Ю.В. КОРЧЕМКИНА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ЧЕЛЯБИНСК

2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Южно-Уральский государственный
гуманитарно-педагогический университет»

Ю.В. КОРЧЕМКИНА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Челябинск
2017

УДК 512(021)
ББК 22.143я73
К 70

Корчемкина, Ю.В. Элементы линейной алгебры [Текст]: учебное пособие / Ю.В. Корчемкина. – Челябинск: Изд-во ЮУрГГПУ, 2017. – 82 с.

ISBN 978-5-906908-96-4

Учебное пособие предназначено для студентов образовательных организаций высшего образования, обучающихся по направлениям и специальностям информатической направленности. Пособие может использоваться при обучении дисциплинам «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Алгебра и геометрия».

В учебном пособии материал линейной алгебры представлен с позиций алгоритмического подхода. При изложении материала используются алгоритмы решения математических задач, записанные на языке блок-схем и псевдокода.

Рецензенты
Е.А. Гафарова, канд. пед. наук, доцент
Л.Ю. Овсяницкая, канд. техн. наук, доцент

ISBN 978-5-906908-96-4

СОДЕРЖАНИЕ

ИНСТРУКЦИЯ ПО РАБОТЕ С ПОСОБИЕМ

Учебное пособие состоит из трех разделов.

В первом разделе представлены теоретические аспекты по теме «Матрицы». Материал изложен как в традиционном изложении, так и с позиций решения данных задач с помощью ЭВМ.

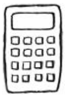
При изложении математического материала с позиций информатики алгоритмы выполнения элементарных действий используются как базовые, а далее на их основе строятся алгоритмы решения различных, более сложных задач.

Во втором разделе представлены задания для практических занятий по данному разделу. Задания предусматривают теоретические вопросы, решение задач по готовым алгоритмам и составление новых алгоритмов на основе базовых.

Третий раздел включает ответы и решения к практическим заданиям.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

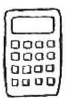
Понятие матрицы и основные сведения о матрицах



Матрицей размера m×n называется прямоугольная таблица, содержащая m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений, называемых ***элементами матрицы***. Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, *A*, *B*, *C*, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца. Так матрица А размера m×n записывается в следующем виде:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Замечание. В информатике и программировании для работы с матрицами используются многомерные массивы. Элементы массивов чаще всего обозначаются заглавными буквами, индексы помещаются в квадратные скобки, между ними ставится запятая, нумерация элементов начинается с нуля, однако мы будем пользоваться нумерацией, начинающейся с 1.



Если число строк матрицы равно числу её столбцов ($m = n$), то она называется ***квадратной матрицей n-го порядка***. Элементы квадратной матрицы, для которых $i = j$, называются ***диагональными***, а диагональ матрицы, на которой они находятся, – ***главной диагональю этой матрицы***.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Квадратные матрицы бывают следующих видов:

1. ***Верхняя треугольная:*** все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. ***Нижняя треугольная:*** все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. ***Диагональная:*** ненулевыми являются только элементы главной диагонали.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4. ***Единичная:*** все элементы главной диагонали равны единице, а все другие элементы равны нулю.

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

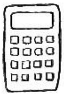
Две матрицы A и B называются ***равными*** $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Операции над матрицами

Основными операциями, которые выполняются над матрицами, являются:

1. Сложение матриц.
2. Умножение матрицы на число.
3. Произведение матриц.
4. Транспонирование матрицы.

Данные операции над матрицами можно назвать базовыми, поскольку при их выполнении не выполняются никакие другие операции, а алгоритмы выполнения этих операций можно назвать базовыми алгоритмами раздела «Матрицы».



Суммой матриц A и B одинакового размера m×n называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,2, \dots , m; \; j = 1,2, \dots , n. \quad (1)$$

Свойства операции сложения матриц:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

На примере этого алгоритма рассмотрим правила записи алгоритмов линейной алгебры в машинной форме.

В большинстве алгоритмов обработка матрицы начинается с первой строки, берётся первый элемент, потом второй и т.д. до последнего элемента строки (n-го элемента), когда заканчивается первая строка, осуществляется переход ко второй строке, опять берётся первый элемент строки, потом второй и т.д. Эти действия выполняются посредством циклических структур, а именно вложенных циклов.

Внешний цикл (цикл по i, цикл по строкам) осуществляет переход от строки к строке (от 1 строки до m), внутренний цикл (цикл по j, цикл по столбцам) – переход от элемента к элементу внутри строки (от первого элемента до n-го).

Увеличение i и j на 1 в цикле будем считать автоматическим, то есть не будем писать этот оператор, чтобы не перегружать запись алгоритма. В случае, если возникнет ситуация, когда будет необходимо увеличение на иную величину, тогда мы будем это указывать.

Рис. 1. Схема работы с матрицей с помощью вложенных циклов

Все вышеназванные базовые алгоритмы, будучи записанными в машинной форме, будут иметь весьма похожую структуру и состоять из следующих крупных блоков: блок ввода, блок вычислений, в основе которого находится вложенный цикл, блок вывода. Внутри вложенного цикла будут находиться формулы, в основе которых формулы, приведённые в соответствующих определениях.

С точки зрения линейной алгебры для нас не является важным ввод и вывод данных в алгоритмах (для матриц (массивов) они достаточно объёмны), но не будет правильным опускать эти разделы в машинных алгоритмах. Поэтому примем, что существуют ранее созданные алгоритмы ввода данных («ввод матрицы») и вывода результатов («вывод матрицы»), и мы будем использовать эти обозначения вместо того, чтобы подробно расписывать ввод и вывод, а в блок-схемах ввод или вывод всех величин будем обозначать одним блоком.

Рассмотрим последовательность действий при создании машинной формы алгоритма:

1. Начинать работу над машинным алгоритмом решения задач линейной алгебры необходимо с внимательного изучения формулы или понятия, которые лежат в основе расчёта.

Из формулы (1) расчёта элемента c_{ij} следует, что для вычисления каждого элемента матрицы C необходим последовательный перебор элементов матриц A и B и сложение элементов с одинаковыми индексами, соответствующими индексам элемента c_{ij} (см. рис. 2).

Алгоритм сложения матриц

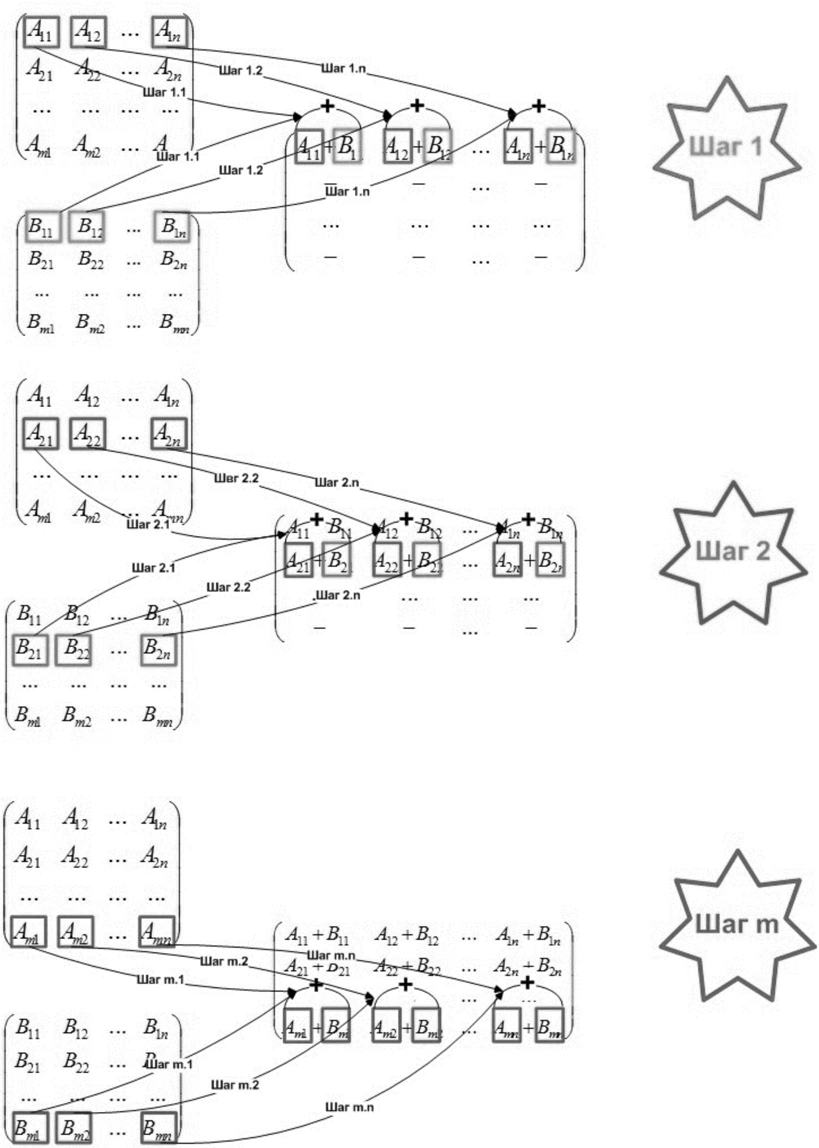


Рис. 2. Схема алгоритма сложения матриц

Это означает, что нам необходимы два цикла, один из которых будет изменять номер строки i (внешний цикл), а второй перебирать элементы внутри строки (изменять номер столбца j – внутренний цикл). Это соответствует приведённой выше стандартной схеме обработки матрицы с помощью вложенных циклов.

2. Создание блок-схемы необходимо начинать с выбора необходимых блоков на основе проведённого выше анализа содержания понятия или формулы. Во всех алгоритмах будут присутствовать блоки начала, конца, ввода и вывода, а в данном случае также, как мы установили выше, блоки двух циклов (здесь используются так называемые циклы «для») и находящийся внутри вложенного цикла блок вычислений, содержащий формулу расчёта элемента c_{ij}.

3. Следующим этапом является составление блок-схемы из выбранных блоков. Блок-схема алгоритма сложения матриц будет выглядеть следующим образом (рис. 3):

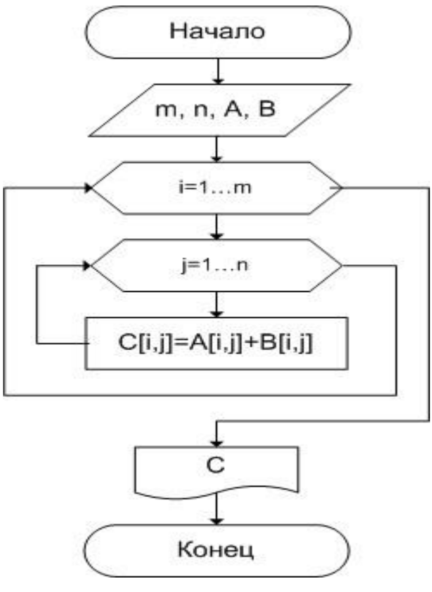


Рис. 3. Блок-схема алгоритма сложения матриц

4. Далее аналогично необходимо записать алгоритм на языке псевдокода, то есть выбрать из операторов псевдокода необходимые нам в соответствии с проведённым анализом формулы или понятия, после чего в соответствии с синтаксисом данного языка записать алгоритм.

Алгоритм сложения матриц, записанный на языке псевдокода, будет выглядеть следующим образом:

алг сложение матриц (slozhmatr)
    дано матрица A, матрица B
    надо матрица $\mathrm{C} = A + B$
нач **цел** **таб** A, B, C; **цел** i, j, m, n;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** B);
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
            $C[i,j] := A[i,j] + B[i,j]$;
        кц
    кц
    вывод матрицы (**арг** m, n, C);
кон

5. Последним этапом является проверка правильности записи алгоритма, то есть необходимо на конкретных примерах пройти по всем шагам алгоритма (представив, что вы являетесь той самой машиной, для которой предназначен алгоритм).

Пример: необходимо сложить матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$.

Пропуская блок ввода, как стандартный и несущественный для проверки, переходим сразу к вычислениям. Начинаем выполнение внешнего цикла по i, то есть присваиваем значение $i = 1$. Проверяем $i <= m$? Получаем ответ «да».

Запускаем выполнение вложенного цикла по j, то есть присваиваем значение $j = 1$. Проверяем, $j <= n$? Получаем ответ «да». Переходим к выполнению оператора вычислений, то есть присваиваем элементу $C[1,1]$ значение равное $A[1,1] + B[1,1] = 1 + (-2) = -1$. Однократное выполнение вложенного цикла окончено.

Переходим к следующему значению $j = 1 + 1 = 2$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $j = 1 \dots 2$ $(n = 2)$. Получаем ответ «да». Продолжаем выполнение цикла, переходим к оператору вычислений при $i = 1$, $j = 2$. $C[1,2] = A[1,2] + B[1,2] = = -3 + 3 = 0$. Выполнение вложенного цикла окончено.

Переходим к следующему значению $j = 2 + 1 = 3$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $j = 1 \dots 2$ $(n = 2)$. Получаем ответ «нет». Вложенный цикл дальше не выполняем.

Возвращаемся к внешнему циклу. Переходим к следующему значению $i = 1 + 1 = 2$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $i = 1 \dots 2$ $(m = 2)$. Получаем ответ «да». Запускаем выполнение вложенного цикла по j, то есть присваиваем значение $j = 1$. Переходим к выполнению оператора вычислений, то есть присваиваем элементу $C[2,1]$ значение равное $A[2,1] + B[2,1] = -5 + 7 = 2$. Выполнение вложенного цикла окончено.

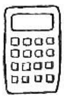
Переходим к следующему значению $j = 1 + 1 = 2$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $j = 1 \dots 2$ $(n = 2)$. Получаем ответ «да». Продолжаем выполнение цикла, переходим к оператору вычислений при $i = 2$, $j = 2$. $C[2,2] = A[2,2] + B[2,2] = = 9 + (-7) = 2$. Выполнение вложенного цикла окончено.

Переходим к следующему значению $j = 2 + 1 = 3$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $j = 1 \dots 2$ $(n = 2)$. Получаем ответ «нет». Вложенный цикл дальше не выполняем.

Возвращаемся к внешнему циклу. Переходим к следующему значению $i = 2 + 1 = 3$. Проверяем, удовлетворяет ли оно условию $i = 1 \ldots 2$ $(m = 2)$. Получаем ответ «нет». Завершаем работу внешнего цикла.

Осуществляем вывод результата, то есть записываем полученную матрицу: $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Не имея представления о машинных алгоритмах и действуя вручную, мы бы выполнили примерно те же действия и получили тот же результат. Алгоритм составлен верно.



1. ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на число*** α называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле: $c_{ij} = \alpha a_{ij},\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\propto\cdot(\beta\cdot A) = (\propto\cdot\beta)\cdot A$ (ассоциативность);

2) $\propto\cdot(A + B) = \propto\cdot A + \beta\cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\propto + \beta)\cdot A = \propto\cdot A + \beta\cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Структура данного алгоритма будет весьма похожа на структуру сложения матриц (рис. 4). Отличие будет заключаться лишь в той формуле, которая будет находиться в блоке вычислений внутри вложенного цикла, а также в исходных данных, указанных в блоке ввода (поскольку здесь исходной является одна матрица A, а также число a, на которое мы будем умножать эту матрицу). В предыдущем алгоритме мы в этом блоке формировали элемент c_{ij} матрицы C путём сложения двух элементов с соответствующими индексами матриц A и B. В этом случае элементы c_{ij} формируются путём умножения соответствующих элементов матрицы A (с индексами i и j) на одно и то же число.

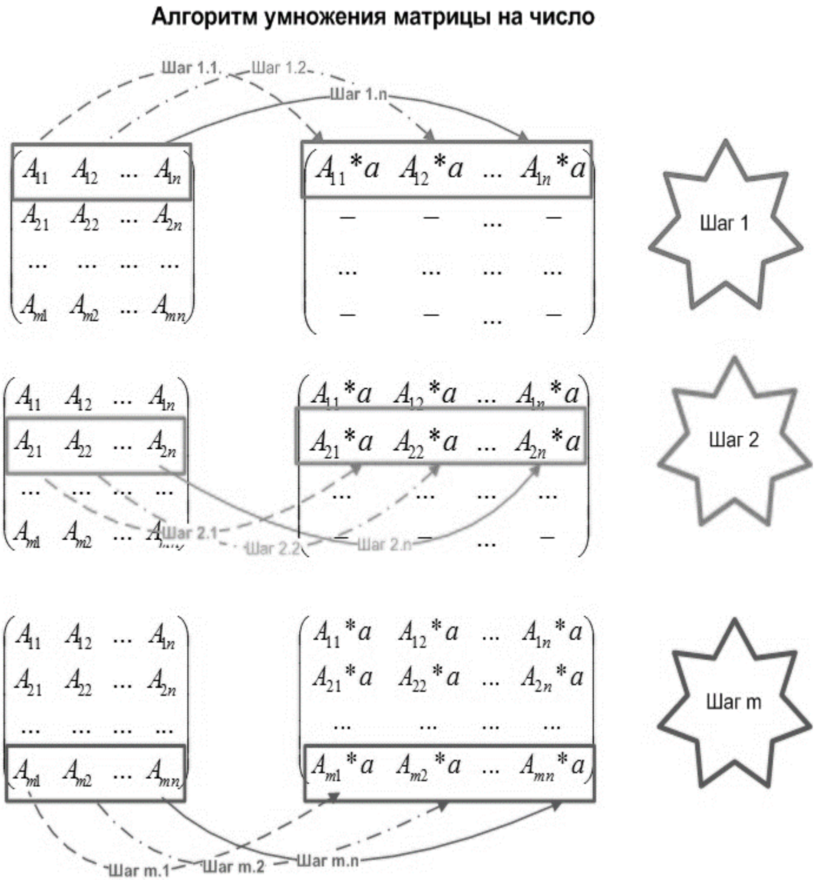


Рис. 4. Схема алгоритма умножения матрицы на число

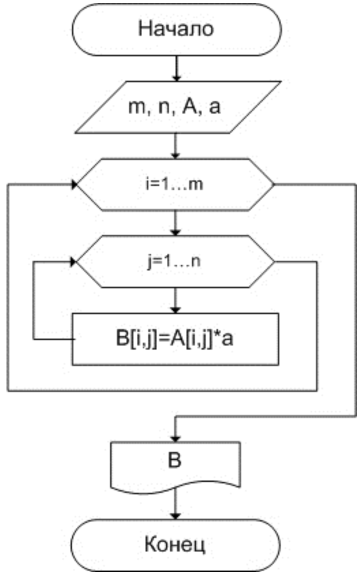


Рис. 5. Блок-схема алгоритма умножения матрицы на число

Запись данного алгоритма посредством псевдокода также похоже на запись предыдущего алгоритма:

алг умножение матрицы на число (umnchis)
    дано матрица А, число а
    надо матрица $B = a * A$
нач **цел** **таб** А,В; **цел** а; **цел** i, j, m, n;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
    ввод a;
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
            $B[i,j] := A[i,j] * a;$
        кц
    кц
    вывод матрицы (**арг** m, n, B);
кон

Рассмотрим пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ и число a = –3. Найти произведение матрицы A на число a.

Решение:

Считаем, что ввод размеров матрицы ($m = 2, n = 3$) и самой матрицы осуществлён, а также числа a осуществлён.

Начинаем выполнение циклов.

Входим во внешний цикл ($i = 1$). Проверяем $i = 1 <= m$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть – к вложенному циклу. Входим во внешний цикл ($j = 1$). Проверяем $j = 1 <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла – к оператору вычисления. $B[1,1] = A[1,1] * a = -2 * (-3) = 6$. Увеличиваем j на 1.

Проверяем j = 2 <= n? Ответ – да. Переходим в тело цикла – к оператору вычисления. $B[1,2] = A[1,2] * a = 4 * (-3) = -12$. Увеличиваем j на 1.

Проверяем $j = 3 <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, к оператору вычисления. $B[1,3] = A[1,3] * a = 7 * (-3) = -21$. Увеличиваем j на 1.

Проверяем $j = 4 <= n$? Ответ – нет. Завершаем вложенный цикл.

Переходим к внешнему циклу. Увеличиваем i на 1. Проверяем $i = 2 <= m$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к вложенному циклу. Входим во внешний цикл ($j = 1$). Проверяем $j = 1 <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла – к оператору вычисления. $B[2,1] = A[2,1] * a = 1 * (-3) = -3$. Увеличиваем j на 1.

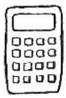
Проверяем $j = 2 <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, к оператору вычисления. $B[2,2] = A[2,2] * a = -5 * (-3) = 15$. Увеличиваем j на 1.

Проверяем $j = 3 <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла к оператору вычисления. $B[2,3] = A[2,3] * a = 3 * (-3) = -9$. Увеличиваем j на 1.

Проверяем $j = 4 <= n$? Ответ – нет. Завершаем вложенный цикл.

Переходим к внешнему циклу. Увеличиваем i на 1. Проверяем $i = 3 <= m$? Ответ – нет. Завершаем выполнение внешнего цикла.

Осуществляем вывод результата, то есть записываем полученную матрицу: $B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -21 \\ -3 & 15 & -9 \end{pmatrix}$.



2. ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}$ ***на матрицу*** $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}\,, \; i = 1, 2, \dots, m; \; j = 1, 2, \dots, k$$

Произведение матриц определено только в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведение матриц содержит столько строк, сколько имеет первая матрица, и столько столбцов, сколько имеет вторая матрица.

Из определения умножения матриц следует, что элемент c_{ij} является суммой произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Схема алгоритма умножения матриц приведена на рис. 6.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);

4) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, даже если оба произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены – отсутствует коммутативность.

Алгоритм умножения матриц

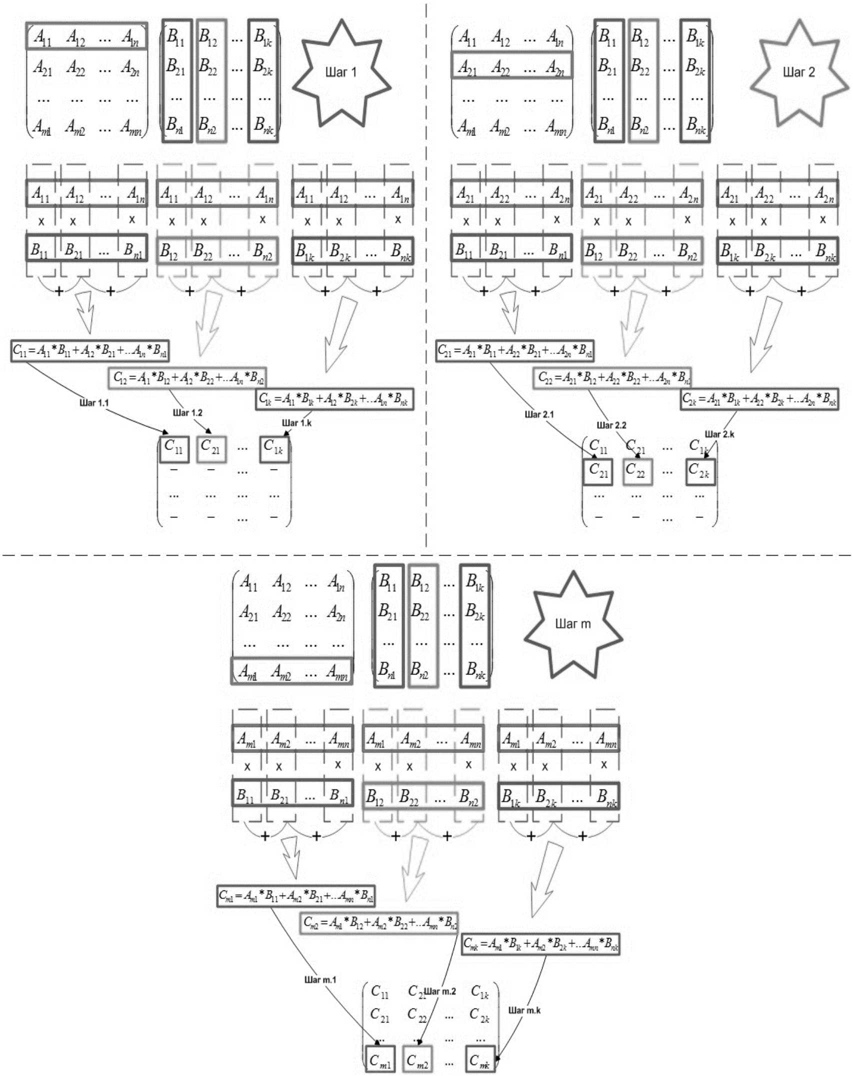


Рис. 6. Схема алгоритма умножения матриц

Коммутирующими (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$.

Ранее мы ввели понятие единичной матрицы E. В алгебре матриц она играет роль единицы. В связи с этим можно отметить ещё два свойства:

5) $A \cdot E = A$;

6) $E \cdot A = A$.

Иными словами, произведение любой матрицы на единичную матрицу, если оно имеет смысл, не меняет исходную матрицу.

Рассмотрим машинную форму алгоритма умножения матриц.

Исходя из формулы умножения матриц, в процессе вычисления необходимо изменение трёх индексов элементов матриц i, j и h, что в переводе на язык информатики означает присутствие трёх циклов. Внешний цикл по i будет обозначать перебор строк матрицы A ($i = 1 \dots m$). Первый вложенный цикл по j будет обозначать переход от столбца к столбцу матрицы B ($j = 1 \dots k$). Соответственно, второй вложенный цикл будет перебирать элементы внутри строки первой матрицы и внутри столбца второй матрицы ($h = 1 \dots n$). Это полностью соответствует действиям человека при умножении матриц «вручную», что означает, что циклы определены верно. В теле последнего цикла будет находиться формула следующего вида:

$$C[i,j] = \mathrm{C[i,j] + A[i,h] *\ B[h,j]}$$

Такая формула представляет собой последовательное прибавление к элементу $C[i,j]$ новых слагаемых (произведений соответствующих элементов строки первой матрицы и столбца второй матрицы) по мере продвижения по строке и столбцу. Отсюда следует, что изначально все элементы $C[i,j]$ должны быть приравнены к нулю, то есть перед тем, как начать выполнять тройной цикл, необходимо в двойном цикле (внешний цикл по $i = 1 \dots m$, внутренний цикл по $j = 1 \dots k$) «обнулить» матрицу C, то есть выполнять оператор $C[i,j] = 0$.

Таким образом, алгоритм умножения матриц в машинной форме будет состоять из трёх укрупнённых блоков: блок ввода; блок вычислений (обнуление матрицы *C*, собственно вычисления (тройной цикл)), блок вывода.

Блок-схема данного алгоритма будет выглядеть следующим образом (рис. 7):

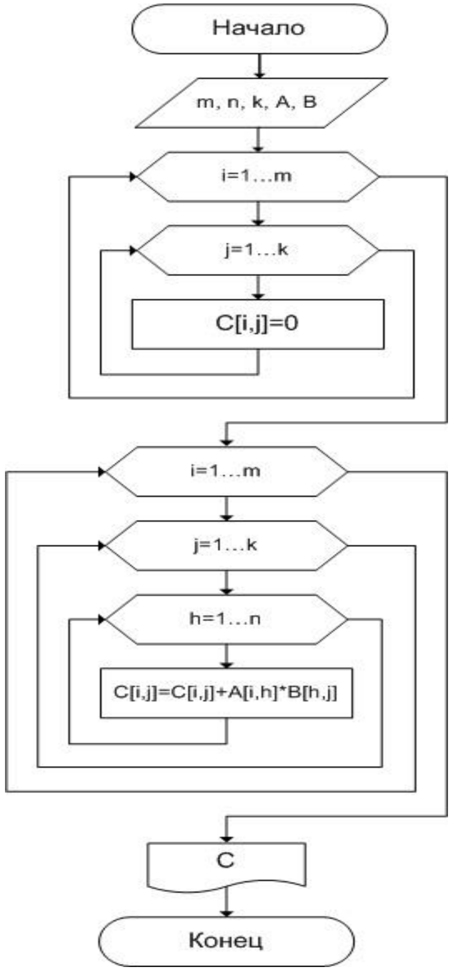


Рис. 7. Блок-схема алгоритма умножения матриц

Будучи записанным в виде псевдокода, алгоритм выглядит следующим образом:

```
алг умножение матриц (umnmatr)
    дано матрица A, матрица B
    надо матрица C = A * B
нач цел таб A,B,C; цел i, j, h, m, n, k;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод k;
    ввод матрицы (арг m, n; рез A);
    ввод матрицы (арг n, k; рез B);
    нц для i от 1 до m
        нц для j от 1 до k
            C[i,j]:= 0;
        кц
    кц
    нц для i от 1 до m
        нц для j от 1 до k
            нц для h от 1 до n
                C[i,j]:= C[i,j] + A[i,h] * B[h,j];
            кц
        кц
    кц
    вывод матрицы (арг m, k, C);
кон
```

Рассмотрим пример.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Найти произведение матриц.

Условно осуществив ввод исходных данных: размеров матриц ($m = 2$, $n = 2$, $k = 3$) и самих матриц, переходим к выполнению вычислений.

Обнуление матрицы C расписывать не будем. Сразу перейдём непосредственно к вычислениям.

Начинаем выполнение цикла по i. Присваиваем i значение 1. Проверяем $i <= m$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по j. Присваиваем j значение 1. Проверяем $j <= k$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1. $h <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[1,1] = C[1,1] + +A[1,1] * B[1,1] = 0 + (-2) * 1 = -2$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$. $h <= n$? Ответ – да. $C[1,1] = C[1,1] + A[1,2] * B[2,1] = = -2 + 1 * 3 = 1$. Увеличиваем h на 1, $h = 3$. $h <= n$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 2$. Проверяем $j <= k$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1, $h <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[1,2] = C[1,2] + +A[1,1] * B[1,2] = 0 + (-2) * (-1) = 2$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$, $h <= n$? Ответ – да. $C[1,2] = C[1,2] + A[1,2] * B[2,2] = = 2 + 1 * 2 = 4$. Увеличиваем h на 1, h = 3, h <= n? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

Увеличиваем значение j на 1, j = 3. Проверяем j <= k? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1, $h <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[1,3] = C[1,3] + +A[1,1] * B[1,3] = 0 + (-2) * 0 = 0$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$, $h <= n$? Ответ – да. $C[1,3] = C[1,3] + A[1,2] * B[2,3] = 0 + 1 * * (-5) = -5$. Увеличиваем h на 1, $h = 3$, $h <= n$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 4$. Проверяем $j <= k$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по j.

Переходим к внешнему циклу по i. Увеличиваем i на 1, $i = 2$. Проверяем $i <= m$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по j. Присваиваем j значение 1. Проверяем $j <= k$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1. $h <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[2,1] = C[2,1] + +A[2,1] * B[1,1] = 0 + 6 * 1 = 6$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$. $h < = n$? Ответ – да. $C[2,1] = C[2,1] + A[2,2] * B[2,1] = 6 + +(-3) * 3 = -3$. Увеличиваем h на 1, $h = 3$, $h <= n$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 2$. Проверяем $j <= k$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1, $h <= n$? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[2,2] = C[2,2] + +A[2,1] * B[1,2] = 0 + 6 * (-1) = -6$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$, h <= n? Ответ – да. $C[2,2] = C[2,2] + A[2,2] * B[2,2] = = -6 + (-3) * 2 = -12$. Увеличиваем h на 1, $h = 3$, $h <= n$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

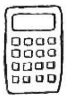
Увеличиваем значение j на 1, $j = 3$. Проверяем $j <= k$? Ответ – да.

Переходим в тело цикла – к вложенному циклу по h. Присваиваем h значение 1, h <= n? Ответ – да. Переходим в тело цикла, то есть к оператору вычислений: $C[2,3] = C[2,3] + +A[2,1] * B[1,3] = 0 + 6 * 0 = 0$. Увеличиваем h на 1, $h = 2$. $h < = n$? Ответ – да. $C[2,3] = C[2,3] + A[2,2] * B[2,3] = 0 + (-3) * (-5) = 15$. Увеличиваем h на 1, $h = 3$. $h <= n$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по h.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 4$. Проверяем $j <= k$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по j.

Переходим к внешнему циклу по i. Увеличиваем i на 1, $i = 3$. Проверяем $i <= m$? Ответ – нет. Завершаем выполнение цикла по i.

Осуществляем вывод результата, то есть записываем полученную матрицу: $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & -12 & 15 \end{pmatrix}$.



3. Замена каждой строки матрицы A её столбцом называется ***транспонированием***.

Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^T.

Если задана матрица:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то её транспонированная матрица имеет вид:

$$A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Схема алгоритма транспонирования матрицы изображена на рис. 8.

Свойства операции транспонирования

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^T + B^T$;
4) $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = A^T \cdot B^T$.

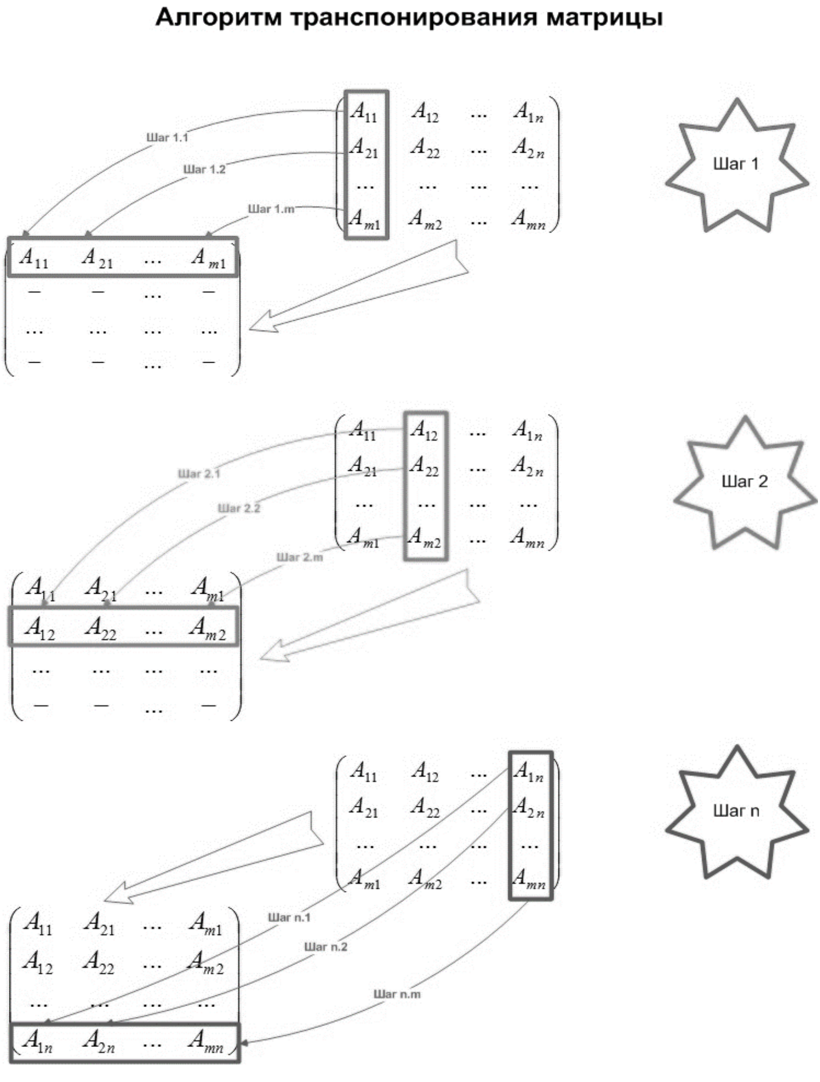


Рис. 8. Схема алгоритма транспонирования матрицы

Построим машинную форму алгоритма. Очевидно, что если матрица $B = A^T$, то $b_{ij} = a_{ji}$ (или в машинной форме $B[i,j] = A[j,i]$). Если исходная матрица A размера m×n, то матрица $B = A^T$, соответственно, будет иметь размер n×m. Таким образом, если мы будем формировать элементы матрицы B в двойном цикле, то внешний цикл (в данном случае – это цикл «по строкам» матрицы B) должен выполняться для $i = 1 \ldots n$, а внутренний (цикл «по столбцам» матрицы B) – для $j = 1 \ldots m$, а в теле внутреннего цикла будет находиться оператор, соответствующий вышеуказанной формуле ($B[i,j] = A[j,i]$).

Таким образом, блок-схема алгоритма транспонирования матриц выглядит следующим образом (рис. 9):

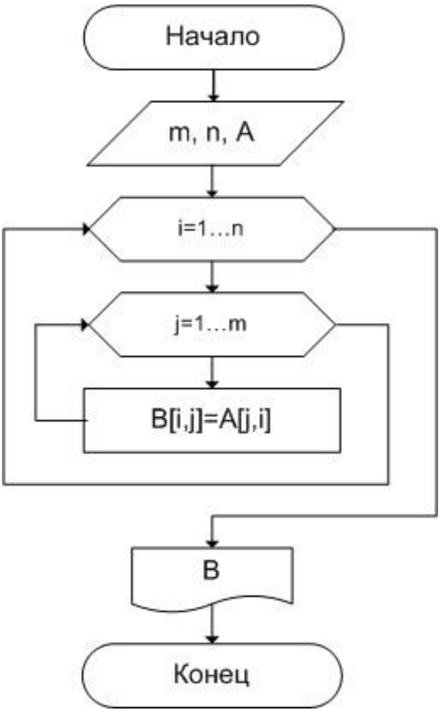


Рис. 9. Блок-схема алгоритма транспонирования матрицы

Запись на языке псевдокода данного алгоритм выглядит так:

алг транспонирование матрицы (transp)

  дано матрица А

  надо матрица В= $А^Т$

нач **цел** **таб** А,В; **цел** i, j, m, n;

  ввод m;

  ввод n;

  ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** А);

  нц **для** i от 1 до n

    нц **для** j от 1 до m

      $B[i,j]:=A[j,i]$;

    кц

  кц

  вывод матрицы (**арг** n, m, В);

кон

Рассмотрим пример: транспонировать матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что данные введены. Матрица A размера 3×2 (m = 3; n = 2). Соответственно матрица B будет иметь размер n×m (2×3).

Начинаем выполнение цикла. Входим во внешний цикл. Присваиваем i значение 1. Проверяем $i <= n$. Ответ – да.

Переходим к выполнению вложенного цикла. Присваиваем j значение 1. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем В[1,1] значение $A[1,1] = 6$.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 2$. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем В[1,2] значение $A[2,1] = 3$.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 3$. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем B[1,3] значение $A[3,1] = -1$.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 4$. Проверяем $j <= m$. Ответ – нет.

Завершаем выполнение вложенного цикла.

Возвращаемся к внешнему циклу. Увеличиваем i на 1, $i = 2$. Проверяем $i <= n$. Ответ – да.

Переходим к выполнению вложенного цикла. Присваиваем j значение 1. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем B[2,1] значение $A[1,2] = -5$

Увеличиваем значение j на 1, $j = 2$. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем B[2,2] значение $A[2,2] = 8$.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 3$. Проверяем $j <= m$. Ответ – да.

Выполняем тело вложенного цикла – блок вычислений, присваиваем B[2,3] значение $A[3,2] = 3$.

Увеличиваем значение j на 1, $j = 4$. Проверяем $j <= m$. Ответ – нет.

Завершаем выполнение вложенного цикла.

Возвращаемся к внешнему циклу. Увеличиваем i на 1. $i = 3$. Проверяем $i <= n$. Ответ – нет.

Завершаем выполнение внешнего цикла.

Осуществляем вывод ответа, записываем полученную матрицу $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

На этом примере покажем возможный краткий вариант записи решения в виде выполнения машинного алгоритма:

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 2$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1. i \le n$? Да.

$j = 1. j \le m$? Да.

$B[1,1] = A[1,1] = 6.$

$j = 2. j \le m$? Да.

$B[1,2] = A[2,1] = 3.$

$j = 3. j \le m$? Да.

$B[1,3] = A[3,1] = -1.$

$j = 4. j \le m$? Нет.

$i = 2. i \le n$? Да.

$j = 1. j \le m$? Да.

$C[2,1] = A[1,2] = -5.$

$j = 2. j \le m$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] = 8.$

$j = 3. j \le m$? Да.

$C[2,3] = A[3,2] = 3.$

$j = 4. j \le m$? Нет.

$i = 3. i \le n$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Итак, мы рассмотрели 4 базовых алгоритма раздела «Матрицы». Очевидно, что эти алгоритмы могут использоваться как самостоятельные, а также входить в состав других алгоритмов, то есть исходные данные будут вводиться в главном алгоритме и передаваться во вспомогательный, а результат будет передаваться обратно в главный алгоритм (или в другой вспомогательный). Чтобы записать приведённые выше алгоритмы как вспомогательные (в программировании их называют методы, функции, процедуры и т.п.), необходимо убрать из них все операторы ввода, а в заголовке указать, какие данные будут передаваться в метод (аргументы), и что будет результатом, а из описания переменных убрать все аргументы. Кроме того, может меняться тип переменных, ранее мы задавали в алгоритмах матрицы целого типа, поскольку студенты в основном имеют дело с целыми числами в матрицах, но в некоторых алгоритмах возможно появление дробных чисел, поэтому необходимо задавать вещественный тип, даже если изначальные матрицы являются целыми.

Заголовок алгоритма сложения матриц, как метода, будет выглядеть следующим образом:

алг сложение матриц (**арг** **цел** **таб** A, B; **цел** m, n;
рез **цел** **таб** C)
дано матрица A, матрица B
надо матрица $\mathrm{C} = A + B$
нач **цел** **таб** C; **цел** i, j;
…

То есть в метод передаются две матрицы A и B и их размеры, а результатом будет матрица C.

Применять базовые алгоритмы как методы мы будем в составных алгоритмах.

Кроме вышеуказанных операций с матрицами, которые можно называть базовыми, некоторые авторы отдельно рассматривают ещё другие действия, которые можно производить над матрицами. Такие действия будут основаны на вышерассмотренных операциях, то есть их алгоритмы будут составными – будут содержать в себе базовые алгоритмы. К таковым операциям можно отнести следующие: вычитание матриц, линейная комбинация матриц, возведение матрицы в степень, вычисление матричного многочлена, а также вычисление различных матричных выражений.

1. ***Разность двух матриц*** определяется через операции умножения на число и сложения $A - B = A + (-1) \cdot B$.

2. ***Линейной комбинацией матриц*** A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β – произвольные числа.

3. ***Целой положительной степенью*** A^k $(k > 1)$ квадратной матрицы A называют произведение k матриц равных A, то есть:

$$A^m = \underset{k\ раз}{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}$$

Очевидно, что в основе данной операции лежит операция умножения матриц.

4. Если задан многочлен $f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k$, то ***матричным многочленом*** $f(A)$ называется выражение $a_0 \cdot A^k + a_1 \cdot A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \cdot A + a_k \cdot E$ (n – любое натуральное число, A – квадратная матрица).

Операция нахождения матричного многочлена определяется через операции умножения матрицы на число, умножения матриц, сложения, возведения в степень, то есть в её основе лежат не только базовые алгоритмы, но и один из более простых составных алгоритмов.

5. ***Матричные выражения*** могут содержать в себе одновременно совершенно разные операции: умножения матрицы на число, сложения, умножения матриц, транспонирования, возведения в степень. Соответственно, алгоритмы вычисления таких выражений будут являться комбинацией соответствующих алгоритмов. Именно на составлении алгоритмов вычисления матричных выражений удобнее всего тренироваться в создании составных алгоритмов.

Рассмотрим *пример создания составного алгоритма*. Алгоритм вычитания матриц особого интереса не представляет, поскольку для получения этого алгоритма нужно просто взять алгоритм сложения матриц и в выражении, находящемся в блоке вычислений, поменять знак «+» на «–».

Что касается алгоритма вычисления нахождения линейной комбинации матриц, то мы предлагаем студентам разработать его самостоятельно, так как для этого нужно только ввести в алгоритм сложения ещё одну матрицу и изменить главный блок вычислений.

Рассмотрим алгоритм возведения матрицы в целую положительную степень.

Рассуждаем логически: чтобы получить матрицу $B = A^k$, необходимо умножить матрицу A саму на себя, потом (если $k > 2$), полученную матрицу ещё раз умножить на матрицу A и т.д. (пока число членов произведения не будет равно k). Таким образом, после ввода данных: размерности матрицы $A(n)$, собственно матрицы и целой положительной степени k – необходимо задать начальные значения элементов результирующей матрицы B, поскольку мы будем последовательно обновлять эти значения в цикле, производя умножение матрицы B на матрицу A. Здесь возможны 2 варианта: либо изначально всем элементам матрицы B присваиваются значения 1, и тогда параметр цикла, в котором производится умножение, должен изменяться от 1 до k (чтобы число множителей было равно k); либо изначально элементам матрицы B присваиваются значения элементов матрицы A, и тогда цикл задаётся немного по-другому (изменение параметра начинается не с 1, а с 2, иначе число множителей будет равно не k, а $k + 1$).

Используем второй вариант. Запишем алгоритм в сокращённой словесной форме:

1. Ввести данные.

2. Присвоить элементам матрицы B значения соответствующих элементов матрицы A.

3. Выполнить алгоритм умножения матрицы B на матрицу A $(k-1)$ раз (в цикле).

4. Вывести результат.

Блок-схема алгоритма приведена на рис. 10.

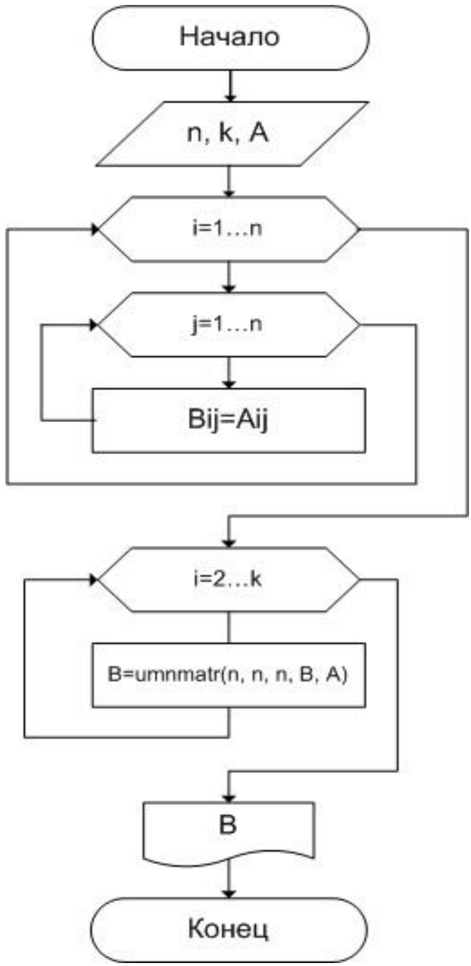


Рис. 10. Блок-схема алгоритма возведения матрицы в степень

Возводить в степень мы можем только квадратные матрицы, отсюда следует, что мы вводим только один параметр n –

количество строк и столбцов матрицы. Далее мы вводим матрицу A, а также степень k. Матрица B будет иметь те же размеры, что и матрица A, то есть $n \times n$. Поэтому далее следует «двойной» цикл (оба цикла от 1 до n), в котором мы присваиваем элементам матрицы B начальные значения – значения элементов матрицы A.

В следующем цикле (от 2 до k) мы наблюдаем не простое вычислительное выражение, а вызов вспомогательного алгоритма умножения двух матриц (который был рассмотрен выше). Для сокращения он назван здесь «umnmatr», можно было написать и русскими буквами.

Если вспомнить алгоритм умножения матриц в общем виде и записать его как алгоритм-метод, то его аргументами будут размеры 2-х матриц (целые m, n, k), собственно 2 матрицы (2 массива – A и B), а результатом – матрица (массив) C. В нашем случае все матрицы размера $n \times n$, поэтому вместо m, n и k мы трижды передаем в метод n. Кроме того, мы будем умножать матрицу B на матрицу A, поэтому мы передаём их в метод именно в этом порядке (B, A). Так как мы должны с каждым повторением цикла обновлять значения элементов матрицы B, то результат выполнения алгоритма метода мы присваиваем матрице B и при следующем повторении цикла вновь передаём в метод обновлённую матрицу B. Матрица A при этом остаётся неизменной.

Запись данного алгоритма на языке псевдокода выглядит следующим образом:

алг возведение квадратной матрицы в степень (*vozvstep*)
дано матрица A ($n \times n$), целая положительная степень k
надо матрица $B = \mathrm{A}^{\mathrm{k}}$
нач **цел** i, j, k, n; **цел** **таб** A, B;
    ввод *n*;
    ввод матрицы (**арг** *n*, *n*; **рез** *A*);
    ввод *k*;
    нц **для** *i* от 1 до *n*

```
            нц для j от 1 до n
                B[i,j] = A[i,j];
            кц
        кц
        нц для i от 2 до k
            B = umnmatr(n,n,n,B,A);
        кц
        вывод B;
    кон
```

Рассмотрим пример возведения матрицы в степень. Пусть имеется квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то есть $n = 3$. Возведём её в степень $k = 3$. Считаем, что данные введены. Начинаем вычисления. Задаём начальные значения элементов матрицы B, равные соответствующим элементам матрицы A. Последовательно двигаемся по строкам и столбцам матрицы (это движение уже описано неоднократно и схематично изображено на рис. 1):

$i = 1, j = 1, B[1,1] = A[1,1] = 1;$

$i = 1, j = 2, B[1,2] = A[1,2] = 2;$

$i = 2, j = 1, B[2,1] = A[2,1] = 3;$

$i = 2, j = 2, B[2,2] = A[2,2] = 4.$

Переходим к главному вычисляющему циклу. Присваиваем i значение 2. Проверяем $i \le k$, получаем ответ – «да». Выполняем алгоритм-метод умножения двух матриц, то есть умножаем матрицу B на матрицу A. Результат умножения передаём в матрицу B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря:

$B[1,1] = 1 * 1 + 2 * 3 = 7;$

$B[1,2] = 1 * 2 + 2 * 4 = 10;$

$B[2,1] = 3 * 1 + 4 * 3 = 15;$

$B[2,2] = 3 * 2 + 4 * 4 = 22.$

Увеличиваем значение i на 1, $i = 3$. Проверяем $i \leq k$, получаем ответ – «да». Переходим к выполнению тела цикла, то есть опять применяем алгоритм-метод умножения матриц, передаём в метод матрицы *B* и *A*, результат присваиваем матрице *B*.

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$B[1,1] = 7 * 1 + 10 * 3 = 37;$

$B[1,2] = 7 * 2 + 10 * 4 = 54;$

$B[2,1] = 15 * 1 + 22 * 3 = 81;$

$B[2,2] = 15 * 2 + 22 * 4 = 118.$

Увеличиваем значение i на 1, $i = 4$. Проверяем $i \leq k$, получаем ответ – «нет». Завершаем выполнение цикла.

Выводим ответ: $B = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}.$

МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Задание 1

Повторите базовые алгоритмы темы «Операции над матрицами»: умножение матрицы на число, сложение матриц, умножение матриц, транспонирование матрицы.

Ответьте на вопросы:

1. Какого размера должна быть матрица B, чтобы была возможна операция сложения $A + B$, если размер матрицы A – $k \times m$:

а) $m \times k$;

б) $k \times m$;

в) $m \times m$;

г) $m \times k$.

2. Какого размера должна быть матрица B, чтобы была возможна операция умножения $A * B$, если размер матрицы A – $k \times m$:

а) $m \times n$;

б) $n \times m$;

в) $k \times n$;

г) $n \times k$.

3. Какое выражение может стоять в блоке вычислений алгоритма умножения матрицы на число:

а) $B[i,j] = A[i,j] \cdot \alpha$;

б) $B[i,j] = \alpha \cdot A[i,j]$;

в) возможны оба варианта;

г) верного варианта нет.

4. Если матрица A имеет размеры 6×4, то $(A^T)^T$ будет иметь размеры:

а) 6×4;

б) 4×4;

в) 6×6;

г) 4×6.

5. Какое условие является достаточным, чтобы одновременно были возможны произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$:

а) количество строк матрицы A равно количеству столбцов матрицы B;

б) количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B;

в) матрицы A и B – квадратные матрицы одинакового размера;

г) нет верного ответа.

Задание 2

Найти сумму матриц. Расписать решение с точки зрения математики и как процесс выполнения машинного алгоритма.

1. $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -8 & -10 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 5 & -7 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 7 \\ 10 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$
3. $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & -2 \\ -9 & -2 & -7 \\ -5 & 1 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -7 \\ 7 & -5 & -5 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$

Задание 3

На основании алгоритма сложения двух матриц:

1. Получить алгоритм сложения трех матриц:

$$D = A + B + C.$$

2. Получить алгоритм сложения четырех матриц, воспользовавшись свойством ассоциативности операции сложения матриц:

$$F = (A + B) + (C + D).$$

3. Получить алгоритм сложения девяти матриц, воспользовавшись свойством ассоциативности операции сложения матриц:

$$M = (A + B + C) + (D + F + G) + (H + K + L).$$

Все матрицы имеют размер $m \times n$. Записать алгоритмы в виде блок-схем и псевдокода.

Задание 4

Найти произведение матрицы на число $B = a \cdot A$. Расписать решение с точки зрения математики и как процесс выполнения машинного алгоритма.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, a = -3.$
2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, a = 4.$
3. $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, a = 3.$

Задание 5

Самостоятельно составить алгоритм нахождения линейной комбинации матриц: $C = a \cdot A + b \cdot B$. Записать в виде блок-схемы и псевдокода. Найти линейные комбинации матриц, записать решение в математической форме и с точки зрения выполнения машинного алгоритма:

1. $C = -4A + 2B, A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$
2. $C = 4A + 3B, A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$
3. $C = 3A - 2B,$

   $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$

Задание 6

Найти произведение матриц $C = A \cdot B$, записать решение в математической форме и с точки зрения выполнения машинного алгоритма:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & -1 \\ -6 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Задание 7

Составьте алгоритмы, запишите в виде блок-схем и псевдокода:

1. Умножения трех матриц: $D = A \cdot B \cdot C$.
2. Вычисления выражения $D = A \cdot B + A \cdot C$, воспользовавшись свойством дистрибутивности.
3. Проверки двух квадратных матриц на коммутативность.

Задание 8

Составьте алгоритмы вычисления матричных выражений. Запишите в форме блок-схем. Определите, какими должны быть размеры матриц, чтобы выражения могли быть вычислены. Вычислите матричные выражения, запишите решение в математической форме и с точки зрения выполнения машинного алгоритма:

1. $C = 2A + 5B^T$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
2. $D = -4A + B^T - 6C^T$,

   $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.
3. $D = 2A^T + B \cdot C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задание 9

Используя алгоритм возведения квадратной матрицы в степень, разработайте алгоритмы вычисления выражений, запишите их посредством псевдокода. Выполните вычисления для приведённых матриц. Запишите решение в математической форме.

1. $C = A^k + B^k, A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, k = 3.$

2. $C = (A + B)^k, \quad k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},.$$

3. $B = a_0 \cdot A^k + a_1 \cdot A^{k-1} + \dots + a_{k-1} \cdot A + a_k \cdot E$ (матричный многочлен),

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = 2A^3 + 5A^2 - 4A - 2E.$$

Задание 10

Изучите алгоритм, записанный в машинной форме. Определите, какое матричное выражение вычисляет этот алгоритм. Выполните соответствующие действия для данных матриц.

1. См. рис 11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. См. рис. 12.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

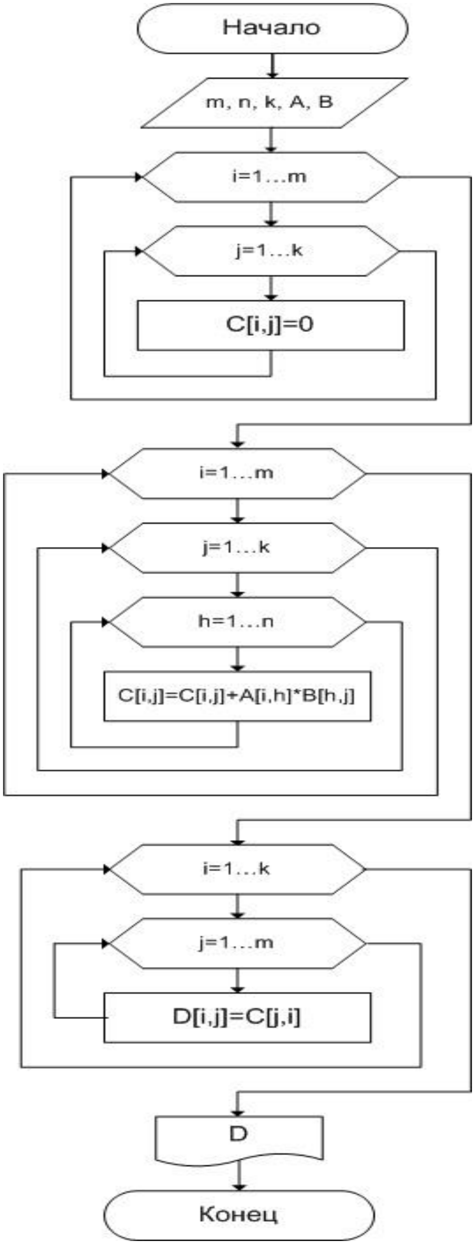


Рис. 11. Схема алгоритма к заданию 10.1

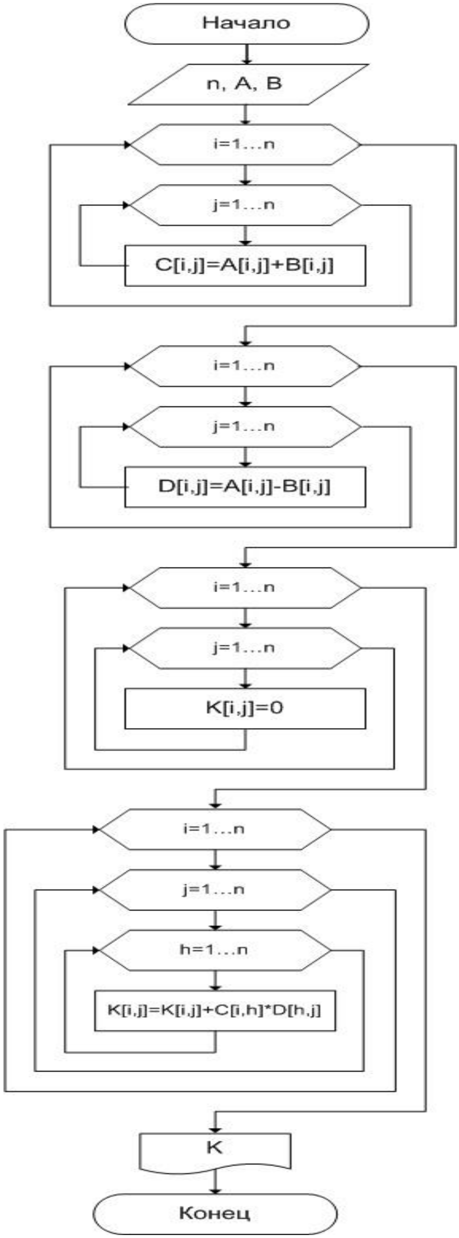


Рис.12. Схема алгоритма к заданию 10.2

3. См. запись на псевдокоде.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad k = 3$

```
алг вычисление выражения
    дано матрица A, матрица B
    надо ???
нач цел таб A, B, C, D; цел i, j, n;
    ввод n;
    ввод k;
    ввод матрицы (арг n, n; рез A);
    ввод матрицы (арг n, n; рез B);
    нц для i от 1 до n
        нц для j от 1 до n
            C[i,j]:= B[i,j] − A[i,j];
        кц
    кц
    нц для i от 1 до n
        нц для j от 1 до n
            D[i,j] = C[i,j];
        кц
    кц
    нц для i от 2 до k
        D = umnmatr(n, n, n, D, C);
    кц
    вывод матрицы (арг n, n, D);
кон
```

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Задание 1

1 – б; 2 – а, 3 – в, 4 – а, 5 – в.

Задание 2

1. $\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -9 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -8 & -10 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+6 & -5+6 \\ -9-8 & -1-10 \\ -5+5 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -17 & -11 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 2$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] + B[1,1] = -7 + 6 = -1$.

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] + B[1,2] = -5 + 6 = 1$.

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 2, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] + B[2,1] = -9 + (-8) = -17$.

$j = 2, j \leq n$? Да.

$\mathrm{C}[2,2] = A[2,2] + B[2,2] = -1 + (-10) = -11$.

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 3, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[3,1] = A[3,1] + B[3,1] = -5 + 5 = 0$.

$j = 2, j \leq n$? Да.

C [3,2] = A [3,2] + B [3,2] = 0 + (–4) = –4

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 4, i \leq m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: C = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -17 & -11 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 5 & -7 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -2 & 7 \\ 10 & -8 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5-9 & 0-2 & 5+7 \\ 5+10 & -7-8 & -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 12 \\ 15 & -15 & -7 \end{pmatrix}.$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 3$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] + B[1,1] = -5 + (-9) = -14.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] + B[1,2] = 0 + (-2) = -2.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$\mathrm{C}[1,3] = A[1,3] + B[1,3] = 5 + 7 = 12.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 2, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] + B[2,1] = 5 + 10 = 15.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] + B[2,2] = -7 + (-8) = -15.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$C[2,3] = A[2,3] + B[2,3] = -5 + (-2) = -7.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 3, i \leq m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата:

$C = \begin{pmatrix} -14 & -2 & 12 \\ 15 & -15 & -7 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 9 & 9 & -2 \\ -9 & -2 & -7 \\ -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 & -7 \\ 7 & -5 & -5 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9+1 & 9+9 & -2-7 \\ -9+7 & -2-5 & -7-5 \\ -5+4 & 1-5 & -6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 18 & -9 \\ -2 & -7 & -12 \\ -1 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 3$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] + B[1,1] = 9 + 1 = 10.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] + B[1,2] = 9 + 9 = 18.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$C[1,3] = A[1,3] + B[1,3] = -2 + (-7) = -9.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 2, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] + B[2,1] = -9 + 7 = -2.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] + B[2,2] = -2 + (-5) = -7.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$C[2,3] = A[2,3] + B[2,3] = -7 + (-5) = -12.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 3, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$C[3,1] = A[3,1] + B[3,1] = -5 + 4 = -1.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$C[3, 2] = A[3, 2] + B\ [3, 2] = 1 + (-5) = -4.$

j=3, j≤n? Да.

$$C[3,3] = A[3,3] + B[3,3] = -6 + (-5) = -11.$$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

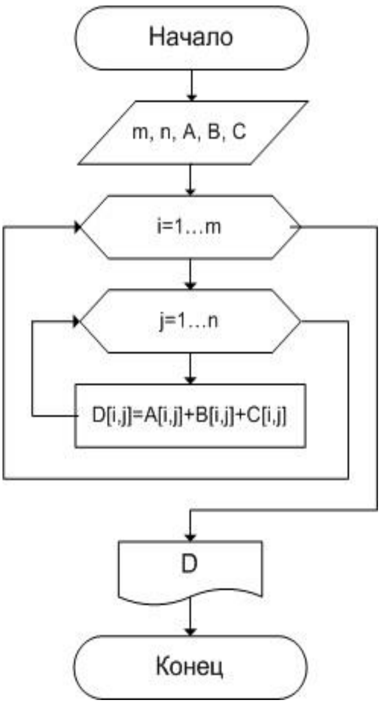
$i = 4, i \leq n$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 18 & -9 \\ -2 & -7 & -12 \\ -1 & -4 & -11 \end{pmatrix}.$$

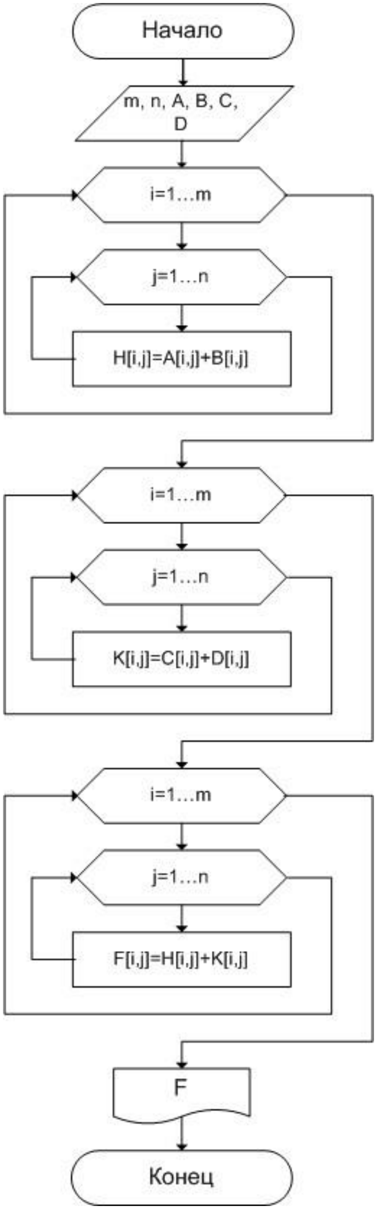
Задание 3

1. $D = A + B + C$.



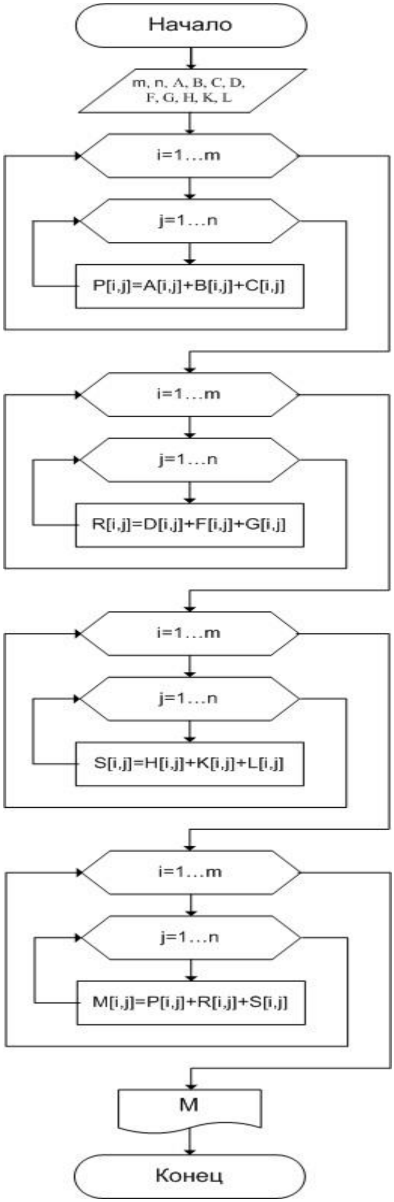
алг сложение трех матриц
    дано матрица A, матрица B,
        матрица C
    надо матрица D=A+B+C
нач **цел** **таб** A, B, C, D; **цел** i, j, m, n;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** B);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** C);
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
    $D[i,j] := A[i,j] + B[i,j] + C[i,j]$;
        кц
    кц
    вывод матрицы (**арг** m, n, D);
кон

2. $F = (A + B) + (C + D)$.



алг сложение четырех матриц
    дано матрица A, матрица B,
        матрица C, матрица D
    надо матрица $F = (A + B) + (C + D)$
нач **цел** **таб** A, B, C, D, F, H, K;
    цел i, j, m, n;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** B);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** C);
    ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** D);
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
            $\mathrm{H[i,j]:= A[i,j] + B[i,j]}$;
        кц
    кц
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
            $\mathrm{K[i,j]:= C[i,j] + D[i,j]}$;
        кц
    кц
    нц **для** i от 1 до m
        нц **для** j от 1 до n
            $\mathrm{F[i,j]:= H[i,j] + K[i,j]}$;
        кц
    кц
    вывод матрицы (**арг** m, n, F);
кон

3. $M = (A + B + C) + (D + F + G) + (H + K + L)$.



алг сложение девяти матриц
дано девять матриц
надо матрица M – сумма 9-ти матриц
нач **цел** **таб** A, B, C, D, F, G, H, K, L, P, R, S, M; **цел** i, j, m, n;
ввод m;
ввод n;
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** B);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** C);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** D);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** F);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** G);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** H);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** K);
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** L);
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до n
$P[i,j] := A[i,j] + B[i,j] + C[i,j]$;
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до n
$R[i,j] := D[i,j] + F[i,j] + G[i,j]$;
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до n
$S[i,j] := H[i,j] + K[i,j] + L[i,j]$;
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до n
$M[i,j] := P[i,j] + R[i,j] + S[i,j]$;
кц
кц
вывод матрицы (**арг** m, n, M);
кон

Задание 4

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, a = -3.$

Решение 1

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot (-3) = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-3) & 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot (-3) & -1 \cdot (-3) \\ -1 \cdot (-3) & -2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ -12 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 2$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$B[1,1] = A[1,1] * a = 5 * (-3) = -15.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$B[1,2] = A[1,2] * a = 3 * (-3) = -9.$

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 2, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$B[2,1] = A[2,1] * a = 4 * (-3) = -12.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$B[2,2] = A[2,2] * a = -1 * (-3) = 3.$

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 3, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$B[3,1] = A[3,1] * a = -1 * (-3) = 3.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$B[3,2] = A[3,2] * a = -2 * (-3) = 6$

$j = 3, j \leq n$? Нет.

$i = 4, i \leq m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: $B = \begin{pmatrix} -15 & -9 \\ -12 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, a = 4.$

Математическое решение;

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} -5 \cdot 4 & 2 \cdot 4 & 4 \cdot 4 \\ 0 \cdot 4 & -1 \cdot 4 & 0 \cdot 4 \\ -2 \cdot 4 & -3 \cdot 4 & -2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 16 \\ 0 & -4 & 0 \\ -8 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 3$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq n$? Да.

$B[1,1] = A[1,1] * a = -5 * 4 = -20.$

$j = 2,\ j \leq n$? Да.

$B[1,2] = A[1,2] * a = 2 * 4 = 8.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$B[1,3] = A[1,3] * a = 4 * 4 = 16.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 2, i \leq m$? Да.

$j = 1, j \leq n$? Да.

$B[2,1] = A[2,1] * a = 0 * 4 = 0.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$B[2,2] = A[2,2] * a = -1 * 4 = -4.$

$j = 3, j \leq n$? Да.

$B[2,3] = A[2,3] * a = 0 * 4 = 0.$

$j = 4,\ j \leq n$? Нет.

$i = 3,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq n$? Да.

$B[3,1] = A[3,1] * a = -2 * 4 = -8.$

$j = 2,\ j \leq n$? Да.

$B[3,2] = A[3,2] * a = -3 * 4 = -12.$

$j = 3,\ j \leq n$? Да.

$B[3,3] = A[3,3] * a = -2 * 4 = -8.$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 4, i \leq n$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: $B = \begin{pmatrix} -20 & 8 & 16 \\ 0 & -4 & 0 \\ -8 & -12 & -8 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $a = 3$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} -4\cdot3 & 3\cdot3 & -2\cdot3 & -3\cdot3 & 0\cdot3 \\ 2\cdot3 & -5\cdot3 & 1\cdot3 & 0\cdot3 & -2\cdot3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -12 & 9 & -6 & -9 & 0 \\ 6 & -15 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 5$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq n$? Да.

$\mathrm{B}[1,1] = A[1,1] * a = -4 * 3 = -12.$

$j = 2, j \leq n$? Да.

$B[1,2] = A[1,2] * a = 3 * 3 = 9.$

$j = 3,\ j \leq n$? Да.

$B[1,3] = A[1,3] * a = -2 * 3 = -6.$

$j = 4,\ j \leq n$? Да.

$B[1,4] = A[1,3] * a = -3 * 3 = -9.$

$j = 5,\ j \leq n$? Да.

$B[1,5] = A[1,3] * a = 0 * 3 = 0.$

$j = 6,\ j \leq n$? Нет.

$i = 2,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq n$? Да.

$B[2,1] = A[2,1] * a = 2 * 3 = 6.$

$j = 2,\ j \leq n$? Да.

$B[2,2] = A[2,2] * a = -5 * 3 = -15.$

$j = 3,\ j \leq n$? Да.

$B[2,3] = A[2,3] * a = 1 * 3 = 3.$

$j = 4,\ j \leq n$? Да.

$B[2,4] = A[2,3] * a = 0 * 3 = 0.$

$j = 5,\ j \le n$? Да.

$B[2{,}5] = A[2{,}3] * a = -2 * 3 = -6.$

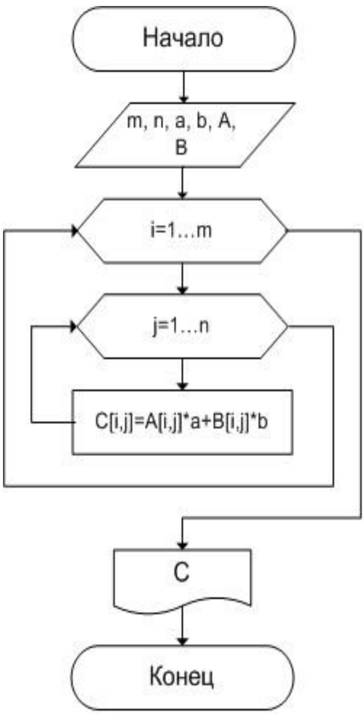
$j = 6,\ j \le n$? Нет.

$i = 3, i \le n$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата:

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 9 & -6 & -9 & 0 \\ 6 & -15 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Задание 5




```
алг линейная комбинация матриц
    (linkomb)
    дано матрица A, матрица B
    надо матрица C = a * A + b * B
нач цел таб A, B, C; цел i, j, m, n, a,
b;
    ввод m;
    ввод n;
    ввод a;
    ввод b;
    ввод матрицы (арг m, n; рез A);
    ввод матрицы (арг m, n; рез B);
    нц для i от 1 до m
        нц для j от 1 до n
         C[i, j]: = a * A[i, j] + b * B[i, j];
        кц
    кц
    вывод матрицы (арг m, n, C);
кон
```

1. $C = -4A + 2B,\ A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение 1

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-4) + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot 2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 \\ -1 \cdot (-4) + (-4) \cdot 2 & 4 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -16 \\ 10 & -2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 2, a = -4, b = 2$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] * a + B[1,1] * b = -3 * (-4) + 1 * 2 = -10.$

$j = 2,\ j \le n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] * a + B[1,2] * b = 3 * (-4) + (-2) * 2 = -16.$

$j = 3,\ j \le n$? Нет.

$i = 2,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] * a + B[2,1] * b = 0 * (-4) + 5 * 2 = 10.$

$j = 2,\ j \le n$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] * a + B[2,2] * b = 2 * (-4) + 3 * 2 = -2.$

$j = 3,\ j \le n$? Нет.

$i = 3, i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[3,1] = A[3,1] * a + B[3,1] * b = -1 * (-4) + (-4) * 2 = -4.$

$j = 2,\ j \le n$? Да.

$C[3,2] = A[3,2] * a + B[3,2] * b = 4 * (-4) + 5 * 2 = -6.$

$j = 3,\ j \le n$? Нет.

$i = 4,\ i \le m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: $C = \begin{pmatrix} -10 & -16 \\ 10 & -2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

2. $C = 4A + 3B$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение 1

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot 4 + \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot 3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 \\ -3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 & -2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 & -3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -18 \end{pmatrix}$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 3, a = 4, b = 3$.

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] * a + B[1,1] * b = 4 * 4 + (-4) * 3 = 4$.

$j = 2,\ j \le n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] * a + B[1,2] * b = 1 * 4 + 4 * 3 = 16$.

$j = 3,\ j \le n$? Да.

$C[1,3] = A[1,3] * a + B[1,3] * b = 3 * 4 + (-4) * 3 = 0$.

$j = 4,\ j \le n$? Нет.

$i = 2,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] * a + B[2,1] * b = -3 * 4 + 5 * 3 = 3$.

$j = 2,\ j \le n$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] * a + B[2,2] * b = -1 * 4 + 3 * 3 = 5$.

$j = 3,\ j \le n$? Да.

$C[2,3] = A[2,3] * a + B[2,3] * b = 0 * 4 + 1 * 3 = 3$.

$j = 4,\ j \le n$? Нет.

$i = 3,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le n$? Да.

$C[3,1] = A[3,1] * a + B[3,1] * b = 2 * 4 + (-3) * 3 = -1$.

$j = 2,\ j \leq n$? Да.

$C[3,2] = A[3,2] * a + B[3,2] * b = -2 * 4 + 2 * 3 = -2.$

$j = 3,\ j \leq n$? Да.

$C[3,3] = A[3,3] * a + B[3,3] * b = -3 * 4 + (-2) * 3 = -18.$

$j = 4,\ j \leq n$? Нет.

$i = 4,\ i \leq m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата: $C = \begin{pmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & -18 \end{pmatrix}.$

3. C=3A – 2B, $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение 1

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot 3 + \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot (-2) =$$

$$\begin{pmatrix} -2\cdot3+(-3)\cdot(-2) & -2\cdot3+3\cdot(-2) & -3\cdot3+(-3)\cdot(-2) & -2\cdot3+3\cdot(-2) \\ 3\cdot3+(-4)\cdot(-2) & -2\cdot3+2\cdot(-2) & 1\cdot3+(-2)\cdot(-2) & -5\cdot3+(-3)\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 & -12 \\ 17 & -10 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 4, a = 3, b = -2.$

II. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1.\, i \leq m$? Да.

$j = 1.\ j \leq n$? Да.

$C[1,1] = A[1,1] * a + B[1,1] * b = -2 * 3 + (-3) * (-2) = 0.$

$j = 2.\ j \leq n$? Да.

$C[1,2] = A[1,2] * a + B[1,2] * b = -2 * 3 + 3 * (-2) = -12.$

$j = 3.\ j \leq n$? Да.

$C[1,3] = A[1,3] * a + B[1,3] * b = -3 * 3 + (-3) * (-2) = -3.$

$j = 4.\ j \leq n$? Да.

$C[1,4] = A[1,4] * a + B[1,4] * b = -2 * 3 + 3 * (-2) = -12.$

$j = 5.\, j \leq n$? Нет.

$i = 2.\ i \leq m$? Да.

$j = 1.\ j \leq n$? Да.

$C[2,1] = A[2,1] * a + B[2,1] * b = 3 * 3 + (-4) * (-2) = 17.$

$j = 2.\ j \le n$? Да.

$C[2,2] = A[2,2] * a + B[2,2] * b = -2 * 3 + 2 * (-2) = -10.$

$j = 3.\ j \le n$? Да.

$C[2,3] = A[2,3] * a + B[2,3] * b = 1 * 3 + (-2) * (-2) = 7.$

$j = 4.\ j \le n$? Да.

$C[2,4] = A[2,4] * a + B[2,4] * b = (-5) * 3 + (-3) * (-2) = -9.$

$j = 5.\ j \le n$? Нет.

$i = 3.\ i \le m$? Нет.

III. Осуществляем вывод результата:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -12 & -3 & -12 \\ 17 & -10 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

Задание 6

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$

Решение 1

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-6) + (-3) \cdot 5 & 5 \cdot 6 + (-3) \cdot 7 \\ 3 \cdot (-6) + (-6) \cdot 5 & 3 \cdot 6 + (-6) \cdot 7 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -45 & 9 \\ -48 & -24 \end{pmatrix}$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 2, k = 2.$

II. Обнуляем матрицу С (подробно расписывать не будем).

III. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1, i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,1] * B[1,1] = 0 + 5 * (-6) = -30.$

$h = 2, i \le n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,2] * B[2,1] = -30 + (-3) * 5 = -45.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 2,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,1] * B[1,2] = 0 + 5 * 6 = 30.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,2] * B[2,2] = 30 + (-3) * 7 = 9.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 3,\ j \le k$? Нет.

$i = 2,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,1] * B[1,1] = 0 + 3 * (-6) = -18.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,2] * B[2,1] = -18 + (-6) * 5 = -48.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 2,\ j \le k$? Да.

$h = 1.\ i \le n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,1] * B[1,2] = 0 + 3 * 6 = 18.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,2] * B[2,2] = 18 + (-6) * 7 = -24.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 3,\ j \le k$? Нет.

$i = 3,\ i \le m$? Нет.

IV. Осуществляем вывод результата: $C = \begin{pmatrix} -45 & 9 \\ -48 & -24 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение 1

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -4 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot1+3\cdot(-6)+6\cdot(-4) & -2\cdot(-3)+3\cdot3+6\cdot(-2) & -2\cdot1+3\cdot(-4)+6\cdot6 \\ 5\cdot1+1\cdot(-6)+3\cdot(-4) & 5\cdot(-3)+1\cdot3+3\cdot(-2) & 5\cdot1+1\cdot(-4)+3\cdot6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -44 & 7 & 22 \\ -13 & -18 & 19 \end{pmatrix}$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 3, k = 3$.

II. Обнуляем матрицу С (подробно расписывать не будем).

III. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq k$? Да.

$h = 1, i \leq n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,1] * B[1,1] = 0 + (-2) * 1 = -2.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,2] * B[2,1] = -2 + 3 * (-6) = -20.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,3] * B[3,1] = -20 + 6 * (-4) = -44.$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 2,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,1] * B[1,2] = 0 + (-2) * (-3) = 6.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,2] * B[2,2] = 6 + 3 * 3 = 15.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,3] * B[3,2] = 15 + 6 * (-2) = 7.$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 3,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[1,3] = C[1,3] + A[1,1] * B[1,3] = 0 + (-2) * 1 = -2.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[1,3] = C[1,3] + A[1,2] * B[2,3] = -2 + 3 * (-4) = -14.$

$h = 3,\ \ i \leq n$? Да.

$C[1,3] = C[1,3] + A[1,3] * B[3,3] = -14 + 6 * 6 = 22.$

$h = 4, i \leq n$? Нет.

$j = 4, j \leq k$? Нет.

$i = 2,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,1] * B[1,1] = 0 + 5 * 1 = 5.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,2] * B[2,1] = 5 + 1 * (-6) = -1.$

$h = 3,\ i \le n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,3] * B[3,1] = -1 + 3 * (-4) = -13.$

$h = 4, i \le n$? Нет.

$j = 2,\ j \le k$? Да.

$h = 1.\ i \le n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,1] * B[1,2] = 0 + 5 * (-3) = -15.$

$h = 2, i \le n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,2] * B[2,2] = -15 + 1 * 3 = -12.$

$h = 3,\ i \le n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,3] * B[3,2] = -12 + 3 * (-2) = -18.$

$h = 4,\ i \le n$? Нет.

$j = 3,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[2,3] = C[2,3] + A[2,1] * B[1,3] = 0 + 5 * 1 = 5.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[2,3] = C[2,3] + A[2,2] * B[2,3] = 5 + 1 * (-4) = 1.$

$h = 3,\ i \le n$? Да.

$C[2,3] = C[2,3] + A[2,3] * B[3,3] = 1 + 3 * 6 = 19.$

$h = 4,\ i \le n$? Нет.

$j = 4,\ j \le k$? Нет.

$i = 3, i \le m$? Нет.

IV. Осуществляем вывод результата: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -44 & 7 & 22 \\ -13 & -18 & 19 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & -1 \\ -6 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение 1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & -1 \\ -6 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5\cdot4+(-2)\cdot(-6) & 5\cdot5+(-2)\cdot(-1) & 5\cdot4+(-2)\cdot3 & 5\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4) \\ 5\cdot4+2\cdot(-6) & 5\cdot5+2\cdot(-1) & 5\cdot4+2\cdot3 & 5\cdot(-1)+2\cdot(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 27 & 14 & 3 \\ 8 & 23 & 26 & -13 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2, n = 2, k = 4$.

II. Обнуляем матрицу C (подробно расписывать не будем).

III. Запускаем выполнение цикла.

$i = 1,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,1] * B[1,1] = 0 + 5 * 4 = 20.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[1,1] = C[1,1] + A[1,2] * B[2,1] = 20 + (-2) * (-6) = 32.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 2,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,1] * B[1,2] = 0 + 5 * 5 = 25.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[1,2] = C[1,2] + A[1,2] * B[2,2] = 25 + (-2) * (-1) = 27.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 3,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,3] = C[1,3] + A[1,1] * B[1,3] = 0 + 5 * 4 = 20.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[1,3] = C[1,3] + A[1,2] * B[2,3] = 20 + (-2) * 3 = 14.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 4,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$C[1,4] = C[1,4] + A[1,1] * B[1,4] = 0 + 5 * (-1) = -5.$

$h = 2,\ i \le n$? Да.

$C[1,4] = C[1,4] + A[1,2] * B[2,4] = -5 + (-2) * (-4) = 3.$

$h = 3,\ i \le n$? Нет.

$j = 5, j \le k$? Нет.

$i = 2,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,1] * B[1,1] = 0 + 5 * 4 = 20.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[2,1] = C[2,1] + A[2,2] * B[2,1] = 20 + 2 * (-6) = 8.$

$h = 3,\ i \leq n$? Нет.

$j = 2,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,1] * B[1,2] = 0 + 5 * 5 = 25.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[2,2] = C[2,2] + A[2,2] * B[2,2] = 25 + 2 * (-1) = 23.$

$h = 3,\ i \leq n$? Нет.

$j = 3,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[2,3] = C[2,3] + A[2,1] * B[1,3] = 0 + 5 * 4 = 20.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[2,3] = C[2,3] + A[2,2] * B[2,3] = 20 + 2 * 3 = 26.$

$h = 3,\ i \leq n$? Нет.

$j = 4,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$C[2,4] = C[2,4] + A[2,1] * B[1,4] = 5 * (-1) = -5.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$C[2,4] = C[2,4] + A[2,2] * B[2,4] = -5 + 2 * (-4) = -13.$

$h = 3,\ i \leq n$? Нет.

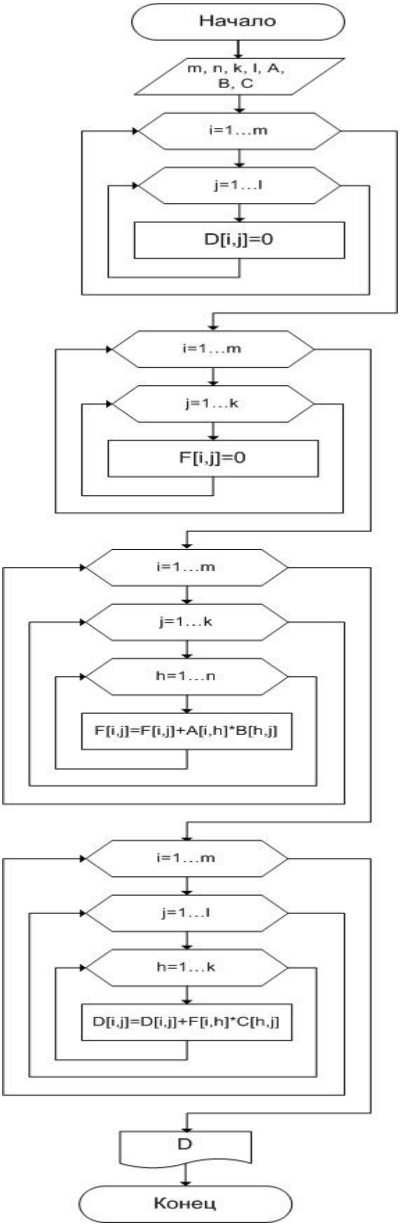
$j = 5,\ j \leq k$? Нет.

$i = 3,\ i \leq m$? Нет.

IV. Осуществляем вывод результата: $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 32 & 27 & 14 & 3 \\ 8 & 23 & 26 & -13 \end{pmatrix}$.

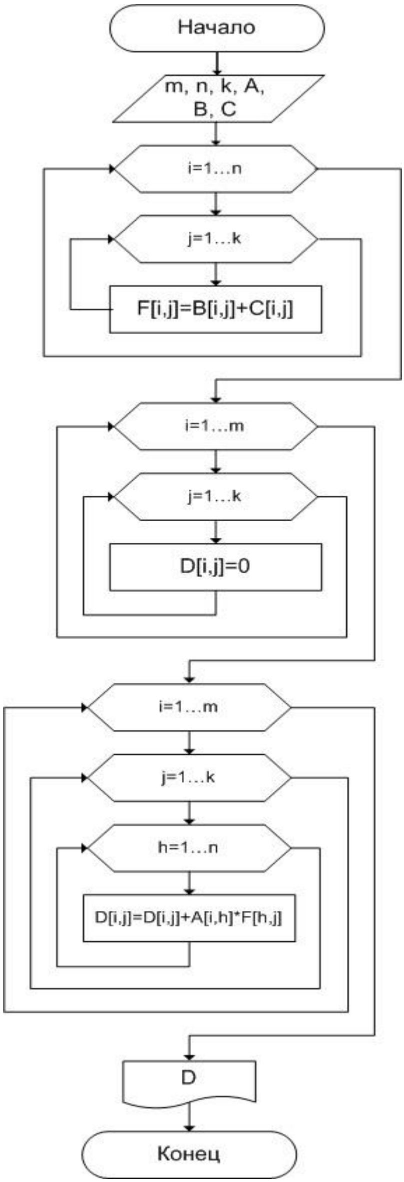
При выполнении задания необходимо обратить внимание на существенное увеличение трудоемкости вычислений при увеличении размеров матриц. Этот факт становится особенно явным при записи решения в машинной форме.

Задание 7 1. $D = A \cdot B \cdot C$.



алг умножение трех матриц
дано матрицы A, B, C
надо матрица D=A*B*C
нач **цел** **таб** A,B,C, D, F;
цел i, j, h, m, n, k, l;
ввод m;
ввод n;
ввод k;
ввод l;
ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
ввод матрицы (**арг** n, k; **рез** B);
ввод матрицы (**арг** k, l; **рез** C);
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до l
$D[i, j] := 0;$
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до k
$F[i, j] := 0;$
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до k
нц **для** h от 1 до n
$F[i, j] := F[i, j] + A[i, h] * C[h, j];$
кц
кц
кц
нц **для** i от 1 до m
нц **для** j от 1 до l
нц **для** h от 1 до k
$D[i, j] := D[i, j] + F[i, h] * C[h, j];$
кц
кц
кц
вывод матрицы (**арг** m, l, D);
кон

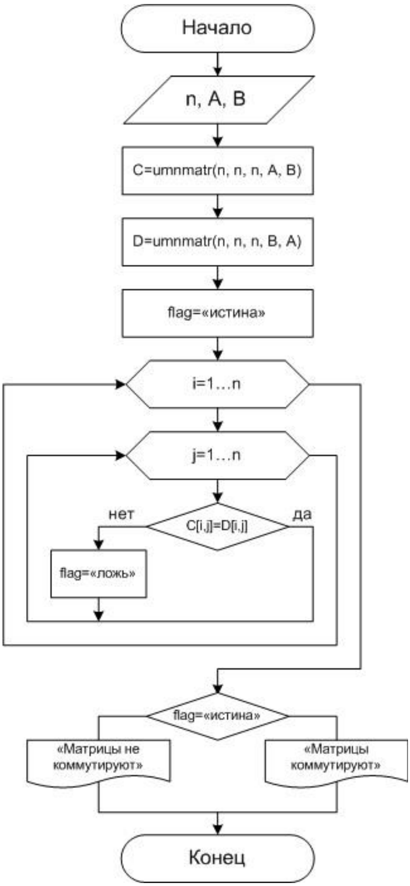
2. $D = A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C)$.



алг вычисление выражения
    дано матрицы A, B, C
    надо матрица $D = A * (B + C)$
нач **цел** **таб** A,B,C, F, D; **цел** i, j, h,
        m, n, k;
  ввод m;
  ввод n;
  ввод k;
  ввод матрицы (**арг** m, n; **рез** A);
  ввод матрицы (**арг** n, k; **рез** B);
  ввод матрицы (**арг** n, k; **рез** C);
  нц **для** i от 1 до n
    нц **для** j от 1 до k
      $F[i,j] := B[i,j] + C[i,j]$;
    кц
  кц
  нц **для** i от 1 до m
    нц **для** j от 1 до k
      D[i,j]:=0;
    кц
  кц
  нц **для** i от 1 до m
    нц **для** j от 1 до k
      нц **для** h от 1 до n
   $D[i,j] := D[i,j] + A[i,h] * F[h,j]$;
      кц
    кц
  кц
  вывод матрицы (**арг** m, k, D);
кон

3. Проверки двух квадратных матриц на коммутативность.

В данном алгоритме важны не действия по умножению матриц $A*B$ и $B*A$, а проверка равенства полученных матриц, поэтому умножение матриц можно записать как выполнение алгоритма-метода. В этом алгоритме впервые применяются логические переменные, на этом надо сосредоточить внимание студентов. В школьном алгоритмическом языке применяются значения логических переменных «да» и «нет», но лучше употреблять вместо них значения «истина» и «ложь».



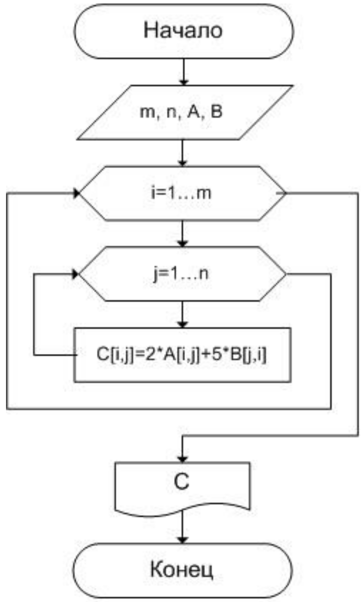
алг вычисление выражения
    дано матрица A, матрица B,
    надо проверить $A * B = B * A$
нач **цел** **таб** A,B,C, D; **цел** i, j, h, m,
        n, k; **лог** flag;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** A);
    ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** B);
    $C: = umnmatr(n, n, n, A, B);$
    $D: = umnmatr(n, n, n, B, A);$
    flag: = «истина»;
    нц **для** i от 1 до n
        нц **для** j от 1 до n
            если $C[i, j] \neq D[i, j]$
            то flag: = «ложь»;
        кц
        кц
    если flag = «истина»
    то **вывод** «матрицы
                коммутируют»;
    иначе **вывод** «матрицы не
                коммутируют»;
кон

Задание 8

1. $C = 2A + 5B^T$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Алгоритм (один из вариантов)

Если A – размера $m \times n$, то B – $n \times m$.



Решение 1

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \\ 5 \cdot 2 & -1 \cdot 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 3 \cdot 5 \\ -6 \cdot 5 & 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -30 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 + 5 & 4 + 15 \\ 10 - 30 & -2 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 2,\ n = 2$.

II. Запускаем выполнение цикла:

$i = 1.\ i \le m$? Да.

$j = 1.\ j \le n$? Да.

$C[1,1] = 2 * A[1,1] + 5 * B[1,1] = 2 * (-3) + 5 * 1 = -1.$

$j = 2.\ j \le n?$ Да.

$C[1,2] = \ 2 * A[1,2] + 5 * B[2,1] = 2 * 2 + 5 * 3 = 19.$

$j = 3.\ j \le n?$ Нет.

$i = 2.\ i \le m?$ Да.

$j = 1.\ j \le n?$ Да.

$C[2,1] = 2 * A[2,1] + 5 * B[1,2] = 2 * 5 + 5 * (-6) = -20.$

$j = 2.\ j \le n?$ Да.

$B[2,2] = 2 * A[2,2] + 5 * B[2,2] \ = 2 * (-1) + 5 * 4 = 18.$

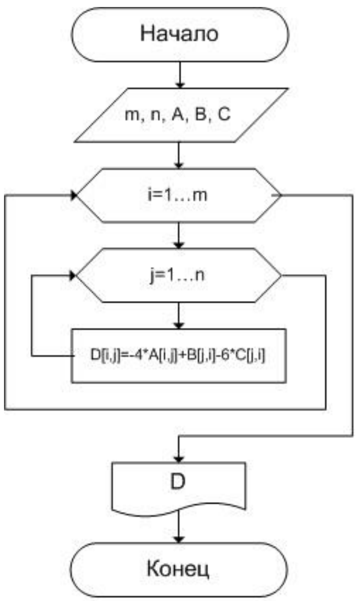
$j = 3.\ j \le n?$ Нет.

$i = 3.\ i \le m?$ Нет.

III. Вывод результата: $C = \begin{pmatrix} -1 & 19 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

2. $D = -4A + B^T - 6C^T$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. Если A – размера $m \times n$, то B и C – $n \times m$.

Алгоритм:



Решение 1

$$-4\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -5 & -1\end{pmatrix}^T-6\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}^T=$$
$$=\begin{pmatrix}-4\cdot(-4) & 1\cdot(-4)\\ 1\cdot(-4) & -2\cdot(-4)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\cdot(-6) & -6\cdot(-6)\\ -2\cdot(-6) & 3\cdot(-6)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}16 & -4\\ -4 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 36\\ 12 & -18\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}16-2-12 & -4-5+36\\ -4+3+12 & 8-1-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 27\\ 11 & -11\end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m=2,\ n=2$.

II. Запускаем выполнение цикла:

$i=1.\ i\le m$? Да.

$j=1.\ j\le n$? Да.

$D[1,1]=-4*A[1,1]+B[1,1]-6*C[1,1]=-4*(-4)+(-2)-6*2=2.$

$j=2.\ j\le n$? Да.

$D[1,2]=-4*A[1,2]+B[2,1]-6*C[2,1]=-4*1+(-5)-6*(-6)=27.$

$j=3.\ j\le n$? Нет.

$i=2.\ i\le m$? Да.

$j=1.\ j\le n$? Да.

$D[2,1]=-4*A[2,1]+B[1,2]-6*C[1,2]=-4*1+3-6*(-2)=11.$

$j=2.\ j\le n$? Да.

$B[2,2]=-4*A[2,2]+B[2,2]-6*C[2,2]=-4*(-2)+(-1)-6*3=-11.$

$j=3.\ j\le n$? Нет.

$i=3.\ i\le m$? Нет.

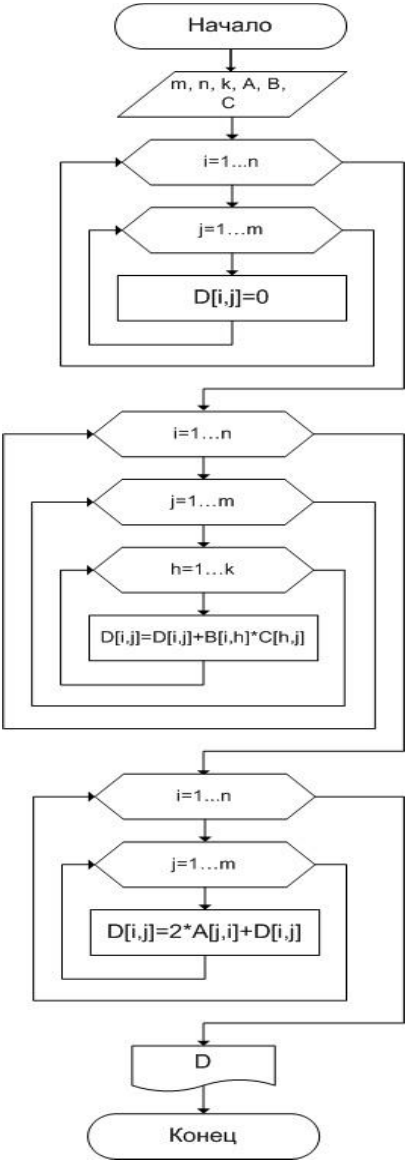
III. Вывод результата: $C=\begin{pmatrix}2 & 27\\ 11 & -11\end{pmatrix}$.

3. $D=2A^T+B\cdot C$, $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ -4 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ 5 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

Если A – размера $m \times n$, то $B \cdot C$ – $n \times m$, соответственно, B – размера $n \times k$, C – $k \times m$.

Алгоритм:



Решение 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot(-2)+(-1)\cdot5 & 3\cdot(-1)+1\cdot2+(-1)\cdot(-5) & 3\cdot2+1\cdot4+(-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot1+(-4)\cdot(-2)+1\cdot5 & 1\cdot(-1)+(-4)\cdot2+1\cdot(-5) & 1\cdot2+(-4)\cdot4+1\cdot(-1) \\ -1\cdot1+(-3)\cdot(-2)+1\cdot5 & -1\cdot(-1)+(-3)\cdot2+1\cdot(-5) & -1\cdot2+(-3)\cdot4+1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-2-5 & -3+2+5 & 6+4+1 \\ 1+8+5 & -1-8-5 & 2-16-1 \\ -1+6+5 & 1-6-5 & -2-12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 11 \\ 14 & -14 & -15 \\ 10 & -10 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$2\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = 2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot2 & 2\cdot2 & -4\cdot2 \\ -3\cdot2 & 3\cdot2 & -1\cdot2 \\ 4\cdot2 & 0\cdot2 & -2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -2 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -2 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 & 11 \\ 14 & -14 & -15 \\ 10 & -10 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 & 4+4 & -8+11 \\ -6+14 & 6-14 & -2-15 \\ 8+10 & 0-10 & -4-15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 8 & -8 & -17 \\ 18 & -10 & -19 \end{pmatrix}.$$

Решение 2

I. Ввод данных осуществлён: $m = 3, n = 3, k = 3.$

II. Обнуляем матрицу D (подробно расписывать не будем).

III. Запускаем выполнение первого цикла (умножение матриц B и C).

$i = 1,\ i \le m$? Да.

$j = 1,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$D[1,1] = D[1,1] + B[1,1] * C[1,1] = 0 + 3 * 1 = 3.$

$h = 2.\ i \le n$? Да.

$D[1,1] = D[1,1] + B[1,2] * C[2,1] = 3 + 1 * (-2) = 1.$

$h = 3,\ i \le n$? Да.

$D[1,1] = D[1,1] + B[1,3] * C[3,1] = 1 + (-1) * 5 = -4.$

$h = 4,\ i \le n$? Нет.

$j = 2,\ j \le k$? Да.

$h = 1,\ i \le n$? Да.

$D[1,2] = D[1,2] + B[1,1] * C[1,2] = 0 + 3 * (-1) = -3.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$$D[1,2] = D[1,2] + B[1,2] * C[2,2] = -3 + 1 * 2 = -1.$$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$$C[1,2] = C[1,2] + A[1,3] * B[3,2] = -1 + (-1) * (-5) = 4.$$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 3,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$$D[1,3] = D[1,3] + B[1,1] * C[1,3] = 0 + 3 * 2 = 6.$$

$h = 2, i \leq n$? Да.

$$D[1,3] = D[1,3] + B[1,2] * C[2,3] = 6 + 1 * 4 = 10.$$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$$D[1,3] = D[1,3] + B[1,3] * C[3,3] = 10 + (-1) * (-1) = 11.$$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 4,\ j \leq k$? Нет.

$i = 2,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$$D[2,1] = D[2,1] + B[2,1] * C[1,1] = 0 + 1 * 1 = 1.$$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$$D[2,1] = D[2,1] + B[2,2] * C[2,1] = 1 + (-4) * (-2) = 9.$$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$$D[2,1] = D[2,1] + B[2,3] * C[3,1] = 9 + 1 * 5 = 14.$$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 2,\ j \leq k$? Да.

$h = 1.\ i \leq n$? Да.

$$D[2,2] = D[2,2] + B[2,1] * C[1,2] = 0 + 1 * (-1) = -1.$$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$$D[2,2] = D[2,2] + B[2,2] * C[2,2] = -1 + (-4) * 2 = -9.$$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$$D[2,2] = D[2,2] + B[2,3] * C[3,2] = -9 + 1 * (-5) = -14.$$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 3,\ j \leq k$? Да.

$h = 1.\ i \leq n$? Да.

$D[2,3] = D[2,3] + B[2,1] * C[1,3] = 0 + 1 * 2 = 2.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$D[2,3] = D[2,3] + B[2,2] * C[2,3] = 2 + (-4) * 4 = -14.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$D[2,3] = D[2,3] + B[2,3] * C[3,3] = -14 + 1 * (-1) = -15.$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 4,\ j \leq k$? Нет.

$i = 3,\ i \leq m$? Да.

$j = 1,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$D[3,1] = D[3,1] + B[3,1] * C[1,1] = 0 + (-1) * 1 = -1.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$D[3,1] = D[3,1] + B[3,2] * C[2,1] = -1 + (-3) * (-2) = 5.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$D[3,1] = D[3,1] + B[3,3] * C[3,1] = 5 + 1 * 5 = 10.$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 2,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$D[3,2] = D[3,2] + B[3,1] * C[1,2] = 0 + (-1) * (-1) = 1.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$D[3,2] = D[3,2] + B[3,2] * C[2,2] = 1 + (-3) * 2 = -5.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$D[3,2] = D[3,2] + B[3,3] * C[3,2] = -5 + 1 * (-5) = -10.$

$h = 4,\ i \leq n$? Нет.

$j = 3,\ j \leq k$? Да.

$h = 1,\ i \leq n$? Да.

$D[3,3] = D[3,3] + B[3,1] * C[1,3] = 0 + (-1) * 2 = -2.$

$h = 2,\ i \leq n$? Да.

$D[3,3] = D[3,3] + B[3,2] * C[2,3] = -2 + (-3) * 4 = -14.$

$h = 3,\ i \leq n$? Да.

$D[3,3] = D[3,3] + B[3,3] * C[3,3] = -14 + 1 * (-1) = -15.$

$h = 4$, $i \leq n$? Нет.

$j = 4, \ j \leq k$? Нет.

$i = 4, \ i \leq m$? Нет.

IV. Запускаем выполнение второго цикла.

$i = 1, \ i \leq m$? Да.

$j = 1, \ j \leq n$? Да.

$$D[1,1] = 2 * A[1,1] + D[1,1] = 2 * 4 + (-4) = 4.$$

$j = 2, \ j \leq n$? Да.

$$D[1,2] = 2 * A[2,1] + D[1,2] = 2 * 2 + 4 = 8.$$

$j = 3, \ j \leq n$? Да.

$$D[1,3] = 2 * A[3,1] + D[1,3] = 2 * (-4) + 11 = 3.$$

$j = 4, \ j \leq n$? Нет.

$i = 2, \ i \leq m$? Да.

$j = 1, \ j \leq n$? Да.

$$D[2,1] = 2 * A[1,2] + D[2,1] = 2 * (-3) + 14 = 8.$$

$j = 2, \ j \leq n$? Да.

$$D[2,2] = 2 * A[2,2] + D[2,2] = 2 * 3 + (-14) = -8.$$

$j = 3, \ j \leq n$? Да.

$$D[2,3] = 2 * A[3,2] + D[2,3] = 2 * (-1) + (-15) = -17.$$

$j = 4, \ j \leq n$? Нет.

$i = 3, \ i \leq m$? Да.

$j = 1, \ j \leq n$? Да.

$$D[3,1] = 2 * A[1,3] + D[3,1] = 2 * 4 + 10 = 18.$$

$j = 2, \ j \leq n$? Да.

$$D[3,2] = 2 * A[2,3] + D[3,2] = 2 * 0 + (-10) = -10.$$

$j = 3, \ j \leq n$? Да.

$$D[3,3] = 2 * A[3,3] + D[3,3] = 2 * (-2) + (-15) = -19.$$

$j = 4, j \leq n$? Нет.

$i = 4, \ i \leq m$? Нет.

V. Вывод результата: $D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 8 & -8 & -17 \\ 18 & -10 & -19 \end{pmatrix}$.

Задание 9

1. $C = A^k + B^k$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $k = 3$.

Алгоритм:

алг вычисление выражения

дано матрицы A, B (n×n), целая положительная степень k

надо матрица $C = A^k + B^k$

нач **цел** i, j, k, n; **цел** **таб** A, B, C;

ввод n;

ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** A);

ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** B);

ввод k;

$\mathrm{D} := \mathrm{vozvstep}(\mathrm{n}, \mathrm{A}, \mathrm{k});$

$\mathrm{F} := \mathrm{vozvstep}(\mathrm{n}, \mathrm{B}, \mathrm{k});$

$\mathrm{C} := \mathrm{slozhmatr}(\mathrm{n}, \mathrm{n}, \mathrm{D}, \mathrm{F});$

вывод C;

кон

Решение:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 & 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 4 + (-8) \cdot 3 & 10 \cdot (-2) + (-8) \cdot 0 \\ 12 \cdot 4 + (-6) \cdot 3 & 12 \cdot (-2) + (-6) \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) \\ -3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) & -3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) \\ 9 \cdot 1 + 16 \cdot (-3) & 9 \cdot 0 + 16 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -64 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 16 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -20 \\ -9 & -88 \end{pmatrix}.$$

2. $C = (A + B)^k,\ k = 2,$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм:

алг вычисление выражения
дано матрицы A, B (nxn), целая положительная степень k
надо матрица $C = (A + B)^k$
нач **цел** i, j, k, n; **цел** **таб** A, B, C;
    ввод n;
    ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** A);
    ввод матрицы (**арг** n, n; **рез** B);
    ввод k;
    $\mathrm{D} := \mathrm{slozhmatr}(\mathrm{n}, \mathrm{n}, \mathrm{A}, \mathrm{B});$
    $\mathrm{C} := \mathrm{vozvstep}(\mathrm{n}, \mathrm{D}, \mathrm{k});$
    вывод C;
кон

Решение:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3+1 & 0+2 & 4+(-1) \\ 3+(-4) & -2+(-1) & 0+(-3) \\ -1+(-2) & -1+0 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(-2)+2\cdot(-1)+3\cdot(-3) & -2\cdot 2+2\cdot(-3)+3\cdot(-1) & -2\cdot 3+2\cdot(-3)+3\cdot 1 \\ -1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)+(-3)\cdot(-3) & -1\cdot 2+(-3)\cdot(-3)+(-3)\cdot(-1) & -1\cdot 3+(-3)\cdot(-3)+(-3)\cdot 1 \\ -3\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)+1\cdot(-3) & -3\cdot 2+(-1)\cdot(-3)+1\cdot(-1) & -3\cdot 3+(-1)\cdot(-3)+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -13 & -9 \\ 14 & 10 & 3 \\ 4 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. $B = a_0 \cdot A^k + a_1 \cdot A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \cdot A + a_k \cdot E$,

где E – матричный многочлен, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = 2A^3 + 5A^2 - 4A - 2E.$

Алгоритм:

алг вычисление матричного многочлена
дано матрица A (nxn), целая положительная степень k
надо матрица $B = a_0 \cdot A^k + a_1 \cdot A^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \cdot A + a_k \cdot E$
нач **цел** i, j, k, n; **цел** **таб** A, B, C, E; K;

```
ввод n;
ввод матрицы (арг n, n; рез A);
ввод k;
нц для i от 0 до k
    ввод K[i];
кц
нц для i от 1 до n
    нц для j от 1 до n
        B[i, j]: = 0;
        E[i, j]: = 0;
    кц
    E[i, i]: = 1;
кц
нц для i от 0 до k
    C: = vozvstep(n, k − i, A);
    C: = umnchis(n, n, K[i], C);
    B: = slozhmatr(n, n, B, C);
кц
C: = umnchis(n, n, K[k], E);
B: = slozhmatr(n, n, B, C);
вывод B;
```

кон

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = 2A^3 + 5A^2 - 4A - 2E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+3\cdot3+(-1)\cdot(-1) & -1\cdot3+3\cdot(-1)+(-1)\cdot2 & -1\cdot(-1)+3\cdot(-4)+(-1)\cdot0 \\ 3\cdot(-1)+(-1)\cdot3+(-4)\cdot(-1) & 3\cdot3+(-1)\cdot(-1)+(-4)\cdot2 & 3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)+(-4)\cdot0 \\ -1\cdot(-1)+2\cdot3+0\cdot(-1) & -1\cdot3+2\cdot(-1)+0\cdot2 & -1\cdot(-1)+2\cdot(-4)+0\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -8 & -11 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 11 & -8 & -11 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11\cdot(-1)+(-8)\cdot3+(-11)\cdot(-1) & 11\cdot3+(-8)\cdot(-1)+(-11)\cdot2 & 11\cdot(-1)+(-8)\cdot(-4)+(-11)\cdot0 \\ -2\cdot(-1)+2\cdot3+1\cdot(-1) & -2\cdot3+2\cdot(-1)+1\cdot2 & -2\cdot(-1)+2\cdot(-4)+1\cdot0 \\ 7\cdot(-1)+(-5)\cdot3+(-7)\cdot(-1) & 7\cdot3+(-5)\cdot(-1)+(-7)\cdot2 & 7\cdot(-1)+(-5)\cdot(-4)+(-7)\cdot0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -24 & 19 & 21 \\ 7 & -6 & -6 \\ -15 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$2A^3 = \begin{pmatrix} -24 & 19 & 21 \\ 7 & -6 & -6 \\ -15 & 12 & 13 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} -24\cdot2 & 19\cdot2 & 21\cdot2 \\ 7\cdot2 & -6\cdot2 & -6\cdot2 \\ -15\cdot2 & 12\cdot2 & 13\cdot2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -48 & 38 & 42 \\ 14 & -12 & -12 \\ -30 & 24 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$5A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -8 & -11 \\ -2 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot 5 = \begin{pmatrix} 11\cdot5 & -8\cdot5 & -11\cdot5 \\ -2\cdot5 & 2\cdot5 & 1\cdot5 \\ 7\cdot5 & -5\cdot5 & -7\cdot5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 55 & -40 & -55 \\ -10 & 10 & 5 \\ 35 & -25 & -35 \end{pmatrix}.$$

$$-4A=-4\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot(-4) & 3\cdot(-4) & -1\cdot(-4)\\ 3\cdot(-4) & -1\cdot(-4) & -4\cdot(-4)\\ -1\cdot(-4) & 2\cdot(-4) & 0\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -12 & 4\\ -12 & 4 & 16\\ 4 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

$$-2E=(-2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}-48 & 38 & 42\\ 14 & -12 & -12\\ -30 & 24 & 26\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}55 & -40 & -55\\ -10 & 10 & 5\\ 35 & -25 & -35\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -12 & 4\\ -12 & 4 & 16\\ 4 & -8 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-48+55+4-2 & 38-40-12+0 & 42-55+4+0\\ 14-10-12+0 & -12+10+4-2 & -12+5+16+0\\ -30+35+4+0 & 24-25-8+0 & 26-35+0-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & -14 & -9\\ -8 & 0 & 9\\ 9 & -9 & -11\end{pmatrix}.$$

Задание 10

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Выражение $D=(A\cdot B)^T$

$$\begin{pmatrix}1 & 5\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & -5 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 4+5\cdot 0 & 1\cdot(-1)+5\cdot(-5) & 1\cdot(-1)+5\cdot 2\\ 1\cdot 4+(-3)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+(-3)\cdot(-5) & 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -26 & 9\\ 4 & 14 & -7\end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & -26 & 9\\ 4 & 14 & -7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -26 & 14\\ 9 & -7\end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Выражение $K = (A + B) \cdot (A - B)$

$$A + B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 3+0 \\ 1-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 & 3-0 \\ 1-(-1) & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-6) + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$, k=3

Выражение $K = (B - A)^k$.

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 \\ 4-0 & -5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 4 & -1 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) \\ 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 & 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 \cdot (-1) + 12 \cdot 4 & -15 \cdot (-4) + 12 \cdot (-2) \\ -12 \cdot (-1) + (-12) \cdot 4 & -12 \cdot (-4) + (-12) \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 63 & 36 \\ -36 & 72 \end{pmatrix}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: учебное пособие / Е. Баранова, Н. Васильева, В. Федотов. – СПб.: Питер, 2013. – 400 с.
2. Малугин, В.А. Линейная алгебра: учебное пособие / В.А. Малугин. – М.: Рид Групп, 2011. – 464 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1: учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: ООО «Издательство «Мир и образование», 2016. – 368 с.

Учебное издание

Юлия Валерьевна Корчемкина

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

ISBN 978-5-906908-96-4

Работа рекомендована РИС университета
Протокол № 15, пункт 12 от 2017 г.

Издательство ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69

Редактор Е.М. Сапегина
Технический редактор Т.Н. Никитенко
Эксперт Т.А. Шульгина

Подписано в печать 24.10.2017. Бумага типографская
Формат 60×84/16. Объём 1,53 уч. изд. л. (3,3 п.л.)
Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии ЮУрГГПУ
454080, Челябинск, пр. Ленина, 69