатывать стереотипы поведения.

В теме «Уравнения, содержащие модуль» И.Ф. Шарыгин рассматривает как стандартный метод (раскрытие модуля на основании определения), так и другие интересные методы решения: использование монотонности, экстремальных свойств, логические методы. [19]

Интересен опыт кружковой работы Е.Г. Коновой, где автор подобрал и систематизировал ряд интересных и творческих задач. Ее книга представляет собой разработку занятий для подготовки к конкурсам, олимпиадам. Задачи, включенные в работу, помогают повысить уровень математической культуры школьников. [9]

На начальном этапе обучения необходимо выявить у учащихся, проявляющих интерес к математике, и с ними решать наиболее трудные задачи учебника на занятиях кружка, консультации или на уроке. В среднем звене углубление идет в расширение понятия модуля за счет усложнения заданий, которые требуют комплексного применения различных способов решения. Можно попрактиковать как решение сложных заданий по карточкам для сильных учеников, так и простые для всех учащихся, а так же примеры на вычисление с модулем.

В 7-ом классе, когда учащиеся достаточно хорошо владеют навыками решения несложных заданий с модулем, нужно постепенно углублять их знания путем включения дополнительных упражнений, содержащих модуль, в самостоятельные и контрольные работы.

В 8-х и 9-х классах можно провести уроки-практикумы по решению задач, содержащих модуль. На этих уроках отчетливо просматриваются навыки учащихся в решении задач с модулем, а так же методы, которыми они овладели. Для самых сильных учеников предложить задания, которые предполагают несколько вариантов решений. Затем предложенные решения обсудить, и выбрать наиболее рациональные.

В старшем звене, в классах с углубленным изучением математики, полезно на факультативных занятиях и за счет дополнительных часов отрабатывать навыки решения сложных задач, содержащих модуль. Учащиеся уже имеют набор методов и способов решения и способны сами их реализовывать.

Таким образом, разработка факультативного курса и подбор необходимых задач будет способствовать развитию познавательного интереса учащихся, формированию у них четкого понимания понятия модуль и поможет систематизировать методы решений уравнений и неравенств с абсолютной величиной.

Глава 2. Разработка элективного курса «Методы решений уравнений и неравенств с модулем в заданиях ЕГЭ»

Актуальность курса определяется значимостью понимания школьниками особого положения уравнений и задач с модулем в школьной программе. Но программа школьного курса ограничена и не позволяет в полном объеме рассмотреть задачи на решение уравнений и неравенств, содержащих модуль. Эти задачи включены в ЕГЭ, в том числе задачи с параметром и модулем, которые вызывают у учащихся трудности, обусловленные необходимостью понимания закономерностей, наличия навыка анализа конкретного случая на основе известных общих свойств объекта, систематичности и последовательности в решении, умения объединять рассмотренные частные случаи в единый результат. К таким задачам относятся: решение уравнений и неравенств, содержащих модуль числа, а так же уравнения и неравенства с модулем, содержащие параметр. Разрешить трудности учащихся и рассмотреть вышеназванные задачи может данный элективный курс: «Методы решений уравнений и неравенств с модулем в заданиях ЕГЭ».

Предлагаемый курс предназначен для реализации в 10-11 классах, направлен на систематизацию знаний по теме «Модуль числа», формированию познавательного интереса к данной теме, повышению уровня математической подготовки через решение большого количества задач. Курс формирует такие умения и навыки как логичность и самостоятельность мышления, умение обобщать и систематизировать, навыки в решении задач.

Цели курса:

1. Систематизация знаний и повышение уровня понимания и практической подготовки в следующих вопросах:

- Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль числа;
- Построение графиков элементарных функций, содержащих модуль;

- Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль числа, с параметрами.

2. Повышение уровня математической подготовки школьников, в том числе, для успешной сдачи ЕГЭ.

3. Создание рекомендуемой базы заданий.

Задачи курса:

1. Углубить и расширить знания по математике;
2. Способствовать развитию познавательного интереса учащихся к математике;
3. Сформировать навыки применения данных знаний при решении задач различной сложности.

Требования, которым отвечает тематика и содержание курса:

- поддержание изучения базового курса алгебры;
- повышение уровень образованности школьников, расширяется их кругозор, удовлетворяются познавательные интересы в области математики;
- обладание значительным развивающим потенциалом (развитие математического мышления, умения систематизировать, обобщать, делать выводы).

Данный курс рассчитан на 16 часов, предполагает систематизированное изложение теории, решение типовых задач, самостоятельную работу. Практическая работа учащихся должна присутствовать в различных формах: индивидуально, в парах или в группах. Такая организация способствует реализации развивающих целей курса, так как развитие способностей учащихся возможно лишь при сознательном, активном участии в работе самих учащихся. [21]

Программа может быть использована в классе с математическим уклоном.

Разработка элективного курса содержит в себе тематическое планирование (таблица 1) и подбор задач к каждому занятию.

Ожидаемый результат изучения курса:

– Расширение знаний по математике;

– Систематизация знаний по методам решения уравнений и неравенств с модулем и параметром;

– Способность применять полученные знания и умения при сдаче ЕГЭ и дальнейшем обучении.

Проведение данного элективного курса у школьников 10-11 классов предполагает как итоговый результат не только приобретение знаний, предусмотренных требованиями программы общеобразовательной школы, но и умение решать задачи с повышенным уровнем сложности.

Следует заметить, что требования к знаниям и умениям не должны быть завышены. Чрезмерность требований порождает перегрузку и ведет к угасанию интереса. Одна из целей преподавания данного курса ориентационная – помочь осознать ученику степень значимости своего интереса к математике и оценить свои возможности, поэтому интерес и склонность учащегося к занятиям на курсах должны подкрепляться и развиваться.

В разработке курса к каждой теме предоставлен рекомендуемый набор задач, который будет способствовать достижению поставленных целей. На уроках необходимо предоставить ученикам систематизированную теоретическую часть, после чего приступать к решению задач.

Таблица 1

Тематическое планирование

Наименование разделов	Количество часов
Определение модуля, его свойства, геометрическая интерпретация. Применение их при решении уравнений и неравенств с модулем	2
Метод интервалов при решении уравнений и неравенств с модулем	1
Метод решения при помощи зависимостей между числами, их модулями и квадратами.	1
Метод замены переменной	1
Построение графиков элементарных функций, элементарные преобразования графиков функций	2
Построение графиков функций вида $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$, $\|y\| = f(x)$, $y = \big\|f\|x\|\big\|$, $\|y\| = \|f(x)\|$	2
Графический способ решения уравнений и неравенств с модулем	2
Методы решения уравнений и неравенств с модулем и параметром	2
Решение усложненных задач с модулем и параметром в заданиях ЕГЭ	3
Итого	**16**

Применение определения и свойств модуля при решении уравнений и неравенств.

№1

Решить уравнение $|x-5| = 13$.

$$\begin{cases} x-5 = 13, \ x \geq 5; \\ 5-x = 13, \ x < 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \ \in [5; +\infty) \\ x = -8 \in (-\infty; 5). \end{cases}$$

Ответ: -8; 18.

№2.

Решить неравенство: $\left|2x-\frac{5}{x}\right| \geq 2x-\frac{5}{x}$

Из определения модуля числа следует, что для любых $a \in R$ $|a| \geq a$. Значит, $x \in R\backslash\{0\}$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

№3.

Решить неравенство $|x^2-8x+15| \leq 0$.

Так как модуль числа не может быть отрицательным, то неравенство $|x^2-8x+15| < 0$ решений не имеет, а уравнение $|x^2-8x+15| = 0$ имеет два корня $x=3$ и $x=5$.

Ответ: 3; 5.

№4.

Решить уравнение $|x^2-4| = 5x+2$.

1) Если $x^2-4 \geq 0$, т.е. $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, то уравнение будет иметь вид $x^2-4=5x+2$, решая по теореме Виета, находим корни $x=-1 \notin (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; $x=6 \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Значит, $x=6$ – корень уравнения.

2) Если $x^2-4<0$, т.е. $x \in (-2; 2)$, то уравнение будет иметь вид $4-x^2=5x+2$, находя корни через дискриминант, получаем $x=\frac{-5+\sqrt{33}}{2} \in (-2; 2)$, $x=\frac{-5-\sqrt{33}}{2} \notin (-2; 2)$.

Ответ: $\frac{-5+\sqrt{33}}{2}$; 6.

№5.

Решить уравнение $|x^2-5x+6|=|x-2|(3-x)$.

Так как $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, то по свойствам модуля уравнение примет вид:

$$|x-2||x-3|=|x-2|(3-x)\Leftrightarrow |x-2|\big(|x-3|-(3-x)\big)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|=0 \\ |x-3|=3-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-3\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x\le 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;3]$.

№6.

Решить неравенство $|x-3|\le 2x-7$.

1) Если $x-3\ge 0$, т.е. $x\ge 3$, то $x-3\le 2x-7$, $x\ge 4$. Пересечением промежутков является $[4;+\infty)$.

2) Если $x-3<0$, т.е. $x<3$, то $3-x\le 2x-7$, $x\ge \frac{10}{3}$. Пересечение промежутков дает нам пустое множество.

Ответ: $[4;+\infty)$.

№7.

Решить уравнение: $x^2-6x+|x-3|-3=0$.

1) Если $x-3\ge 0$, т.е. $x\ge 3$, то данное уравнение примет вид $x^2-6x+x--3-3=0$ $\Leftrightarrow$ $x^2-5x-6=0$. Корни $x=-1\notin[3;+\infty), x=6\in[3;+\infty)$.

2) Если $x-3<0$, т.е. $x<3$, то данное уравнение примет вид $x^2-6x-x++3-3=0\Leftrightarrow x^2-7x=0$. Корни $x=7\notin(-\infty;3), x=0\in(-\infty;3)$.

Ответ: 0; 6.

№8.

Решить уравнение: $\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) Если $\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$, т.е. $x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right], n\in Z,$ то уравнение примет вид:

$\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin x=\cos x$

Решением полученного уравнения будет являться серия корней

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$ Учитывая выбранный промежуток, получаем, что

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$$

2) Если $\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}<0,$ т.е. $x\in\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z,$ то уравнение примет вид:

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=1\ \Leftrightarrow\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Но полученное решение не принадлежит заданному промежутку.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Дополнительные упражнения: $|1-x^2|=x^2-1, |5x-6|=2x-5,$

$x^2-5|x|+6=0, |2x-3|\geq x+1, x^2-2|x|-3\leq 0, |3-2x|=3x,$ $3tgx=\sqrt{3}\sin x$; $1+2|\cos x|\sin x=0.$

Решения уравнений вида $|f(x)|=a.$

Если $a < 0$, корней нет.

Если $a = 0$, то $f(x) = 0$.

Если $a \geq 0$, то $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

№9.

Решить уравнение: $|2x - 5| = 3$.

$|2x - 5| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 5 = 3, \\ 2x - 5 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 4.

№10.

Решить уравнение $\left||x| - 2\right| = 4$.

$\left[\begin{array}{l} |x| - 2 = 4, \\ |x| - 2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 6, \\ |x| = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = -6. \end{array}\right.$

Ответ: -6; 6.

№11.

Решить уравнение $|\sin x - 1| = \frac{1}{2}$.

$\left[\begin{array}{l} \sin x - 1 = \frac{1}{2} \\ \sin x - 1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

№11.

Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$$

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

$$\frac{|x-3|}{|x-2|}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left|\frac{x-3}{x-2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x-3}{x-2}=\frac{1}{2}\\ \frac{x-3}{x-2}=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=2\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$; 4. [17]

Дополнительные упражнения: $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=2$, $\Big|4-\big|3-|2-|1-x||\big|\Big|=2$, $|\sin x-\cos x|=1$.

Метод интервалов при решении уравнений и неравенств с модулем

№12.

Решить уравнение: $2|x-5|+|x+7|-4|x+1|=3$.

Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x=-7, x=-1$ и $x=5$.

Эти числа разбивают координатную прямую на 4 промежутка, значит, нужно решить четыре системы:

а) $\begin{cases}x\le -7\\ 2(5-x)-x-7-4(-x-1)=3\end{cases}$; $\begin{cases}x\le -7\\ x=-4\end{cases}$. Система не имеет решений.

б) $\begin{cases}-7<x\le -1\\ 2(5-x)+x+7-4(-x-1)=3\end{cases}$; $\begin{cases}-7<x\le -1\\ x=-6\end{cases}$. Откуда $x=-6$.

в) $\begin{cases}-1<x\le 5\\ 2(5-x)+x+7-4(x+1)=3\end{cases}$; $\begin{cases}-1<x\le 5\\ x=2\end{cases}$. Откуда $x=2$.

г) $\begin{cases}x>5\\ 2(x-5)+x+7-4(x+1)=3\end{cases}$; $\begin{cases}x>5\\ x=-10\end{cases}$. Система не имеет решений.

Ответ: -6; 2.

№13.

Решить уравнение $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| - \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| = 1.$

Так как период функции синуса и косинуса равен 2π, то будем искать ответы на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \pm\frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{5\pi}{3}$.

а) $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} - \sin x - \cos x + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6} \\ -\sin x = \cos x \end{cases}$. Откуда $x = -\frac{\pi}{4}$.

б) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3} \\ \sin x - \frac{1}{2} - \cos x + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3} \\ \sin x - \cos x = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{\pi}{6} \le x < \frac{\pi}{3} \\ x = \pi; \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Система решений не имеет.

в) $\begin{cases} \frac{\pi}{3} \le x < \frac{5\pi}{6} \\ \sin x - \frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$. Система не имеет решений.

г) $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{3} \\ -\sin x + \frac{1}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{3} \\ \cos x - \sin x = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{3} \\ x = 0;\ \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

Откуда $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \{n, k\} \in Z$.

№14.

Решить уравнение: $2^{|x-2|} + |2^x - 2| = 5$.

Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 1, x = 2$.

а) $\begin{cases} x \le 1 \\ 2^{2-x} + 2 - 2^x = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 1 \\ 2^{2-x} + 2 - 2^x = 5 \end{cases}$. Приходим к уравнению

$\frac{4}{2^x} - 2^x - 3 = 0$. Заменим $2^x = t, t > 0, t^2 - 3t + 4 = 0$. Решаем уравнение возвращаемся к замене: $t = 1, 2^x = 1, x = 0$.

б) $\begin{cases} 1 < x \le 2 \\ 2^{2-x} + 2^x - 2 = 5 \end{cases}$. Решая второе уравнение системы, получим:

$$2^x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Но так как $1 < x \le 2$, значит $2 < 2^x \le 4$, а $\frac{7\pm\sqrt{33}}{2} \notin [2; 4]$.

в) $\begin{cases} x \ge 2 \\ 2^{x-2} + 2^x - 2 = 5 \end{cases}$. При решении второго уравнения системы придем к выражению: $2^x = 5{,}6$, и если $x \ge 2$, то $2^x \ge 4$. Значит, $x = \log_2 5{,}6 \in [2; +\infty)$.

Ответ: 0, $\log_2 5{,}6$. [17]

№15.

Решить неравенство $|x - 3| + |x| \le 5$.

Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 0$ и $x = 3$.

а) $\begin{cases} x \le 0 \\ 3 - x - x \le 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -1 \end{cases}$. Откуда $x \in [-1; 0]$.

б) $\begin{cases} 0 < x \le 3 \\ 3 - x + x \le 5 \end{cases}$. Т.к. второе неравенство верно при любых x, то $x \in (0; 3]$.

в) $\begin{cases} x > 3 \\ x - 3 + x \le 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 3 \\ x \le 4 \end{cases}$. Откуда $x \in (3; 4]$.

Ответ: $[-1; 4]$.

Дополнительные упражнения: $\big||x-2|-1\big|+|x+1|=4$, $\frac{4|x-3|-x}{2-|x-2|}=4$,

$|2-5x|+|x+1|\geq x+3, \frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\geq 2$.

Метод решения при помощи зависимостей чисел, их модулей и квадратов

Чаще всего, метод применяется при решении уравнений вида $|f(x)|=|g(x)|$.

$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$.

Так же следует помнить $\sqrt{x^2}=|x|$.

№16.

Решить уравнение $|4-x|=|2x+1|$.

$(4-x)^2-(2x+1)^2=0 \Leftrightarrow (4-x-2x-1)(4-x-2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3x+3)(x+5)=0 \Leftrightarrow x=1, x=-5$.

Ответ: -5; 1

№17.

Решить уравнение $|\sin x|=|\cos x|$.

$\sin^2 x-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow -(\cos^2 x-\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow -\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

№18.

Решить уравнение $\left|\sqrt{2+x^2}-2\right|=|x-2|$.

$\left(\sqrt{2+x^2}-2\right)^2-(x-2)^2=0 \;\Leftrightarrow\; 4\sqrt{2+x^2}=2+4x \;\Leftrightarrow\; x=1{,}75$

Ответ: 1,75

№19.

Решить неравенство $|x^2 - 5x| \leq 6$.

$(x^2 - 5x) - 6^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-3)(x-6) \leq 0$.

Решая методом интервалов, получаем $x \in [-1; 2] \cup [3; 6]$.

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. [17]

№20.

Решить неравенство $|2\sin x - 1| \leq \sin x$.

$(2\sin x - 1)^2 - \sin^2 x \leq 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)\,(3\sin x - 1) \leq 0$.

Так как то, что $\sin x - 1 \leq 0$ очевидно, то для верного неравенства $3\sin x - 1 \geq 0$.

$\left[\begin{array}{c} \sin x = 1 \\ 3\sin x - 1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{3}$

Ответ: $\left[\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right]$. [17]

Дополнительные упражнения: $\left|x - \sqrt{3 - x^2}\right| = \left|x\sqrt{3 - x^2}\right|$; $|x^2 - x - 2| = |2x^2 - x - 1|$, $|\sin x| > |\cos x|$, $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| < 2$.

Метод замены переменной

Данный метод часто используется при решении уравнений как промежуточный, для удобства и быстроты получения ответа, но в некоторых заданиях повышенной трудности он является основным.

№21.

Решить уравнение: $\sin^2 x = 1{,}5\,|\cos x|$.

Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - |\cos x|^2$, то пусть $|\cos x| = t, t \in [0; 1]$.

После замены переменной получим уравнение $1 - t^2 = 1{,}5t,\ t = -2 \notin [0; 1], t = 0{,}5 \in [0; 1]$.

$|\cos x| = 0{,}5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0{,}5 \\ \cos x = -0{,}5 \end{array}\right.$; откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

№22.

Решить уравнение $\sqrt{x - 4\sqrt{x-2} + 2} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-2} + 7} = 5$.

Пусть $\sqrt{x-2} = t, x = t^2 - 2$.

После замены получаем уравнение: $\sqrt{t^2 - 4t + 4} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |t - 2| + |t + 3| = 5$.

Решаем уравнение методом интервалов и получаем ответ: $t = 0$ и $t = 5$.

Возвращаемся к замене: $\sqrt{x-2} = 0,\ x = 2$ и $\sqrt{x-2} = 5, x = 27$.

Ответ: 2; 27.

№23.

Решить уравнение $\sqrt{3}\text{Ctgx} - 1 = \frac{1}{|\sin x|}$.

Так как $1 + \text{Ctg}^2\text{x} = \frac{1}{\sin^2 x}$, то пусть $\text{Ctgx} = t$, тогда уравнение примет вид:

$\sqrt{3}t - 1 = \sqrt{1 + \text{t}^2} \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 = 1 + t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 2\sqrt{3}t = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Получаем $t = 0$ – посторонний корень, $\text{Ctgx} = \sqrt{3}$, $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Дополнительные упражнения: $\sqrt{|x-2|-1} + \sqrt{x+3} = 2$, $4 - \sqrt{x+5-2\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+13-6\sqrt{x+4}}$; $2|\sin x - \cos x| + 3|\sin x + \cos x| = 5$. [17]

Построение графиков элементарных функций (преобразования графиков)

Построение графика функции $y = f(x) + b$.

Для построения графика функции $y = f(x) + b$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Oy на b единиц вверх при $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$.

№24.

Построить график функции $y = 2^x - 2$

1) $y = 2^x$ – показательная функция.

2) $y = 2^x - 2$ – сдвигаем полученный в первом пункте график на 2 единицы вниз по оси Oy. (Рис.32)

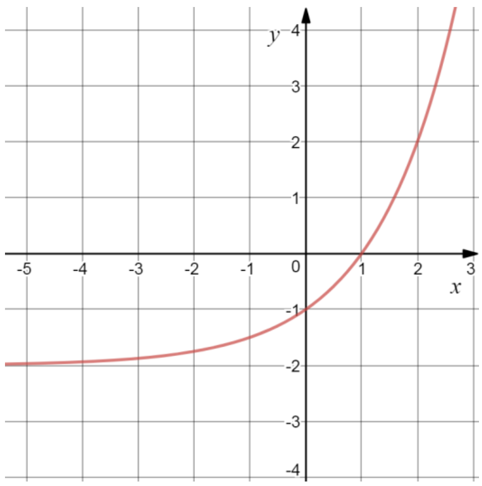


Рис.32

№25.

Построить график функции $y = \frac{1}{x} + 4$.

1) $y = \frac{1}{x}$ – степенная функция, графиком является гипербола.

2) $y = \frac{1}{x} + 4$ – сдвиг графика функции $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси Оу вверх на 4 единицы. (Рис.33)

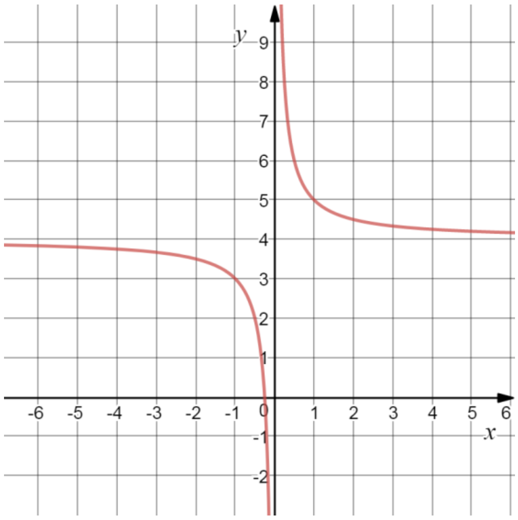


Рис.33

№26.

Построить график $y = arctgx - \frac{\pi}{2}$.

1) $y = arctgx$ – обратная тригонометрическая функция.

2)$y = arctgx - \frac{\pi}{2}$ - сдвиг графика функции $y = arctgx$ на $\frac{\pi}{2}$ единицы вниз. (Рис.34)

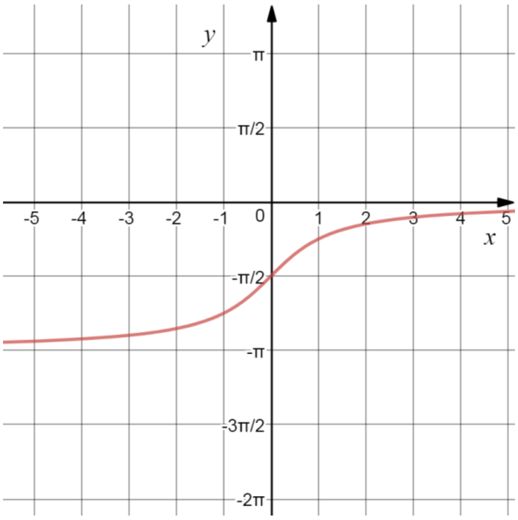


Рис.34

Построение графика функции $y = f(x + b)$.

Для построения графика функции $y = f(x + b)$ надо сдвинуть график функции $y = f(x)$ по оси Ох на b единиц влево при $b > 0$, и на $|b|$ единиц вправо, если $b < 0$.

№27.

Построить график функции $y = (x + 3)^2$

1) $y = x^2$- квадратичная функция, графиком является парабола.

2) $y = (x+3)^2$ - сдвиг графика параболы $y = x^2$ на 3 единицы влево. (Рис.35)

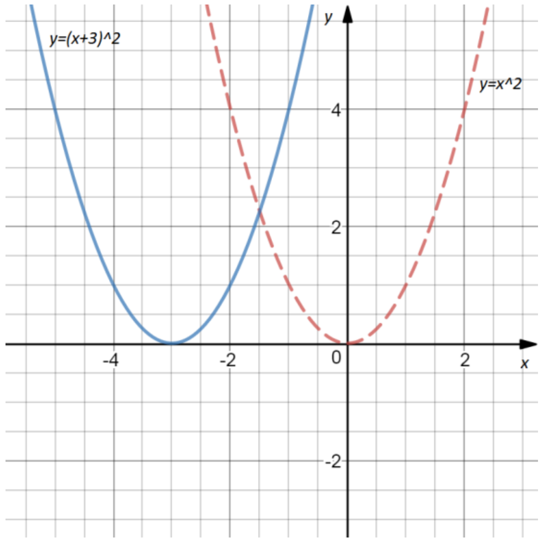


Рис.35

№28.

Построить график функции $y = \log_3(x-1)$

1) $y = \log_3 x$ – логарифмическая функция.

2) $y = \log_3(x-1)$ - сдвиг графика функции $y = \log_3 x$ на 1 единицу вправо. (Рис.36)

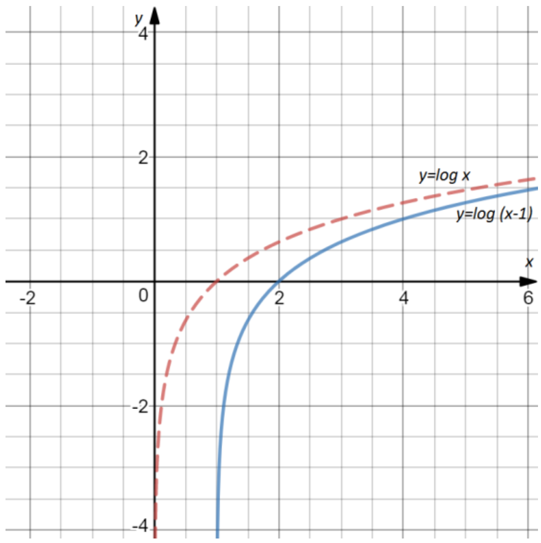


Рис.36

№29.

Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

1) $y = \sin(x)$ – тригонометрическая функция, графиком является синусоида.

2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ – сдвиг графика $y = \sin(x)$ на $\frac{\pi}{3}$ единиц вправо. (Рис.37)

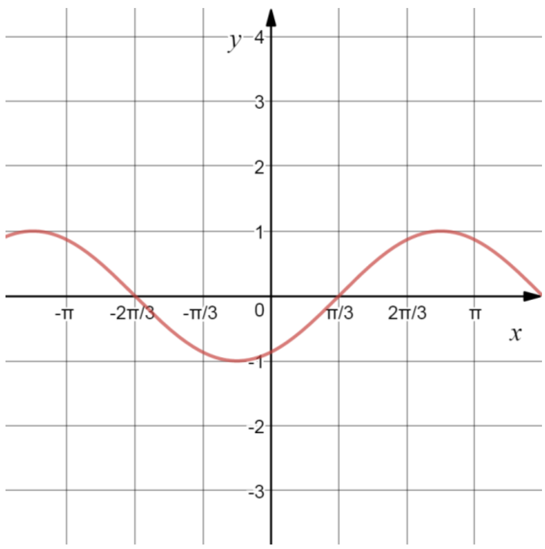


Рис.37

Построение графика функций $y = Af(x),\ A > 0.$

При $A > 1$ график $y = Af(x)$ получается растяжением графика $y = f(x)$ вдоль оси Оу в А раз. При $0 < A < 1$ график $y = Af(x)$ получается сжатием графика $y = f(x)$ вдоль оси Оу в $\frac{1}{A}$ раз.

№30.

Построить график функции $y = 5x^3$

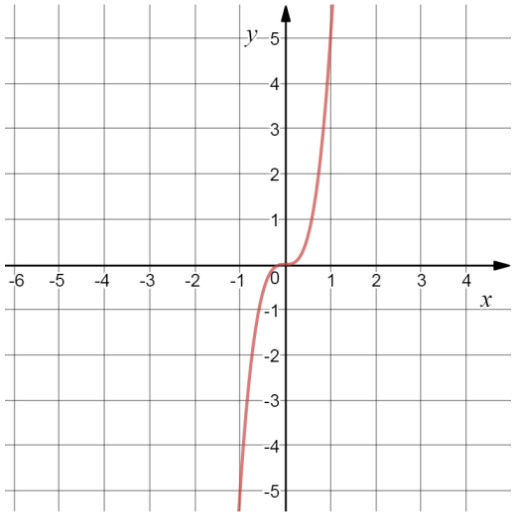


Рис.38

1) $y = x^3$- кубическая парабола.

2) $y = 5x^3$ – график получается растяжением графика функции $y = x^3$ вдоль оси Оу в 5 раз. (Рис.38) [20]

№31

Построить график функции $y = \frac{1}{4x}$

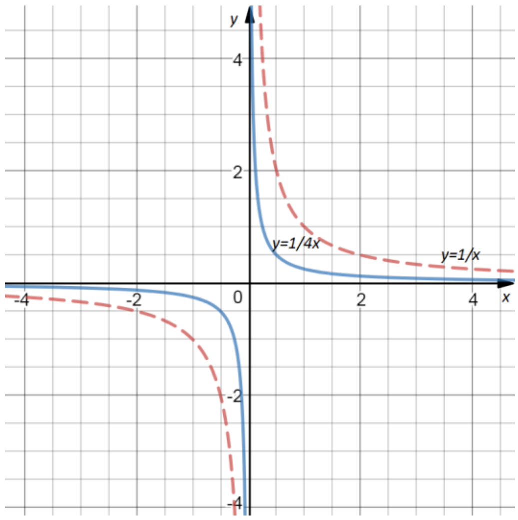


Рис.39

1) $y = \frac{1}{x}$ – степенная функция, графиком является гипербола.

2) $y = \frac{1}{4x}$ - график получается сжатием графика функции $y = \frac{1}{x}$ вдоль оси Оу в 4 раза. (Рис.39)

Построение графиков функций $y = f(kx),\ k > 0.$

При $k > 1$ график $y = f(kx)$, $k > 0$ получается из графика $y = f(x)$ сжатием вдоль оси абсцисс в k раз. При $0 < k < 1$ получается из графика $y = f(x)$ растяжением вдоль оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз.

№32.

Построить график функции $y = tg\frac{1}{3}x$.

1) $y = tgx$ – тригонометрическая функция.

2) $y = tg\frac{1}{3}x$ – график получается растяжением вдоль оси Ох графика функции $y = tgx$ в 3 раза. (Рис.40)

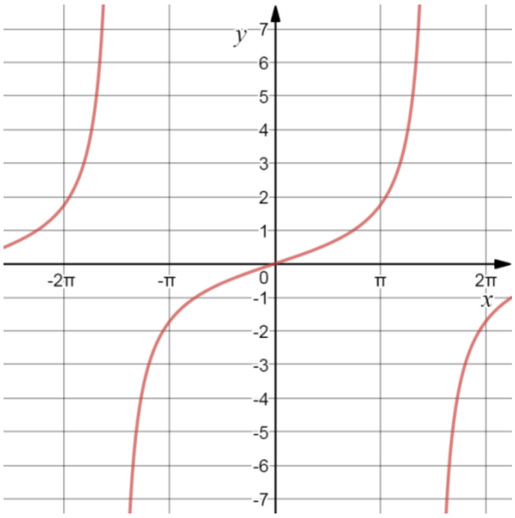


Рис.40

№33.

Построить график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ – показательная функция.

2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$- график получается сжатием вдоль оси Ох графика функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ в 4 раза. (Рис.41)

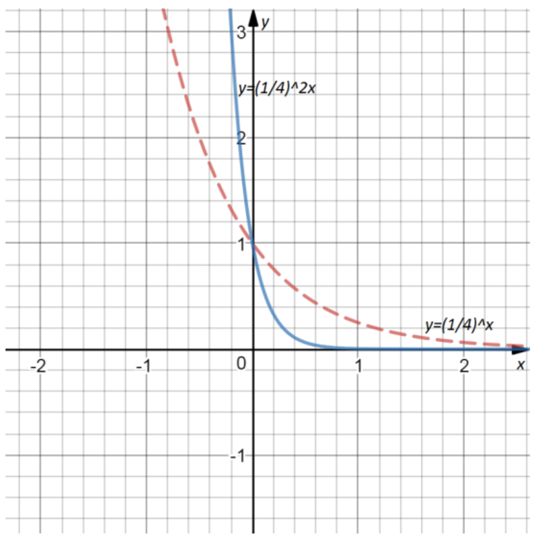


Рис.41

Преобразования графиков с использованием различных видов симметрии

– *График функции* $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Оу.

№34.

Построить график функции $y = \sqrt{-x}$.

1) $y = \sqrt{x}$ – степенная функция.

2) $y = \sqrt{-x}$ – график, симметричный относительно оси Oy графику функции $y = \sqrt{x}$. (Рис.42)

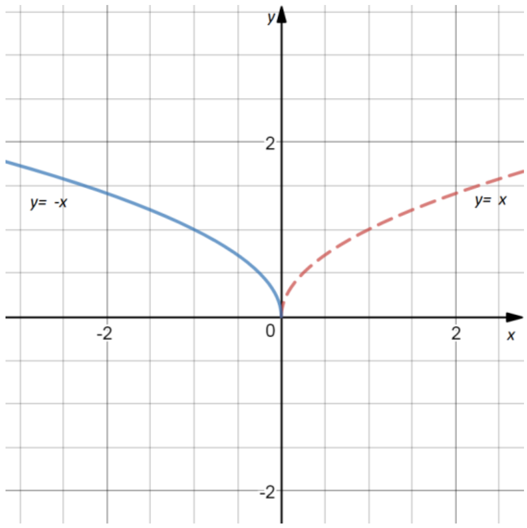


Рис.42

– *График функции* $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отражением относительно оси Ox.

№35.

Построить график функции $y = -ctg\,x$.

1) $y = \operatorname{ctg} x$ – тригонометрическая функция.

2) $y = -ctg\,x$ – график, симметричный относительно оси Ox графику функции $y = \operatorname{ctg} x$. (Рис.43)

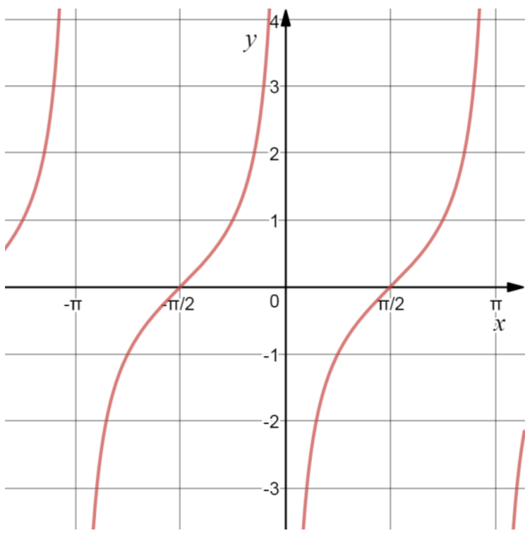


Рис.43

– *График функции* $y = -f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно точки O(0;0) – началом координат.

№36.

Построить график функции $y = -\arccos(-x)$.

1) $y = \arccos(x)$ – обратная тригонометрическая функция.

2) $y = -\arccos(-x)$ – график, симметричный относительно точки O(0;0) графику функции $y = \arccos(x)$. (Рис.44)

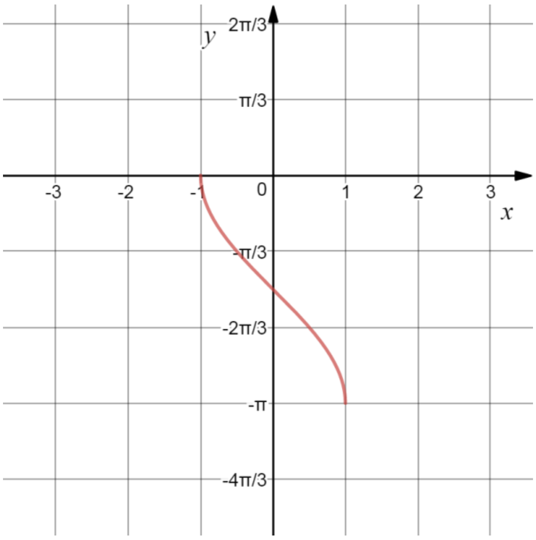


Рис.44

Построение графиков с модулями

Построение графиков функций вида $y = |f(x)|$.

№38.

Построить график функции $y = |2x^2 - 5x + 3|$. (Рис.45)

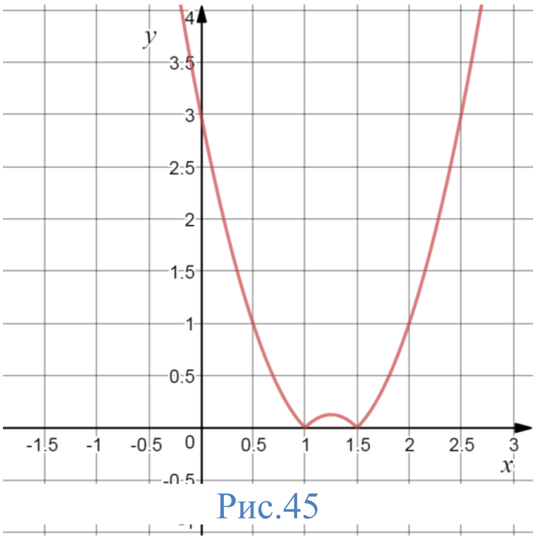


Рис.45

№39.

Построить график функции: $y = |x^2 - 4| - 2$.

1) $y_1 = |x^2 - 4|$,

2) $y = |x^2 - 4| - 2$. (Рис.46)

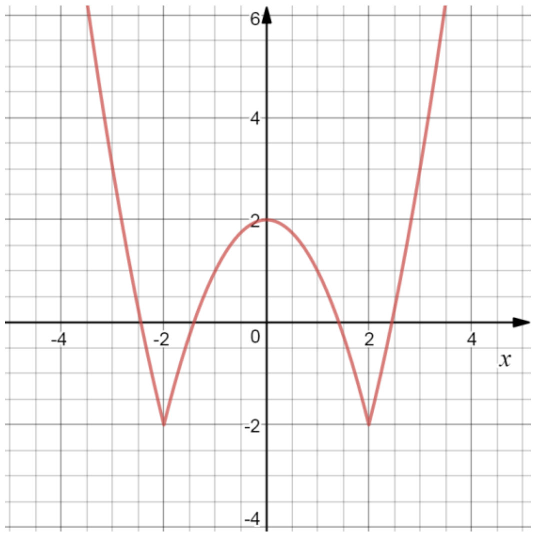


Рис.46

№40

Построить график функции $y = |\log_2 x - 1|$. [2]

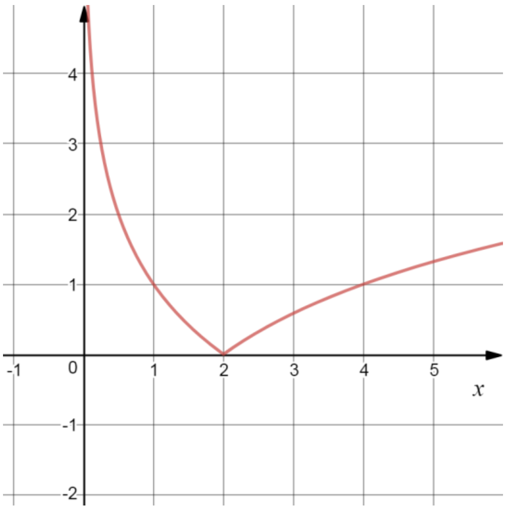


Рис.47

1) $y = \log_2 x - 1$,

2) $y = |\log_2 x - 1|$. (Рис.47)

№41.

Построить график функции $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\right|$.

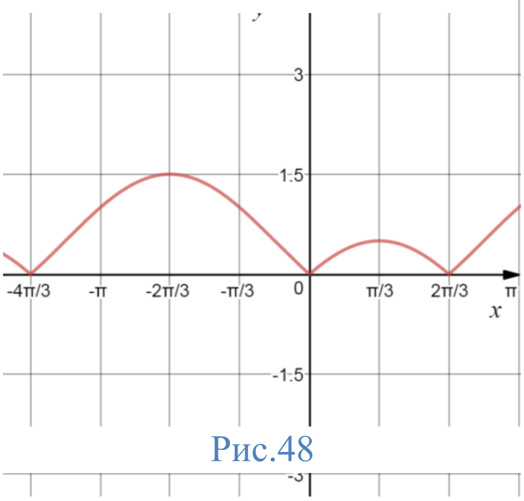


Рис.48

1) $y_1 = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$,

2) $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\right|$. (Рис.48)

Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$

№42.

Построить график функции $y = 3 - 2{,}5 \cdot |x|$.

1) $y_1 = 3 - 2{,}5x$ при $x \geq 0$,

2) $y = 3 - 2{,}5 \cdot |x|$ – построенную часть y_1 отобразить симметрично относительно оси Оу. (Рис.49)

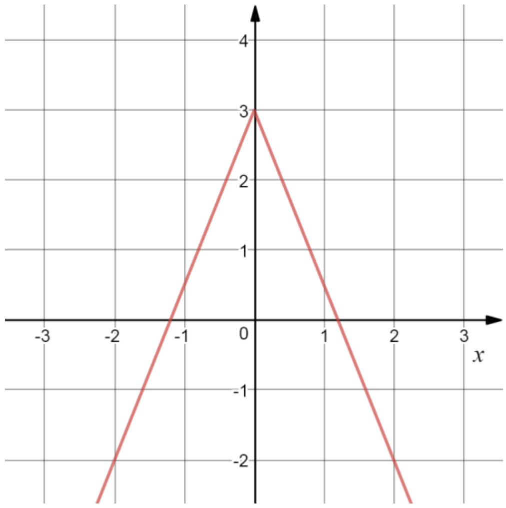


Рис.49

№43.

Построить график функции $y = 3x^2 - 5|x|$

1) $y = 3x^2 - 5x, x \geq 0$,

2) $y = 3x^2 - 5|x|$. (Рис.50)

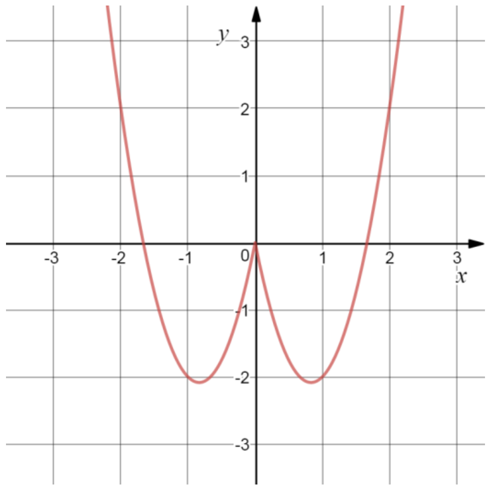


Рис.50

№44.

Построить график функции $y = \frac{|x|-3}{|x|}$

1) $y_1 = \frac{x-3}{x} \Leftrightarrow y_1 = 1 - \frac{3}{x}, x > 0$,

2) $y = \frac{|x|-3}{|x|}$. (Рис.51)

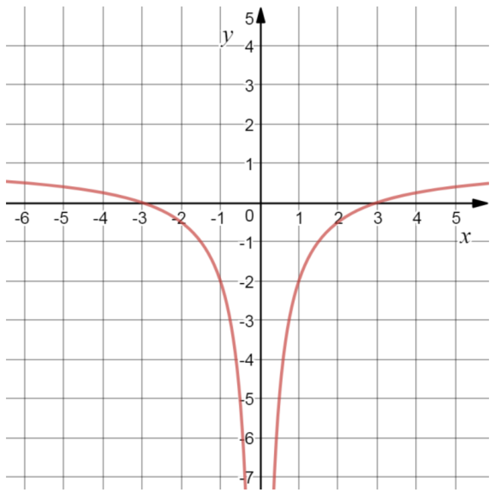


Рис.51

№45.

Построить график функции $y = \sqrt{4-|x|}$

1) $y_1 = \sqrt{4-x}, 0 \le x \le 4$ (учитывая ОДЗ),

2) $y = \sqrt{4-|x|}$. (Рис.52)

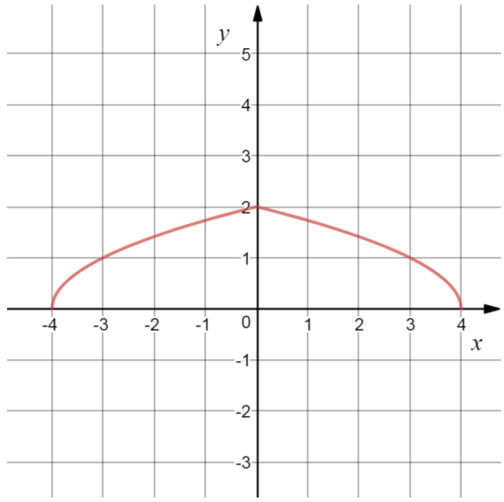


Рис.52

№46.

Построить график функции $y = 2^{-|x|}$.

1) $y = 2^{-x}, x \ge 0$,

2) $y = 2^{-|x|}$. (Рис.53)

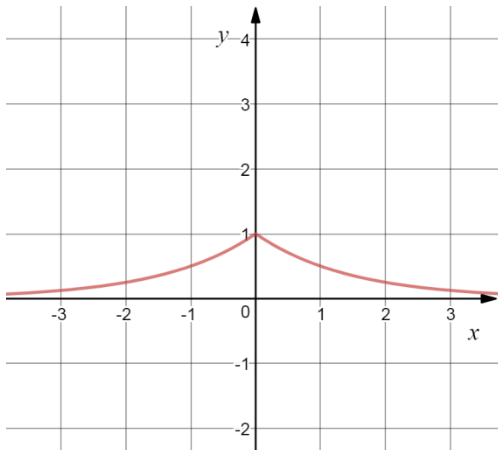


Рис.53

№47.

Построить график функции $y = 1 + \sin\frac{|x|}{2}$.

1) $y_1 = 1 + \sin\frac{x}{2}, x \ge 0$,

2) $y = 1 + \sin\frac{|x|}{2}$. (Рис.54)

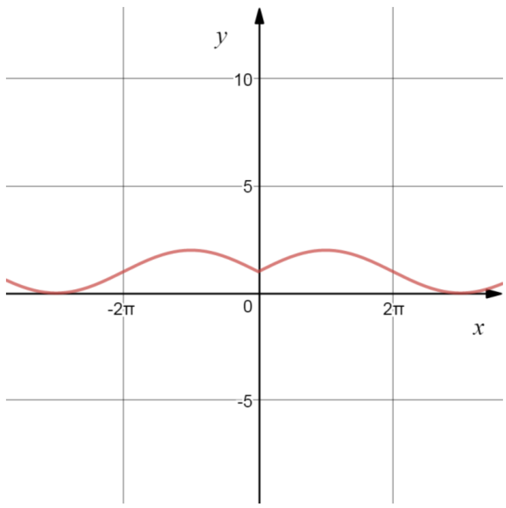


Рис.54

Построение графиков функций вида:

$y = |k_1x + b_1| + |k_2x + b_2| + \cdots + |k_nx + b_n|, n \in N$.

№48.

Построить график функции $y = |x-1| - |x-2| + |x-3| - |x-4| + |x-5|$

Точки перелома: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$. (Рис.55)

1) $x \leq 1, y = 1 - x - 2 + x + 3 - x - 4 + x + 5 - x = -x + 3;$

2) $1 \leq x \leq 2,\ y = x - 1 - 2 + x + 3 - x - 4 + x + 5 - x = x + 1;$

3) $2 \leq x \leq 3,\ y = x - 1 + 2 - x + 3 - x - 4 + x + 5 - x = -x + 5;$

3) $3 \leq x \leq 4,\ y = x - 1 + 2 - x + x - 3 - 4 + x + 5 - x = x - 1;$

4) $3 \leq x \leq 4,\ y = x - 1 + 2 - x + x - 3 + 4 - x + 5 - x = -x + 7;$

5) $x \geq 5,\ y = x - 1 + 2 - x + x - 3 + 4 - x + x - 5 = x - 3.$

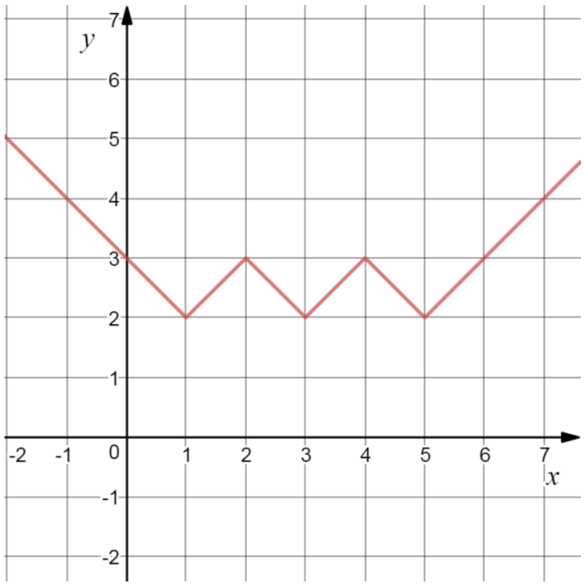


Рис.55

Построение графиков функций $y = |f|x||$

№49.

Построить график функции $y = |2 - |x||$

1) $y_1 = 2 - x, x \geq 0$,

2) $y_2 = 2 - |x|$,

3) $y = |2 - |x||$. (Рис.56)

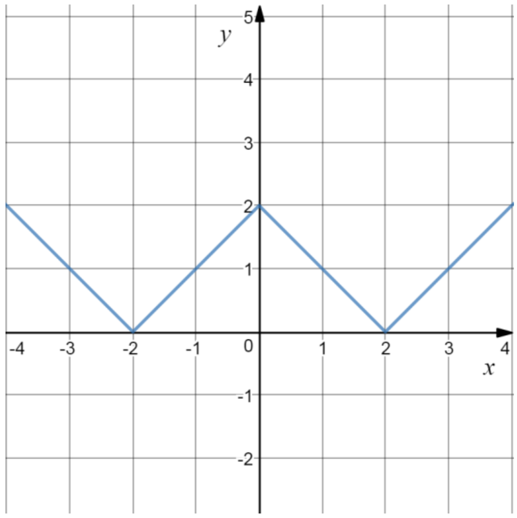


Рис.56

№50

Построить график функции $y = |3^{|x|-1} - 2|$

1) $y = 3^{x-1} - 2$,

2) $y = 3^{|x|-1} - 2$,

3) $y = |3^{|x|-1} - 2|$. (Рис.57)

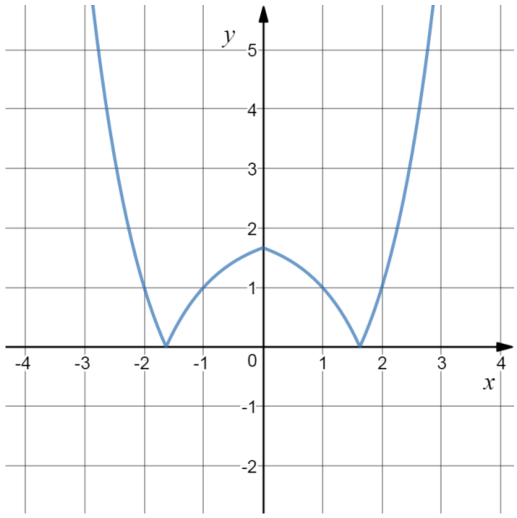


Рис.57

№51.

Построить график функции $y = ||x|^3 - 4|$

1) $y = x^3 - 4, x \geq 0$,

2) $y = |x|^3 - 4$,

3) $y = ||x|^3 - 4|$. (Рис.58)

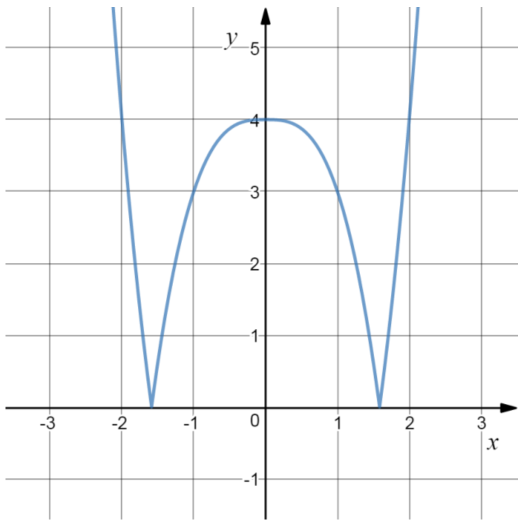


Рис.58

Построение графика функции вида $|y| = f(x)$.

№52.

Построить график функции $|y| = \cos x$

1) Из $\cos x \geq 0$ следует, что $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

2)Строим $y = \cos x$ на области определения.

3) $|y| = \cos x$ - отображаем построенный график во втором пункте симметрично относительно оси Ох. (Рис.59)

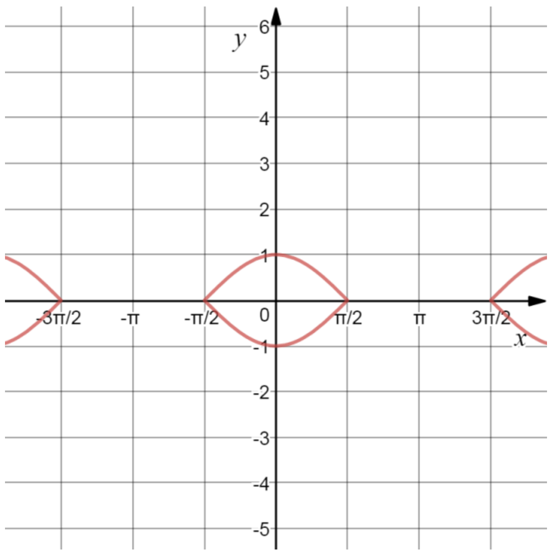


Рис.59

№53.

Построить график функции $|y| = 4x - 4 - x^2$

1) Из того, что $4x - 4 - x^2 \geq 0$, получаем, что $x = 2$.

Следовательно, графиком функции будет являться одна точка с координатами $(2; 0)$.

Построение графика функции вида $|y| = |f(x)|$.

№54.

Построить график функции $|y| = |x - 2|$.

1) $y = |x - 2|$

2) $y = -|x - 2|$ - отображаем построенный в первом пункте график симметрично относительно оси Ох. (Рис.60)

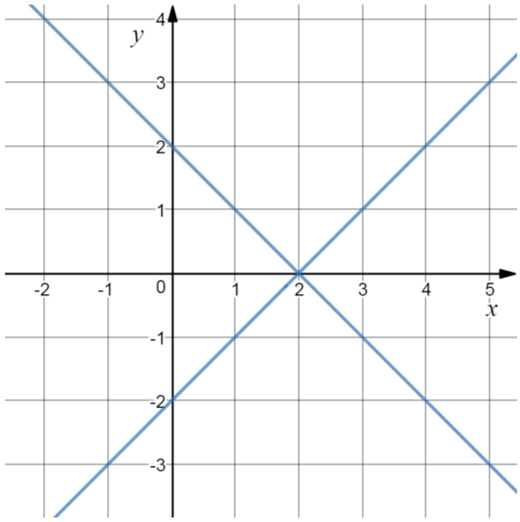


Рис.60

№55.

Построить график функции $|y| = |x^2 - 3 \cdot |x||$

1) $y = |x^2 - 3 \cdot |x||$,

2) $y = -|x^2 - 3 \cdot |x||$. (Рис.61)

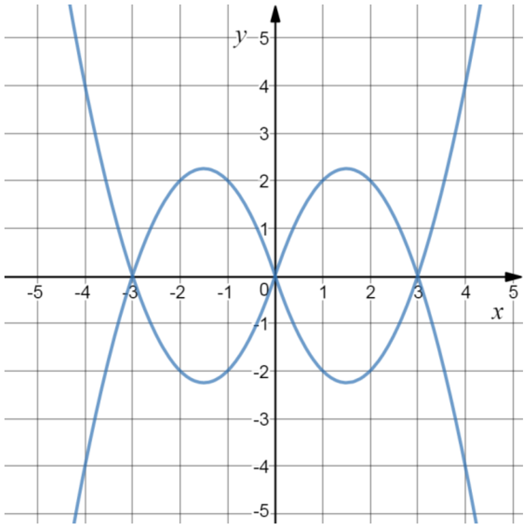


Рис.61

№56.

Построить график функции $|y| = |\arcsin|x||$.

1) $y = |\arcsin|x||$,

2) $y = -|\arcsin|x||$. (Рис.62)

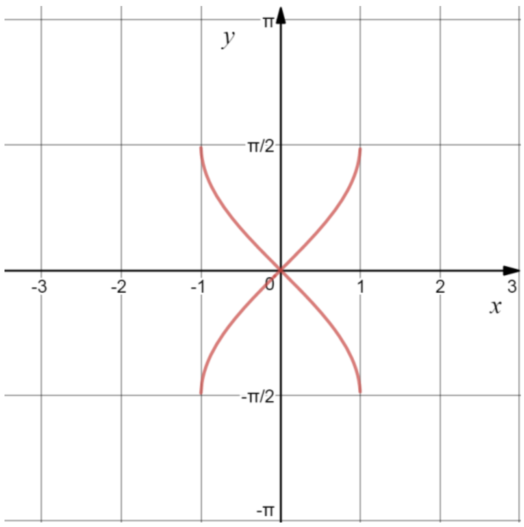


Рис.62

№57.

Построить график функции $|y| = \left|\frac{1}{|x|-4} - 1\right|$

1) $y = \left|\frac{1}{|x|-4} - 1\right|$

а) $y = \frac{1}{x-4} - 1$ – сдвиг графика функции $\frac{1}{x}$ на 4 единицы вправо и 1 единицу вниз.

б) $y = \left|\frac{1}{|x|-4} - 1\right|$ – отображаем симметрично, используя преобразования модуля. (Рис.63,а)

2) $|y| = \left|\frac{1}{|x|-4} - 1\right|$ – часть графика выше оси Оу отображаем симметрично относительно оси Ох. (Рис.63,а)

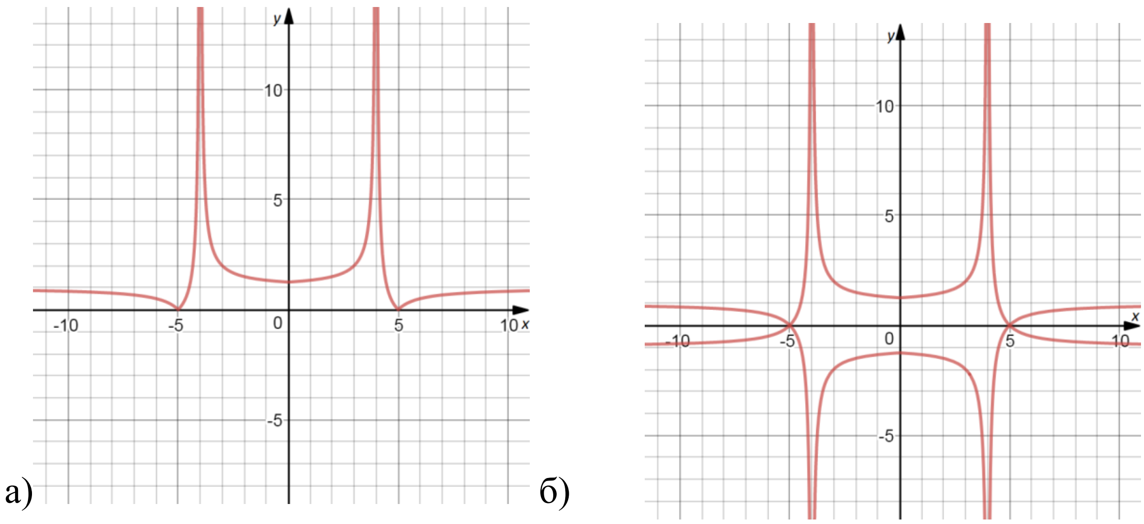


Рис.63

Графический способ решения уравнений и неравенств

№58.

Сколько корней имеет уравнение $\frac{3}{|x-2|} = x^2 - 3|x| + 2$. В каких промежутках они находятся?

В одной системе координат построим графики $y = \frac{3}{|x-2|}$ и $y = x^2 - 3|x| + 2$.

По чертежу видно, что графики пересекаются в четырех точках, значит, и уравнение имеет четыре решения. Точно определить их мы не можем, но они находятся в промежутках $(-3;-2),(-1;0),(0;1),(3;4)$. (Рис.64)

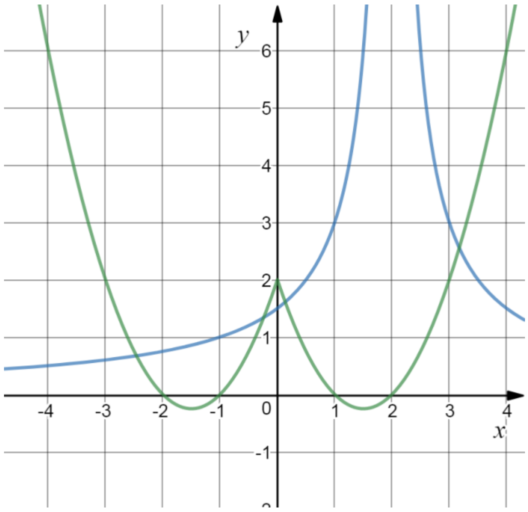


Рис.64

Ответ: четыре корня, находятся в промежутках
$(-3;-2),(-1;0),(0;1),(3;4)$.

№59.

Сколько корней имеет уравнение $|x^3| = |x-1| + |x+1|$?

Строим в одной системе координат графики функций: $y = |x^3|$ и $y = |x-1| + |x-1|$.

Графики пересекаются в двух точках, значит, уравнение имеет два решения. (Рис.65)

Ответ: два решения.

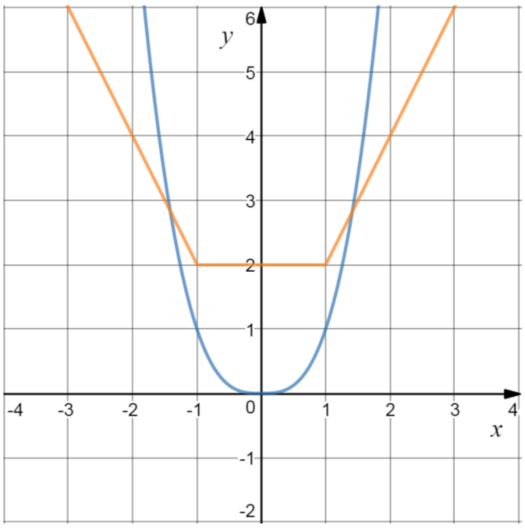


Рис.65

№60.

Графически решить неравенство $||x-2| - |x+1|| \leq 2$.

Строим график функции $y_1 = ||x-2| - |x+1||$. Для этого находим точки излома $(-1; 3)$ и $(2; 3)$.

Часть графика функции y_1, лежащая ниже прямой $y_2 = 2$, дает решение неравенства. (Рис.66)

Ответ: $[-0{,}5; 1{,}5\,]$

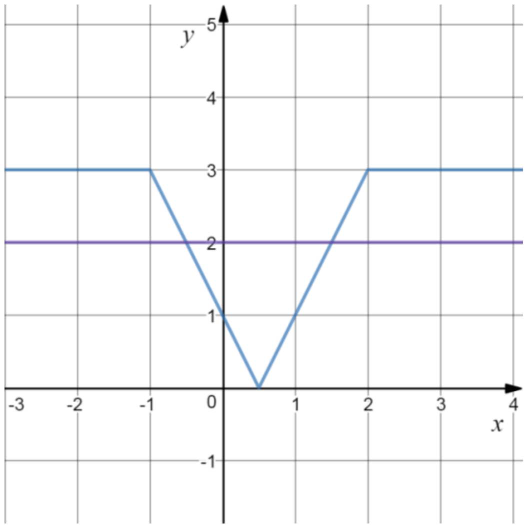


Рис.66

№61.

Решить неравенство:

$|x^2 - 5|x| + 6| \leq 8.$

По схеме, описанной в предыдущих примерах, сначала строим график функции $y = |x^2 - 5|x| + 6|$. Укажем в той же системе координат прямую $y = 8$. Часть графика, лежащая на этой прямой и ниже, будет ответом.

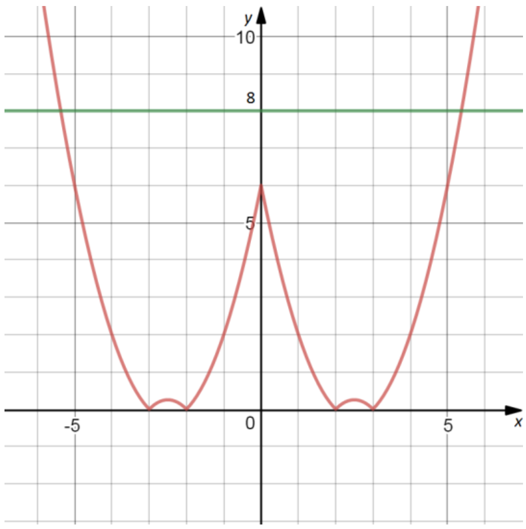


Рис.67

(Рис.67) Но с помощью графика мы можем дать только приближенный ответ $[\approx -5{,}3;\ \approx 5{,}3]$. Для получения точного ответа воспользуемся аналитическим решением: если $x > 5$, тогда $x^2 - 5x + 6 = 8$, $x^2 - 5x - 2 = 0$, $x = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$, в силу симметричности $x = \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{-5-\sqrt{33}}{2}; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right]$

Методы решения уравнений и неравенств с модулем и параметром

Аналитический способ

№62.

Решить уравнение $|x+a| = 2-a$.

1) Если $2-a<0$, т. е. $a>2$, то уравнение корней не имеет, так как модуль не может равняться отрицательному числу.

2) Если $2-a=0$, т. е. $a=2$, то $x=-2$.

3) Если $2-a>0$, т. е. $a<2$, то $\left[\begin{array}{l} x+a=2-a \\ x+a=a-2 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x=2-2a \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ответ: Если $a>2$, то корней нет; если $a=2$, то $x=-2$; если $a<2$, то $x=2-2a$, $x=-2$

№63.

При всех a решить неравенство $|x+a|<x$.

1) Пусть $x+a<0$, тогда $-x-a<x$, $2x>-a$, $x>-\frac{a}{2}$. Рассматриваемая область задана условием $x<-a$, значит, получаем систему:

$$\begin{cases} x>-\dfrac{a}{2}, \\ x<-a. \end{cases}$$

а) $a>0$, тогда $-a<-\frac{a}{2}$, значит, решений нет.

б) $a=0$ система не имеет решений.

в) $a<0$, тогда $-a>-\frac{a}{2}$, и решением будет $(-\frac{a}{2};-a)$.

Таким образом, в первом случае получаем ответ при $a<0$ $x\in(-\frac{a}{2};-a)$, при $a\geq 0$ решений нет.

2) Пусть $x+a\geq 0$, тогда $x+a<x, a<0$. Рассматриваемая область задана условием $x\geq -a$, значит, при $a<0$ $x\in[-a;+\infty)$. При $a\geq 0$ решений нет.

Объединяя полученные решения, получаем ответ: при $a < 0$ $x \in \left(-\frac{a}{2}; +\infty\right)$, при $a \geq 0$ решений нет. [7]

№64.

Для каждого значения a найти число корней уравнения $|x-1| = ax + 2$.

1) Пусть $x \geq 1$, тогда $x - 1 = ax + 2$, $x = \frac{3}{a-1}$, $a \neq 1$.

Проверим, при каких значениях числа a выполняется неравенство $x \geq 1$: $\frac{3}{a-1} \geq 1, \frac{2+a}{a-1} \geq 1, -2 \leq a < 1$.

2) Пусть $x \leq 1$, тогда $-x + 1 = ax + 2$, $x = -\frac{1}{a+1}$, $a \neq 1$.

Проверим, при каких значениях числа a выполняется неравенство $x \leq 1$: $-\frac{1}{a+1} \leq 1, \frac{2+a}{a+1} \leq 1, a \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty)$.

Занесем результаты решения в таблицу:

a	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$\frac{3}{a-1}$	-	+	+	+	+	-	-
$-\frac{1}{a+1}$	+	+	-	-	+	+	+

Примечание: «-» - означает не корень, «+» - означает корень.

Замечание: при $a = -2$, $\frac{3}{a-1} = -\frac{1}{a+1}$, и уравнение имеет один корень.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ – уравнение имеет один корень, при $a \in (-1; 1)$ – уравнение имеет два корня. [17]

Дополнительные упражнения: $a|x-3| = 2x + 4$; $144^{|x|} - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

Графический способ

№65.

Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a: $\left|3^{|x-2|}-3\right|=a$.

Построим в одной системе координат графики двух функций $y=\left|2^{|x-3|}-4\right|$ и $y=a$. График функции $y=a$ представляет собой прямую, параллельную оси Ох. На чертеже видно, что при $a>3$, графики пересекаются в двух точках, значит, уравнение при выбранных a имеет два корня, при $a=3$ уравнение имеет 3 корня, при $0<x<3$ – 4 корня, при $a=0$ – 2 корня, при $a<0$ корней нет. (Рис.68)

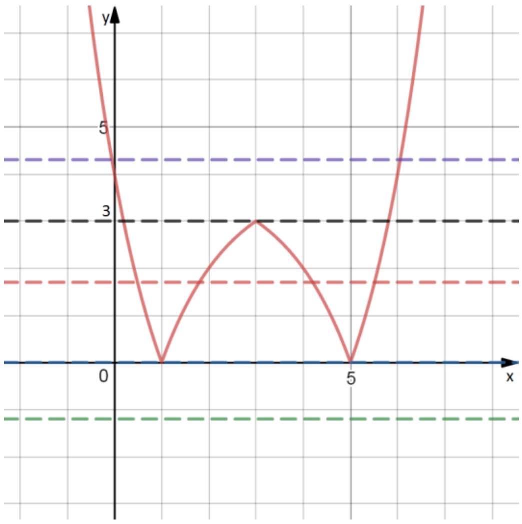


Рис.68

Ответ: при $a>3, a=0$ – два корня, при $a=3$ - три корня, при $0<x<3$ – четыре корня, при $a<0$ корней нет.

№66.

Изобразить множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих неравенству $|2y+x+1|+|x+2|\leq 3,$ и вычислить площадь фигуры, содержащей эти точки.

Перейдем к равносильному двойному неравенству $-3-|x+2|\leq 2y+x+1\leq 3-|x+2|$.

$$0.5(-4+|x+2|-x)\leq y\leq 0.5(2-|x+2|-x)$$

Строим графики функций:

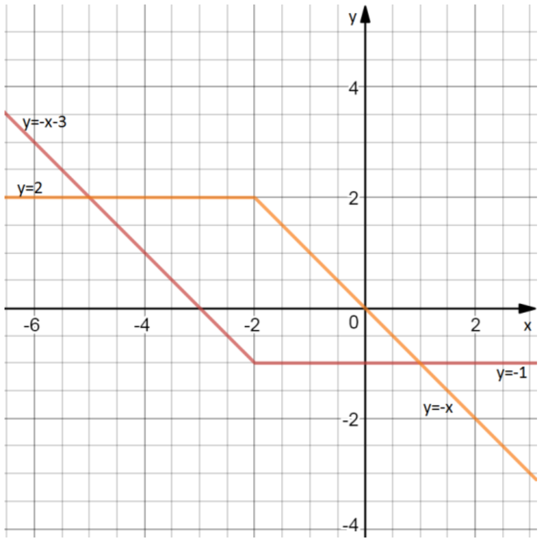


Рис.69

1) $y = 0.5(-4 + |x + 2| - x)$ – при $x \geq -2$ строим график функции $y = -1$, при $x < -2$ строим $y = -x - 3$.

2) $y = 0.5(2 - |x + 2| - x)$ – при $x \geq -2$ строим график функции $y = -x$, при $x < -2$ строим $y = 2$.

Площадь фигуры $S = a \cdot h = 3 \cdot 3 = 9$ кв.ед.

Ответ: 9 кв.ед.

№67.

Сколько решений существует у системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$ в зависимости от положительного значения параметра a? [20]

Построим график уравнения $2|x| + |y| = 4$.

1) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ Получаем $2x + y = 4,\ y = 4 - 2x$.

2) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$ Получаем $2x - y = 4,\ y = 2x - 4$.

3) $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$ Получаем $-2x + y = 4,\ y = 2x + 4$.

4) $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$ Получаем $-2x - y = 4,\ y = -2x - 4$.

График уравнения $2|x| + |y| = 4$ будет выглядеть следующим образом:

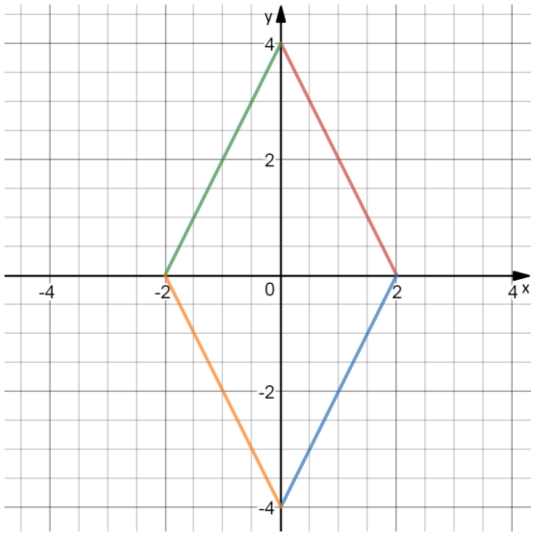


Рис.70

График уравнения $x^2 + y^2 = a^2$ представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом a. В зависимости от параметра a графики будут иметь различное количество пересечений, то есть различное количество решений.

1. При $a > 4$, графики пересекаться не будут, тогда решений у системы нет. (Рис.71)

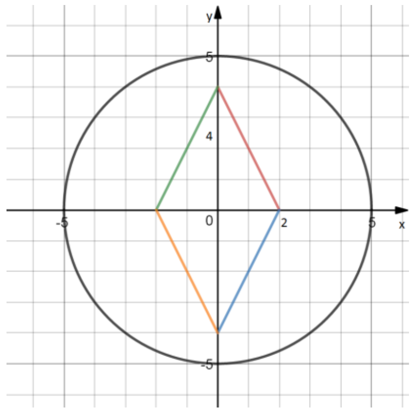


Рис.71

2. При $a = 4$, графики имеют две точки пересечения, значит у системы есть два решения. (Рис.72)

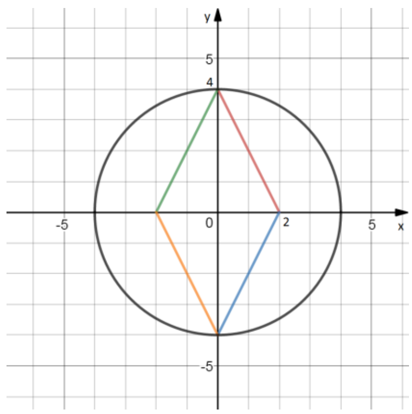


Рис.72

3. При $2 < a < 4$ – четыре решения. (Рис.73)

4. При $a = 2$ – шесть решений. (Рис.74)

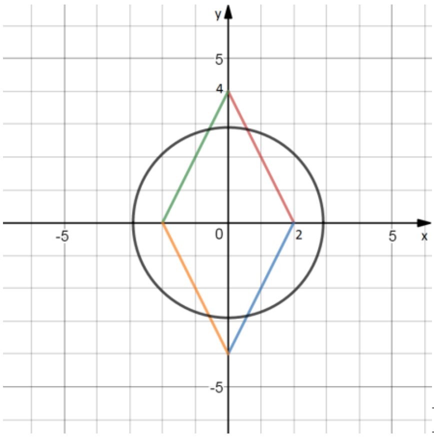


Рис.73

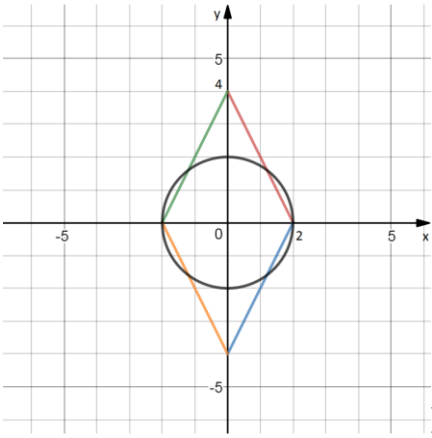


Рис.74

5. Рассмотрим случай касания окружностью ромба.

$S = \frac{1}{2} 4 \cdot 2 = 4$ (Рис.75)

$S = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{20} = a \cdot \sqrt{5}$

$a \cdot \sqrt{5} = 4, \; a = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

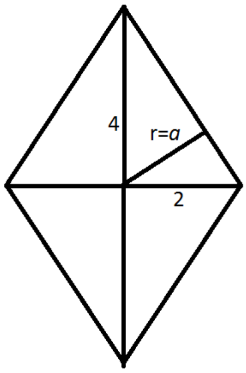


Рис.75

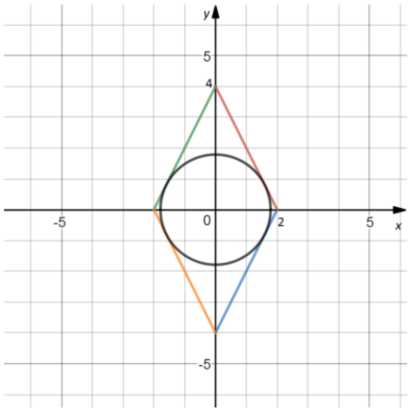


Рис.76

При $a = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ графики имеют 4 общих точки, значит, четыре решения. (Рис.76)

6. При $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$ система будет иметь 8 решений. Убедимся в этом при $a = 1{,}9 \in \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}; 2\right)$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1{,}9^2 \\ 2|x| + |y| = 4 \end{cases}$$

При $x \geq 0, y \geq 0$ получим систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1{,}9^2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$. Решая ее методом подстановки, получим два решения. Аналогично с другими случаями, получим, что исходная система при $a = 1{,}9$ будет иметь 8 решений.

7. При $0 < a < \frac{4}{5}\sqrt{5}$ – система не будет иметь решений. (Рис.77)

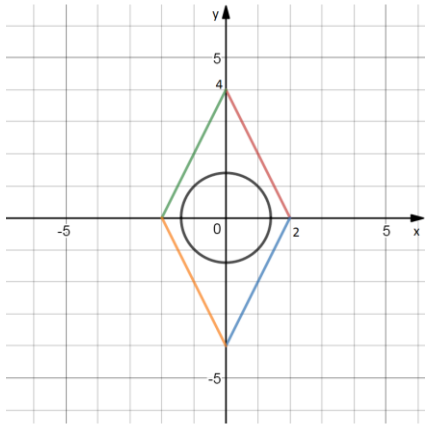


Рис.77

Ответ:

1) $0 < a < \frac{4}{5}\sqrt{5}, a > 4$ – решений нет;

2) $a = 4$ – два решения;

3) $2 < a < 4, a = \frac{4}{5}\sqrt{5}$ – четыре решения;

4) $a = 2$ – шесть решений

5) $\frac{4}{5}\sqrt{5} < a < 2$ – восемь решений.

Дополнительные упражнения: 1) Сколько решений имеет уравнение в зависимости от параметра a: $\frac{|x-2|}{x^2-2x} = a$; $|x^3 - 1| + |2 = x^3| = a$; 2) найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2 - a = |x^2 + 2x - 3|$.

Решение усложненных задач с модулем и параметром из заданий ЕГЭ

№68.

Найти все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Проанализируем систему. Оба уравнения являются уравнениями окружностей, поэтому для нахождения ответа воспользуемся графическим методом решения задач с параметром и модулем.

1) Воспользуемся определением модуля.

а) Если $x \geq 0$, то $(x-5)^2+(y-4)^2=9$, это уравнение окружности $\omega_1(C_1(5;4);3)$

б) Если $x<0$, то $(x+5)^2+(y-4)^2=9$, это уравнение окружности $\omega_2(C_2(-5;4);3)$

2) Второе уравнение системы при $a>0$ задает окружность $\omega(C(-2;0),a)$.

Найдем такое значение параметра a, при котором окружность ω будет иметь единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2. (Рис.78)

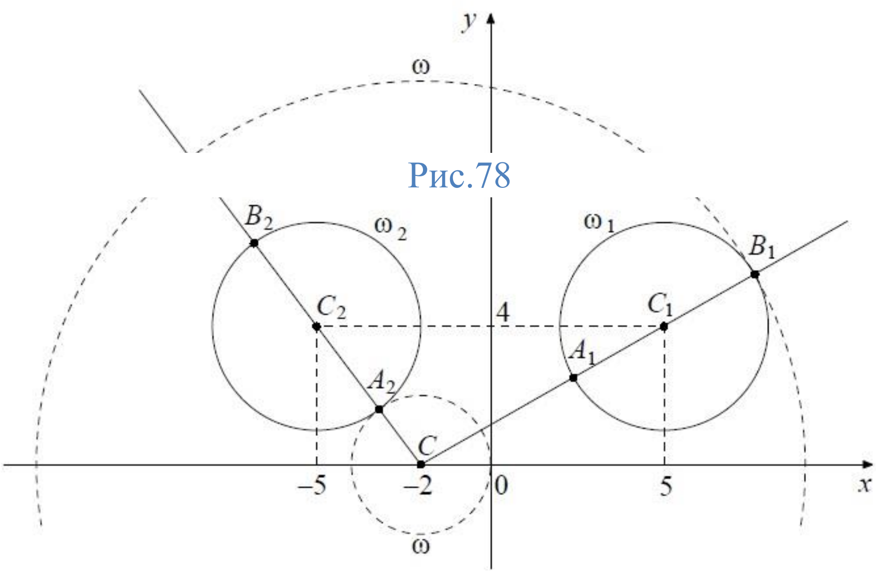


Рис.78

3) Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим через A_1 и B_1 точки его

пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1.

$CC_1=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$, значит $CA_1=\sqrt{65}-3, CB_1=\sqrt{65}+3$.

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности не пересекаются, при $CA_1<a<CB_1$, окружности пересекаются в двух точках, при $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности касаются.

4) Аналогично из точки C проведём луч CC_2 и обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2.

$CC_2 = \sqrt{9+16} = 5,$ значит $CA_2 = 2, CB_2 = 8.$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности не пересекаются, при $CA_2 < a < CB_2$, окружности пересекаются в двух точках, при $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности касаются.

5) Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда когда ω касается ровно одной из двух окружностей $ω_1$ или $ω_2$ и не пересекается с другой.

Таким образом, решением уравнения является $a = \sqrt{65} + 3$, $a = 2$. [3]

Ответ: $\sqrt{65} + 3$, 2.

№69.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4;19).

Заметим, что разность выражений, стоящих под модулями, равно правой части уравнения: $(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3$. Сделаем замену $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$.

Получим: $|m| + |n| = m - n$, а это возможно при $m \geq 0, n \leq 0$. Возвращаясь к замене, получим систему:

$$\begin{cases} x - a^2 + 3a - 1 \geq 0 \\ x - a^2 + a + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1$$

$$-a^2 + a + 2 \leq -x \leq -a^2 + 3a - 1 \Rightarrow a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4;19), только если правая граница отрезка решения будет не больше 4, а левая - не меньше 19.

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \le a^2 - a - 2 \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 2 \le 4 \\ a^2 - 3a + 1 \ge 19 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 1{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} -2 \le a \le 3 \\ a \le -3 \\ a \ge 6 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [1{,}5; 3] \cup (6; +\infty)$. [5]

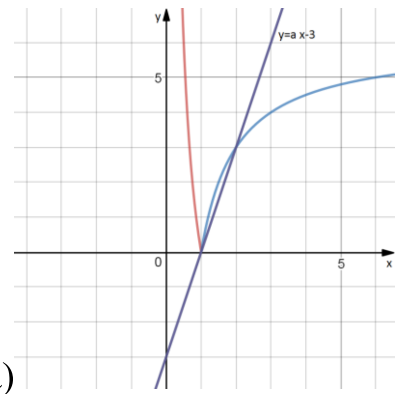
№70.

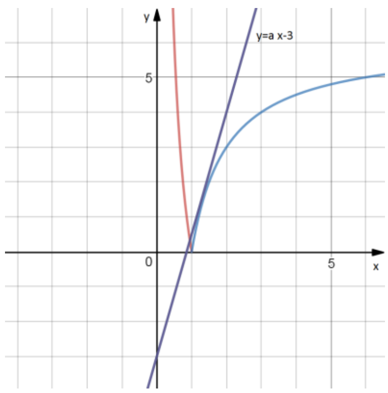
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x} - 6\right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имело более двух корней.

Построим графики функций $y = \left|\frac{6}{x} - 6\right|$ и $y = ax - 3$.

График $y = ax - 3$ – прямая, проходящая через точку (0;-3).

$$y = \left|\frac{6}{x} - 6\right| = \begin{cases} \frac{6}{x} - 6, 0 < x \le 1, \\ -\frac{6}{x} + 6, x \ge 1. \end{cases}$$

а) 

б) 

(Рис.79)

Более двух точек пересечения графиков на промежутке $(0; +\infty)$ будет при $a \in (a_1; a_2)$. Так как прямая $y = a_1x - 3$ проходит через точек (1;0), то $a_1 \cdot 1 - 3 = 0, a_1 = 3$. (Рис.79)

Функции $f(x) = -\frac{6}{x} + 6$ и $g(x) = a_2 x - 3$ касаются в точке с абсциссой x_0, значит, справедлива система: $\begin{cases} f(x_0) = g(x_0), \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{6}{x_0} + 6 = a_2 x_0 - 3, \\ \frac{6}{x_0^2} = a_2 \end{cases}, \quad -\frac{6}{x_0} + 6 = \frac{6}{x_0^2} x_0 - 3, \quad x_0 = \frac{4}{3} > 1, \; a_2 = 3\frac{3}{8}.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет более двух решений при $a \in \left(3; 3\frac{3}{8}\right)$.

Ответ: $\left(3; 3\frac{3}{8}\right)$. [16]

№71.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $3^{1-x^2-2ax-2a} = \log_3 \frac{|x+a|+5|a-1|}{2|a-1|}$ принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

Преобразуем данное уравнение:

$$3^{(a-1)^2-(x+a)^2} = \log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|} + \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{(a-1)^2\left(1-\frac{(x+a)^2}{(a-1)^2}\right)} = \log_3\left(\frac{|x+a|}{2|a-1|} + \frac{5}{2}\right)$$

Сделаем замену: $t = \frac{|x+a|}{|a-1|} \geq 0$.

$$3^{(a-1)^2(1-t^2)} = \log_3\left(\frac{t+5}{2}\right)$$

При $t \geq 0$ левая часть полученного уравнения убывающая, а правая – возрастающая по t функция, значит, корень уравнения один. Очевидно, что $t = 1$ – решение. Возвращаемся к замене:

$$\frac{|x+a|}{|a-1|}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}|x+a|=|a-1|,\\ a\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+a=a-1,\\ x+a=1-a,\end{array}\right.\\ a\neq 1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=1-2a,\end{array}\right.\\ a\neq 1.\end{cases}$$

Так как по условию все решения уравнения должны принадлежать промежутку $[-3;0]$, то $3\leq 1-2a\leq 0$, $a\neq 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2};1\right)\cup(1;2]$. [4]

№72.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|,\\ x^2+y^2\leq 18\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Уравнение $\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-a)^2}=\left|a\sqrt{2}\right|$ означает, что сумма расстояний от точки (x,y) до точек $(a;0)$ и $(0;a)$ равна $\left|a\sqrt{2}\right|$, но эта сумма расстояний всегда больше, чем $\left|a\sqrt{2}\right|$, если только точка (x,y) не лежит на отрезке с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. Значит, множество решений при $a\neq 0$ - это отрезок с концами $(a;0)$ и $(0;a)$. При $a=0$ множество решений – это $x=0, y=0$.

Множество решений неравенства $x^2+y^2\leq 18$ – это круг с центром в точке (0;0) и радиусом $3\sqrt{2}$. Отсюда получаем, что единственным решением будет пересечение отрезка с концами $(a;0)$ и $(0;a)$ с данным кругом по единственной точке. Это возможно при $a=0$, т.е. отрезок превратится в точку, и при касании отрезком границы круга. Из симметрии точка касания лежит в середине этого отрезка. Расстояние от середины отрезка до начала координат равно $\frac{\sqrt{2}|a|}{2}$. В случае касания это расстояние должно совпадать с радиусом круга, отсюда получаем $3\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}|a|}{2}, a = \pm 6$. Таким образом, система имеет единственное решение при $a = 0, \pm 6$.

Ответ: $0, \pm 6$. [4]

№73.

Решить неравенство $|2x^2 + x - a - 8| \le x^2 + 2x - 2a - 4$,

Раскроем знак модуля:

$$-x^2 - 2x + 2a + 4 \le 2x^2 + x - a - 8 \le x^2 + 2x - 2a - 4,$$

$$\begin{cases} x^2 - x + a - 4 \le 0, \\ x^2 + x - a - 4 \ge 0. \end{cases}$$

Найдем решение обоих неравенств.

$x^2 - x + a - 4 \le 0, \frac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$,

$x^2 + x - a - 4 \ge 0, \left[\begin{array}{l} x \le \frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2}, \\ x \ge \frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}. \end{array}\right.$

Тогда решением исходного неравенства будет система:

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{17-4a}}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-1-\sqrt{17+4a}}{2}, \\ x \ge \dfrac{-1+\sqrt{17+4a}}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Выписать ответ в виде объединения интервалов в данном случае весьма трудно, так как положение границ интервалов зависит от значений параметра. Воспользуемся графическим методом. Перепишем систему в виде $\begin{cases} a \le -x^2 + x + 4, \\ a \le x^2 + x - 4. \end{cases}$ Рассмотрим координатную плоскость $(x; a)$, где x – ось абсцисс, a – ось ординат. Построим графики функций $a(x) = -x^2 + x + 4$ и $a(x) = x^2 + x - 4$.

1) $a(x) = -x^2 + x + 4$ (1) – парабола, вершина с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$, ветви вниз, точки пересечения с осью Ох: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-2}$.

2) $a(x) = x^2 + x - 4$ (2) – парабола, вершина с координатами $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right)$, ветви вверх, точки пересечения с осью Ох: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Для нахождения точек пересечения кривых, решим систему: $\begin{cases} -x^2 + x + 4 = a, \\ x^2 + x - 4 = a, \end{cases}$ решением являются пары чисел: (-2;-2) и (2;2).

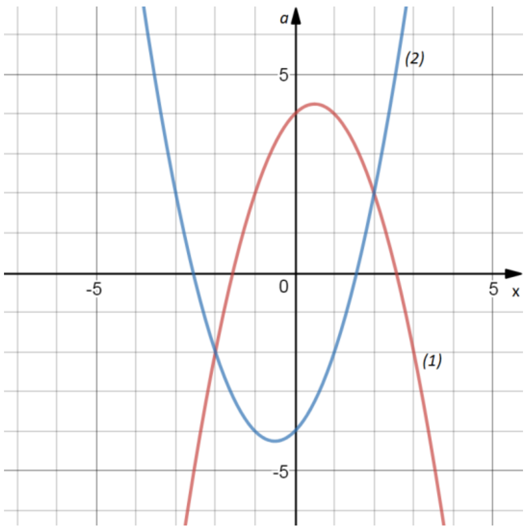


Рис.80

После того как мы построим кривые (1) и (2), следует обратить внимание на то, что последний вид системы неравенств выражает для координаты a требование быть меньше, чем соответствующие ординаты парабол. В нашем случае множество точек, отвечающих системе неравенств, расположено одновременно ниже обеих кривых. Заштрихованная область является графическим решением исходной системы неравенств (см. рис.)

Выпишем ответ: будем двигаться по оси Оa в сторону убывания.

1) При $a > 2$, решений нет;

2) При $-2 \leq a \leq 2$ область заключена между ветвями парабол, значит, $\frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$;

3) При $-\frac{17}{4} \leq a \leq -2$ имеются две части области, заключенные между различными парами ветвей парабол, значит, $\frac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \leq x \leq \frac{-1-\sqrt{17+4a}}{2}$ или $\frac{-1+\sqrt{17+4a}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$;

4) При $a \leq -\frac{17}{4}$ получаем $\frac{1-\sqrt{17-4a}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17-4a}}{2}$. [18]

Заключение

В данной работе были рассмотрены виды и методы решения уравнений и неравенств, содержащие переменную, под знаком модуля, а также методика их изучения.

При проведении исследования были решены следующие задачи:

1. Проанализирована методическая, психолого-педагогическая литература по теме исследования.
2. Изучены и систематизированы методы решения уравнений и неравенств с модулем.
3. Проанализированы задания ЕГЭ, включающие в себя уравнения и неравенства с модулем.
4. Разработан элективный курс «Методы решений уравнений и неравенств с модулем в заданиях ЕГЭ».

На основе проделанной работы можно сделать ряд выводов:

1. Тема «модуль числа» в школьном курсе математики встречается неоднократно, поэтому необходим ее более подробный разбор. Задания, в которых содержится переменная под знаком модуль, встречаются в заданиях ЕГЭ, математических олимпиадах и при изучении высшей математики и курса математического анализа.

2. Из-за большого количества заданий и методов их решения ученикам трудно систематизировать свои знания и научиться применять их на практике, поэтому в квалификационной работе разобраны основные методы решения уравнений и неравенств с модулем, подобраны задания, которые помогут ученику систематизировать знания по данной теме.

3. Отсутствие понимания учащимися многих тем школьного курса математики снижает их мотивацию к учебе. В квалификационной работе представлены основные советы по развитию познавательного интереса учеников, следование которым поможет школьникам лучше усваивать материал и стремиться к получению новых знаний.

В процессе выполнения квалификационной работы был разработан элективный курс для учащихся 10-11 классов с подборкой заданий с решением различных уровней сложности. Итоговым результатом данного курса является не только приобретение знаний, предусмотренных требованиями программы общеобразовательной школы, но и умение решать задачи с повышенным уровнем сложности.

Таким образом, можно подтвердить выдвинутую гипотезу о том, то применение разработанного в данной работе элективного курса при подготовке к выпускным экзаменам будет способствовать формированию у учащихся четкого понимания понятия модуль и поможет систематизировать методы решений уравнений и неравенств.

Библиографический список

1. Вавилов, В.В. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, и др. - М.: Наука, 1987. - 93 с.

2. Гайдуков И.И. Абсолютная величина числа: пособие для учителей / И.И.Гайдуков. – 2-е изд. -М.: Просвещение, 1968. – С.5-8.

3. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2017 года по математике, профильный уровень [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ege.edu.ru/ru/

4. Егоров, А. Монотонные функции в конкурсных задачах [Текст] / А.Егоров, Ж.Раббот // Квант – 2002. - №6. – С. 39-40.

5. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2017. – С. 172-173.

6. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие / Г. И. Запорожец. – 7-е изд., стер. – М.: Лань, 2010. – С. 7-10.

7. Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи. / А.И. Козко, В.Г. Чирский. – М.: МЦНМО, 2007. – 19 с.

8. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.М.Колягин, М.В.Ткачёва, Н.Е.Фёдорова, М.И.Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 43 с.

9. Коннова, Е. Г. Математика. 6-11 классы [Текст] : подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач : учебно-методическое пособие / Е. Г. Коннова, В. А. Дрёмов, С. О. Иванов ; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Калабухова. – 3-е изд. – Ростов-на-Дону : Легион, 2016. – 219 с.

10. Ляхова, Н.Е. Методика решения уравнений и неравенств в задачах с параметрами: уче.пособие / Н.Е. Ляхова, И.В. Яковенко; отв. ред. проф. А. А. Илюхин. – Таганрог: Изд-во Таганрог. ин-та имени А.П. Чехова, 2014. – 8 с.

11. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова ; под ред. С.А.Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 3 с.

12. Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2018 году. Профильный уровень. Диагностические работа. – М.: МЦНО, 2018. – 96 с.

13. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Часть 1: учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина,2009. – 251 с.

14. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Часть 1: учеб. для общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина,2009. – 232 с.

15. Мордкович, А.Г. Алгебра. 8 класс. Часть 1: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., доп. – М.: Мнемозина,2013. - 75 с.

16. Севрюков, П.Ф. Задачи с параметром и модулем [Текст] / П. Ф. Севрюков // Математика. Всё для учителя. – 2014. - №4(40). – С. 11-15.

17. Севрюков, П.Ф. уравнения и неравенства с модулями и методика их решения: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М.: Илекса, Народное образование ; Ставрополь: Сервисшкола, 2005. – 59 с.

18. Старков, В.Н. 165 задач с параметрами [Текст] : методические указания. / В.Н.Старков. - СПб. М.: СПБГУ, 2004. – С. 7-10.

19. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. Шк. – М.: Просвещение, 1989. – С. 4-5.

20. Шахмейстер, А. Х. Построение и преобразования графиков. Параметры. Часть 2. Нелинейные функции и уравнения. Часть 3. Графическое

решение уравнений и систем уравнений с параметром / А. Х. Шахмейстер. – СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2016. – С. 120-128.

21. Элективные курсы в профильном обучении: Образовательная область “Математика” [Текст] /Министерство образования РФ – Национальный фонд подготовки кадров. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 96 с.